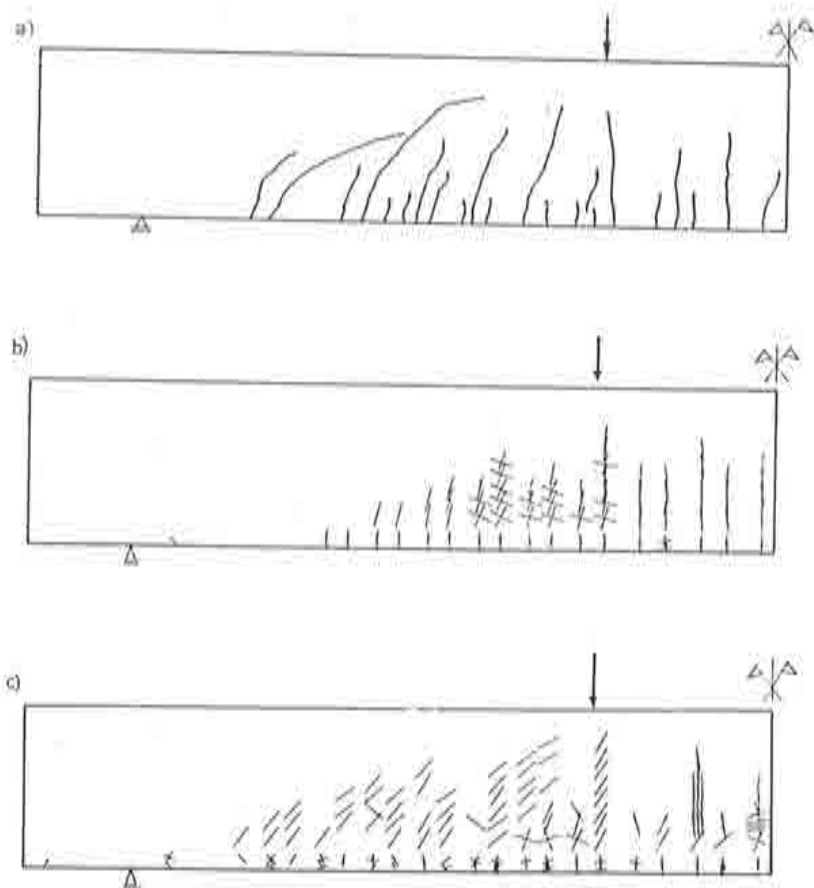


Modelado de la Fisuración en Estructuras de Hormigón

J. Oliver



Modelado de la Fisuración en Estructuras de Hormigón

J. Oliver

Monografía N° 15, Enero 1993

Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería
Gran Capitán s/n, 08034 Barcelona, España

Diseño de la cubierta: Jordi Pallí

Primera Edición, Enero 1993

@Los autores

Edita:

Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería

Edificio C1, Campus Norte UPC

Gran Capitán, s/n

08034 Barcelona, España

ISBN: 84-87867-18 - 9

INDICE

	<u>pag.</u>
I INTRODUCCION A LOS MODELOS DE FISURACION	3
1. Generalidades.	3
2. Modelos de fisuracion.	3
3. Características fundamentales de los modelos de fisuración.	5
3.1. Modelado de los efectos de la discontinuidad. Localización de deformaciones.	6
3.2. El ablandamiento por deformación en los modelos de fisura distribuida.	8
3.3. Características del ablandamiento por deformación. La energía de fractura.	11
3.4. Objetividad en los modelos de fisura distribuida.	12
3.5. La longitud característica.	14
4. Modelos bidimensionales de fisura distribuida.	14
4.1. Inicio de la fisuración.	15
4.2. Orientación y generación de la fisuración.	15
4.3. Comportamiento del material fisurado.	16
4.4. Inclusión de las armaduras.	22
4.5. Ejemplos de aplicación.	24
5. Modelos simplificados de capas.	27
5.1. Ejemplo de aplicación.	28

II	APORTACIONES TEORICAS DE LA INVESTIGACION	31
	1. Introducción.	31
	2. Un modelo de daño continuo para la simulación del comportamiento del hormigón	32
	2.1. Generalidades.	32
	2.2. Modelo elastoplástico sin degradación de rigides.	34
	2.3. Inclusión de la degradación de la rigides.	38
	2.4. Objetivización de la respuesta. Energía de fractura.	40
	2.5. Identificación de la fisuración.	40
	2.6. Ejemplos de aplicación.	41
	3. Una formulación consistente de la longitud característica para modelos de fisura distribuida.	50
	3.1. Generalidades.	50
	3.2. Idealización del comportamiento de una banda de localización.	51
	3.3. Disipación de energía en el interior de la banda.	53
	3.4. Aplicación al sólido discretizado.	54
	3.5. Ejemplos de aplicación.	56
	4. Un modelo "distribuido" para la simulación del comportamiento de juntas de construcción.	60
	4.1. Introducción.	60
	4.2. Modelo distribuido. Comportamiento en la dirección normal a la junta.	62
	4.3. Modelo distribuido. Comportamiento en la dirección tangencial a la junta.	62
III	APLICACIONES A LA RESOLUCION DE PROBLEMAS ESTRUCTURALES	69
	1. Introducción.	69
	2. Análisis de depósito de hormigón criogénico para almacenamiento de gas natural licuado.	69
	1. Generalidades.	69
	2. Características del análisis.	70
	3. Comprobación del diseño de un depósito para almacenamiento de G.N.L.	71
	3. Análisis de los problemas de patología estructural en presas, producidos por el entumecimiento del hormigón.	74
	1. Introducción.	74

INDICE

iii

2.	Elementos del modelo.	77
3.	Análisis de una presa de gravedad.	79
4.	Análisis bidimensional.	79
5.	Análisis tridimensional.	87
IV	CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS DE LA INVESTIGACION	93
	REFERENCIAS	97

CAPITULO I

INTRODUCCION A LOS MODELOS DE FISURACION

1. GENERALIDADES

La fisuración o fractura, entendida como la pérdida de continuidad entre las partículas de un sólido, es un fenómeno que se presenta en todos los materiales. El nivel de deformación al que se produce esta discontinuidad es el que permite diferenciar esencialmente un material dúctil de uno frágil. En un material dúctil, como el acero o cualquier material metálico, la fractura se produce para valores importantes de la deformación mientras que en un material frágil, como el hormigón, dicho fenómeno se produce a niveles sensiblemente más pequeños de la misma.

En un material dúctil y homogéneo, como es el acero, la fractura está asociada a alteraciones importantes de la red cristalina y debe ser contemplada desde un punto de vista profundamente microscópico. En un material tan heterogéneo como es el hormigón, compuesto esencialmente de una matriz de mortero de cemento y de áridos de distintos tamaños, la fisuración está asociada a la pérdida de contacto entre ambas componentes y por tanto tiene un carácter más macroscópico. Se comprende pues que, aún siendo el resultado final la aparición de discontinuidades, los mecanismos físicos implicados en la fractura de ambos tipos de materiales son muy distintos, y que su estudio debe hacerse desde ópticas diferenciadas.

En este Capítulo, se presentan los elementos fundamentales que intervienen en el desarrollo de modelos de fisuración del hormigón y las características esenciales de los modelos existentes, tanto para el hormigón en masa como para el hormigón armado, al inicio de la investigación que da lugar a este trabajo.

2. MODELOS DE FISURACION

La herramienta básica para el análisis estructural es la Mecánica de Medios Continuos. Como su nombre indica las ecuaciones que nos proporciona dicha Teoría son válidas para el "Medio Continuo" o, en el caso de sólidos, para el "Sólido Continuo". Sin embargo una fisura representa una discontinuidad en el sólido y, por consiguiente, desde el momento en que se produce dejan de ser estrictamente válidas las ecuaciones y procedimientos usuales en la mencionada disciplina.

Esta situación ha dado lugar a dos líneas de enfoque distinto de los modelos que pretenden modelar la fisuración:

- **Modelos de fisura discreta¹**: se basan en la idea de trabajar en todo momento con la parte del sólido que es continua. En el momento en que se detecta la aparición o la progresión de una fisura, sus labios se incorporan al contorno del sólido analizado (ver Figura I.1). En el contexto de un análisis por el Método de los Elementos Finitos, esto obliga a un continuo remallado siguiendo la progresión de los labios de la fisura. Estos métodos han sido utilizados con éxito en el ámbito estricto de la Mecánica de Fractura en el que generalmente se estudia la progresión de una o pocas fisuras. En un ámbito más general, el alto costo computacional que implica la regeneración continuada de la malla y las dificultades inherentes al mismo permiten calificar como mínimo de dudosa la aplicabilidad de dicho método.

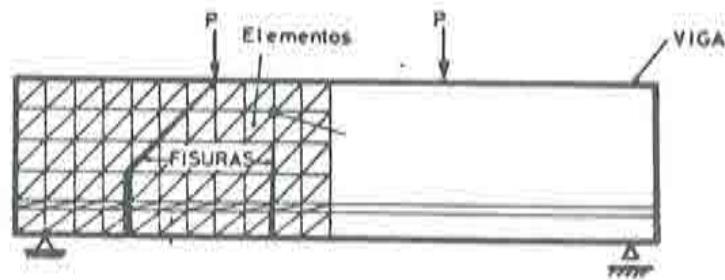


Figura I.1 Modelado discreto de las fisuras.

- **Modelos de fisura distribuida^{3,4,5}**: estos métodos incluyen a la fisura en el medio continuo y consideran campos de desplazamientos continuos para modelarla. La malla de elementos finitos permanece inalterada durante el análisis con lo que, desde este punto de vista, el coste computacional es menor. Sin embargo, subsiste la contradicción que plantea el modelar una discontinuidad, como es la fisura, con un campo de desplazamientos continuo. Aunque casi nunca han sido formuladas explícitamente, detrás de este modelo de fisuración se encuentran las siguientes hipótesis:
 - La fisura se halla modelada por una franja o banda de elementos a través de los cuales discurre de una forma más o menos difusa o "distribuida" sin que pueda apreciarse su estricta localización dentro de la banda (ver Figura I.2).
 - Se establecen unos mecanismos artificiales de comportamiento del material dentro de la banda cuyos efectos fuera de la misma son los mismos que produce la fisura en el sólido real (o al menos tienden a ellos cuando se va refinando la malla de acuerdo con las características de aproximación propias del método de los elementos finitos).
 - En el mismo sentido, el análisis no va dirigido a simular el comportamiento exacto

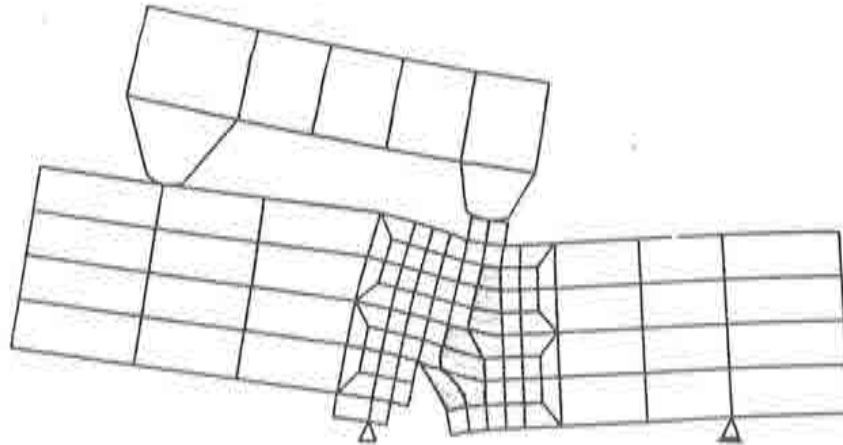


Figura I.2 Modelado distribuido de las fisuras.

de la fisura o de la banda de fisuración. Una fisura es una singularidad de tamaño infinitesimal, y que por lo tanto no puede ser modelada exactamente, que afecta al estado tenso-deformacional de los puntos de la parte del sólido que permanece continua. El objetivo de los mecanismos anteriormente mencionados es que la simulación de los efectos de la fisura sobre su exterior sea lo suficientemente aproximada, o tan aproximada como se desee con el adecuado refinamiento de la malla. En este sentido, es suficiente el modelar la fisura mediante una banda de elementos que puede ser hecha tan pequeña como se quiera.

En lo que sigue, nos concentraremos en los modelos de fisura distribuida por entender que, aunque conceptualmente puedan ser algo más complejos que los de fisura discreta y que, como éstos, no estén exentos de problemas computacionales importantes, se vislumbran como más versátiles y aplicables en el futuro a problemas de análisis estructural.

3. CARACTERISTICAS FUNDAMENTALES DE LOS MODELOS DE FISURA DISTRIBUIDA

Considerando el conjunto de ecuaciones que gobiernan un problema de Mecánica de Sólidos (ecuaciones de equilibrio, ecuaciones geométricas y ecuaciones constitutivas), la posibilidad de actuación más evidente, y también la más frecuente, para obtener un determinado modelo de comportamiento es la acción sobre las ecuaciones que relacionan las tensiones con las deformaciones; es decir, las ecuaciones constitutivas.

A la vista de lo comentado en el apartado anterior un modelo de fisura distribuida deberá considerar para cada punto del sólido una ecuación constitutiva con las siguientes características:

- Un modelado correcto del comportamiento tenso-deformacional mientras el sólido permanece continuo. Cuanto más preciso sea el comportamiento simulado

antes de la fisuración, mejor podrá simularse el instante en que ésta empieza a producirse y los puntos donde aparece y progresa. El grado en que el modelado del comportamiento de los puntos no-fisurados afecta al resultado final del análisis puede depender mucho de la tipología de la estructura y de su forma de trabajo, pero es evidente que existe una relación entre ambos.

- Reproducir los efectos de la discontinuidad en el resto del sólido. En este sentido deben establecerse unos criterios para decidir cuando un punto (o un elemento) empieza a fisurar (o se incorpora a una banda de fisuración) y la modificación de la ecuación constitutiva para simular dicha discontinuidad. Como ya se ha comentado, esta modificación es artificial, y como tal puede incluso contradecir ciertos principios físicos propios de la Mecánica de Medios Continuos puesto que no corresponde a un punto continuo del sólido. En el apartado 3.2 de este Capítulo se volverá sobre este tema.

3.1. Modelado de los efectos de la discontinuidad. Localización de deformaciones.

La observación experimental pone de manifiesto que la aparición de una fisura en un medio continuo produce dos fenómenos:

- La relajación a cero de las tensiones que actúan sobre los labios de la fisura.
- La discontinuidad del campo de desplazamientos en puntos homólogos de uno y otro labio de la fisura.

Admitiendo que una fisura viene representada por una banda de elementos finitos, el contorno exterior de dicha banda hace la función de los labios de la fisura como límites de la zona del sólido que permanece continua. Los mecanismos que, a nivel de ecuación constitutiva, se introduzcan en la banda de fisuración deben por consiguiente cumplir dos condiciones:

- Conducir a un estado de tensión nula en el interior de la banda de fisuración.
- Producir una "localización" de deformaciones en el interior de la banda de fisuración.

Por localización entendemos la concentración de deformaciones en el interior de la banda, alcanzando valores muy altos (teóricamente infinitos) en comparación con los de su exterior. Estas deformaciones pueden ser modeladas por los elementos de la banda de fisuración mediante la producción de gradientes muy altos de los desplazamientos en la dirección normal a la fisura. La diferencia de desplazamientos a un lado y otro de la banda representa la discontinuidad en los desplazamientos de los labios de la fisura.

En la Figura I.3 se presenta un sencillo ejemplo que muestra que se pueden visualizar los

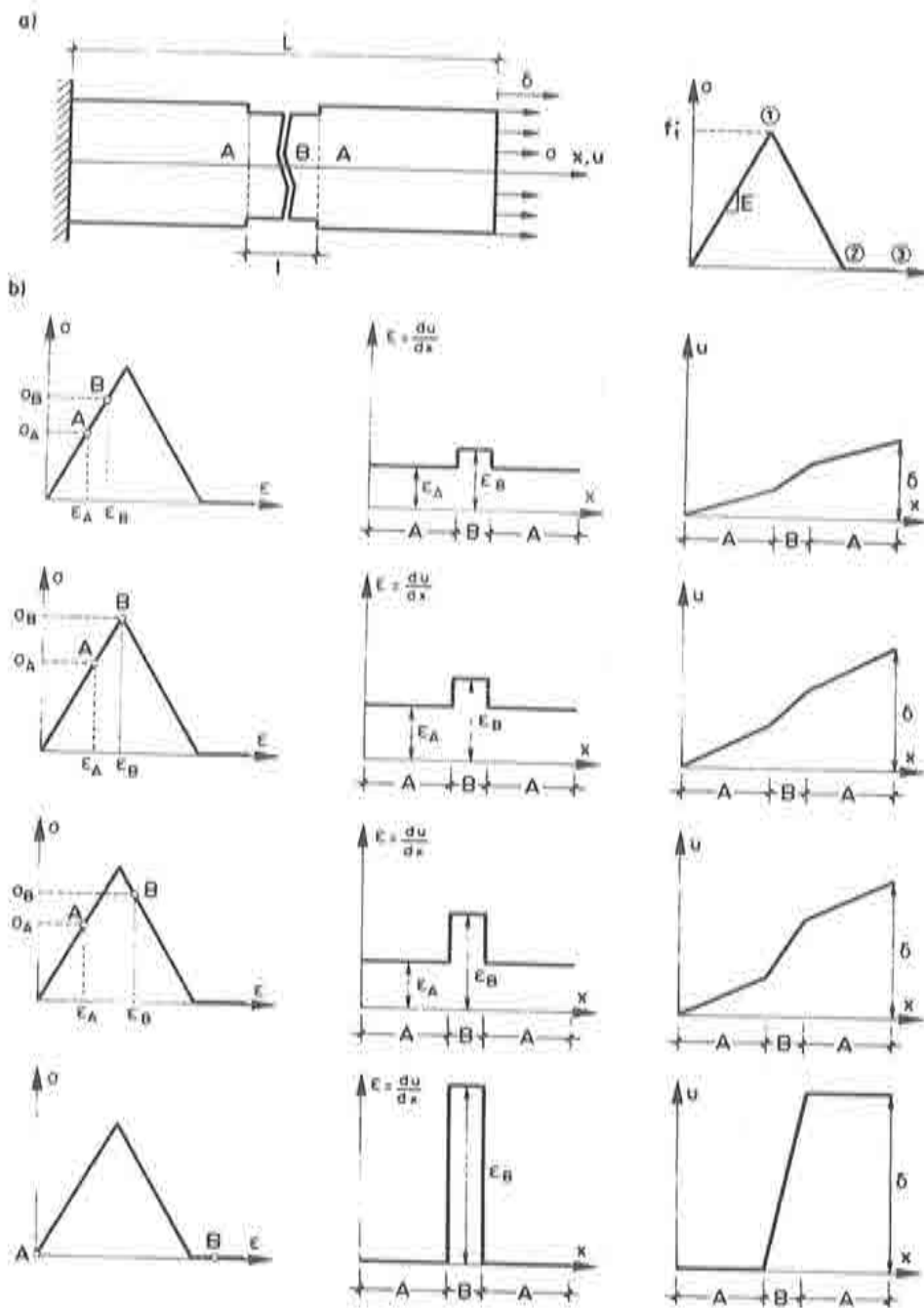


Figura I.3 Modelización de la localización de deformaciones.

anteriores conceptos. Se trata de una barra homogénea (Figura I.3a), con una pequeña entalla en el centro, por donde se va a producir la fisuración. La barra está constituida

por un material con un diagrama tensión-deformación, como el indicado, en el que el comportamiento es elástico lineal hasta que se alcanza la tensión de fisuración f_t en el punto 1 del diagrama de la Figura I.3a. A partir de este instante se establece una ecuación constitutiva artificial en la que el diagrama tensión-deformación desciende (ablandamiento por deformación) hasta el punto 2 del diagrama y prosigue a tensión nula desde este punto. Si consideramos en la barra las tensiones en los puntos A (en la zona no entallada) y B (en el interior de la zona entallada), los valores correspondientes guardarán, por consideraciones de equilibrio, una relación inversamente proporcional a la sección transversal correspondiente, es decir:

$$\sigma_B = \alpha \sigma_A \quad \alpha > 1 \quad (I.1)$$

En la Figura I.3b se presenta la evolución de las tensiones y deformaciones en ambas zonas, durante el proceso de estiramiento de la barra, en el que se observa la concentración de deformaciones en la banda de fisuración y la evolución del campo de desplazamientos para la simulación de la discontinuidad.

Obsérvese que la rama descendente del diagrama tensión-deformación es recorrida únicamente por los puntos de la banda fisurada (zona B) mientras que los puntos de la zona A sólo recorren una parte de la rama creciente de dicho diagrama. En otras palabras, la parte no fisurada de la barra (zona A) ha sufrido un incremento tensional hasta que se produce la fisuración y una descarga elástica, tras ésta, con una relajación total de tensiones y deformaciones.

Así pues, en este ejemplo "académico" puede verse que la introducción de una rama descendente en el diagrama tensión-deformación (ablandamiento por deformación) que sólo es recorrida por los puntos de la banda fisurada, es el mecanismo que ha permitido simular el comportamiento y el estado tensional de la parte no fisurada de la barra. La inclusión de la rama de ablandamiento por deformación en la ecuación constitutiva juega un papel fundamental en los modelos de fisura distribuida, no sólo en el sencillo caso unidimensional presentado sino en los modelos más complejos y realísticos.

3.2. El ablandamiento por deformación en los modelos de fisura distribuida.

Se ha enfatizado el hecho de que el ablandamiento por deformación es un mecanismo artificial para producir la localización, que no afecta a la parte del medio que permanece continua, porque durante cierto tiempo los modelos de fisura distribuida han sido descalificados por algunos investigadores argumentando la imposibilidad de existencia del ablandamiento por deformación en un medio continuo.

En efecto, puede demostrarse^{6,7} que la consideración de un diagrama tensión-deformación con ablandamiento conduce a que el problema de transmisión de ondas elásticas no tenga solución con sentido físico. Utilizando de nuevo el ejemplo unidimensional de una barra cuyos extremos se traccionan produciendo un alargamiento de los mismos a velocidad constante c y considerando un diagrama tensión-deformación con ablandamiento (ver Figura I.4), las ecuaciones de la Mecánica de Medios Continuos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma(x,t)}{\partial x} &= \rho \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} && \text{(ecuación de equilibrio dinámico)} \\ \epsilon(x,t) &= \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} && \text{(ecuación geométrica)} \\ \sigma(x,t) &= f(\epsilon) && \text{(ecuación constitutiva)} \end{aligned} \quad (I.2)$$

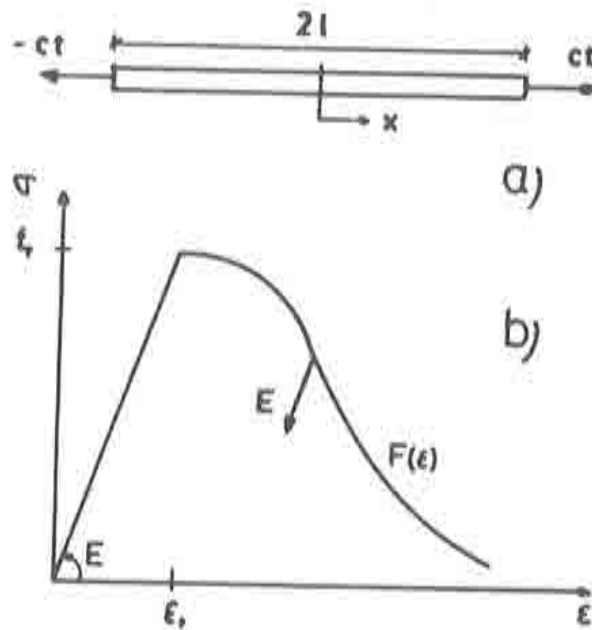


Figura I.4 Problema de la propagación de ondas elásticas en una barra considerando el ablandamiento por deformación.

con las correspondientes condiciones de contorno, conducen a una solución como la indicada en la Figura I.5b en la que se produce una singularidad en un dominio infinitesimal situado en el centro de la barra. Esta solución presenta contradicciones tales como que la deformación en la singularidad es infinita y que la respuesta es independiente de la ley de ablandamiento considerada, incompatibles con los principios habituales en la Mecánica de Medios Continuos.

Es evidente entonces que el ablandamiento por deformación no puede considerarse cuando se pretende modelar el comportamiento de un sólido continuo. Sin embargo, en el caso de los modelos de fisura distribuida, se pretende simular los efectos de la discontinuidad en la fisura por lo que las ecuaciones (I.2) no son estrictamente aplicables a la zona de discontinuidad. En este contexto, las contradicciones a las que conduce el uso de dichas ecuaciones, al considerar una rama de ablandamiento por deformación, pueden ser admitidas.

Por otra parte, la inclusión de la rama de ablandamiento puede ser contemplada no sólo como un mecanismo para producir la localización de deformaciones sino también desde

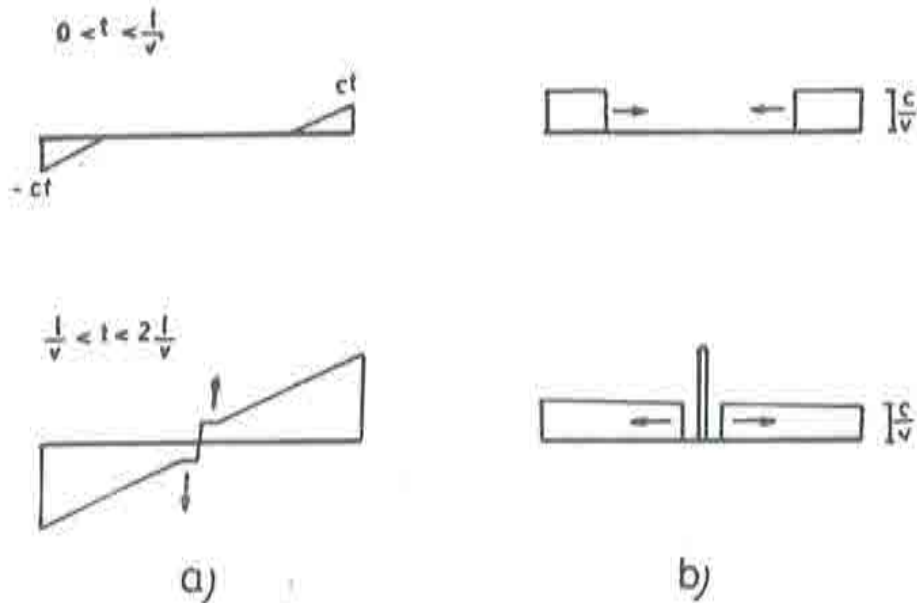


Figura 1.5 Solución teórica del problema de propagación de ondas en una barra con ablandamiento por deformación:
 a) Desplazamientos
 b) Deformaciones
 $(v^2 = E/\rho)$.

la óptica que proporciona una propuesta de Hillerborg⁸ en el que se denomina “modelo de fisura ficticia”. En dicho modelo, se considera que la fisura empieza a formarse cuando la tensión alcanza la resistencia máxima a tracción f_t . A partir de este instante empieza a producirse la discontinuidad, y la consideración de los mecanismos cohesivos entre los labios de la fisura establece una relajación progresiva de las tensiones con la apertura de la fisura ω durante un cierto período. El resultado de estas consideraciones es una ecuación constitutiva tensión - apertura de fisura con rigidez negativa tal como se presenta en la Figura 1.6b.

Consideremos ahora un modelo de fisura distribuida en el que se modelizan los efectos de la fisura sobre su exterior mediante una banda de longitud finita l en la que suponemos desplazamientos y deformaciones continuas. Si pretendemos que los desplazamientos en el contorno de dicha banda coincidan con los reales debemos considerar sobre ella una deformación suma de dos componentes:

- Una deformación “elástica” ϵ^e , del material no fisurado que se comporta elásticamente.
- Una deformación “de apertura de fisura” ϵ^f , que corresponde a la repercusión que la apertura de la fisura ω tiene sobre los desplazamientos relativos del contorno de la banda.

$$\epsilon^f = \frac{\omega}{l} \quad (1.3)$$

Es decir, la deformación equivalente de la banda de fisuración viene dada por

$$\begin{aligned} \epsilon &= \epsilon^e + \epsilon^f \\ \epsilon^f &= \frac{\omega}{l} \end{aligned} \tag{I.4}$$

En la Figura I.6c se puede observar cómo la ecuación (I.4) permite componer (suma en abscisas) los diagramas tensión – deformación elástica y tensión – deformación de fisuración para obtener el diagrama tensión – deformación equivalente para la banda fisurada. En el diagrama suma aparece la correspondiente rama descendente o de ablandamiento por deformación.

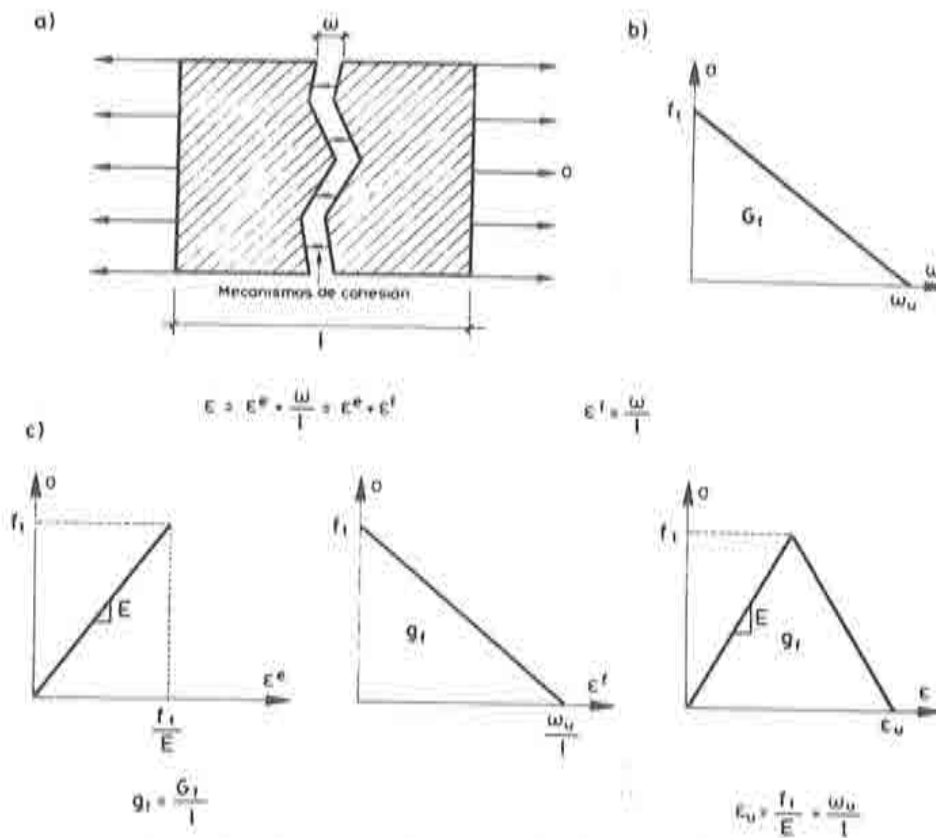


Figura I.6 Interpretación del ablandamiento por deformación.

3.3. Caracterización del ablandamiento por deformación. La energía de fractura.

Hasta el momento, se ha justificado la necesidad de la inclusión del ablandamiento por deformación en las ecuaciones constitutivas de la banda de fisuración. Considerando el diagrama bilineal de la Figura I.6c, la rama ascendente queda caracterizada por el módulo

de elasticidad del material y por la resistencia a tracción del mismo, es decir, por dos propiedades del material.

La caracterización de la rama descendente se establece en función de otra propiedad del material relacionada con la disipación energética del proceso de fisuración: la energía de fractura.

Es evidente que la fractura es un proceso irreversible y por tanto disipativo de energía. Por otra parte el hecho de que la fisuración produzca superficies de discontinuidad hace pensar que esta disipación tendrá carácter superficial (en el sentido de hablar de energía disipada por unidad de superficie de fisura) al contrario de otros procesos disipativos en mecánica de sólidos (como la disipación plástica) que tienen un marcado carácter volumétrico. Es más, en la medida en que los resultados experimentales⁹ han podido cuantificar la energía disipada en los procesos de fractura del hormigón se ha constatado que la energía necesaria para crear una unidad de superficie de fisura, que en lo sucesivo denominaremos energía de fractura G_f , es una propiedad del material lo mismo que lo son el módulo de Young o el coeficiente de Poisson, por citar dos ejemplos bien conocidos en la Mecánica de Sólidos.

Si consideramos de nuevo la banda de fisuración de la Figura I.6a, el trabajo desarrollado por unidad de sección transversal, durante el proceso de fisuración, por las fuerzas cohesivas que actúan sobre los labios de la fisura será:

$$G_f = \int_0^{\omega^*} \sigma \, d\omega \quad (I.5)$$

lo cual pone de manifiesto que el área encerrada por el diagrama tensión - apertura de fisura ($\sigma - \omega$) de la Figura I.6b debe ser G_f ; en consecuencia, y teniendo en cuenta las ecuaciones (I.4) y (I.5) el área encerrada bajo las curvas $\sigma - \epsilon_f$ y $\sigma - \epsilon$ de la Figura I.6c, que denominaremos energía específica de fractura g_f , debe ser

$$g_f = \int_0^{\epsilon^*} \sigma \, d\epsilon = \frac{G_f}{t} \quad (I.6)$$

La ecuación (I.6) permite caracterizar totalmente la rama descendente del diagrama tensión-deformación en el caso en que ésta sea lineal. En otros casos, en los cuales dicha rama se toma como bilineal o parabólica, la ecuación (I.6) establece un condicionante sobre los parámetros que determinan la ley de ablandamiento por deformación.

3.4. Objetividad de los modelos de fisura distribuida.

Consideremos de nuevo el ejemplo de la barra a tracción de la Figura I.7, modelizada por elementos finitos. Se introduce una pequeña imperfección en el elemento que modeliza la fisura (por ejemplo una pequeña disminución en la sección transversal) para inducir la localización de deformaciones en el mismo. Sea el diagrama tensión-deformación el de la Figura I.7b donde, en primera instancia, la deformación última ϵ_u permanece fija y se considera una propiedad del material. Analizando el proceso de deformación tal como se hizo en el apartado 3.1 la curva tensión desplazamiento ($\sigma - \delta$) obtenida sería la de la Figura I.7b.

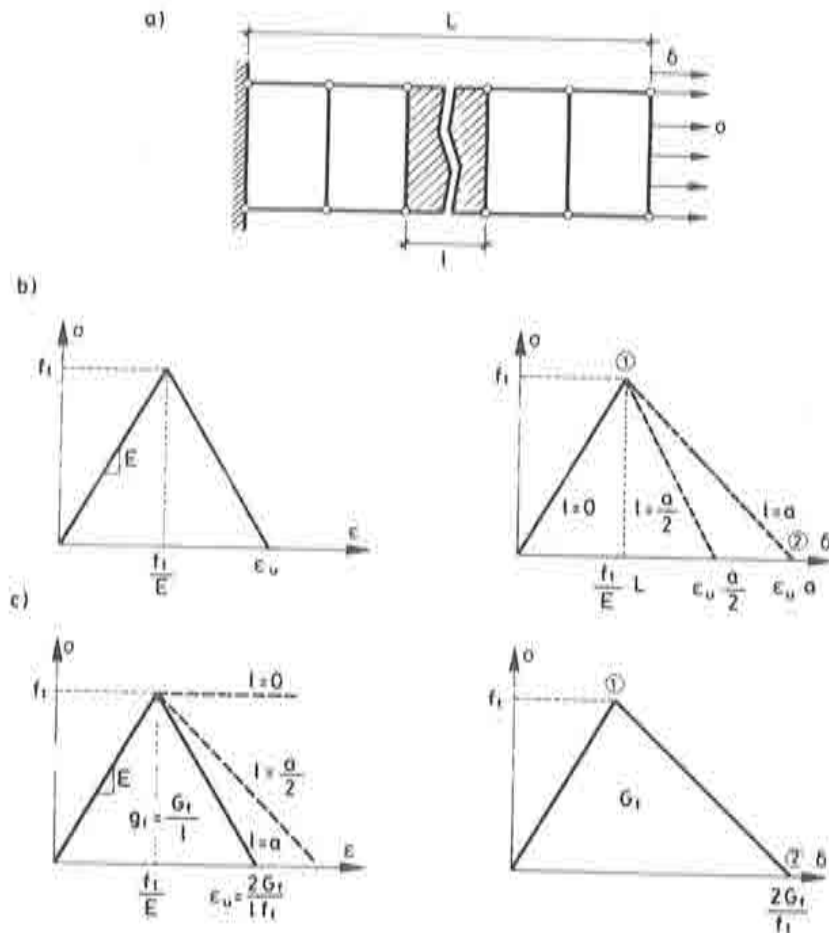


Figura I.7. Objetividad de los modelos de fisura distribuida.

Obsérvese que la posición del punto 2 de dicha curva, y por consiguiente la pendiente de la rama descendente, dependen de la longitud del elemento que corresponde a la banda de fisuración. Si se refina la malla en la zona de la fisura, disminuyendo el ancho del correspondiente elemento a valores progresivamente más pequeños, los resultados varían sensiblemente y no se obtiene la convergencia uniforme hacia el valor correcto que se espera de cualquier método numérico y, en particular, del método de los Elementos Finitos.

Esta circunstancia se conoce en la literatura como falta de objetividad de los resultados con respecto al tamaño de la malla, y es típica de cualquier análisis en el que se considere una rama de ablandamiento por deformación independiente del tamaño de la malla.

Introduzcamos ahora la energía de fractura como propiedad del material de tal forma que se cumpla la condición de la ecuación (I.6). En este caso la respuesta $\sigma - \delta$ de la estructura, esquematizada en la Figura I.7c, no depende del tamaño de la malla. Se observa pues que la introducción de la energía de fractura para caracterizar el ablandamiento por deformación permite objetivizar los resultados del modelo

con respecto al tamaño de la malla. En este caso, sin embargo, es la rama de ablandamiento de la ecuación constitutiva ($\sigma - \epsilon$) la que depende del tamaño del elemento (ver Figura 1.7c). Esta circunstancia ha sido también frecuentemente motivo de descalificación de los modelos de fisura distribuida, por parte de algunos investigadores que, desde la óptica de la Mecánica de Medios Continuos y la Teoría de ecuaciones Constitutivas, no podían aceptar que una ecuación constitutiva dependa de parámetros propios del modelo numérico en el que se implementa.

De nuevo las consideraciones establecidas anteriormente, sobre el carácter de "artilugio" del ablandamiento por deformación permiten admitir esta "aparente" contradicción.

Finalmente, en la Figura 1.7c puede observarse como el refinamiento de la malla tiende a disminuir el ablandamiento de la curva $\sigma - \epsilon$, con una progresiva tendencia a la horizontalidad de la rama descendente de dicha curva.

3.5. La longitud característica.

La necesidad de asegurar la correcta disipación energética, y de objetivizar los resultados obtenidos con un modelo de fisuración distribuida, nos introduce en la importancia de la correcta estimación de la longitud l que constituye lo que en la literatura se denomina longitud característica^{2,10,11,12} o ancho de la banda fisurada. En el sencillo ejemplo unidimensional que se ha estudiado hasta el momento, la interpretación y cálculo de la longitud característica como el ancho de la banda de fisuración en la dirección normal de la fisura no presenta ninguna dificultad. Para la malla regular de la Figura 1.7a su evaluación como la longitud del elemento en el que se produce la fisuración es también evidente.

Sin embargo, el objetivo de los modelos de fisuración es simular situaciones más complejas en problemas bidimensionales o tridimensionales en donde se pretende modelizar no sólo la apertura de los labios de la fisura sino su deslizamiento relativo. Asimismo el modelo debe ser lo suficientemente general como para permitir la utilización de mallas no regulares. En estos casos, la interpretación del significado geométrico de la longitud característica, a partir de razonamientos energéticos como los presentados en el apartado 3.3, y su evaluación no es ni mucho menos tan evidente. En el Capítulo II se volverá sobre este tema que ha sido uno de los caballos de batalla en la utilización de los modelos de fisura distribuida.

4. MODELOS BIDIMENSIONALES DE FISURA DISTRIBUIDA

Uno de los primeros modelos de fisura distribuida fue el desarrollado por Rots y Nauta³ y posteriormente perfeccionado por De Borst⁴. Se trata de un modelo para análisis bidimensional (tensión o deformación plana) que puede extenderse con facilidad, al menos a nivel de la formulación teórica, a problemas tridimensionales. Las hipótesis sobre las que se asienta, muchas de ellas con claro significado físico, se refieren esencialmente a los siguientes conceptos:

- Inicio de la fisuración

- Orientación y generación de fisuras
- Comportamiento del material fisurado

4.1. Inicio de la fisuración

Se establece un criterio de inicio de la fisuración en función del valor de las tensiones principales. La fisuración se inicia en un punto, en el instante del proceso de deformación en que una (o ambas) tensiones principales separan un valor umbral, que podría entenderse como la resistencia a tracción uniaxial del hormigón f_t . En el espacio de tensiones principales (ver Figura 1.8) esta consideración establece un dominio elástico y una frontera donde el material empieza a comportarse como fisurado.

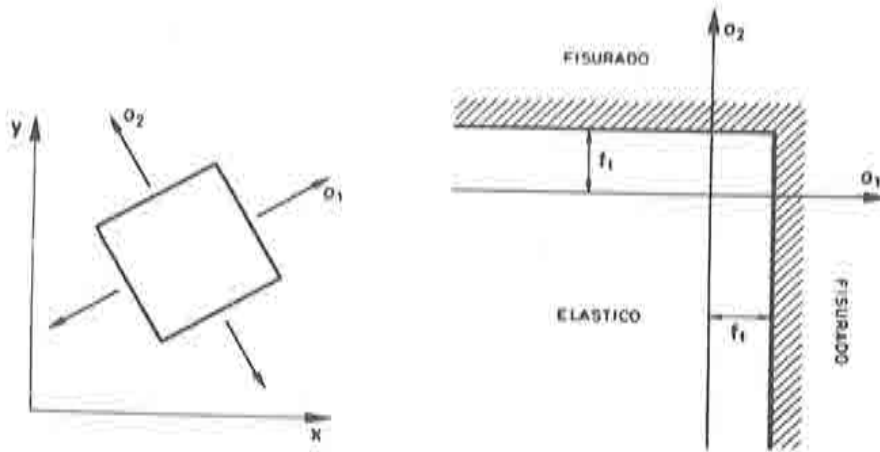


Figura 1.8 Criterio de inicio de la fisuración.

4.2 Orientación y generación de la fisuración.

En la Figura 1.9 se esquematiza la evolución del estado tensional y de fisuración en un punto durante el proceso de carga. Inicialmente el material está en un régimen elástico con sus tensiones principales σ_1 y σ_2 , orientadas según una determinada dirección, siendo ambas menores que la resistencia a tracción uniaxial f_t . Durante este estado, la ecuación constitutiva es la propia de un material elástico lineal, así que puede formularse en valores totales según la ley de Hooke para tensión o deformación plana:

$$\sigma = D^e \cdot \epsilon \quad (1.7)$$

donde

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad \epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

son el vector de tensiones y deformaciones, respectivamente y D^e es la matriz de constantes elásticas definida por:

$$D^e = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (I.9)$$

para tensión plana y

$$D^e = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \nu \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad (I.10)$$

para deformación plana¹³.

A medida que se avanza en el proceso de carga, llega un momento en que una de las tensiones principales (σ_I) alcanza el umbral de fisuración. En este instante el modelo determina la aparición de una fisura orientada perpendicularmente a dicha tensión principal. Puesto que puede conocerse la orientación de dicha tensión, a partir de los procedimientos típicos de la elasticidad, puede establecerse también la inclinación de la correspondiente fisura definida por el ángulo θ_1 .

A partir del instante en que aparece dicha fisura, el material deja de comportarse como elástico lineal y por lo tanto dejan de ser válidas las ecuaciones (1.7). Como se verá posteriormente, mediante el establecimiento de ciertas hipótesis es posible obtener una ecuación constitutiva incremental no lineal que regule dicho comportamiento.

Debido al comportamiento no lineal del material fisurado, la orientación y valor de las tensiones principales se modifican durante el proceso de carga y es posible que, en otro instante posterior, la tensión principal mayor alcance el umbral de fisuración. En tal caso se supone la aparición de una segunda fisura, en el mismo punto, cuya orientación es nuevamente conocida y normal a dicha tensión principal. El proceso podría, al menos teóricamente, proseguir admitiendo la formación de una tercera, cuarta, etc., fisura; sin embargo, problemas de mal condicionamiento numérico y la experiencia en el uso de dicho modelo establecen las siguientes limitaciones⁹:

- El número de fisuras que se admiten en un mismo punto es como máximo de dos.
- Se establece un ángulo mínimo entre las dos fisuras (alrededor de 60°).

4.3. Comportamiento del material fisurado

La ecuación constitutiva que caracteriza el comportamiento del material fisurado se establece a partir de las siguientes hipótesis:

1) DESCOMPOSICION ADITIVA DE LA DEFORMACION

Esta hipótesis es similar a la que se formula en la teoría de la plasticidad y es una extrapolación al caso bidimensional de la descomposición de la deformación establecida en

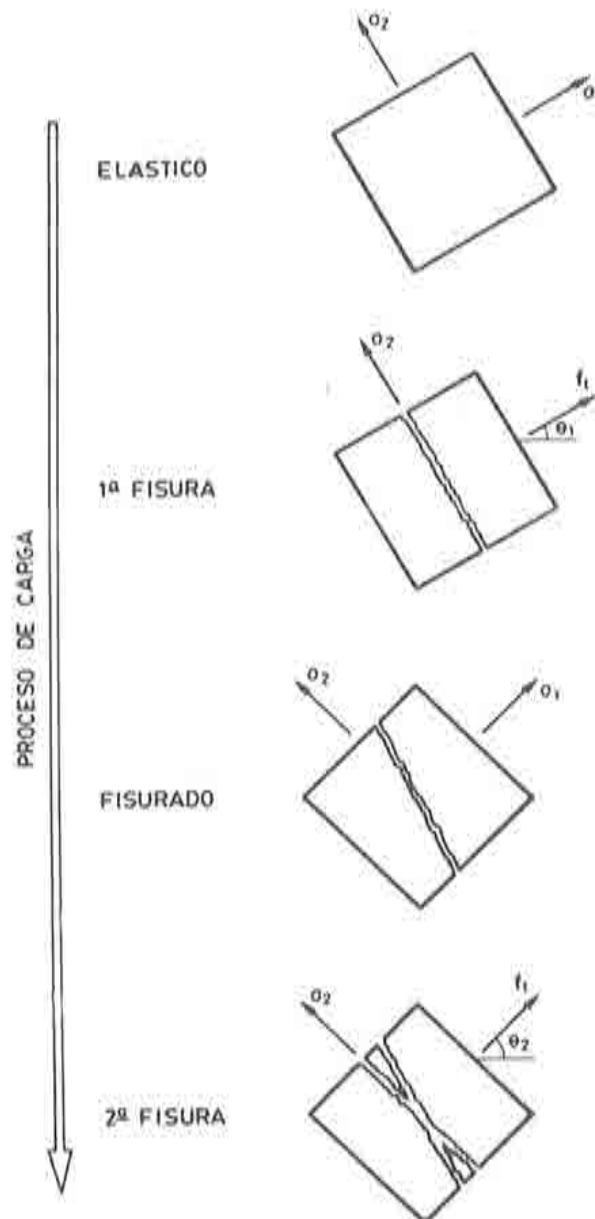


Figura 1.9 Generación de la fisuración.

la ecuación (1.4) para el caso unidimensional. Se supone que la deformación en un punto tiene una componente "elástica" y una componente de "apertura de fisura" que es el resultado de la distribución de dicha apertura sobre el ancho de la banda de fisuración.

$$\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^f \quad (1.11)$$

o bien, en forma incremental:

$$de = de^e + de^f \quad (I.12)$$

donde la deformación elástica viene relacionada con la tensión por:

$$d\sigma = D^e \cdot de^e \quad (I.13)$$

siendo D^e la matriz de constantes elásticas de las ecuaciones (I.9) y (I.10).

2) ADITIVIDAD DE LA DEFORMACION DE APERTURA DE FISURA PARA LAS DISTINTAS FISURAS DEL PUNTO

Como se ha indicado, en un mismo punto se considera la posibilidad de existencia de distintas fisuras (en general su número máximo se limita a dos) orientadas en distintas direcciones.

En las direcciones locales (normal y tangencial) de cada fisura, la apertura y el deslizamiento de la misma repercutirán, al distribuirlas sobre la banda, en una deformación de "apertura de fisura" normal $de_{i'}^f$ y tangencial $d\gamma_{i'}^f$ (ver Figura I.10) que, ordenadas en forma de vector, permiten definir un vector local de deformaciones de apertura de fisura correspondiente a la fisura i :

$$de_{i'}^f = \begin{Bmatrix} de_{i'}^f \\ d\gamma_{i'}^f \end{Bmatrix} \quad (I.14)$$

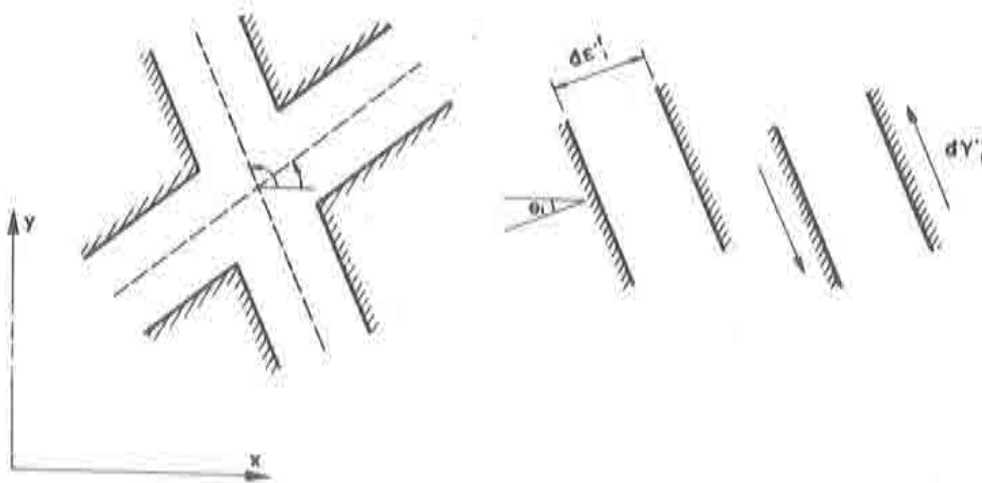


Figura I.10 Deformación de apertura de fisura.

Este vector podrá transformarse a unos ejes globales (comunes a todas las fisuras) siguiendo las reglas normales de transformación de deformaciones con un cambio de ejes cartesianos:

$$\begin{Bmatrix} d\epsilon'_x \\ d\epsilon'_y \\ d\gamma'_{xy} \end{Bmatrix}_i = \mathbf{T}_i d\epsilon'_i \quad (I.15)$$

donde \mathbf{T}_i es una matriz de transformación que pueda calcularse a partir del ángulo de orientación de la fisura θ_i (ver Figura I.10) como:

$$\mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} \cos^2\theta_i & -\text{sen}\theta_i \cos\theta_i \\ \text{sen}^2\theta_i & \text{sen}\theta_i \cos\theta_i \\ \text{sen}2\theta_i & \cos2\theta_i \end{bmatrix} \quad (I.16)$$

La operación de la ecuación (I.15) puede realizarse para todas las fisuras del punto.

La hipótesis de aditividad de la deformación de apertura de fisura establece que la deformación global de apertura de fisura que caracteriza al punto, es la suma de las correspondientes deformaciones locales de las fisuras en dicho punto transformadas mediante la ecuación (I.15), es decir:

$$d\epsilon^f = \sum_i \mathbf{T}_i \cdot d\epsilon'_i \quad (I.17)$$

3) ESTADO TENSIONAL SOBRE LOS LABIOS DE LA FISURA

Consideremos la fisura i en el punto, y las tensiones normal y tangencial σ'_i y τ'_i sobre sus labios (ver Figura I.11) que pueden ser agrupadas en un vector

$$\sigma'_i = \begin{Bmatrix} \sigma'_i \\ \tau'_i \end{Bmatrix} \quad (I.18)$$

La tensión normal a la fisura se relaciona con la deformación normal de apertura de fisura ϵ'_i extrapolando para el caso bidimensional la ecuación constitutiva unidimensional del apartado 3.2. Así pues, estableciendo el diagrama uniaxial $\sigma'_i - \epsilon'_i$, cuya pendiente E'_i se determina a partir de la resistencia a tracción f_t , la energía de fractura G_f y una cierta longitud característica l que debe evaluar, con la mayor precisión posible, el ancho de la banda en la dirección normal a la fisura. En consecuencia puede establecerse la siguiente ecuación constitutiva incremental (ver figura I.11a)

$$d\sigma'_i = E'_i d\epsilon'_i \quad (I.19)$$

La relación entre la tensión tangencial a los labios de la fisura y la correspondiente deformación de deslizamiento se establece a través de un módulo de corte corregido G'_i , obtenido a partir del módulo de deformación transversal G y un factor de corrección β denominado "factor de retención de tensiones cortantes" (ver Figura I.11a)

La misión del factor de retención de tensiones cortantes es tener en cuenta el efecto de engranamiento de los labios de la fisura. Así, para $\beta = 0.5$, $G_i = G$ y se supone una total adherencia de los labios ($\tau'_i = G\gamma'_i$). Para $\beta = 0$, $G_i = 0$ y el engranamiento considerado es nulo ($\tau'_i = 0$). En consecuencia β debe tomar un valor intermedio entre 0 y 0.5:

$$0 \leq \beta \leq 0.5 \quad (I.20)$$

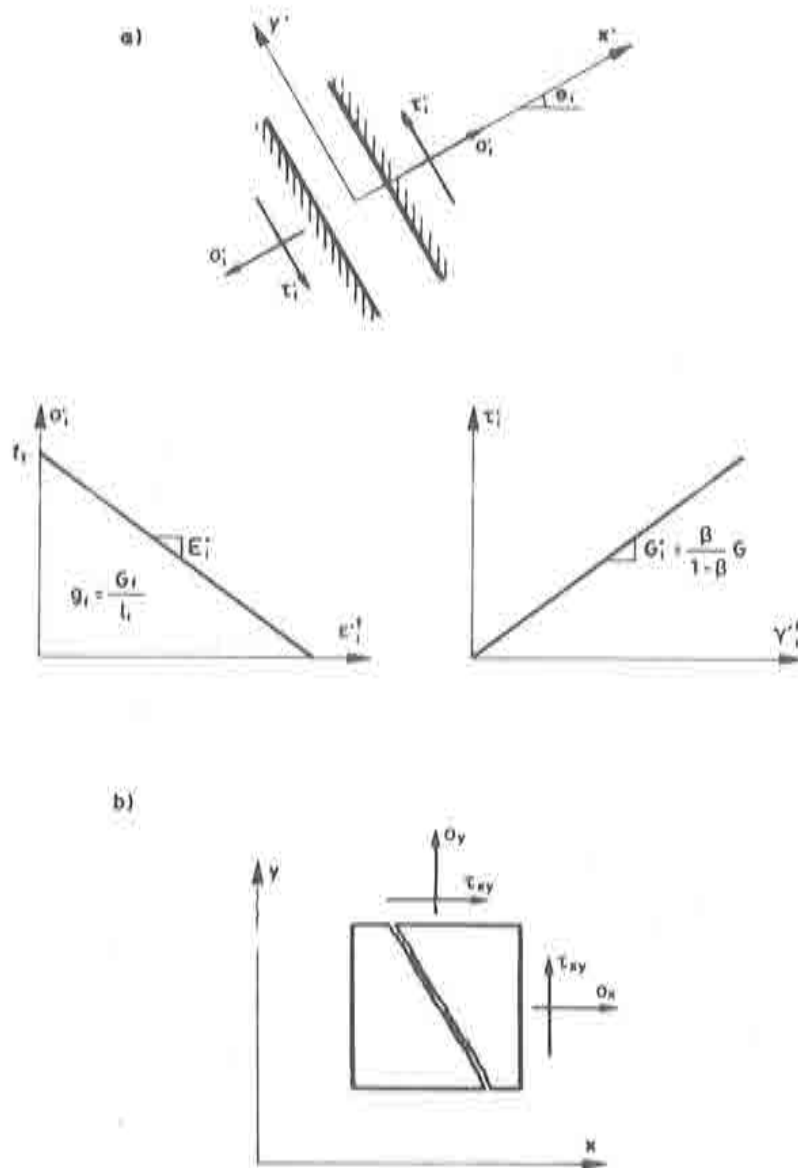


Figura I.11 Estado tensional sobre los labios de la fisura.

De nuevo el diagrama $\tau_i' - \gamma_i'^j$ de la Figura I.11a permite establecer una ecuación constitutiva incremental en la dirección tangencial a la fisura:

$$d\tau_i' = G_i' d\gamma_i'^j \quad (I.21)$$

Las ecuaciones (I.19) y (I.21) pueden ser agrupadas en la siguiente ecuación constitutiva matricial:

$$d\sigma'_i = \mathbf{D}'_i d\epsilon'_i \quad (I.22)$$

con

$$d\sigma'_i = \begin{Bmatrix} d\sigma'_i \\ d\tau'_i \end{Bmatrix} \quad d\epsilon'_i = \begin{Bmatrix} d\epsilon'_i \\ d\tau'_i \end{Bmatrix} \quad (I.23)$$

$$\mathbf{D}'_i = \begin{bmatrix} E'_i & 0 \\ 0 & G'_i \end{bmatrix} \quad (I.24)$$

Obsérvese que en la ecuación (I.24) la existencia de ceros en los términos fuera de la diagonal principal supone un total desacoplamiento tenso-deformacional en las direcciones normal y tangencial a la fisura.

Finalmente, las tensiones locales σ'_i pueden ser transformadas a tensiones en las direcciones globales σ (ver Figura I.11b) mediante la matriz de transformación de la ecuación (I.16) de la forma:

$$d\sigma = \begin{bmatrix} d\sigma_x \\ d\sigma_y \\ d\tau_{xy} \end{bmatrix} = \mathbf{T}_i^{-T} \cdot d\sigma'_i \quad (I.25)$$

donde el signo $()^{-T}$ indica la traspuesta de la inversa.

4) ECUACION CONSTITUTIVA

Combinando las ecuaciones (I.12), (I.13), (I.17), (I.23) y (I.25), y mediante simples operaciones matriciales, se llega a la siguiente ecuación constitutiva incremental no lineal²:

$$d\sigma = \mathbf{D} d\epsilon \quad (I.26)$$

donde la matriz constitutiva tangente puede construirse a partir de las distintas matrices definidas más arriba, como:

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^e - \mathbf{D}^e \mathbf{T} (\mathbf{D}' + \mathbf{T}^T \mathbf{D}^e \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}^T \mathbf{D}^e \quad (I.27)$$

siendo \mathbf{T} y \mathbf{D}' matrices construidas, a partir de las \mathbf{T}_i y \mathbf{D}'_i de las ecuaciones (I.16) y (I.24), de la forma

$$\mathbf{T} = [\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \dots, \mathbf{T}_n] \quad (I.28)$$

$$\mathbf{D}' = \begin{bmatrix} \mathbf{D}'_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{D}'_2 & & \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{D}'_n \end{bmatrix} \quad (I.29)$$

donde n es el número de fisuras producidas en el punto. La ecuación constitutiva incremental (I.26) puede ser incluida en un esquema general de análisis no lineal de estructuras siguiendo los procedimientos usuales para ello¹⁴.

5) APERTURA Y CIERRE DE FISURAS

Tanto el propio proceso de carga como la transferencia de deformaciones producida por los fenómenos de localización, pueden inducir descargas (en el sentido de disminución de la deformación) en un punto previamente fisurado. Es necesario, por consiguiente, incluir este efecto en la modelización del material fisurado. En el modelo que se está analizando, los efectos del cierre de fisuras se establecen, de una forma bastante intuitiva, considerando ramas de descenso "secantes al origen". En el diagrama tensión - deformación normal de apertura de fisura ($\sigma'_i - \epsilon'_i{}^f$) ésto supone la consideración de ramas específicas de descarga, mientras que en el diagrama $\tau'_i - \gamma'_i{}^f$ no se produce ninguna alteración. En la Figura I.12 se presentan las trayectorias de descarga tanto en los diagramas elásticos y de apertura de fisura como en la suma de ambos. Obsérvese que, con este esquema, la consideración de una descarga sólo modifica el valor de la pendiente E'_i que debe ser introducido en la ecuación (I.24). El resto de la formulación y, en particular, la expresión de la ecuación constitutiva de las ecuaciones (I.27) permanece formalmente inalterada.

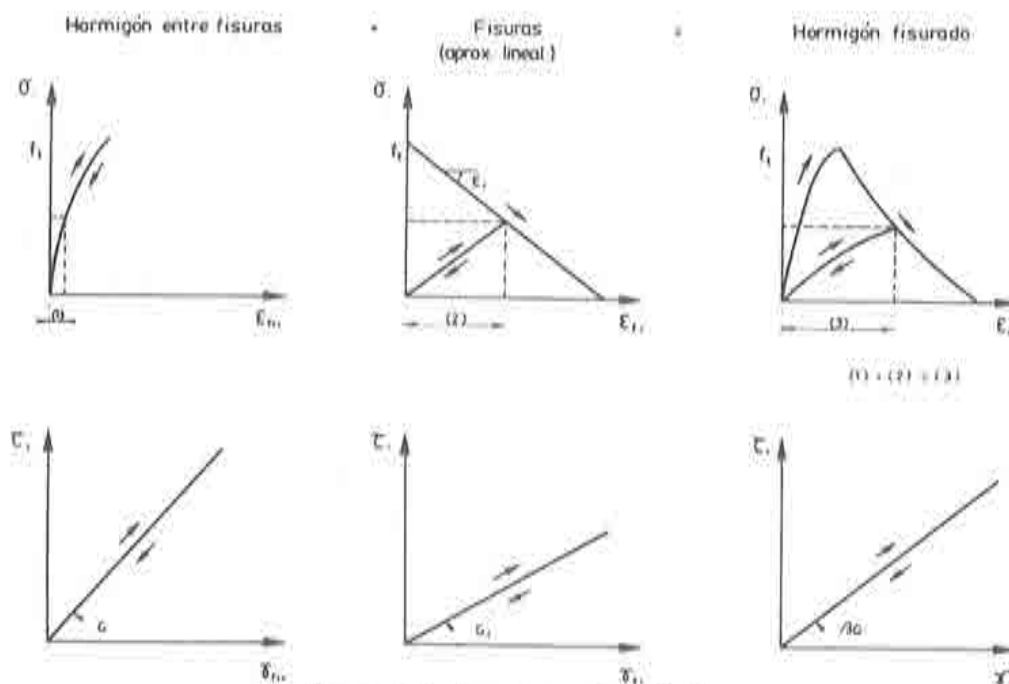


Figura I.12 Apertura y cierre de fisuras.

4.4. Inclusión de las armaduras

Es relativamente simple incluir el efecto de las armaduras, o al menos una buena aproximación del mismo, en un modelo de fisura distribuida como el analizado. Para ello se considera un comportamiento unidimensional de la armadura, caracterizada por una

ecuación constitutiva como la de la Figura I.13a. Es frecuente establecer un diagrama bilineal elasto-plástico para modelizar dicho comportamiento.

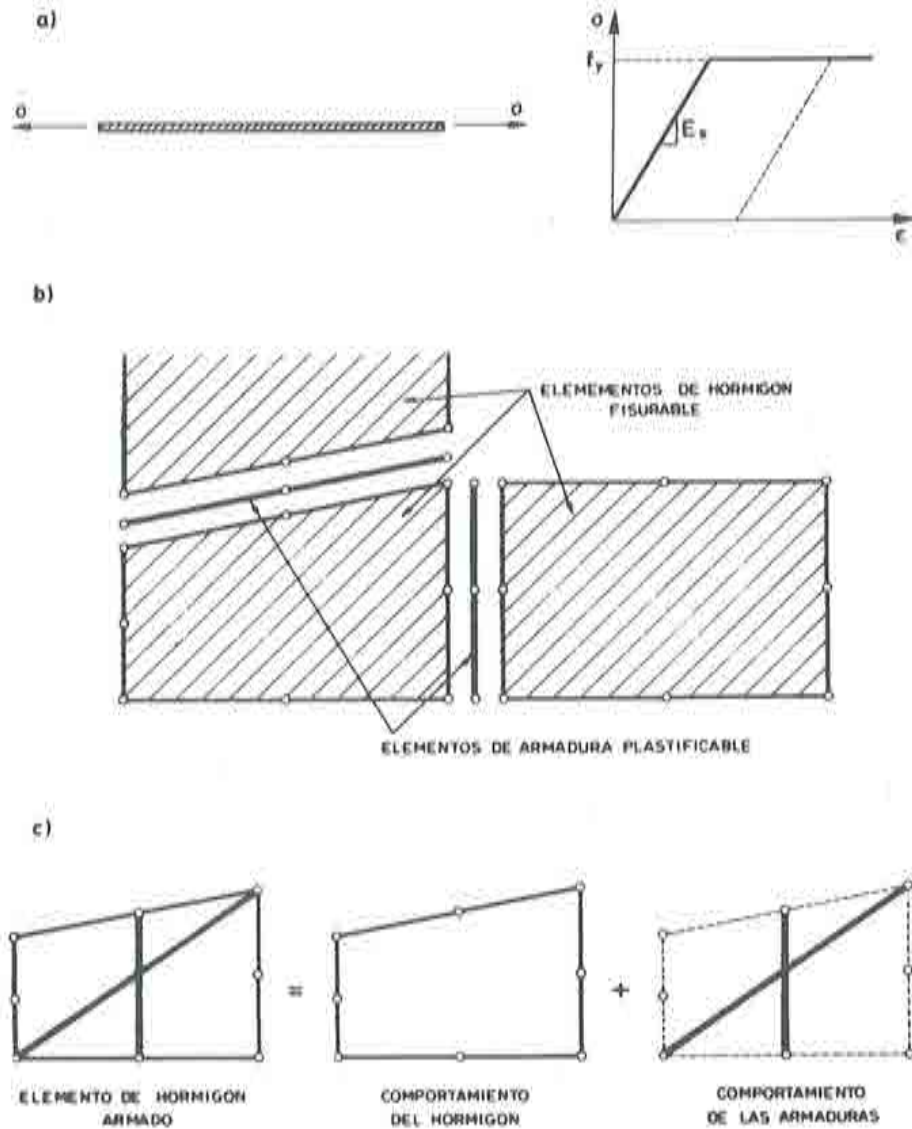


Figura I.13 Inclusión de las armaduras.

En cuanto a su implementación en un código de elementos finitos, existen dos alternativas que se diferencian por el nivel del proceso de cálculo al que afectan:

- a) Considerar a las armaduras como elementos unidimensionales que discurren

a través de los lados de los elementos. Esta opción supone modelar las armaduras como elementos unidimensionales independientes. El estado tenso-deformacional de los elementos de armadura y de los elementos de hormigón "fisurable" se calculan independientemente y sólo en el proceso de ensamblaje se reúnen las rigideces y comportamientos respectivos para obtener el comportamiento global de la "estructura de hormigón armado" (ver Figura I.13b). Este procedimiento es conceptualmente sencillo pero obliga a una mayor elaboración de los programas. Por otra parte, el hecho de que las armaduras discurren por los lados de los elementos obliga a una gran dependencia, con la situación de las armaduras, de la malla de elementos finitos que hay que generar.

- b) Formular elementos de "hormigón armado". En este procedimiento se supone que las armaduras discurren conectando nodos de la malla. La formulación de la rigidez y estado tensional del elemento se realiza superponiendo el comportamiento de hormigón "fisurable", ya comentado, con el comportamiento de las armaduras que discurren por su interior (ver Figura I.13c). No se formulan elementos unidimensionales específicos para el acero, sino que el resultado de la operación anterior son "elementos de hormigón armado" que reúnen el comportamiento específico del acero y del hormigón. Aunque esta formulación es conceptualmente algo más compleja, la inclusión de las armaduras supone una intervención notablemente inferior en el programa de ordenador que la opción anterior. Además, así se proporciona una mayor independencia de la malla de elementos finitos con la colocación de las armaduras.

4.5. Ejemplos de aplicación

Como ejemplo de las posibilidades de aplicación de un modelo como el descrito se presentan los resultados obtenidos en la simulación de dos vigas de hormigón, que corresponden a sendos ensayos experimentales¹⁵.

VIGA DE HORMIGÓN ARMADO

Se trata de una viga de sección rectangular cuyas dimensiones y armaduras pueden verse en la Figura I.14a. La viga está biapoyada y cargada simétricamente con dos cargas puntuales que se van incrementando progresivamente.

En la Figura I.14c se presentan los resultados carga-flecha en el centro de la viga obtenidos en el análisis, que se comparan con los resultados experimentales¹⁵. Puede observarse el excelente acuerdo que muestran ambos tipos de resultados.

En la Figura I.14b se pueden observar los estados de macrofisuración, detectados por el modelo y en el ensayo experimental, para la carga última analizada. Para interpretar la fisuración en el modelo, en cada punto se representa, con un trazo, la dirección de las fisuras existentes. Puede observarse la buena coincidencia de la zona fisurada detectada por el análisis con la del ensayo. En cuanto a la dirección de la fisuración, el acuerdo también es bueno y puede verse como el análisis indica el arranque vertical de las fisuras desde el paramento inferior de la viga (fisuración por flexión) y, posteriormente, su inclinación (fisuración flexión-cortante) en la zona donde el esfuerzo cortante es no nulo.

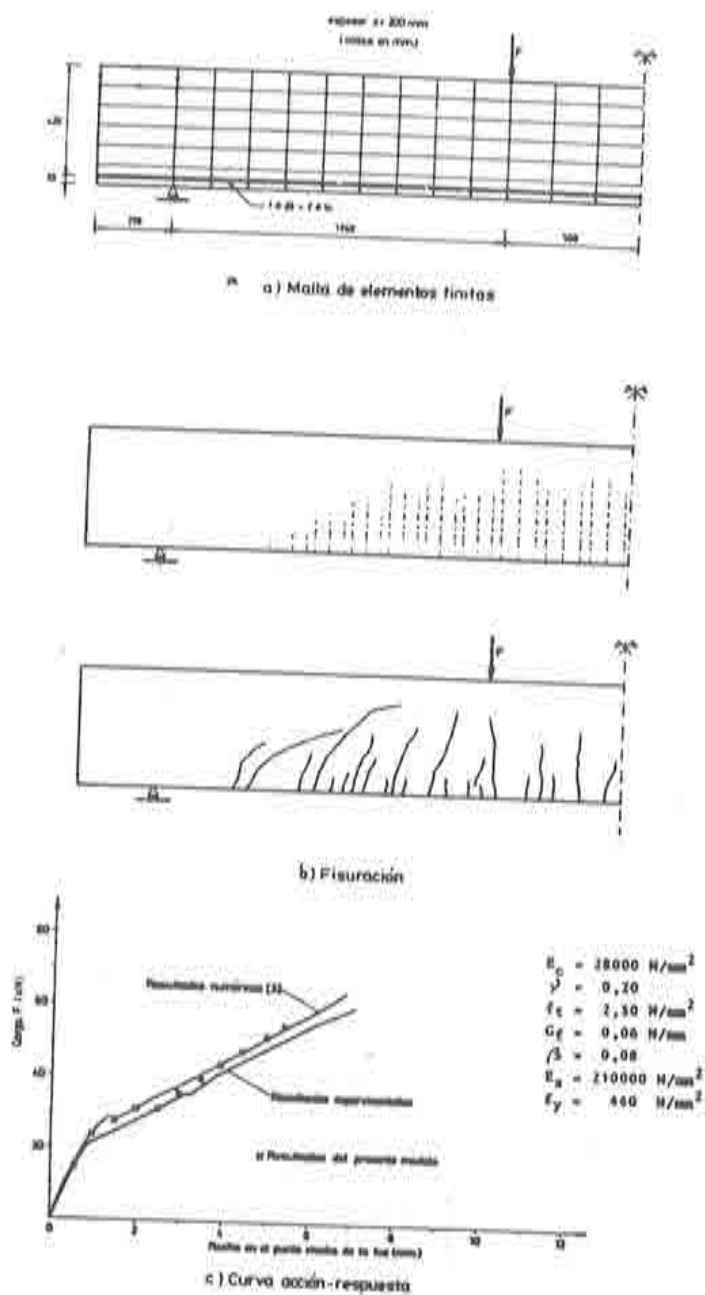


Figura I.14 Viga de hormigón armado.

VIGA ENTALLADA DE HORMIGÓN EN MASA ENSAYADA A FLEXIÓN

En este caso se trata de una viga biapoyada de hormigón en masa sometida a la acción

de una carga en el centro de la luz (ver Figura I.15a). Con el fin de estimular la creación de una fisura vertical, se realizó una entalla debajo del punto de aplicación de la carga, que se extendía hasta la mitad del canto. La viga fue ensayada hasta rotura total y los resultados fueron presentados por Peterson². Para poder llevar el ensayo hasta estados últimos se controlaba el desplazamiento en el punto de aplicación de la carga midiéndose la correspondiente reacción.

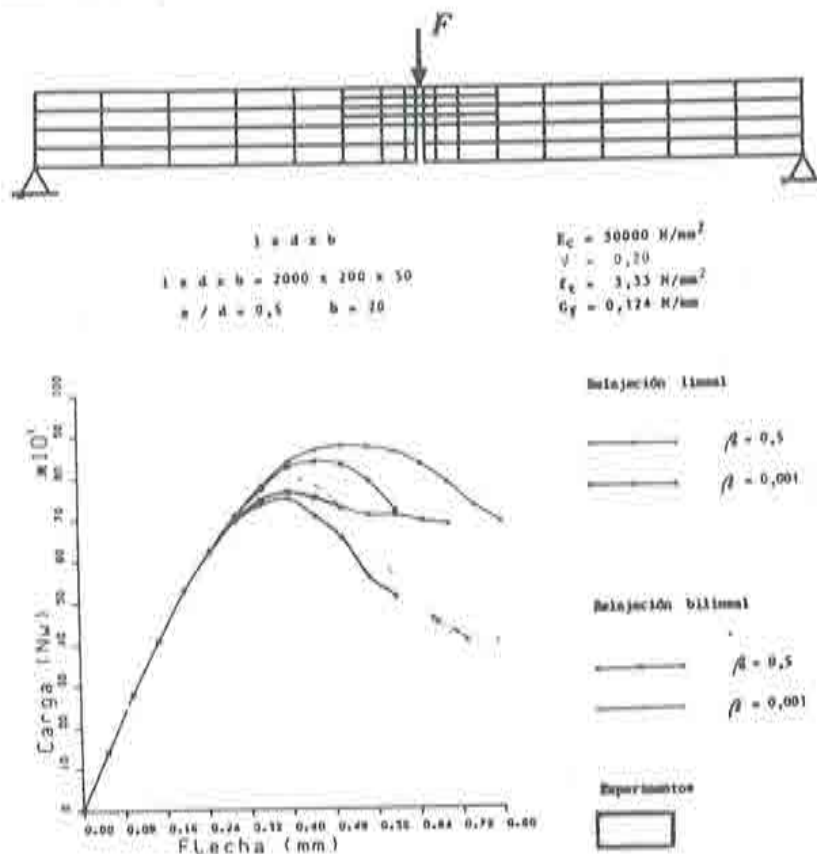


Figura I.15 Viga entallada de hormigón en masa.

En la Figura I.15b se presentan los resultados carga-desplazamiento obtenidos en la experimentación. Debido al alto carácter inestable que tiene el ensayo, y las consiguientes dificultades de medición, los resultados con los diferentes especímenes ensayados presentaron cierta dispersión en las últimas fases del ensayo encontrándose todos ellos dentro de la zona sombreada de la Figura I.15a. Estos resultados se comparan con los que proporciona el modelo, en los que se ha variado tanto el factor de retención de tensiones cortantes β , como la forma de la rama de ablandamiento (que se ha considerado lineal o bilineal). Puede observarse la, relativamente alta variación de los resultados del modelo, con estos parámetros, en las fases finales del ensayo.

5. MODELOS SIMPLIFICADOS DE CAPAS

En los ejemplos anteriores se ha puesto de manifiesto que un modelo de fisuración bidimensional puede ser utilizado en el análisis de vigas de plano medio realizando en ellas un análisis de tensión plana. Un estudio similar, en otros tipos muy frecuentes de estructuras de hormigón como son las láminas y placas, requeriría consecuentemente la utilización de modelos de fisuración de tres dimensiones.

Conceptualmente el desarrollo de un modelo de fisuración tridimensional puede plantearse, y de hecho así se ha hecho¹⁷, como la extensión del modelo previamente analizado, considerando una tercera dimensión e incluyendo todas las componentes de la tensión y la deformación.

Desde el punto de vista del desarrollo histórico de los modelos de fisuración, circunstancias como el coste de los modelos tridimensionales de fisuración propiciaron el desarrollo previo de los denominados modelos de "capas". Estos modelos constituyen un paso intermedio entre un estudio bidimensional y un análisis tridimensional y resultan aplicables a estructuras, como las laminas, con una dimensión (el canto) mucho más pequeña que las otras.

En análisis estructural de láminas y placas es frecuente el uso de formulaciones denominadas "degeneradas"¹⁸ en las que el establecimiento de ciertas hipótesis, que mantienen su validez para pequeñas relaciones canto-luz, permiten la obtención explícita de las deformaciones y desplazamientos a lo largo del canto en función de variables (desplazamientos y giros) definidas sobre la superficie media.

La formulación de "capas" para el análisis de la fisuración aprovecha estas circunstancias y divide el espesor de la lámina de hormigón armado en capas de hormigón y capas de acero representativas de las armaduras (ver Figura 1.16).

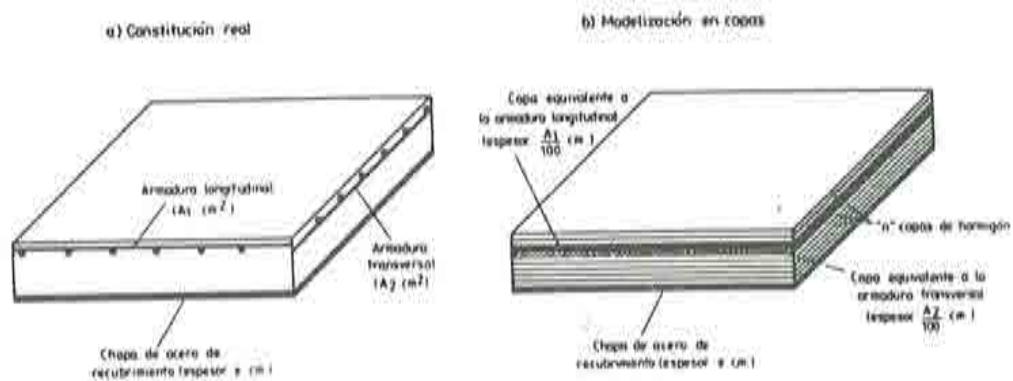


Figura 1.16 Modelización de la lámina en capas de distintos materiales.

Las capas de hormigón responden en su plano a un modelo de fisuración bidimensional, como el explicado más arriba, a través de una ecuación constitutiva como la (1.26) que relaciona las tensiones y deformaciones correspondientes (ver Figura 1.17). Las capas de acero, que modelizan las armaduras, responden a una ecuación constitutiva uniaxial como

la indicada en la Figura I.13a considerándose distintas capas para modelizar las orientaciones de las diversas armaduras (ver Figura I.16).

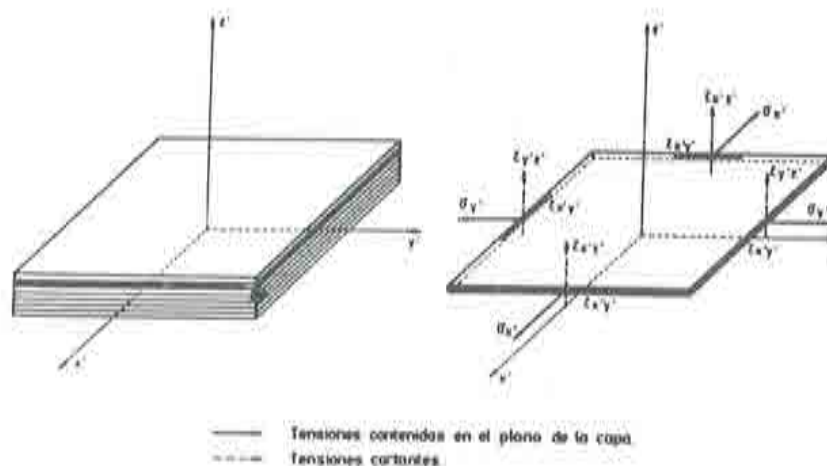


Figura I.17 Tensiones sobre una capa.

Finalmente, las tensiones cortantes y las correspondientes deformaciones suelen relacionarse por la expresión elástica-lineal en la forma usual¹³.

Con esta metodología es posible también el estudio de estructuras "compuestas" como, por ejemplo, las estructuras mixtas de acero y hormigón. En la Figura I.16 se indica como una chapa de la lámina, de acero homogéneo, se modeliza como una capa cuyo comportamiento tenso-deformacional en su plano se supone elastoplástico. Utilizando procedimientos clásicos para plasticidad en dos dimensiones es posible también incorporar los efectos de la chapa de acero al conjunto de la lámina o placa.

Una vez modelizado el comportamiento de las distintas capas, se puede incluir el conjunto en un esquema común de análisis no lineal de láminas por elementos finitos. En cada instante del análisis los desplazamientos y giros de la superficie media permiten obtener las deformaciones en las distintas capas que, integradas de acuerdo con la correspondiente ecuación constitutiva, proporcionan el estado tensional, de fisuración o de plastificación sobre cada punto de la capa. En el caso concreto de la fisuración, el análisis proporciona no sólo información sobre la existencia de fisuras y su dirección en el plano de una capa, sino que, a través del número de capas afectadas, es posible evaluar la "profundidad" de la fisuración a través del espesor.

5.1. Ejemplo de aplicación

Como ejemplo de las posibilidades de aplicación de los modelos de capas, en la Figura I.18 se presentan la geometría, propiedades mecánicas y cuantías de armadura de una placa circular de hormigón armado que se halla simplemente apoyada en su contorno, y sometida a la acción de un momento uniformemente distribuido sobre el mismo. La simetría de

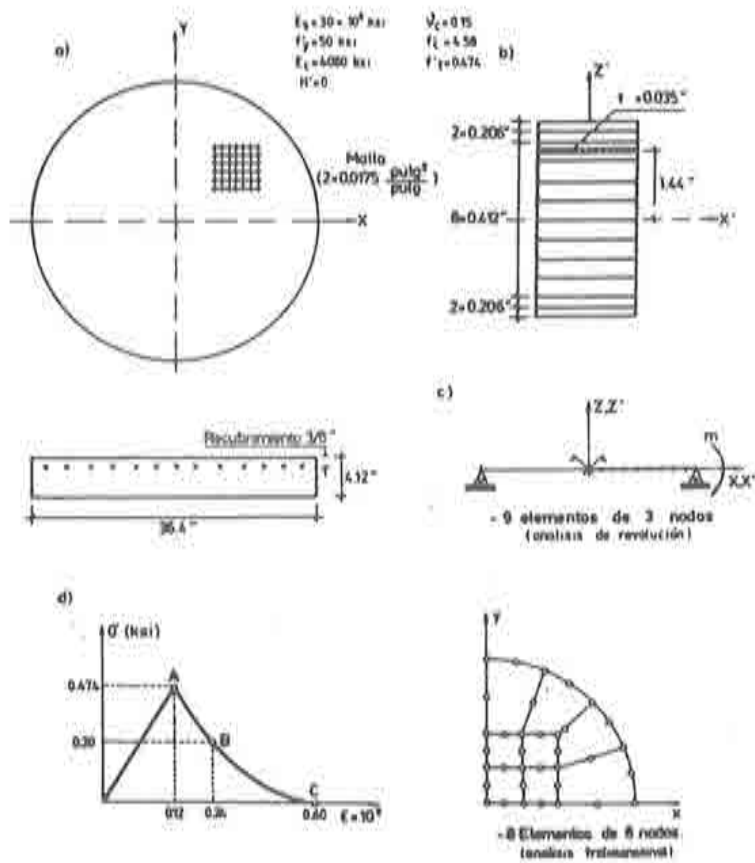


Figura I.18 Placa circular de hormigón armado.

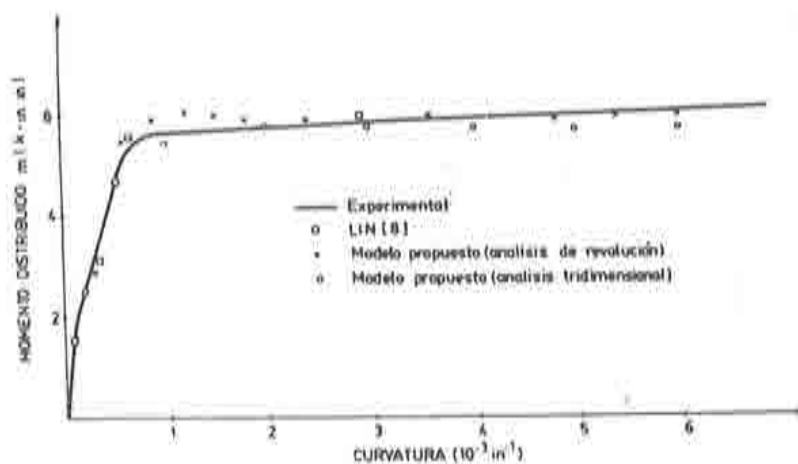


Figura I.19 Placa circular. Resultados del análisis tensional.

revolución de cargas y geometría, conduce lógicamente a un estado de deformación de la placa en forma de casquete esférico en el que todos los puntos y en todas las direcciones se produce la misma deformación. La cara superior está traccionada y la inferior está comprimida.

En la Figura I.19 se muestran los resultados momento aplicado-curvatura obtenidos en el análisis, comparados con los experimentales¹⁹ llevados hasta el agotamiento de la estructura. Nuevamente puede observarse el buen acuerdo entre ambos resultados.

CAPITULO II

APORTACIONES TEORICAS DE LA INVESTIGACION

1. INTRODUCCION

En el Capítulo I se ha presentado una introducción a la metodología del análisis de la fisuración en estructuras de hormigón, que refleja el estado del conocimiento sobre el tema al iniciarse el presente trabajo de investigación.

Del examen de los modelos de fisura distribuida que se ha realizado en dicho capítulo, y en particular del modelo de Rots y Nauta³ y de Borst⁴, puede concluirse que, si bien estos modelos condujeron en su día a un importante avance en los procedimientos para el estudio de la fisuración y fueron, como se ha visto en los ejemplos, la primera herramienta útil y fiable para realizar este tipo de análisis, reúnen todavía una serie de carencias que justifican una intensa investigación. Entre éstas podríamos señalar las siguientes:

- El modelo se centra exclusivamente en el comportamiento a tracción del hormigón. No se considera ninguna no linealidad ni criterio de rotura en el comportamiento a compresión considerado.
- El comportamiento a tracción del hormigón, previo a la fisuración, es asimismo estrictamente lineal.
- En todo el procedimiento de formulación de la ecuación constitutiva existe una cierta "alquimia" en el sentido de intentar una extrapolación forzada a dos dimensiones de los conceptos que sólo son evidentes en los modelos unidimensionales. Ejemplos claros de ello son el uso de una ecuación constitutiva desacoplada en las direcciones normal y tangencial de la fisura (ver Figura I.11 y ecuaciones (I.22) y (I.24)) y la introducción de ciertos parámetros, como el factor de retención de tensiones cortantes, que deben ser determinados empíricamente (ver ecuación (I.20)), cuya importancia en los resultados es significativa tal como se ha puesto de manifiesto en el ejemplo de la Figura I.15.
- La definición de la longitud característica como parámetro de objetivización de los resultados ya no es tan evidente como en los modelos unidimensionales. Cuando los elementos no son rectangulares y, aún en este caso, cuando las fisuras no se producen en direcciones paralelas a los lados, la relación entre dicho parámetro y la geometría del elemento no es inmediata. Tradicionalmente este problema ha sido

obviado acudiendo nuevamente al empirismo y formulando diversas expresiones para la longitud característica cuya validez se limita a casos muy concretos^{2, 10, 12, 20, 21}.

En este Capítulo se presentan dos aportaciones de este trabajo de investigación encaminadas a resolver algunos de los problemas indicados. En primer lugar se analiza una nueva formulación de la ecuación constitutiva del hormigón que podría incluirse dentro de los denominados "modelos de daño continuo"²² que pretende modelar más correctamente y con mayor rigurosidad teórica tanto el comportamiento del hormigón en diversos estados tensionales (tracción o compresión), como los fenómenos de degradación de rigidez y plastificación que se observan experimentalmente. En segundo lugar se presenta una formulación rigurosa del significado físico de la longitud característica, en problemas bi y tridimensionales, que permite llegar a expresiones consistentes y fáciles de calcular de dicho parámetro.

Las juntas de construcción son, como las fisuras, elementos de discontinuidad en el seno de la estructura y, como se verá posteriormente, desde esta óptica pueden recibir un tratamiento coincidente con aquellas en muchos aspectos. La investigación en los modelos de fisuración que se presentan en este trabajo y la necesidad de aplicarlos a problemas estructurales en los que las juntas de construcción juegan un papel importante, propiciaron el desarrollo de un modelo específico para simular su comportamiento que es también estudiado en este Capítulo.

2. UN MODELO DE DAÑO CONTINUO PARA LA SIMULACION DEL COMPORTAMIENTO DEL HORMIGON

2.1. Generalidades

La fisuración del hormigón puede ser interpretada como la pérdida de cohesión entre las partículas y la propagación de las microfisuras que esta pérdida de cohesión produce²⁴. Aunque a un nivel microscópico la aparición de microfisuras sigue caminos erráticos, lo que calificaría a la microfisuración como un fenómeno "adireccional" o isótropo, a un nivel más macroscópico las microfisuras se propagan siguiendo direcciones determinadas e interconectándose entre sí para dar lugar a lo que conocemos como fisuras. Esto quiere decir que un modelo localmente isótropo, que cuente con las variables adecuadas para detectar el nivel de microfisuración en cada punto, puede ser válido para representar un fenómeno globalmente anisotrópico, como es la fisuración, siempre que se interprete a las fisuras como el lugar geométrico de los puntos dañados.

Por otra parte, la experimentación sobre probetas de hormigón sometidas a ciclos de carga o descarga, permite establecer las siguientes características dominantes en el comportamiento del hormigón (ver Figura II.1):

- El hormigón es elástico no lineal hasta ciertos niveles de tensión ($\sigma^{(1)}$ de la Figura II.1) en el sentido de que eventuales descargas no producen deformaciones permanentes. Sin embargo, dentro de este rango no existe reversibilidad del camino tensión-deformación

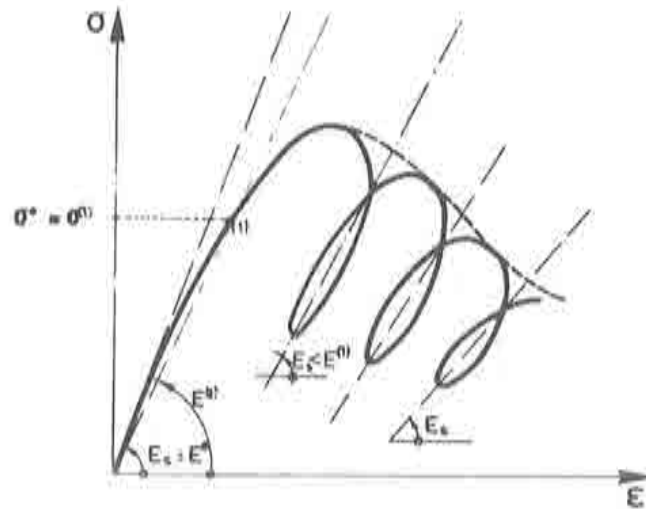


Figura II.1. Características fundamentales del comportamiento del hormigón.

y las descargas son secantes al origen lo que permite interpretar la no-linealidad en este dominio como una degradación de la rigidez secante.

- Más allá de ciertos límites ($\sigma^{(1)}$ en la Figura II.1), la resistencia sigue creciendo hasta alcanzar su valor máximo para decrecer después siguiendo una curva de ablandamiento. En este rango las descargas producen deformaciones permanentes, aunque las ramas de descarga no se mantienen paralelas entre sí sino que indican una progresiva degradación de la rigidez secante. Este fenómeno podría ser explicado desde la óptica de un proceso de plastificación con degradación de la rigidez.
- La microfisuración y la fisuración aparecen fundamentalmente por encima del límite elástico $\sigma^{(1)}$ creciendo a partir de este punto con el aumento de la deformación. En este sentido podría asociarse el nivel de fisuración con el de deformación plástica.

Las anteriores consideraciones permiten pensar que un modelo de plasticidad isótropa puede ser el marco general donde se desarrolle un modelo ambicioso para la simulación del comportamiento del hormigón. La teoría de la plasticidad, cuyas bases están perfectamente establecidas en el contexto de la Mecánica de Medios Continuos, puede aportar al modelo unos fundamentos rigurosos evitando en gran parte el empirismo de otros modelos previamente comentados. Los requisitos fundamentales de dicho modelo serían:

- **Producir localización de deformaciones.** Como ya se ha visto, esto pasa por introducir el ablandamiento por deformación en la ecuación constitutiva. La teoría de la plasticidad permite considerarlo con facilidad a través de un valor negativo de la variable de endurecimiento plástico.

- Modelar los efectos de la degradación de la rigidez tanto en régimen elástico como elastoplástico.
- Incorporar una variable de daño, que esté asociada al nivel de fisuración en cada punto.

El modelo que se presenta reúne estos requisitos y permite, como se verá, una buena simulación del comportamiento del hormigón para todos los niveles de deformación.

2.2. Modelo elastoplástico sin degradación de rigidez

En un primer paso se analizará el modelo dejando de lado los fenómenos de degradación de la rigidez que se abordarán en el apartado 2.3. Las variables fundamentales que intervienen en la ecuación constitutiva son las siguientes:

Deformación plástica ϵ^p . Es un vector que reúne las componentes de deformación plástica tal como es usual en las teorías de plasticidad²⁴.

Cohesión c . Se interpreta como una medida de la resistencia a tracción o a compresión del material. De hecho, en un proceso uniaxial la cohesión coincide exactamente con la resistencia a tracción o a compresión del material. Las curvas tensión-deformación plástica uniaxiales a tracción (σ_T) o a compresión (σ_C) se consideran un dato del material o al menos los valores significativos que las definen (ver Figura II.2a). Obsérvese la introducción del ablandamiento por deformación en dichas curvas como mecanismo para producir la localización de deformaciones.

Para el caso general de un estado tensional cualquiera, la cohesión viene definida por la siguiente ecuación implícita (incremental) en la que intervienen las curvas previamente definidas en la Figura II.2:

$$\dot{c} = c \left[\frac{r(\sigma)}{\sigma_T} \dot{\sigma}_T + \frac{1-r(\sigma)}{\sigma_C} \dot{\sigma}_C \right] \quad (II.1)$$

donde el punto superior indica derivación respecto al tiempo (tasa o incremento) y $r(\sigma)$ es un factor de peso que pondera la intervención de las curvas $\sigma_T - \epsilon_p$ (tracción uniaxial) y $\sigma_C - \epsilon_p$ (compresión uniaxial) en un estado tensional triaxial. Así, $r(\sigma) = 1$ en estados de tracción uniaxial, $r(\sigma) = 0$ en estados de compresión triaxial y $0 \leq r(\sigma) \leq 1$ en situaciones intermedias. Una expresión concreta para $r(\sigma)$ puede encontrarse en la referencia [25].

Variable de daño k^p . Varía entre 0 y 1 ($0 \leq k^p \leq 1$) y puede interpretarse matemáticamente como la razón entre la energía plástica disipada en un punto, en un cierto instante del proceso de deformación, y la energía disipada en dicho punto cuando el daño (fisuración) es total. De acuerdo con esta definición en procesos uniaxiales dicha variable toma los siguientes valores:

$$k^p(\epsilon^p) = \frac{\int_0^{\epsilon^p} \sigma_T d\epsilon^p}{\int_0^{\infty} \sigma_T d\epsilon^p} \quad (II.2)$$

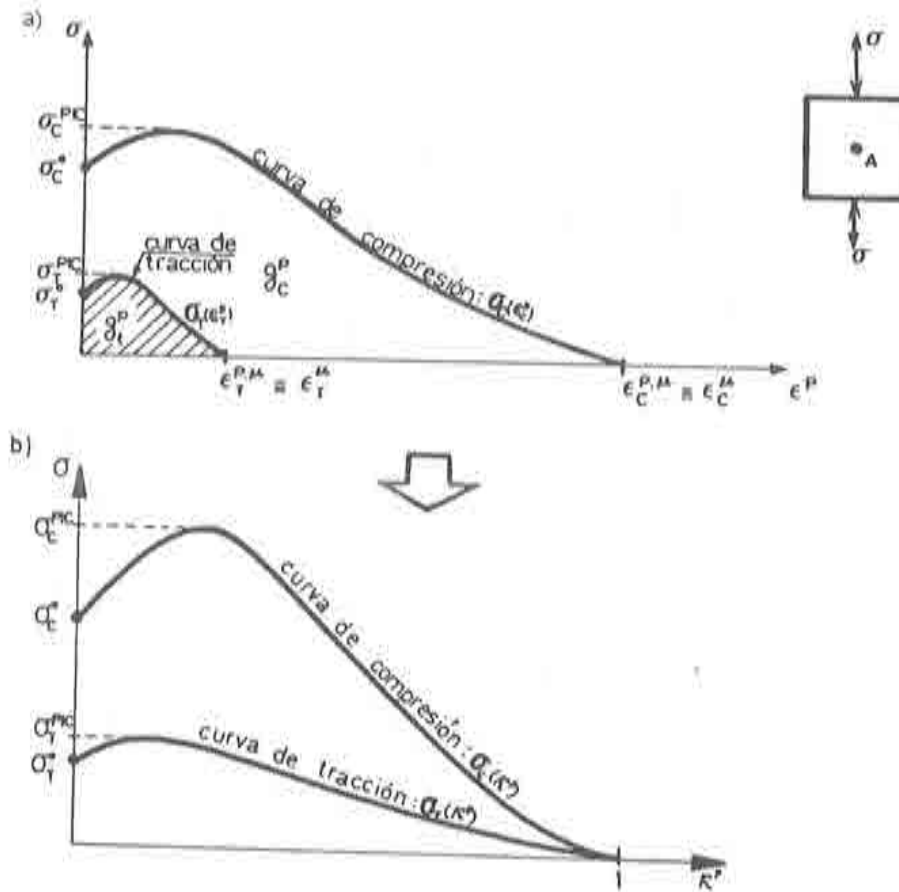


Figura II.2. Curvas tensión-deformación y tensión-daño plástica para procesos uniaxiales.

en procesos de tracción y:

$$k^p(\epsilon^p) = \frac{\int_0^{\epsilon^p} \sigma_c d\epsilon^p}{\int_0^{\infty} \sigma_c d\epsilon^p} \quad (II.3)$$

en procesos de compresión. Obsérvese que las ecuaciones (II.2) y (II.3) definen k^p como la relación entre el área bajo la correspondiente curva de tracción o compresión uniaxial, para el nivel de deformación plástica ϵ^p , y el área total. Asimismo dichas ecuaciones establecen una relación biunívoca entre ϵ^p y k^p con lo que las curvas $\sigma_T - \epsilon_p$ y $\sigma_C - \epsilon_p$ de la Figura II.2a pueden transformarse en curvas $\sigma_T - k^p$ y $\sigma_C - k^p$ tal como se indica en la Figura II.2b. En ambas curvas el valor $k^p = 0$ indica que no ha habido plastificación ($\epsilon^p = 0$), y que por lo tanto no hay daño o fisuración, mientras que el caso $k^p = 1$ ($\epsilon^p = \infty$) corresponde al daño o fisuración total.

Angulo de rozamiento interno ϕ . Se interpreta como una medida del rozamiento entre

partículas y es típico de los modelos elastoplásticos para materiales friccionales* (suelos y hormigón). En el modelo que se presenta se supone una variación de dicho ángulo con la variable de daño como la indicada en la Figura II.3 en la que se produce una variación exponencial hasta un cierto valor de la variable de daño y su estabilización en un valor máximo (ϕ_{max}).

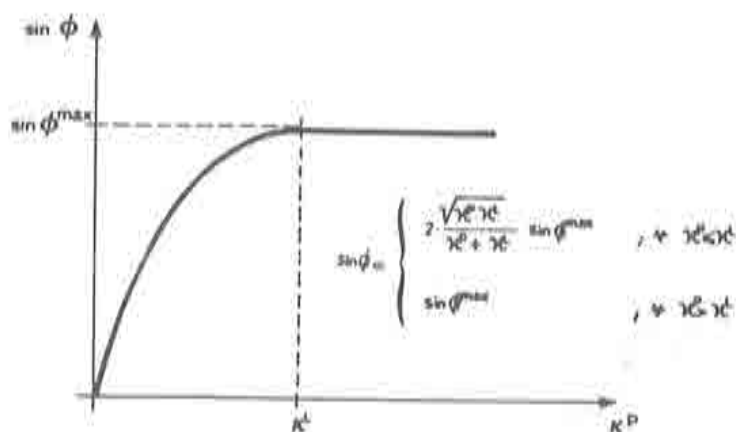


Figura II.3. Curva ángulo de rozamiento interno - daño plástico.

Ángulo de dilatancia ψ . La introducción de este parámetro responde a la necesidad de modelizar las variaciones de volumen, ante estados tensionales de corte* que se detectan en ensayos experimentales. Se establece una variación con el ángulo de rozamiento interno como la indicada en la Figura II.4.

Estas variables se introducen en un esquema usual para modelos elastoplásticos en el que se establecen las siguientes hipótesis:

Descomposición aditiva de deformación. La deformación se descompone aditivamente en su componentes elástica (ϵ^e) y plástica (ϵ^p):

$$\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^p \quad (II.4)$$

donde la deformación elástica se relaciona con las tensiones a través de la matriz de constantes elásticas de las ecuaciones (I.9) y (I.10):

$$\sigma = D^e \cdot \epsilon^e \quad (II.5)$$

Regla de flujo. La tasa de la deformación plástica es un vector normal a la superficie de potencial plástico, definida por $G(\sigma, \psi) = 0$, es decir:

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial G}{\partial \sigma} \quad (II.6)$$

donde $\dot{\lambda}$ es un escalar denominado multiplicador plástico**.

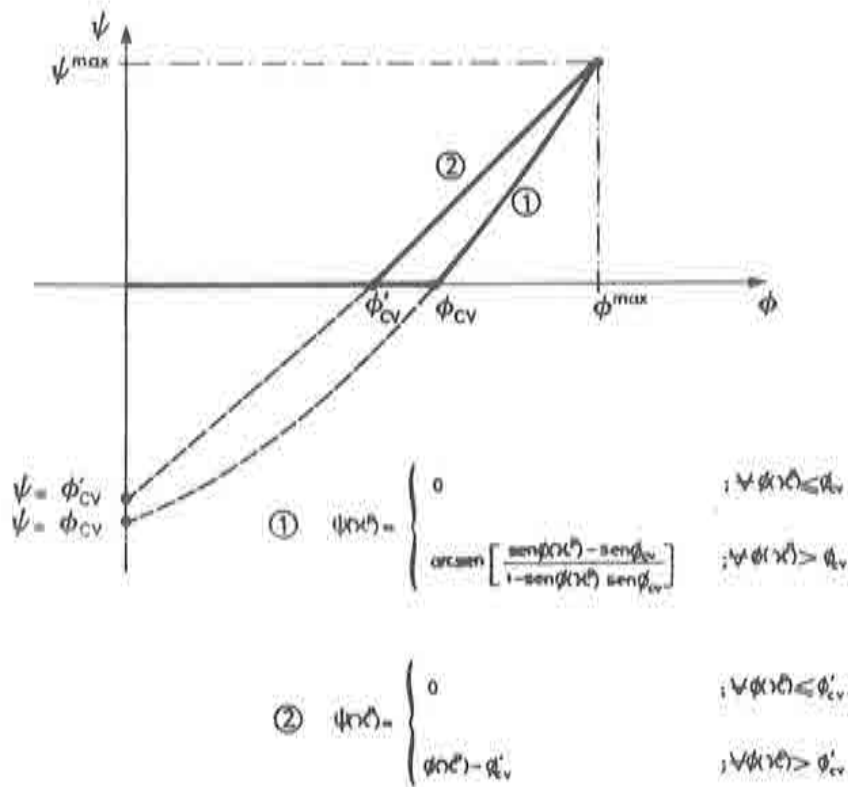


Figura II.4. Curva ángulo de dilatancia – ángulo de rosamiento interno.

Condición de consistencia plástica. Se define una superficie de fluencia plástica en el espacio de tensiones de la forma $F(\sigma, c, \phi) = 0$ que delimita el régimen elástico (en el interior de la misma) o elastoplástico (sobre la superficie).

Las hipótesis anteriores permiten definir la correspondiente ecuación constitutiva tanto en régimen elástico, ecuación (II.5), como elastoplástico. En este último caso, dicha ecuación toma la forma:

$$\dot{\sigma} = \mathbf{D}^{ep} \cdot \dot{\epsilon} \tag{II.7}$$

donde \mathbf{D}^{ep} es la matriz constitutiva elastoplástica tangente definida por:

$$\mathbf{D}^{ep} = \mathbf{D}^e - \frac{\left(\mathbf{D}^e \cdot \frac{\partial G}{\partial \sigma} \right) \left(\mathbf{D}^e \cdot \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right)^T}{A + \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma} \right)^T \cdot \mathbf{D}^e \cdot \left(\frac{\partial G}{\partial \sigma} \right)} \tag{II.8}$$

En la ecuación (II.8), A es el parámetro de endurecimiento cuya expresión puede encontrarse en la referencia [5].

Finalmente, el modelo queda terminado con la adecuada definición de la superficie

de fluencia y del potencial plástico. En el trabajo desarrollado, diversas consideraciones teóricas²⁸ condujeron a proponer las siguientes expresiones para dichas superficies:

Superficie de fluencia

$$F(\sigma, c, \phi) = \frac{1}{1-\alpha} \left[\sqrt{3J_2} + \alpha J_1 + \beta \langle \sigma_1 \rangle - \gamma \langle -\sigma_1 \rangle \right] \quad (II.9)$$

donde α , β y γ son parámetros adimensionales que se entienden como propiedades del hormigón y que adquieren significado físico como resultados de ensayos uniaxiales y biaxiales en probetas de hormigón²⁸; J_1 y J_2 son el primer y segundo invariante del tensor de tensiones y $\langle \rangle$ es la función rampa definida por

$$\begin{aligned} \langle x \rangle &= x \text{ para } x \geq 0 \\ \langle x \rangle &= 0 \text{ para } x < 0 \end{aligned}$$

La superficie así definida tiene una cierta similitud con la superficie de Druker-Prager²⁹ en la zona de compresión aunque difiere sustancialmente de ella en la zona de tracción (ver Figura II.5).

Superficie potencial

$$G(\sigma, \psi) \equiv \frac{I_1}{3} K_3 + \sqrt{J_2} \left(K_1 \cos\theta - K_2 \frac{\text{sen}\theta \text{ sen}\psi}{\sqrt{3}} \right) \quad (II.10)$$

donde θ es el ángulo de similaridad (invariante tensional)²⁸ y los coeficientes K_1 , K_2 y K_3 dependen de la relación entre las resistencias uniaxiales a tracción y a compresión⁸.

2.3. Inclusión de la degradación de la rigidez.

Como ya se ha comentado los resultados experimentales muestran que cerca y después de la resistencia máxima a tracción, el hormigón exhibe una degradación creciente de su rigidez (ver Figura II.1). La consideración del fenómeno de la degradación de la rigidez se establece en el modelo modificando la matriz secante D^e de la ecuación (II.5) mediante dos grupos de variables internas: las variables de degradación elástica d^e y las variables de degradación plástica d^p . En la referencia [5] se presenta un tratamiento general para dichas variables.

Una versión simplificada del mismo consiste en introducir dos variables escalares de degradación, d^e y d^p , lo que permite modelar procesos de degradación isotropa, tal como se indica a continuación:

Degradación elástica. La matriz D^e se modifica de la siguiente forma:

$$D_e(d^e) = (1 - d^e) D^e \quad (II.11)$$

donde d^e se interpreta como la razón entre el área intacta y el área degradada por la fisuración en cada punto y puede ser expresada como⁸:

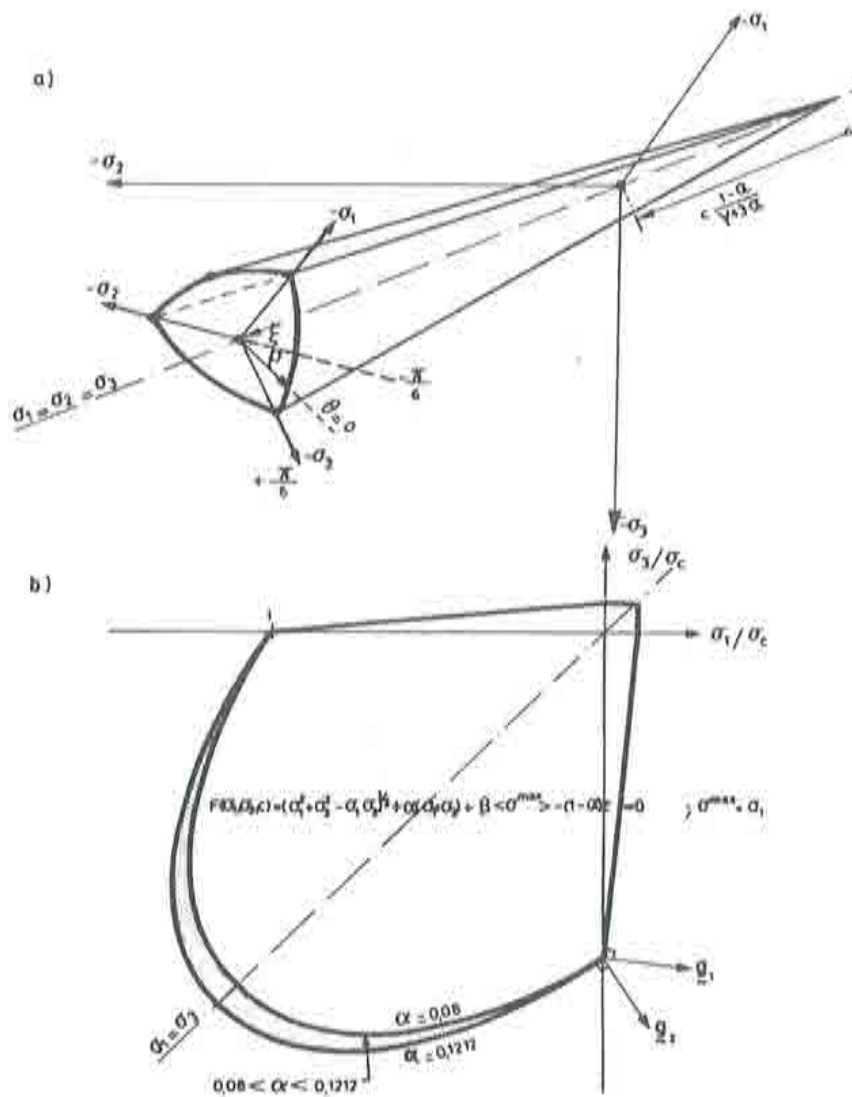


Figura II.5. Superficie de fluencia propuesta.

$$d^e = 1 - e^{-\phi \omega^e} \quad (II.12)$$

donde $2\omega^e = \epsilon^e \cdot D^e \cdot \epsilon^e$ es la raíz cuadrada de la norma de energía no dañada^a y ϕ es una constante cuyo valor se obtiene de los resultados de un ensayo uniaxial^b.

Degradación plástica. Durante los procesos elastoplásticos se superpone a la degradación producida durante el proceso elástico una degradación proporcional a la cohesión resultando:

$$D_s (d^e, d^p) = (1 - d^p) D_s (d^e) = (1 - d^p) (1 - d^e) D^e \quad (II.13)$$

donde

$$d^p = 1 - \frac{c}{c^{\text{peak}}} \quad (II.14)$$

siendo c es el valor presente de la cohesión y c^{peak} el máximo valor alcanzado por dicha variable. Otros detalles sobre el tema pueden consultarse en la referencia [5].

2.4. Objetivización de la respuesta. Energía de fractura.

De acuerdo con lo indicado en el Capítulo I, un modelo como el presente, que considera el ablandamiento por deformación producirá resultados no objetivos, dependientes del tamaño de la malla; para evitarlo, debemos recurrir nuevamente a la definición de una longitud característica l .

La objetivización se consigue entonces definiendo la energía específica a tracción (g^T) y a compresión (g^C) como:

$$g^T = \frac{G_T}{l} \quad (II.15)$$

$$g^C = \frac{G_C}{l} \quad (II.16)$$

y modificando los diagramas uniaxiales tensión-deformación de tal forma que el área encerrada bajo los mismos coincida con la respectiva energía específica (ver Figura II.2a). Los valores de G_T y G_C pueden ser entonces identificados como la energía de fractura a tracción y compresión del hormigón, respectivamente, que deben ser determinados experimentalmente. Por lo que se refiere al valor de la longitud característica será objeto de estudio en el epígrafe 3 de este Capítulo.

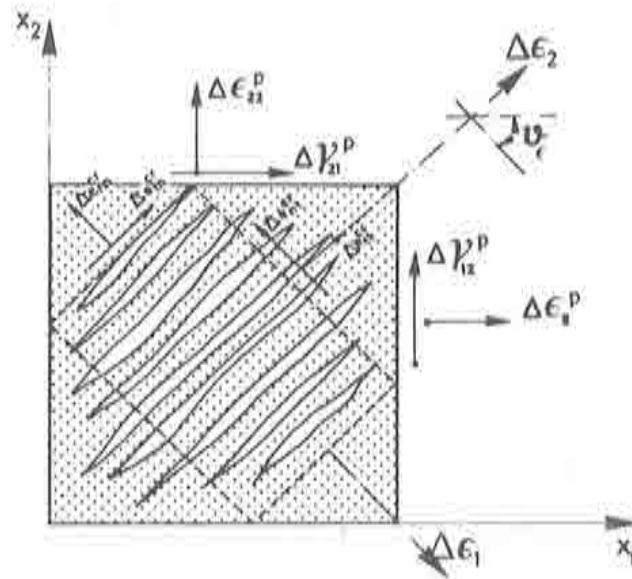
2.5. Identificación de la fisuración

Un concepto latente en el modelo, la asimilación de la plastificación con la existencia de fisuración, permite una interpretación del estado de plastificación alcanzado en un punto para obtener el nivel y dirección de la fisuración en el mismo.

Dirección de la fisuración. Se considera que hay fisuración cuando la variable de daño plástico k^p es distinta de cero ($0 \leq k^p \leq 1$). La dirección de las fisuras coincide con la dirección de las deformaciones plásticas principales siempre que éstas sean positivas (ver Figura II.6).

Apertura de la fisura. La apertura de la fisura a_f se obtiene integrando la correspondiente deformación plástica principal sobre el espesor de la banda de fisuración proporcionado por la longitud característica:

$$a_f = \int_0^l \epsilon^r dl \quad (II.17)$$



$$\Delta e^p = \begin{Bmatrix} \Delta \epsilon_{11}^p \\ \Delta \epsilon_{22}^p \\ \Delta \gamma_{12}^p \end{Bmatrix} ; \quad \Delta e^{p'} = \begin{Bmatrix} \Delta \epsilon_{11}^{p'} \\ \Delta \epsilon_{22}^{p'} \\ \Delta \epsilon_{33}^{p'} = 0 \end{Bmatrix}$$

Figura II.6. Direcciones de fisuración.

2.6. Ejemplos de aplicación

PROBETA A COMPRESIÓN. ENSAYOS DE KUPFER

Los ensayos realizados por Kupfer, Hilsdorf y Rüschi³⁷ sobre probetas de hormigón sometidas a compresión, son unos de los más utilizados para verificar la precisión de los modelos en este dominio tensional. En la Figura II.7 se presentan las características geométricas y mecánicas de la probeta y los valores adoptados para los parámetros propios del modelo. Hay que indicar que no se ha hecho ningún esfuerzo especial para "jugar" con los valores de dichos parámetros con el fin de obtener un mayor ajuste de los resultados experimentales. Dichos valores han sido obtenidos, bien de los datos proporcionados por los autores de los ensayos o, en los casos donde no se indicaban dichos datos, estimados dentro del rango de valores normal en hormigones. Los ensayos experimentales corresponden a distintos estados de compresión biaxial ($\sigma_{11} \neq 0$ $\sigma_{22} \neq 0$ $\sigma_{33} = 0$) que se incrementan radialmente. En la Figura II.8, II.9 y II.10 se muestran los resultados de la simulación de dichos ensayos para distintas relaciones de las tensiones principales del plano de compresión, $\sigma_{11}/\sigma_{22} = -1/0$ (Figura II.8), $\sigma_{11}/\sigma_{22} = -1/-1$ (Figura II.9) y $\sigma_{11}/\sigma_{22} = -0.52/-1$ (Figura II.10). En todas ellas se comparan los resultados del modelo con los experimentales y con los obtenidos por otros autores.

Como puede observarse, el modelo desarrollado proporciona un buen ajuste de dichos ensayos y mejora sensiblemente los resultados de modelos precedentes.

En la Figura II.11, y para el caso de carga $\sigma_{22}/\sigma_{11} = -1/0$, se muestran las direcciones

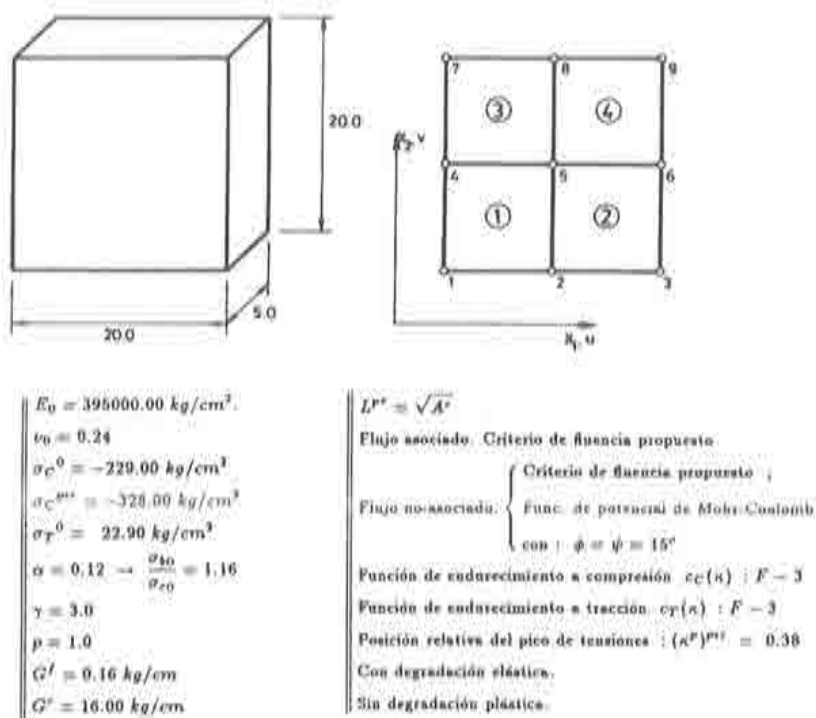


Figura II.7 Ensayos de compresión biaxial. Características geométricas, mecánicas y malla de elementos finitos utilizada en el ensayo numérico.

de fisuración proporcionadas por el modelo que, como se ve, reproduce la aparición de fisuras, ortogonales al plano de compresión, típicas de un ensayo de compresión simple.

ENSAYO A FLEXIÓN Y CORTANTE DE UNA VIGA DE HORMIGÓN EN MASA

Se trata en este caso de reproducir el comportamiento de una viga de hormigón en masa con una entalla, en el centro de la misma, que corresponde a un ensayo de laboratorio realizado por Arrea e Ingafrea²³. El ensayo pretende introducir, a partir de la entalla, lo que en Mecánica de Fractura se denomina "modo mixto de fractura" como combinación de esfuerzos de flexión y cortante. En la Figura II.12 se presenta la probeta, el dispositivo de carga (a través de una viga de acero) y de apoyos. Dicha viga de acero es considerada también en el análisis numérico para tener en cuenta los efectos de su deformabilidad sobre las cargas que transmite a la probeta. Esta circunstancia es muy importante a efectos de reproducir correctamente el comportamiento en el régimen de ablandamiento.

El ensayo se realizó aumentando progresivamente el nivel de deslizamiento vertical de los labios de la entalla (tal como se indica en la Figura II.12) modificando convenientemente la carga que actúa en el punto C. En la Figura II.13 se presentan los resultados carga-desplazamiento obtenidos, comparándolos con la banda de resultados experimentales correspondientes a ensayos con distintas probetas. Puede comprobarse el buen ajuste entre

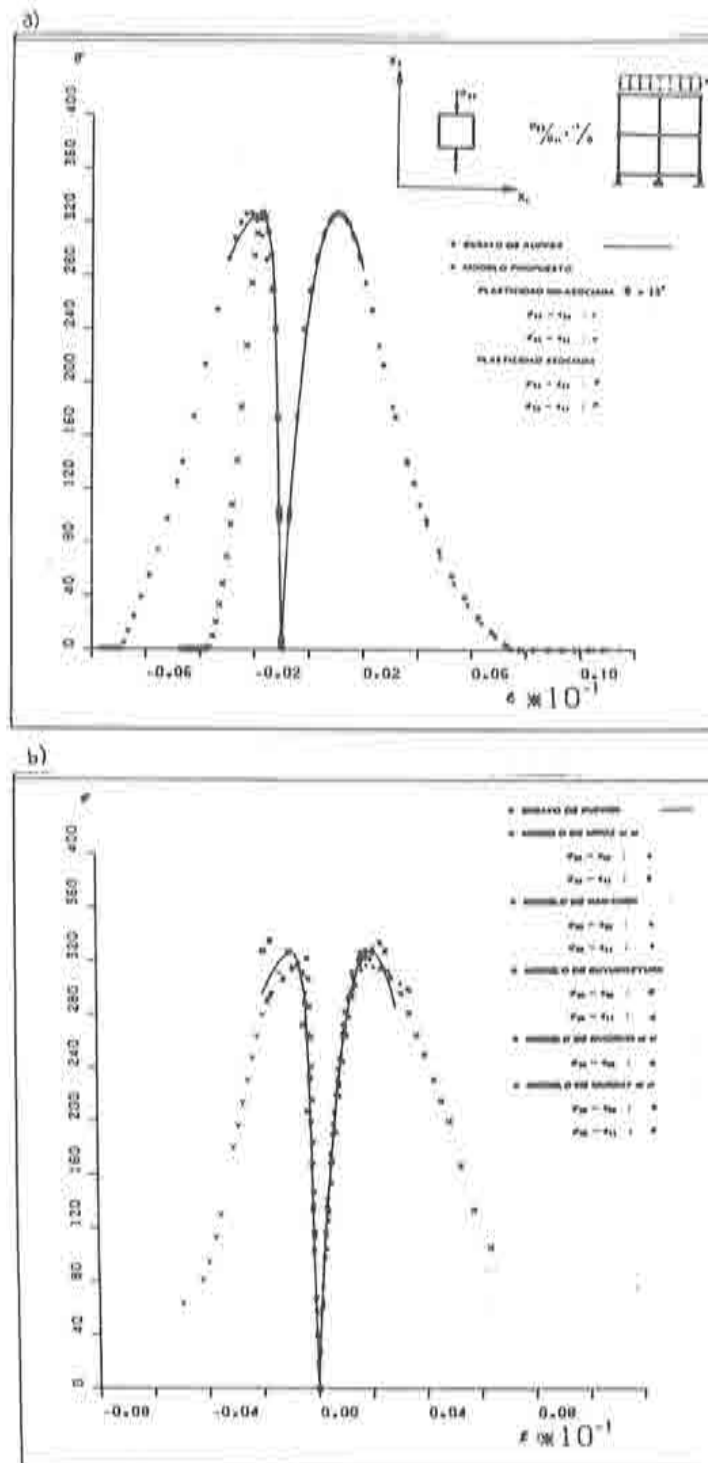


Figura II.8. Caso de carga a : ($\sigma_{22}/\sigma_{11} = -1/0$ y $\sigma_{33} = 0$). a) Comparación entre el resultado obtenido por el modelo, y el ensayo de Kupfer et al.⁴; b) Comparación entre el resultado del ensayo de Kupfer et al.⁴ y los obtenidos por los modelos numéricos de Mrox et al.¹⁰, Han an Chen²⁸, Boyukozturk²⁹, Dvorkin et al.³⁰ y Murray et al.³¹.

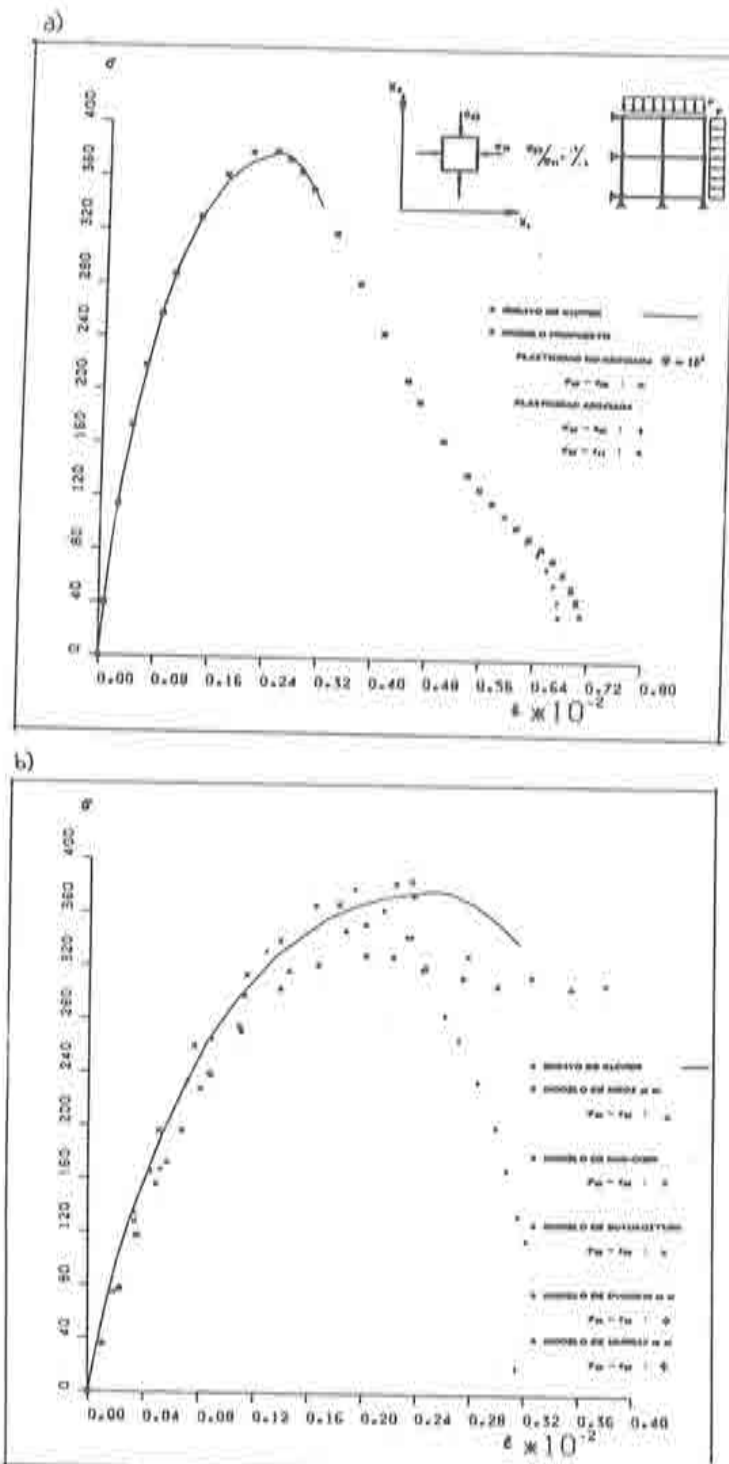


Figura II.9. Caso de carga b : ($\sigma_{22}/\sigma_{11} = -1/-1$ y $\sigma_{33} = 0$). a) Comparación entre el resultado obtenido por el modelo, y el ensayo de Kupfer et al.⁴; b) Comparación entre el resultado del ensayo de Kupfer et al.⁴ y los obtenidos por los modelos numéricos de Mroz et al.¹⁹, Han an Chen²⁰, Boyukozturk²⁰, Dvorkin et al.²⁰ y Murray et al.²¹.

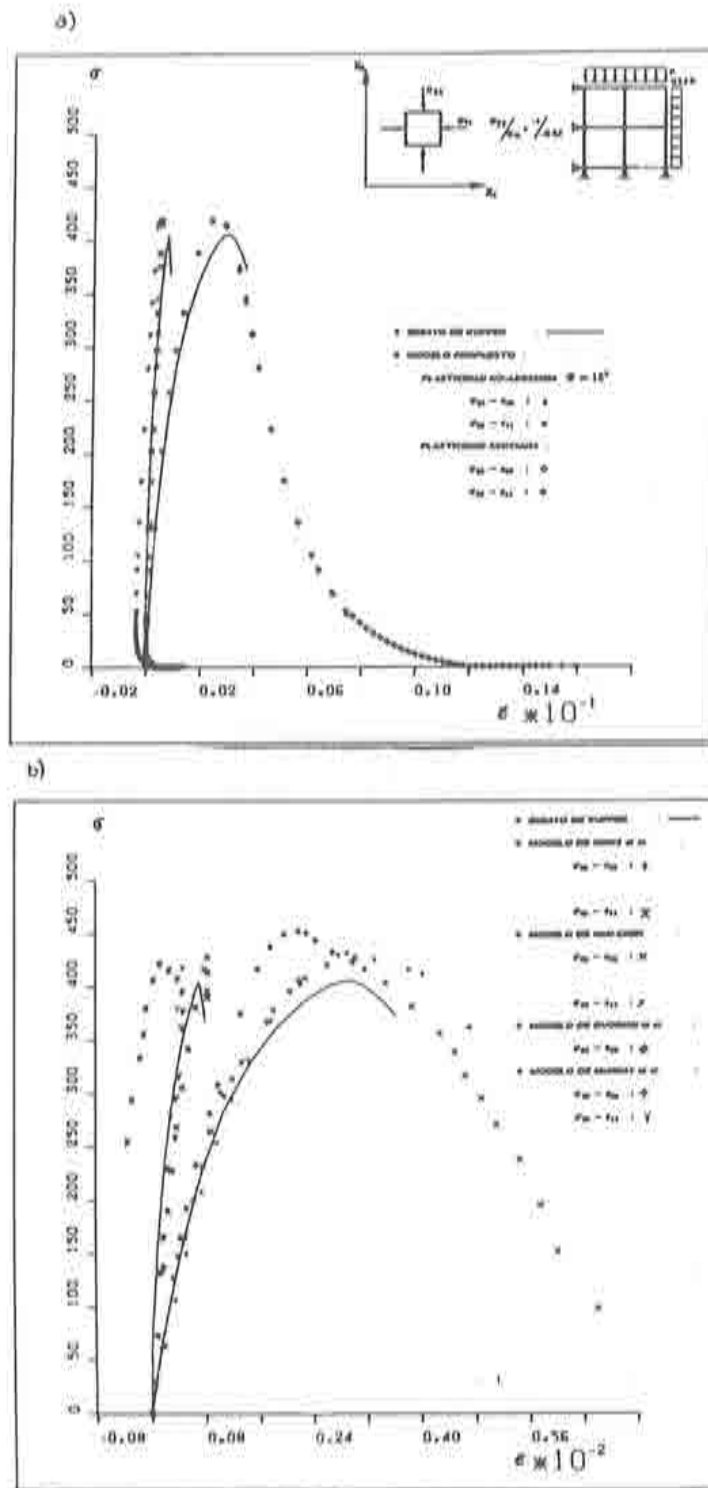


Figura II.10. Caso de carga c: ($\sigma_{22}/\sigma_{11} = -1/-0.52$ y $\sigma_{33} = 0$). a) Comparación entre el resultado obtenido por el modelo, y el ensayo de Kupfer et al.⁴; b) Comparación entre el resultado del ensayo de Kupfer et al.⁴ y los obtenidos por los modelos numéricos de Mroz et al.¹⁶ Han an Chen²⁸, Boyukosturk²⁹, Dvorkin et al.³⁰ y Murray et al.³¹.

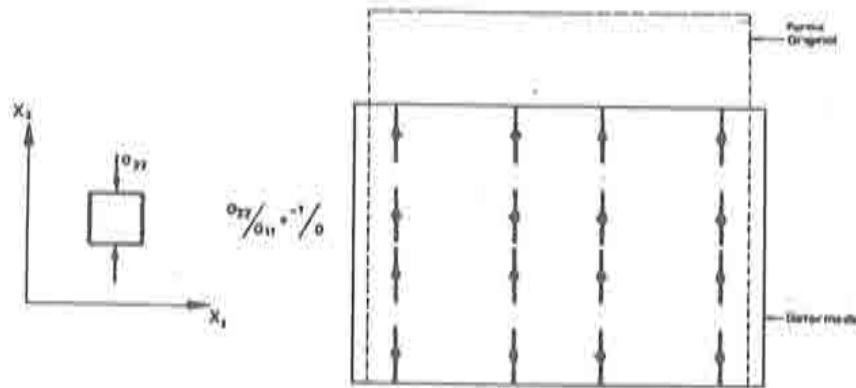


Figura II.11. Fisuración que resulta del modelo, para un caso de compresión simple.

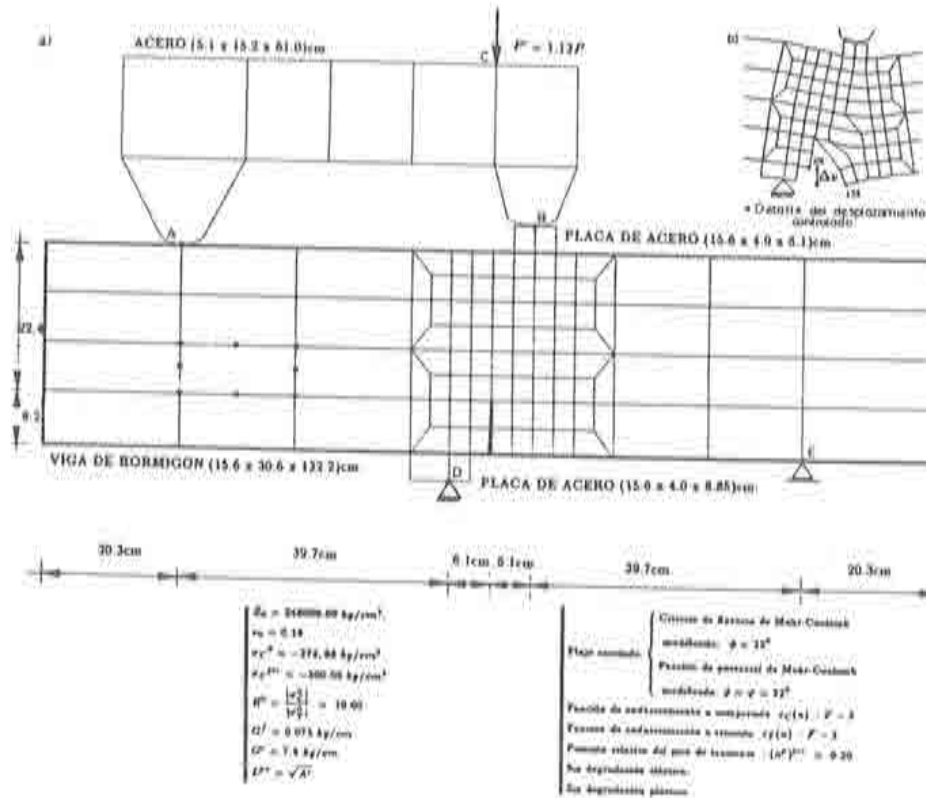


Figura II.12. Ensayo a flexión y cortante. Características geométricas, malla de elementos finitos y propiedades del material.

ambos.

En la Figura II.14 se presenta la evolución de la fisuración en distintas etapas de la

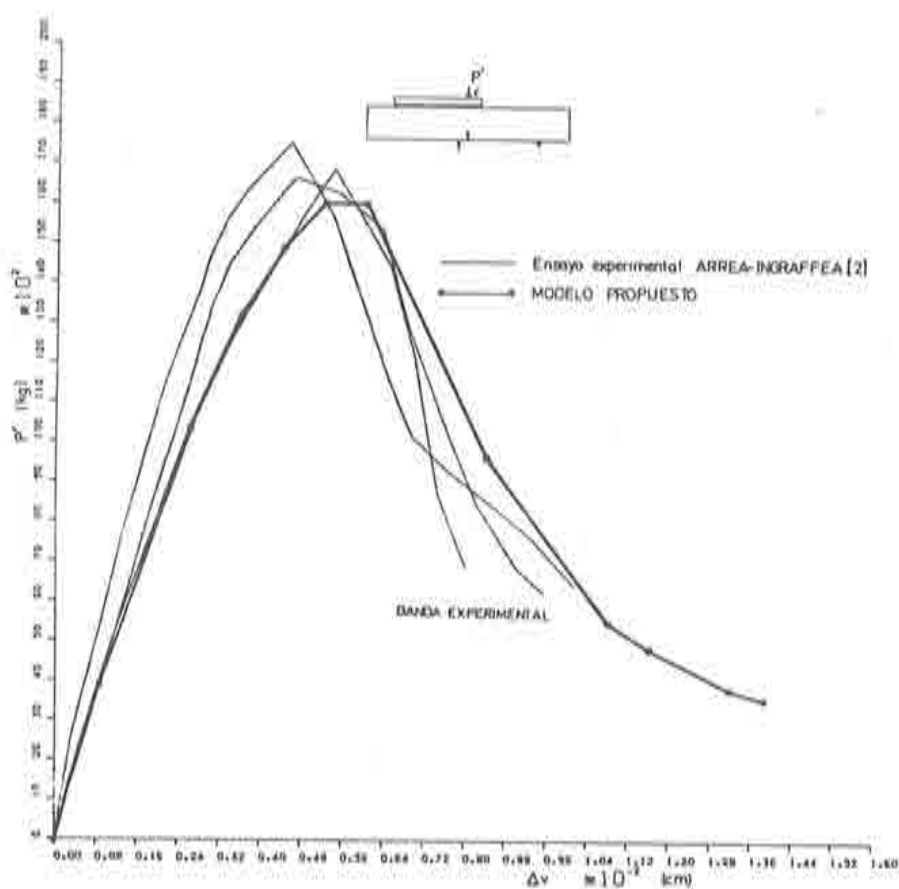


Figura II.13. Ensayo a flexión y cortante. Comparación de los resultados carga-desplazamiento correspondientes a los ensayos numéricos y experimentales.

simulación del ensayo. Inicialmente (Figura II.14a) la fisuración se propaga verticalmente a partir de la entalla apareciendo también cierta fisuración en la cara superior de la probeta. Esta situación corresponde a un estado donde predominan los efectos de flexión sobre la viga. Al aumentar la carga, la pérdida de rigidez a tracción en la sección de la entalla, modifica la distribución de esfuerzos sobre la misma desarrollándose una fuerte cisalladura que provoca la posterior progresión de la grieta que se inclina hacia el apoyo superior; se reproducen así perfectamente los efectos de progresión de la fisura comprobados experimentalmente (Figura II.14b y II.14c).

En la Figura II.15 se muestran los estados tensionales (se dibujan con trazos las direcciones de las tensiones principales escaladas según su valor) para distintos instantes del ensayo, donde se puede observar la relajación de las tensiones en la zona por donde discurre la fisura. Finalmente en la Figura II.16 se presenta la deformada de la estructura (amplificada 300 veces) para la carga última, donde puede verse la concentración de deformaciones en los elementos por donde discurre la fisura (banda de localización o de fisuración).

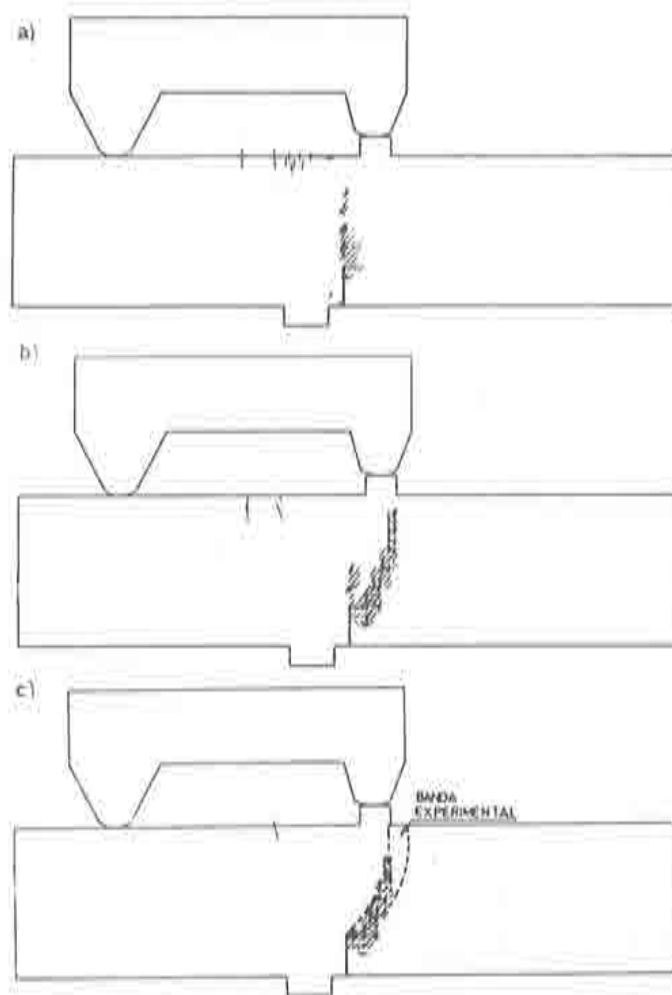


Figura II.14. Ensayo a flexión y cortante. Estado de fisuración en la viga:
 a) En el pico de tensiones (punto *B* de la Figura II.13).
 b) En el límite último (punto *C* de la Figura II.13). Fisuras mayores que el 3% de la máxima.
 c) En el límite último (punto *C* de la Figura II.13). Fisuras mayores que el 5% de la máxima banda experimental.

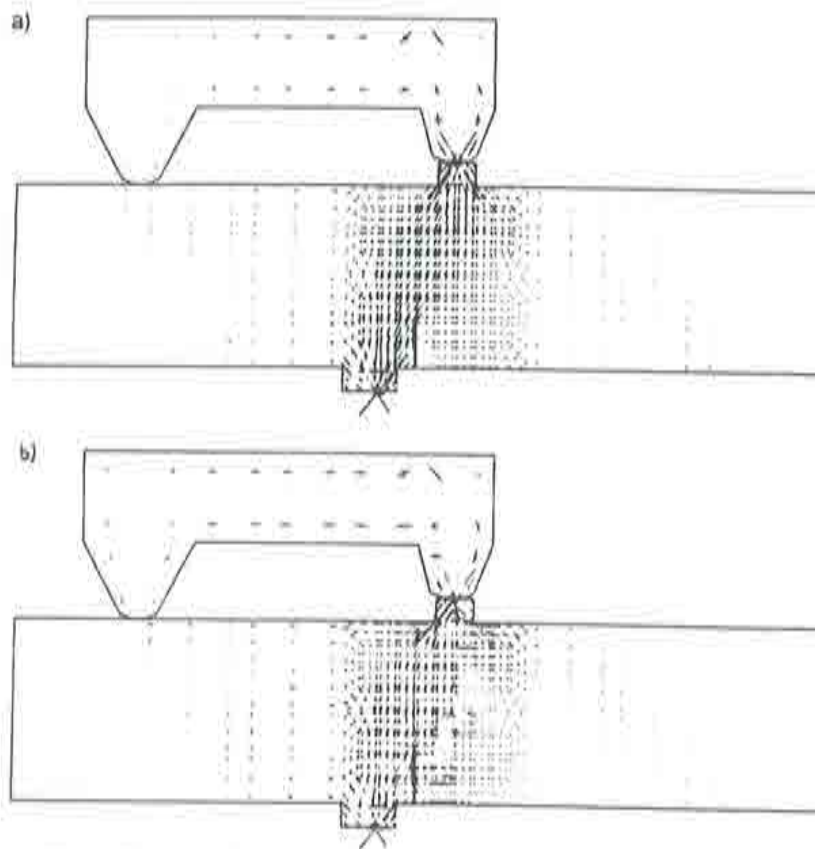


Figura II.15. Ensayo a flexión y cortante. Estados tensionales.
 a) Estado correspondiente al límite elástico (punto *A* de la Figura II.13).
 b) Estado correspondiente a la carga última (punto *C* de la Figura II.13).

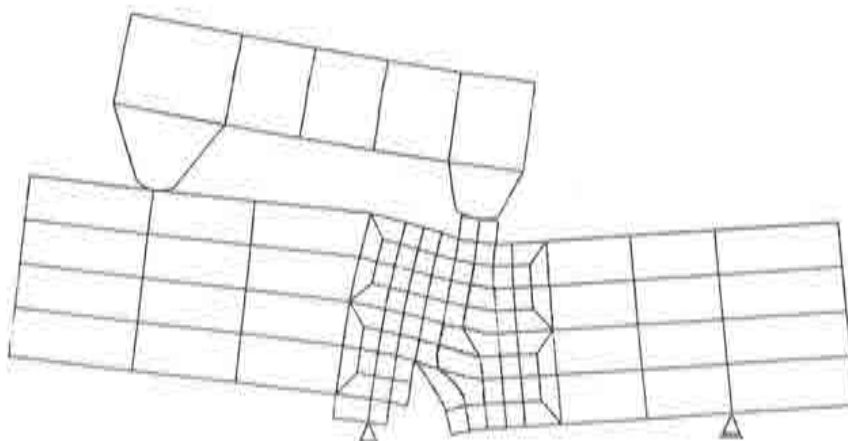


Figura II.16. Ensayo a flexión y cortante. Deformada de la viga (amplificada 300 veces) y banda de localización para la carga última (punto *C* de la Figura II.13).

3. UNA FORMULACION CONSISTENTE DE LA LONGITUD CARACTERISTICA PARA MODELOS DE FISURA DISTRIBUIDA

3.1. Generalidades

Como se ha indicado en el Capítulo I (apartados 3.4 y 3.5), la longitud característica es un parámetro fundamental para conseguir que los modelos de fisuración distribuida produzcan una disipación energética correcta y la correspondiente objetividad de los resultados respecto al tamaño de la malla de elementos finitos. En los modelos unidimensionales allí estudiados, la longitud característica era fácilmente interpretable como la anchura del elemento que simula la fisura (ver Figura I.7a).

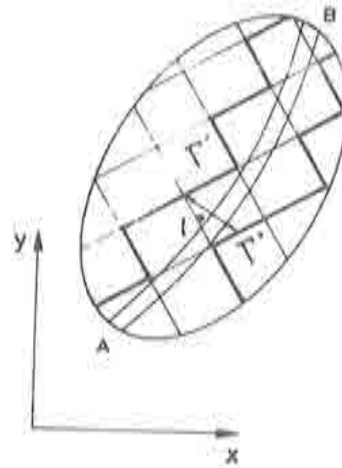


Figura II.17. Fisura en el medio discretizado.

Consideremos ahora un caso más general correspondiente al problema bidimensional y una fisura que discurre por el medio discretizado y cuyo comportamiento viene de alguna forma representado por el del conjunto de elementos que atraviesa (ver Figura II.17). De nuevo, las simples consideraciones de disipación energética del apartado 3.3, no pueden ser extendidas inmediatamente al problema bidimensional. De hecho existen diversos intentos, generalmente bastante empíricos e intuitivos, de llevar a cabo esta generalización. Sin embargo, un tratamiento consistente del concepto de longitud característica necesita una profundización previa en el funcionamiento de los modelos de fisura distribuida en dos o tres dimensiones. En los siguientes apartados se presenta el resultado de este esfuerzo que conduce a una formulación del concepto de longitud característica de carácter más general. Por motivos de simplificación de la formulación matemática, se presenta únicamente el tratamiento bidimensional del problema, aunque la generalización a tres dimensiones es inmediata.

3.2. Idealización del comportamiento de una banda de localización.

En la Mecánica de Medios Continuos no se contempla la posibilidad de discontinuidad del campo de desplazamientos (discontinuidad del medio) pero sí la discontinuidad de las derivadas (o gradientes) de dicho campo. Las líneas del Medio Continuo a través de las cuales se mantienen continuos los desplazamientos pero discontinuas sus derivadas (ver Figura II.18) se denominan líneas singulares y la condición para que un punto pertenezca a una línea singular puede deducirse a partir de la ecuación constitutiva en dicho punto.

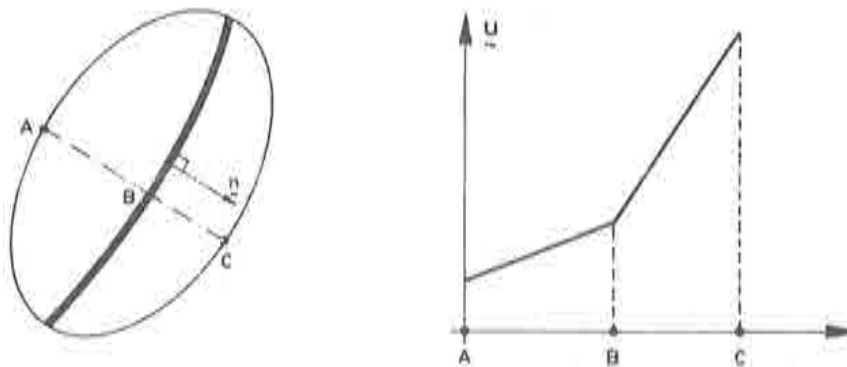


Figura II.18. Línea singular en el medio continuo.

Sea la ecuación constitutiva incremental en un punto del Medio Continuo definida por

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} \tag{II.18}$$

donde σ_{ij} y ϵ_{kl} son las componentes del tensor de tensiones y deformaciones y C_{ijkl} las componentes del tensor constitutivo tangente.

La condición para que un punto del medio continuo B (ver Figura II.18) pertenezca a una línea singular, de normal n en dicho punto, es que el determinante del denominado "tensor acústico" en dicha dirección ($Q(n)$) sea nulo:

$$\det [Q_{jk}] = \det (n_i C_{ijkl} n_l) = 0 \tag{II.19}$$

La condición (II.19) es la denominada **condición de localización**. Puede demostrarse que la inclusión del ablandamiento por deformación en la ecuación constitutiva propicia la formación de líneas singulares con el consiguiente cumplimiento de la condición de localización. En el caso particular del modelo de Rots y otros³ considerado en el Capítulo I, la condición (II.19) se produce precisamente en las direcciones que se presuponen para las fisuras, lo que permite identificar las direcciones de fisuración con las de las líneas singulares.

Definamos ahora una banda singular como el dominio encerrado por dos líneas singulares (ver Figura II.19) cuya distancia h es infinitesimal. Sean Γ^+ y Γ^- las dos líneas singulares, x' e y' un sistema de líneas coordenadas en la dirección normal y tangencial a la línea singular y $u^+(y')$ y $u^-(y')$ los desplazamientos en puntos homólogos (con la misma coordenada x') en las líneas Γ^+ y Γ^- . Definamos:

$$\omega(y') = u^+(y') - u^-(y') \quad (II.20)$$

como el "salto" de los desplazamientos entre ambos puntos. Si este salto ω se mantiene finito cuando el espesor de la banda tiende a cero

$$\delta(y') = \lim_{h \rightarrow 0} \omega(y') \neq 0 \quad (II.21)$$

la banda singular modelará un campo de desplazamientos discontinuo como un límite inalcanzable, pero aproximable, de un campo de desplazamientos continuo (ver Figura II.19)

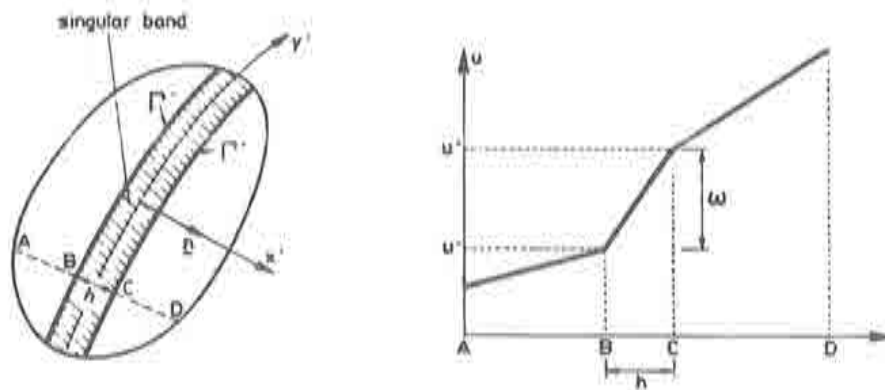


Figura II.19. Banda singular entre dos líneas singulares.

Establezcamos para la banda singular el siguiente comportamiento idealizado:

- a.- Los desplazamientos en el interior de la banda, siguen la siguiente ley de variación:

$$u(x', y') = u^-(y') + \phi(x', y') \cdot \omega \quad (II.22)$$

siendo ϕ una función que cumple las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} \phi &= 0 & \text{en } \Gamma^- \\ \phi &= 1 & \text{en } \Gamma^+ \end{aligned} \quad (II.23)$$

Puede demostrarse** que la ecuación (II.22) es una aproximación a los dos primeros términos del desarrollo en serie de Taylor del campo de desplazamientos en el interior de la banda en la medida en que la función ϕ aproxime el valor $\Delta x'/h$ (ver Figura II.20a)

- b.- El vector de tracciones t , actuando sobre superficies paralelas a las líneas singulares, de componentes:

$$t_i = \sigma_{ij} n_j \quad (II.24)$$

no varía a lo largo de la normal a la banda, es decir

$$t^+(y') = t^-(y') = t(x', y') \quad (II.25)$$

donde t^+ y t^- son las componentes del vector t en puntos homólogos lejos de las líneas Γ^+ y Γ^- respectivamente.

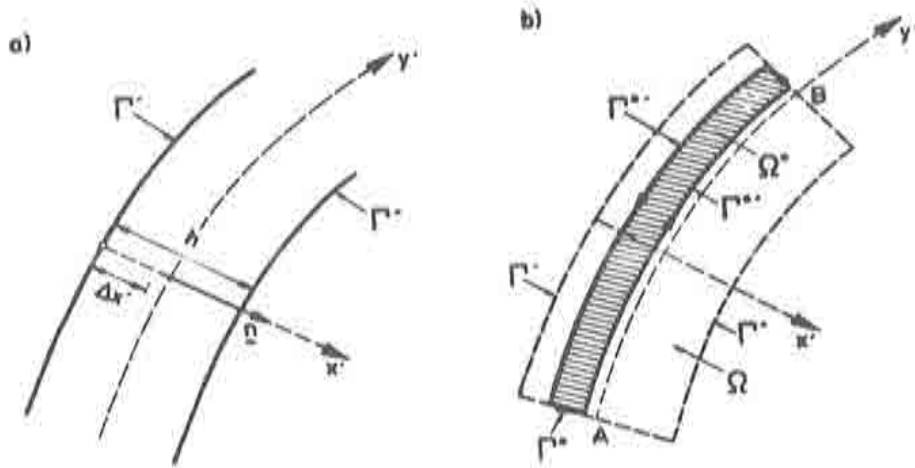


Figura II.20. Análisis de la banda singular.

3.3. Disipación de energía en el interior de la banda

Consideremos un proceso monótono creciente de deformación, en el interior de la banda singular, que se produce a lo largo del tiempo τ ($0 \leq \tau \leq \infty$). La energía disipada por unidad de área en este proceso (energía específica) será:

$$g_f(x', y') = \int_0^\infty \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} = \int_0^\infty \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} d\tau \quad (II.26)$$

En un proceso de deformación uniaxial g_f sería el área encerrada debajo de la curva tensión-deformación (ver Figura II.21).

Considerando un dominio Ω^* cualquiera en el interior de la banda (ver Figura II.20b) entre dos puntos de la misma A y B, y mediante la utilización de simples transformaciones matemáticas, puede obtenerse la siguiente expresión para la energía disipada en dicho dominio Ω^{**} :

$$W^* = \int_{\Omega^*} g_f d\Omega^* = G_f \int_{\Omega^*} \frac{\partial \phi}{\partial x'} d\Omega^* \quad (II.27)$$

donde G_f se obtiene de la siguiente expresión

$$G_f = \int_0^\infty t \cdot \dot{\omega} d\tau \quad (II.28)$$

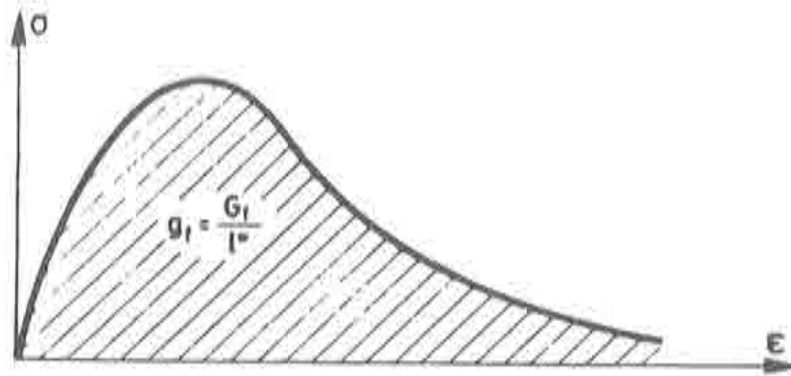


Figura II.21. Curva tensión-deformación en un proceso uniaxial.

Evidentemente la ecuación (II.28) permite identificar a G_f como la energía disipada por unidad de longitud de la banda es decir, como la energía de fractura G_f .

La ecuación (II.27) puede ser llevada al límite ($\Omega^* \rightarrow d\Omega^*$) con lo que se obtiene:

$$g_f = G_f \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \quad (II.29)$$

Comparando la expresión (II.29) con la definición de la longitud característica l^* y a partir de la definición de la energía específica g_f como:

$$g_f = \frac{G_f}{l^*} \quad (II.30)$$

puede identificarse la longitud característica como:

$$l^* = \frac{1}{\frac{\partial \phi}{\partial x^i}} \quad (II.31)$$

3.4. Aplicación al sólido discretizado

El comportamiento "ideal" de la banda singular descrito en el apartado anterior puede ser aplicado en el contexto de un análisis por el método de los elementos finitos. En este caso las líneas singulares vienen representadas por los lados de los elementos (única parte de los mismos donde, con los elementos usuales de continuidad C^0 , pueden producirse derivadas discontinuas de los desplazamientos). La banda singular queda entonces representada por el conjunto de elementos a través de los cuales discurre la fisura (ver Figura II.22)

A esta banda de elementos se le asigna el comportamiento de una banda singular como la descrita, con lo que el refinamiento de la malla reproducirá de forma adecuada el comportamiento de la fisura y sus efectos en el resto de la estructura. La longitud característica responderá entonces a la ecuación (II.31) debiendo determinarse adecuadamente el valor de la función ϕ .

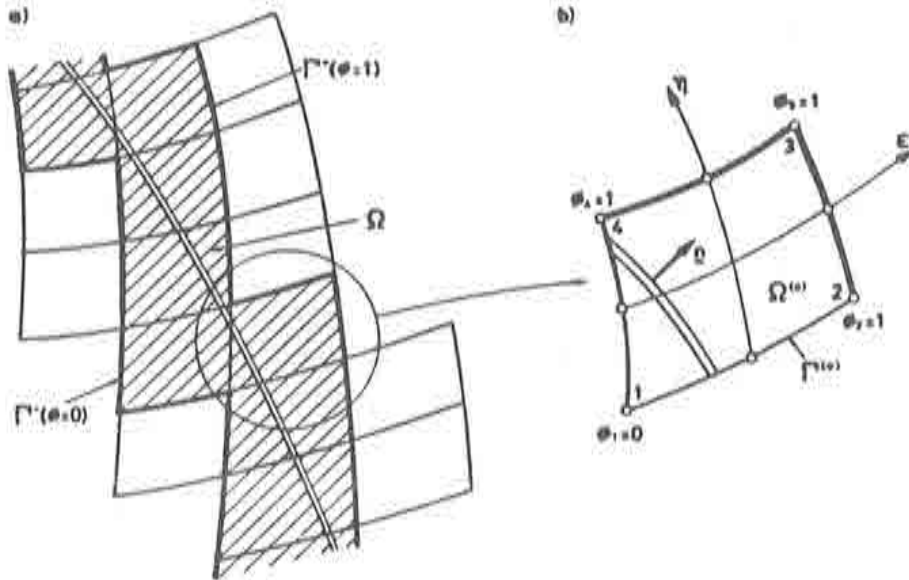


Figura II.22. Banda de elementos finitos modelando una banda singular.

De acuerdo con la ecuación (II.31) la función ϕ debe ser una función continua y derivable que cumpla además las condiciones de la ecuación (II.23). Una función que cumple dichos requisitos es:

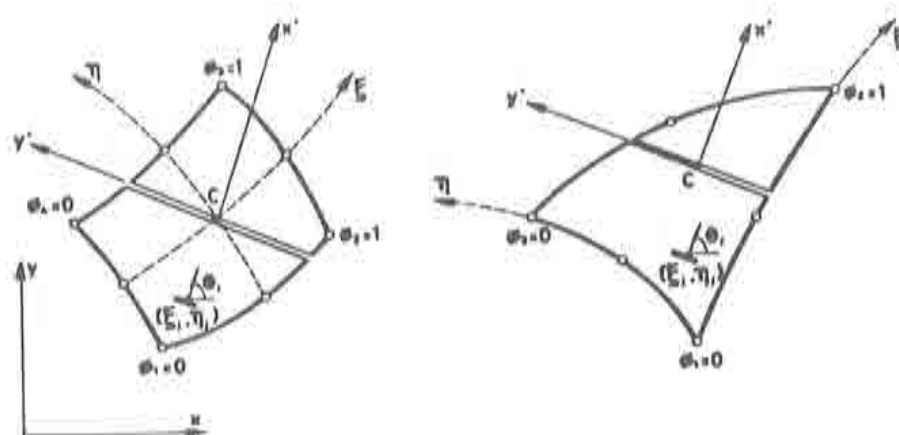
$$\phi(\xi\eta) = \sum_{i=1}^{n_c} N_i^*(\xi, \eta) \phi_i \quad (II.32)$$

donde n_c es el número de nodos de esquina del elemento ($n_c = 3$ en elementos triangulares y $n_c = 4$ para elementos cuadrilaterales), N_i^* son las funciones de forma usuales para elementos lineales de n_c nodos¹⁸, ξ y η son las coordenadas isoparamétricas normalizadas¹⁹ y ϕ_i es el valor de la función ϕ en el nodo de esquina i . Suponiendo que se conoce la posición de la fisura dentro del elemento, la función ϕ toma el valor 1 si el nodo de esquina i está situado "delante" de la fisura y 0 en caso contrario. En estas condiciones, la función ϕ definida por la ecuación (II.32) cumple todos los requisitos enunciados: es una función continua en el interior de los elementos, y entre elementos, y toma los valores 0 y 1 en los contornos Γ^+ y Γ^- (ver Figura II.22). En la referencia [34] puede encontrarse la descripción completa de un algoritmo para la determinación de dicha función.

Finalmente, la aplicación de la ecuación (II.31) a la función ϕ de la ecuación (II.32) permite obtener una sencilla expresión, fácilmente introdurible en cualquier modelo de fisuración, para la longitud característica:

$$l^* = \frac{1}{\frac{\partial \phi}{\partial x'}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n_c} \left(\frac{\partial N_i^*}{\partial x} \cos\theta + \frac{\partial N_i^*}{\partial y} \operatorname{sen}\theta \right) \phi_i} \quad (II.33)$$

En la ecuación (II.33) el ángulo θ es el ángulo de inclinación de la fisura respecto al

Figura II.23. Determinación de la función ϕ .

sistema de ejes globales utilizado en el análisis (ver Figura II.23)

3.5. Ejemplos de aplicación

Con el fin de comprobar la efectividad del procedimiento desarrollado se realizaron diversos experimentos numéricos utilizando el modelo de Rots et al.² descrito en el Capítulo I. Algunos de dichos ejemplos se presentan a continuación.

BARRA DE SECCIÓN CONSTANTE A TRACCIÓN

Se analiza la barra de la Figura II.24a sometida a un desplazamiento δ en un extremo, obteniéndose la fuerza F como la correspondiente reacción.

El campo de tensiones producido es constante, así que la solución obtenida por M.E.F. utilizando elementos lineales es exacta salvo en la posible falta de objetividad. Sin embargo, un campo de tensiones homogéneo como el idealizado en el ejemplo, no induce espontáneamente la localización, la cual tiene que ser estimulada artificialmente. En las mallas de la Figura II.24b aparecen sombreados los elementos en los que la localización se induce mediante una pequeña disminución de la resistencia a tracción f'_t . En dicha Figura, la secuencia A1 a A5 corresponde a elementos cuadriláteros con progresiva irregularidad en las mallas, y la secuencia A6 a A8 corresponde a elementos triangulares con diferentes mallas. En las Figuras II.24c y II.24d se presentan las curvas fuerza - desplazamiento y energía disipada - desplazamiento, respectivamente. Los resultados para todas las mallas coinciden con la solución teórica y son indistinguibles en las figuras. En consecuencia dichos resultados son totalmente objetivos respecto al tamaño y deformación de la malla.

BARRA ENTALLADA A TRACCIÓN

En este ejemplo se analiza una situación donde la localización se produce espontáneamente debido a un campo de tensiones no uniforme. Se trata de la barra de la Figura II.25a con una entalla en el centro que induce la localización en la zona de menor sección transversal. En la Figura II.25b se presentan varias mallas regulares de elementos

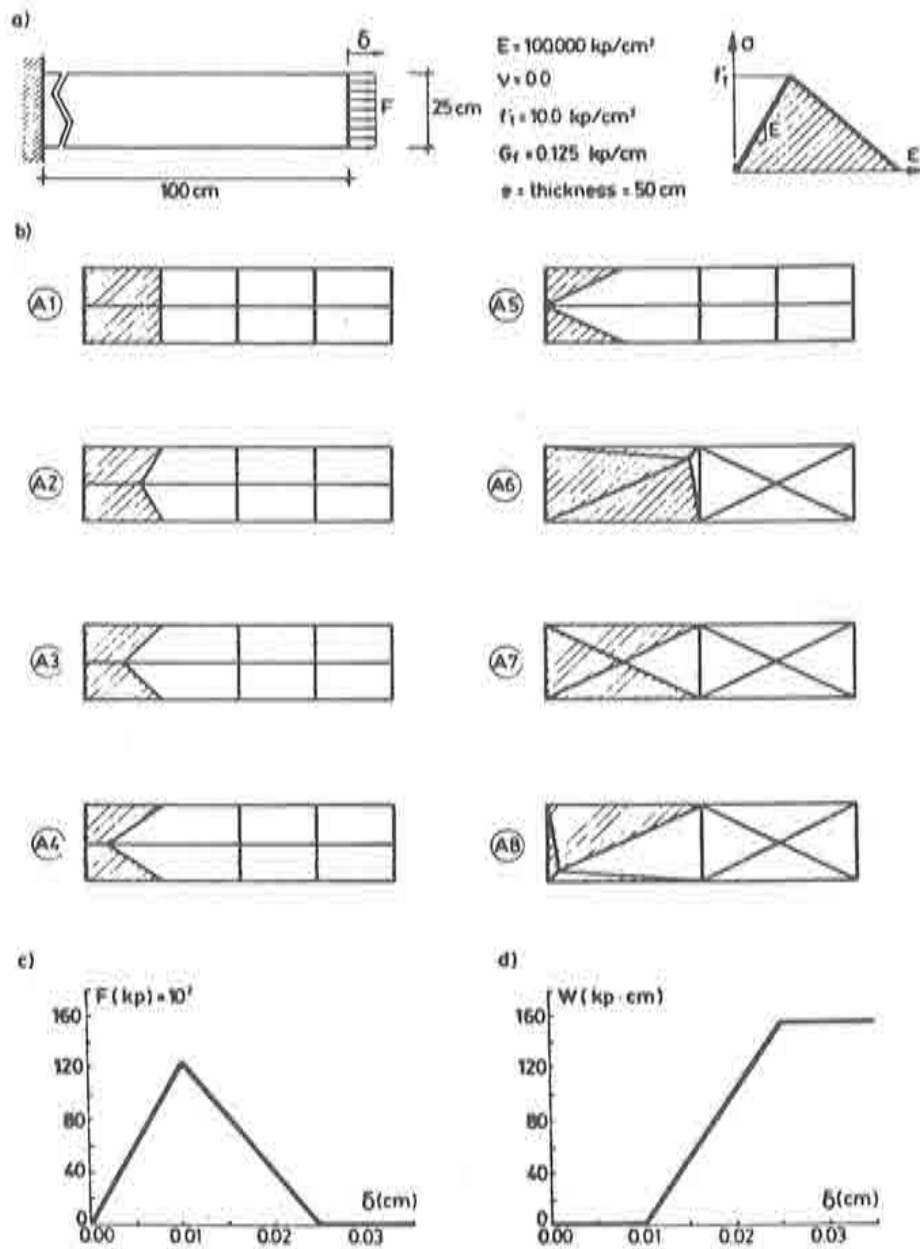


Figura II.24. Barra de sección constante a tracción.

lineales de cuatro nodos (mallas B1 a B3) y las correspondientes mallas deformadas (mallas B4 a B6). La última malla, B7, contiene una fila más delgada de elementos en la zona de menor sección. En todas las mallas se han sombreado los elementos donde se localiza la deformación.

Sobre dichas mallas se ha analizado el funcionamiento del algoritmo propuesto tanto en lo que se refiere a la convergencia con el refinamiento de la malla (objetividad) como a la

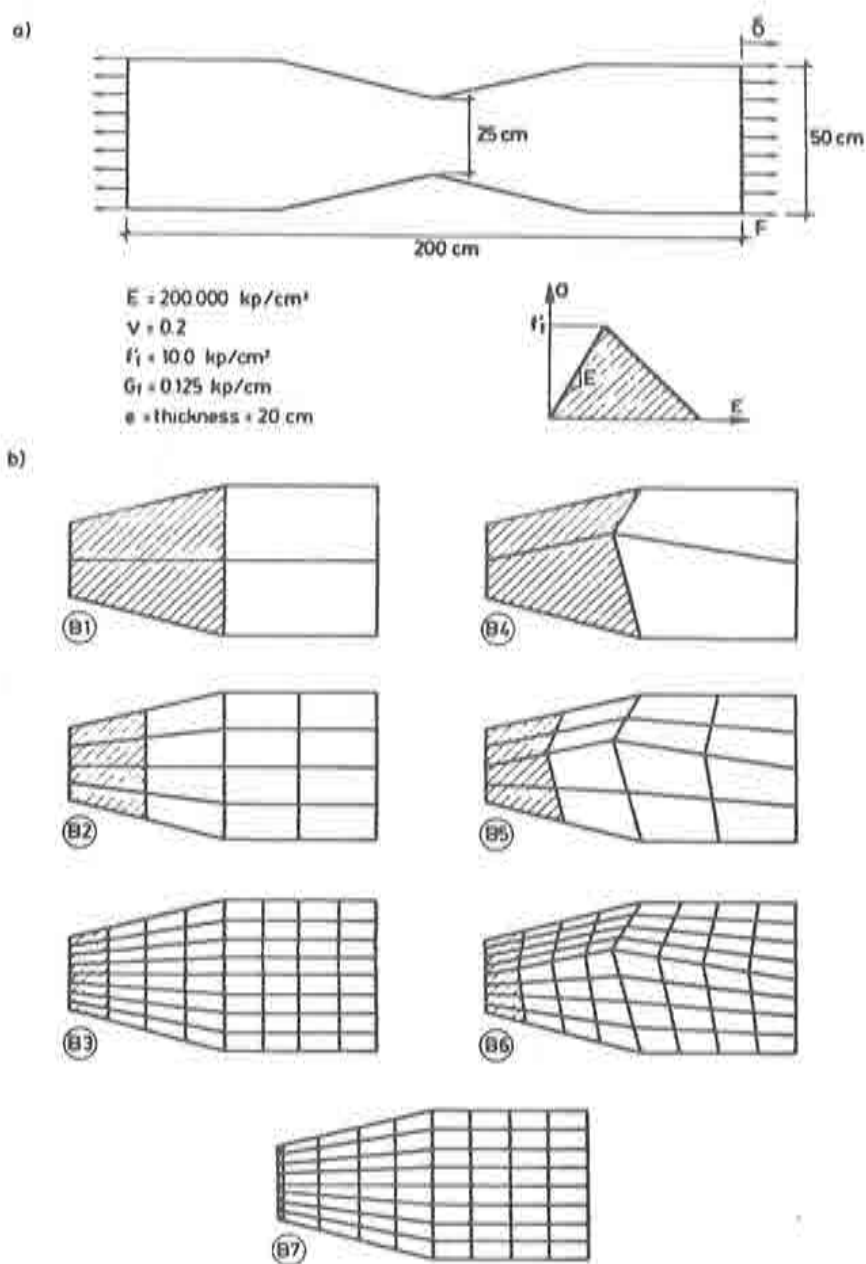


Figura II.25 Barra entallada a tracción.

influencia del orden de integración numérica de Gauss-Legendre¹⁹.

- **Convergencia con el tamaño y deformación de la malla.** En las Figuras II.26a y II.26b se presentan los resultados fuerza - desplazamiento y energía - desplazamiento para las distintas mallas. Puede observarse tanto la convergencia monótona de los

resultados hacia el valor teórico, con el refinamiento de la malla como la pequeña influencia (indistinguible en los dibujos) de la irregularidad de la malla en dichos resultados.

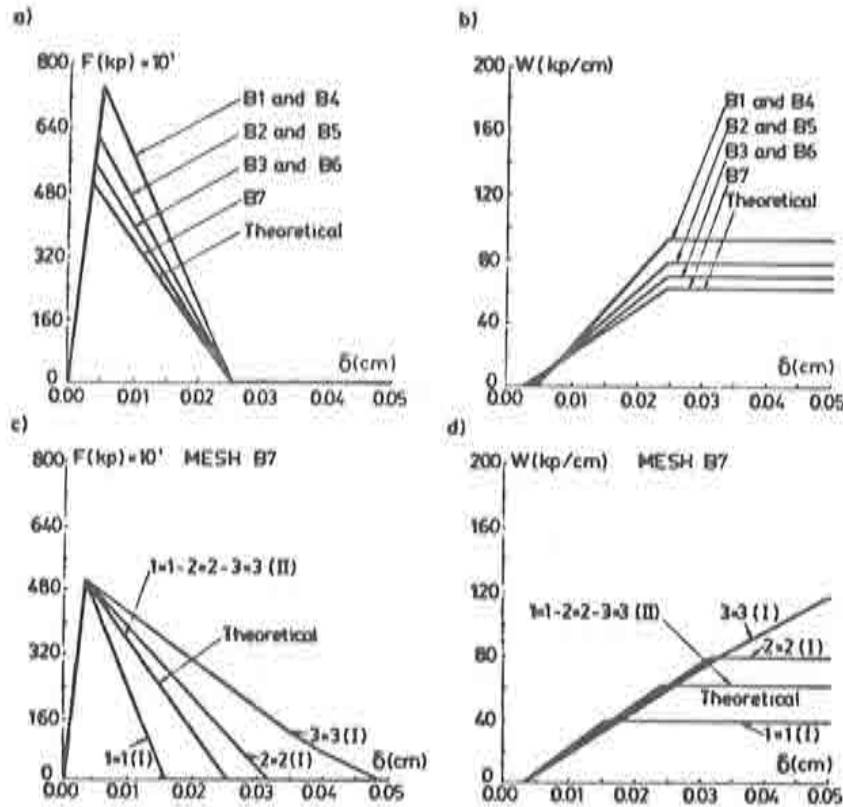


Figura II.26. Barra entallada a tracción (continuación).

- **Influencia del orden de integración numérica.** En las Figuras II.26c y II.26d se analiza, sobre la malla B7, la influencia del orden de integración de Gauss-Legendre. Se consideran dos esquemas distintos para la determinación de la longitud característica:

- I) Un esquema "Gaussiano" utilizado en muchas formulaciones^{9, 12, 21} en el que la longitud característica se toma como la raíz cuadrada del área de influencia de un punto de Gauss.
- II) El esquema propuesto en la ecuación (II.33).

En la Figura II.26c se presentan las curvas fuerza - desplazamiento en ambos casos (I y II) y diferentes órdenes de integración (1×1 , 2×2 y 3×3). En la Figura II.26d se muestran las correspondientes curvas energía disipada - desplazamiento. Puede observarse como el esquema propuesto (II) es totalmente insensible al orden de integración y produce resultados que coinciden exactamente con los teóricos. El esquema "Gaussiano" (I), por el contrario, es extremadamente sensible al orden de

integración produciendo un menor ablandamiento y una mayor disipación energética cuando se aumenta el orden de integración numérica.

4. UN MODELO "DISTRIBUIDO" PARA LA SIMULACION DEL COMPORTAMIENTO DE JUNTAS DE CONSTRUCCION

4.1. Introducción

Una junta es un elemento estructural que se caracteriza por introducir un campo de desplazamientos discontinuo, a ambos lados de la misma, manteniendo una cierta capacidad de transmisión de tensiones ya sean de compresión (al cerrarse los labios de la junta) o tangenciales (por efecto del rozamiento).

En este sentido, una junta y una fisura tienen ciertas características comunes (ambas introducen la mencionada discontinuidad transmitiendo tensiones) pero mantienen dos diferencias fundamentales, a saber:

- La junta es un elemento de discontinuidad cuya posición se conoce previamente al proceso de deformación, circunstancia que no ocurre con la fisuración cuya situación y orientación son desconocidas antes del cálculo.
- Una junta de construcción no tiene ninguna capacidad de resistencia a tracción. No existe ninguna cohesión, a efectos de tracción, entre las partículas situadas en uno u otro labio de la misma. Esta circunstancia permite que no sea necesario modelar un proceso de relajación de las tensiones de tracción (vía ablandamiento) en la junta. Consecuentemente, en los modelos de simulación de juntas tampoco aparecen los problemas relacionados con dicho ablandamiento (objetividad, inestabilidad y bifurcación, etc ...).

Estas consideraciones hacen pensar que el tratamiento y la elaboración de modelos para juntas debe ser conceptualmente más sencillo que el de los modelos de fisuración, y así es en realidad. El hecho de conocer la posición de la junta "a priori" permite introducir con facilidad su geometría en el análisis y, en cierta forma, considerar a la junta como un elemento estructural especial que modifica las condiciones de contorno correspondientes a la parte continua de la estructura. En este contexto, los modelos clásicos de juntas** introducen una ecuación constitutiva "singular" del tipo tensión - desplazamiento para la junta que permite determinar las tensiones sobre los labios de la misma entendidos como contorno de la estructura continua.

En la Figura II.27 se representa la ecuación constitutiva de un modelo bidimensional de junta. Las tensiones normal (σ) y tangencial (τ) a los labios de la junta se obtienen en función de los desplazamientos de apertura v' y de deslizamiento u' de dichos labios.

La tensión normal (Figura II.27b) es nula mientras la junta se abre y crece exponencialmente a medida que la junta se cierra. La forma de esta curva debe determinarse para aproximar la rigidez del material de relleno de la junta. En la Figura mencionada la curva tensión - desplazamiento es asintótica para un cierto valor v'_m que representa la

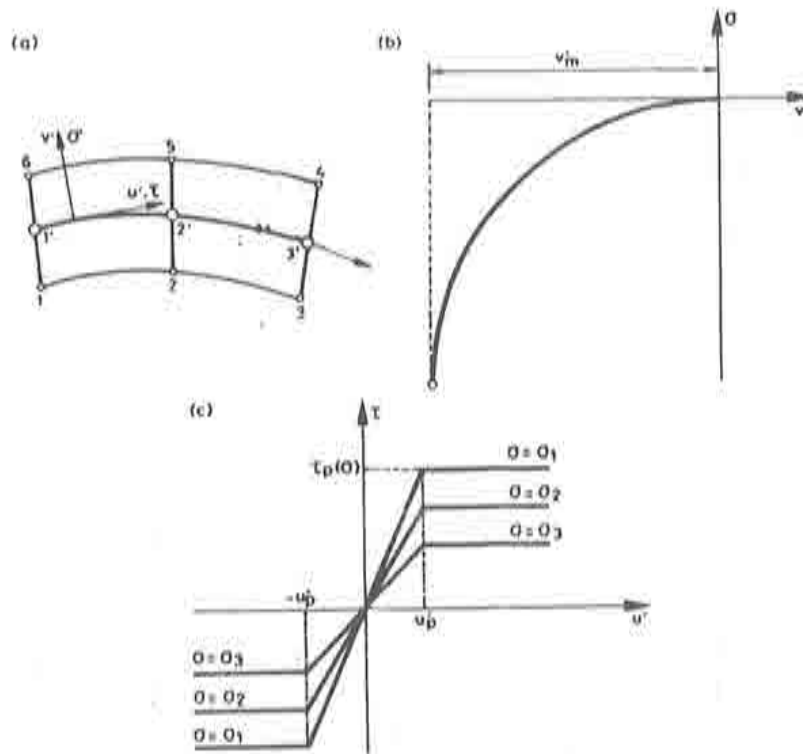


Figura II.27. Modelo discreto de junta.

apertura inicial entre labios de la junta; de tal forma que actúa como límite del movimiento de cierre de la junta en el instante en que ambos labios entran en contacto.

En cuanto a la tensión tangencial, se modela como se indica en la Figura II.27c. Se introduce un comportamiento lineal tensión - desplazamiento (que considera de nuevo la rigidez del material de relleno) hasta alcanzar un umbral (τ_p) para el cual se produce el deslizamiento libre. La curva tensión - desplazamiento depende del valor de la tensión normal de la forma:

$$\tau_p = -\sigma \operatorname{tg} \phi \tag{II.34}$$

donde ϕ es el ángulo de rozamiento entre los labios de la junta.

Este esquema ha sido la base para la elaboración de diversos modelos para juntas basados en la utilización de ecuaciones constitutivas tensión - desplazamiento.

El principal problema de todos ellos radica en la introducción la curva asintótica de la Figura II.27a, que por otra parte responde a un concepto físico evidente como es la limitación del desplazamiento de cierre de la junta. Al implementar dicha curva en un esquema para la resolución del problema no-lineal, la existencia de valores de los desplazamientos para los cuales las tensiones son infinitas, y que pueden ser alcanzados dentro del proceso iterativo, es un problema numérico importante. Para evitarlo hay que recurrir a métodos de resolución particulares⁸⁸ a costa de la generalidad y eficiencia del procedimiento de resolución del

problema no lineal.

La experiencia proporcionada por el estudio e investigación de los modelos de fisura distribuida presentados anteriormente, induce a pensar que la dualidad fisura discreta - fisura distribuida puede establecerse también para los modelos de junta, y que puede desarrollarse un modelo de "junta distribuida" que permita evitar el problema mencionado.

4.2. Modelo distribuido. Comportamiento en la dirección normal a la junta

Como en los casos de fisura distribuida, la idea subyacente es promediar el comportamiento discreto de una junta de apertura inicial δ_0 (ver Figura II.28a) sobre la longitud h del elemento continuo en el que se encuentra situada. Sea E^* el módulo de elasticidad que hay que asignar al material de dicho elemento para obtener el comportamiento superpuesto hormigón-junta (ver Figura II.28b). Estableciendo la igualdad de los desplazamientos obtenidos en ambas situaciones se obtiene la siguiente ecuación:

$$\frac{\sigma}{E} (h - \delta_0) = \frac{\sigma}{E^*} h \quad (II.35)$$

de donde puede obtenerse el módulo de elasticidad a asignar al elemento-junta distribuida como:

$$E^* = E \frac{h}{h - \delta_0} \quad (II.36)$$

Estas consideraciones permiten plantear una curva tensión - deformación para el elemento-junta como la indicada en la Figura II.28d y, mediante la transformación de la deformación "distribuida" en desplazamientos relativos de la junta ($\delta = \epsilon h$), la correspondiente curva $\sigma - \delta$ (ver Figura II.28c). La tensión para deformaciones de tracción (apertura) es nula y también para las de compresión hasta un umbral ($\delta = \delta_0$, $\epsilon = \delta_0/h$) que corresponde al cierre total de la junta. A partir de este punto el comportamiento en la dirección normal a la junta corresponde a un elemento "continuo" con un módulo de elasticidad E^* . Obsérvese que, en este caso, no aparecen ramas asintóticas en la ecuación constitutiva para tamaños de la malla h que no se acerquen mucho al de apertura inicial de la junta δ_0 . El refinamiento de la malla ($h \rightarrow \delta_0$) conduciría a dichos valores asintóticos y reproduciría nuevamente las ecuaciones de la junta "discreta". En circunstancias normales los tamaños de la malla utilizados son mucho mayores que las aperturas de las juntas y, por lo tanto, desaparecen los problemas de mal condicionamiento típicos de las juntas discretas. Como en el caso de la fisuración, si nuestro objetivo es reproducir los efectos de la discontinuidad en el resto de la estructura más que obtener valores exactos y precisos de tensiones y deformaciones en la propia junta, no hay razón para exigir en dichas zonas discretizaciones de nivel superior que el resto de la estructura.

4.3. Modelo distribuido. Comportamiento en la dirección tangencial a la junta.

Es conocida la similitud formal entre el tratamiento analítico del rozamiento entre dos sólidos y las ecuaciones de un modelo elastoplástico perfecto (con endurecimiento nulo).

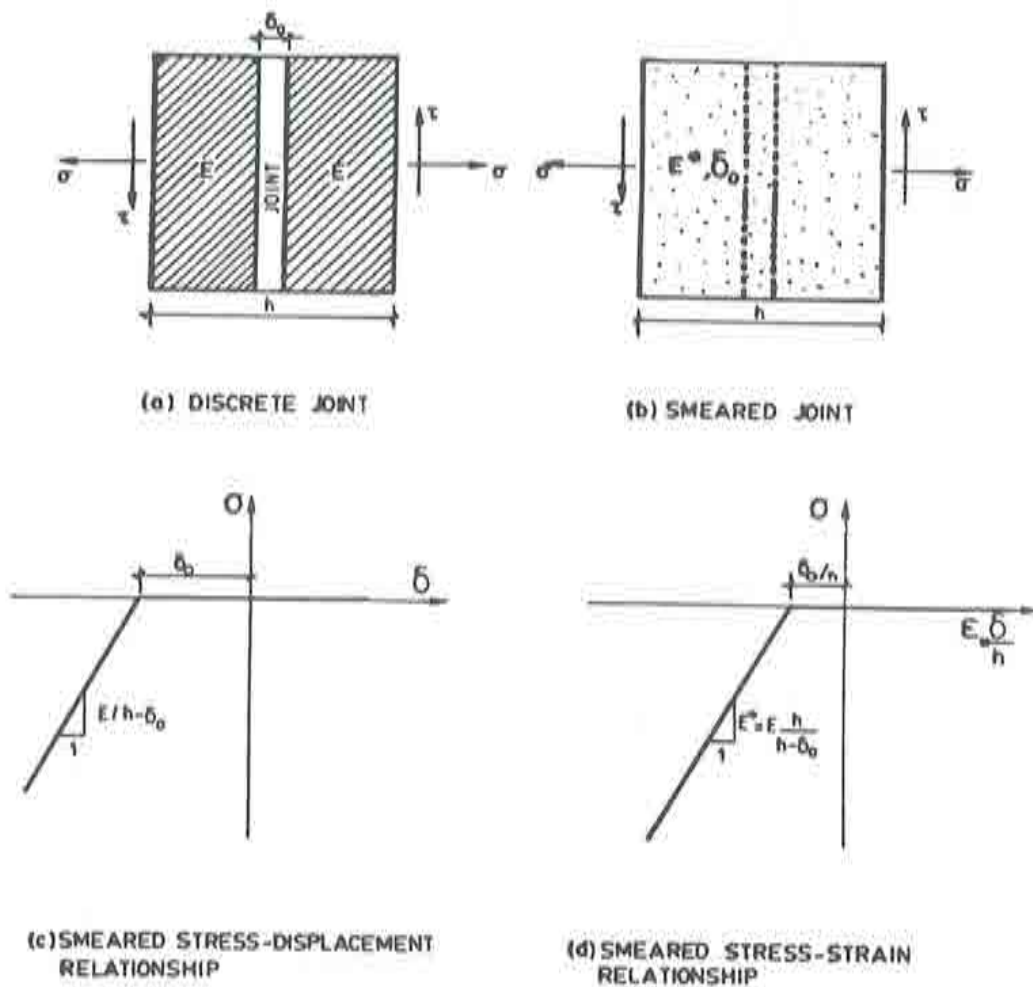


Figura II.28. Modelo distribuido de junta. Comportamiento en la dirección normal.

Esta similitud entre ambos modelos pasa por la "traducción" de las deformaciones plásticas, en el modelo elastoplástico, a desplazamientos en el modelo de rozamiento.

Esta circunstancia, y el hecho de que el concepto de "distribución" permite pasar de una ecuación constitutiva tensión - desplazamiento a otra tensión - deformación (ver apartado 4.2), ha sido aprovechada para modelar el comportamiento transversal de la junta mediante un modelo de elastoplasticidad perfecta.

Un modelo de rozamiento clásico puede resumirse en el esquema de la Figura II.29. Un sólido sometido a una tensión de compresión σ y a una tensión tangencial τ sufre únicamente deformaciones elásticas (recuperables al relajar σ y τ) siempre que el módulo de la tensión tangencial permanezca por debajo del umbral de deslizamiento:

$$\tau_{max} = c + \sigma \tan \phi \tag{II.37}$$

donde ϕ es el ángulo de rozamiento entre las superficies de deslizamiento y c la cohesión inicial entre ambas. En el instante en que se supera dicho umbral se produce un deslizamiento de componentes δ_y y δ_x , irrecuperable ante una posterior relajación de las tensiones a valores nulos, de tal forma que la dirección de movimiento coincide con la de la tensión tangencial actuante τ (ver Figura II.29).

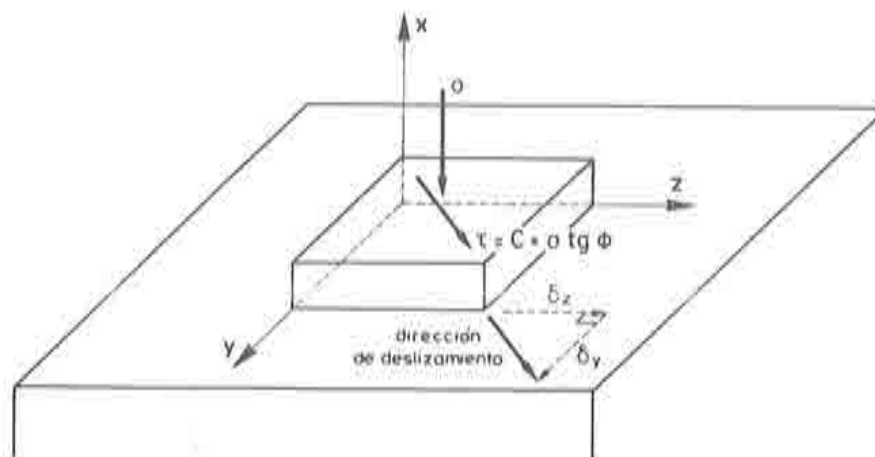


Figura II.29. Esquema de rozamiento

La traducción de este sencillo esquema al formalismo de la teoría de la plasticidad es la base para la elaboración del modelo de comportamiento transversal de la junta.

Consideremos una junta en el seno de un elemento de espesor h (ver Figura II.30a). En la Figura II.30b se representan la tensión normal σ_x (considerada positiva de tracción) y las tensiones tangenciales τ_{xy} y τ_{xz} en el plano de la junta. Un modelo clásico de rozamiento establecería los siguientes valores para la tensión tangencial resultante τ

$$\tau = \begin{Bmatrix} \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} \quad (II.38)$$

$$|\tau| \leq |\tau_{\max}| = c - \sigma_x \operatorname{tg} \phi \quad \text{para } \sigma_x \leq 0 \quad (II.39)$$

donde ϕ es el ángulo de rozamiento interno entre labios de la junta. La condición $\sigma_x \leq 0$ corresponde a la hipótesis de que la junta no permite tensiones de tracción, de acuerdo con el modelo de comportamiento longitudinal establecido previamente.

En el contexto de la elastoplasticidad, la ecuación (II.39) puede ser interpretada como una superficie de fluencia que delimita el régimen elástico del elastoplástico (deslizamiento), y cuya forma se presenta en la Figura II.30c. Su expresión analítica sería:

$$F(\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}) \equiv (\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2)^{1/2} + \sigma_x \operatorname{tg} \phi - c = 0 \quad \text{para } \sigma_x \leq 0 \quad (II.40)$$

El siguiente elemento de un modelo elastoplástico, es la formulación de la expresión de una superficie potencial cuyo gradiente proporciona la dirección de las deformaciones

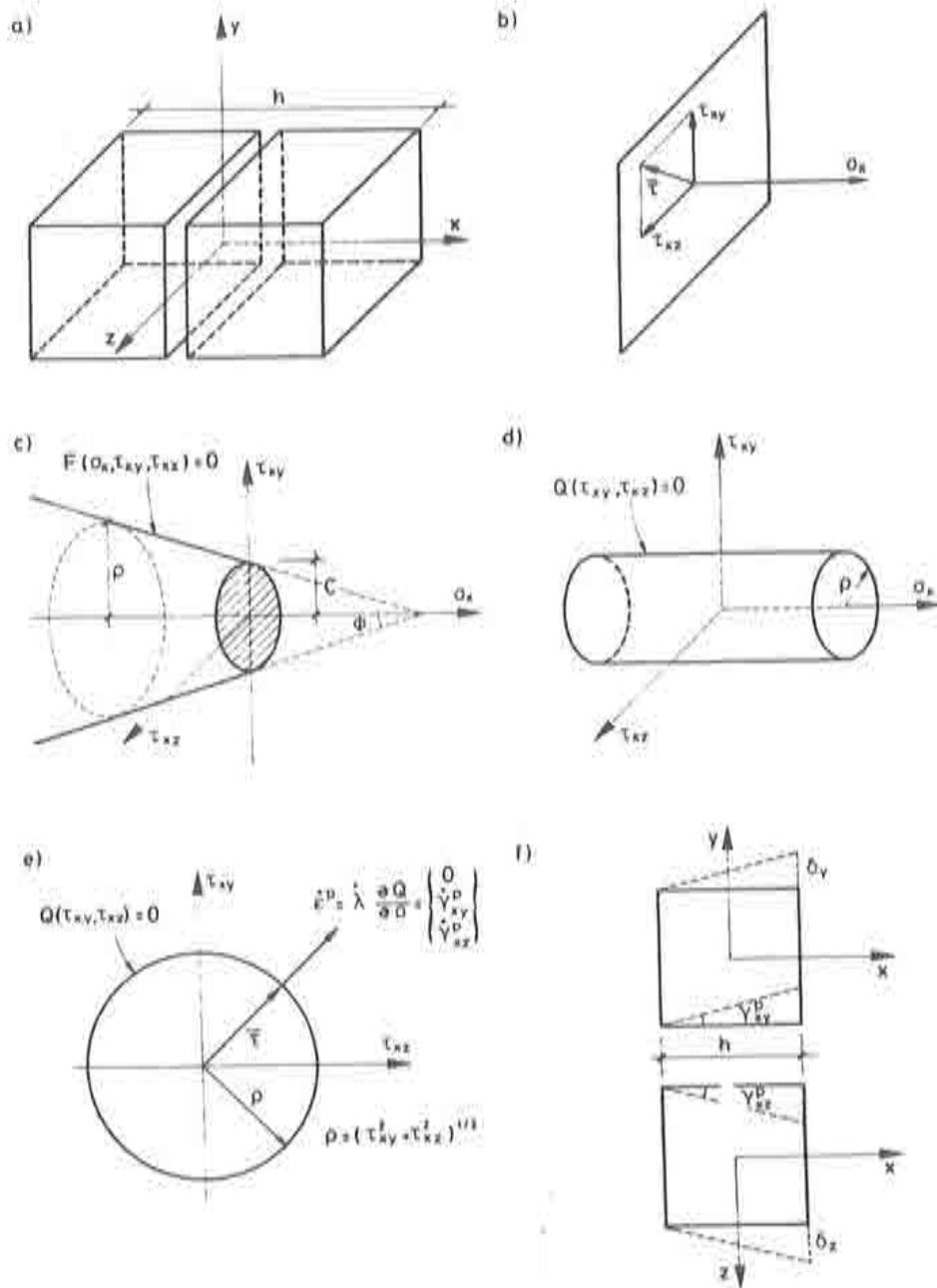


Figura II.30. Modelo elastoplástico para el comportamiento tangencial de la junta.

plásticas^{96, 98}. En nuestro caso, una expresión general de la superficie potencial que consideraría el fenómeno de la dilatación (movimiento de apertura de la junta producido por

el deslizamiento) se obtendría sustituyendo en la expresión (II.40) el ángulo de rozamiento ϕ por el ángulo de dilatación ψ :

$$G(\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}) \equiv (\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2)^{1/2} + \sigma_x \tan \psi - c = 0 \quad (II.41)$$

Sin embargo, en el caso de juntas de construcción cuyos labios son sensiblemente lisos el fenómeno de la dilatación puede despreciarse. En este caso, sustituyendo en la ecuación (II.40) un valor $\psi = 0$ se obtiene

$$G(\tau_{xy}, \tau_{xz}) \equiv (\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2)^{1/2} - c = 0 \quad (II.42)$$

superficie que puede verse representada gráficamente en la Figura II.30d. La correspondiente regla de flujo²⁶ permite determinar la dirección del vector de deformaciones plásticas:

$$\dot{\epsilon}^p = \begin{Bmatrix} \dot{\epsilon}_x^p \\ \dot{\gamma}_{xy}^p \\ \dot{\gamma}_{xz}^p \end{Bmatrix} \quad (II.43)$$

Como:

$$\dot{\epsilon}_x^p = \dot{\lambda} \frac{\partial G}{\partial \sigma_x} = 0 \quad (II.44a)$$

$$\dot{\gamma}_{xy}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial G}{\partial \tau_{xy}} = \dot{\lambda} \frac{\tau_{xy}}{|\tau|} \quad (II.44b)$$

$$\dot{\gamma}_{xz}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial G}{\partial \tau_{xz}} = \dot{\lambda} \frac{\tau_{xz}}{|\tau|} \quad (II.44c)$$

Las componentes del deslizamiento de los labios de la junta, δ_y y δ_x pueden ser "distribuidas" sobre la longitud h del elemento que modela la junta, e interpretadas a partir de las componentes "plásticas" (irrecuperables) del vector de deformaciones tangenciales (ver Figura II.30f).

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{xy}^p \\ \gamma_{xz}^p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta_y/h \\ \delta_x/h \end{Bmatrix} \quad (II.45)$$

A la vista de la ecuación (II.45), la regla de flujo de las ecuaciones (II.44b) y (II.44c) puede ser interpretada como la condición de que, en el instante del deslizamiento, éste se produce en la dirección de la resultante de la tensión tangencial al plano de la junta (ver Figura II.30e). Asimismo, la ecuación (II.44a) indica que el deslizamiento no afecta a los movimientos de apertura o cierre de la junta, tal como corresponde a la hipótesis de dilatación nula. Estas interpretaciones coinciden correctamente con la visualización física del fenómeno de deslizamiento con rozamiento entre sólidos esquematizado en la Figura (II.29).

El último elemento del modelo elastoplástico es la hipótesis de descomposición aditiva de la deformación:

$$\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^p \quad (II.46)$$

con

$$\sigma = D^e \cdot \epsilon^e \quad (II.47)$$

donde D^e es la matriz que relaciona las tensiones con las deformaciones elásticas (producidas por la deformación de la parte "continua" del sólido).

Las ecuaciones (II.40), (II.44), (II.46) y (II.47) corresponden al tratamiento usual de un modelo elastoplástico perfecto, a partir de las cuales puede obtenerse la ecuación constitutiva incremental en régimen elastoplástico como:

$$\dot{\sigma} = D^{ep} \cdot \dot{\epsilon} \quad (II.48)$$

siendo³⁰:

$$D^{ep} = D^e - \frac{\left(D^e \cdot \frac{\partial G}{\partial \sigma}\right) \left(D^e \cdot \frac{\partial F}{\partial \sigma}\right)^T}{\left(\frac{\partial F}{\partial \sigma}\right)^T \cdot D^e \cdot \left(\frac{\partial G}{\partial \sigma}\right)} \quad (II.49)$$

Si se establece la hipótesis adicional de desacoplamiento (coeficiente de Poisson $\nu = 0$) del comportamiento elástico del elemento en las tres direcciones cartesianas, la matriz D^{ep} de la ecuación (II.49), en lo que se refiere a las componentes normal y tangencial al plano de la junta, puede escribirse como:

$$D^{ep} = E^* \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\text{tag}\theta \frac{\tau_{xy}}{|\tau|} & \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\tau_{xy}^2}{|\tau|^2}\right) & -\frac{1}{2} \frac{\tau_{xy}\tau_{xz}}{|\tau|^2} \\ -\text{tag}\theta \frac{\tau_{xz}}{|\tau|} & -\frac{1}{2} \frac{\tau_{xy}\tau_{xz}}{|\tau|^2} & \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\tau_{xz}^2}{|\tau|^2}\right) \end{bmatrix} \quad (II.50)$$

donde E^* es el módulo elástico corregido de la ecuación (II.36) y $|\tau| = (\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2)^{1/2}$.

El tratamiento distribuido del comportamiento de la junta y la utilización de una formulación elastoplástica para modelar su comportamiento transversal proporcionan una herramienta eficiente que ha sido utilizada en diversas aplicaciones a problemas estructurales en los que la existencia de juntas de construcción es un fenómeno importante que debe ser modelado correctamente. En el capítulo III se presentarán algunas de dichas aplicaciones.

Capítulo III

APLICACIONES A LA RESOLUCION DE PROBLEMAS ESTRUCTURALES

1. INTRODUCCION

Los modelos para la simulación del comportamiento del hormigón en masa, hormigón armado y juntas estructurales presentados en anteriores capítulos han sido implementados en diversos programas de ordenador y comprobados mediante los ejemplos relativamente "académicos" analizados en dichos capítulos. Sin embargo, el objetivo último de la investigación y del desarrollo de dichos modelos es el de disponer de herramientas útiles y fiables para su aplicación en análisis estructurales "reales" que requieran la consideración del comportamiento no-lineal de la estructura, ya sea debido a la fisuración del hormigón o a la existencia de juntas de construcción, o a ambas circunstancias. En este capítulo se presentan dos aplicaciones a problemas estructurales que se llevaron a cabo en el curso de la investigación. En ellos se puede ver tanto el interés del desarrollo de los modelos de comportamiento analizados como las posibilidades que ofrecen para su utilización en análisis estructurales.

2. ANALISIS DE DEPOSITOS DE HORMIGON CRIOGENICO PARA ALMACENAMIENTO DE GAS NATURAL LICUADO

2.1. Generalidades

La tecnología tradicionalmente utilizada para la construcción de grandes depósitos de almacenamiento de gas natural licuado (G.N.L.) ha sido la estructura metálica. Las bajas temperaturas a las que se almacena el gas (alrededor de -160°C) no han permitido la utilización del hormigón armado y pretensado para la construcción de dichos depósitos hasta que el conocimiento y el desarrollo de hormigones especiales para soportar incidentalmente temperaturas extremas (hormigones criogénicos) lo ha propiciado (ver Figura III.1).

Las condiciones de diseño, en lo que se refiere a seguridad, de los depósitos de G.N.L. son, por motivos obvios, excepcionalmente estrictas. Aunque en condiciones normales, el hormigón estructural se encuentra convenientemente aislado del gas licuado mediante un depósito interior aislante, el diseño del depósito debe garantizar la impermeabilidad del mismo ante una eventual rotura del aislamiento y el consiguiente gradiente térmico al que se ve sometido el hormigón.

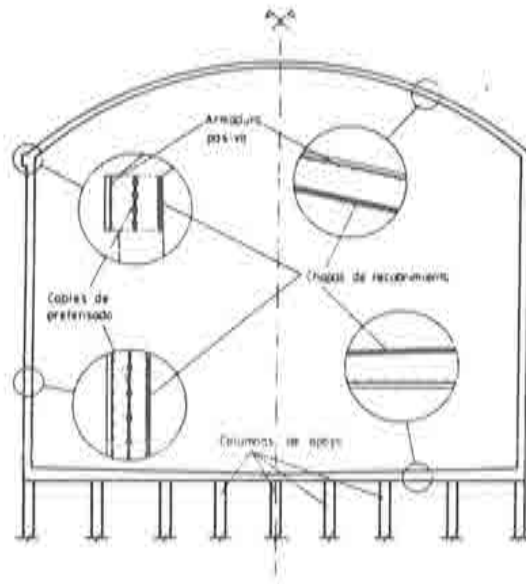


Figura III.1. Estructura resistente de un depósito para G.N.L..

Otra hipótesis que debe considerarse en la fase de diseño es la del incendio del gas almacenado que puede generar temperaturas en el hormigón de hasta 1500°C . En estas condiciones, aunque se admite una degradación irreparable en el hormigón estructural, ésta debe producirse evitando la transmisión del fuego a otros depósitos situados en su entorno. En otras palabras, el depósito debe destruirse en forma controlada al mismo ritmo que se consume el gas de su interior, similarmente a como lo haría la cera de una vela respecto a la mecha.

En el transcurso de este trabajo de investigación, se aplicó la metodología y los modelos de comportamiento del hormigón presentados anteriormente, al desarrollo de un paquete de programas de ordenador que permitiera estudiar la aceptabilidad de diseños de depósitos de hormigón criogénico para almacenamiento de G.N.L..

Se comprende fácilmente que las acciones excepcionales anteriormente citadas desarrollarán procesos de fisuración en el hormigón y que, asimismo, el nivel de fisuración en cada instante del análisis es un cierto estimador de la estanqueidad del depósito. De ahí el interés de incluir en dichos programas modelos de fisuración.

2.2. Características del análisis

La consideración de las acciones térmicas comentadas, necesita el desarrollo de modelos (y los correspondientes programas de ordenador) para el análisis térmico transitorio del depósito. Estos programas proporcionan en cada instante la distribución de temperaturas en el seno del hormigón, que se incorpora al análisis tensional como una acción interna. No se entrará aquí en más detalles sobre el análisis térmico, que pueden encontrarse en la referencia [37].

Como puede observarse en la Figura III.1, la estructura resistente del depósito es de hormigón armado y pretensado recubierto por chapas de acero en su interior que trabajan solidariamente con el hormigón. Al tratarse, además, de una estructura esencialmente laminar (tanto las paredes laterales del depósito, como la cúpula superior y la losa inferior son de espesor sensiblemente inferior a sus otras dimensiones) se utiliza para modelarla un modelo de "capas" tal como se han descrito en el epígrafe 5 del capítulo I.

Asimismo, la geometría típicamente de revolución permite realizar las simplificaciones de axisimetría siempre que las acciones sean también de revolución. Esta circunstancia no ocurre siempre, puesto que la hipótesis de rotura del tanque aislante interno contempla también una rotura "sonal" que obliga a desarrollar, además de programas de cálculo axisimétrico, otros programas para el análisis de láminas espaciales.

En la Figura III.2 se presentan discretizaciones típicas de la estructura en elementos finitos para ambos tipos de análisis. A cada tipo de discretización en elementos de lámina, le corresponde una discretización en elementos de sólido para el análisis térmico (ver Figura III.3) que debe proporcionar, no sólo las variaciones de temperaturas a lo largo de la superficie directriz sino también sobre su espesor.

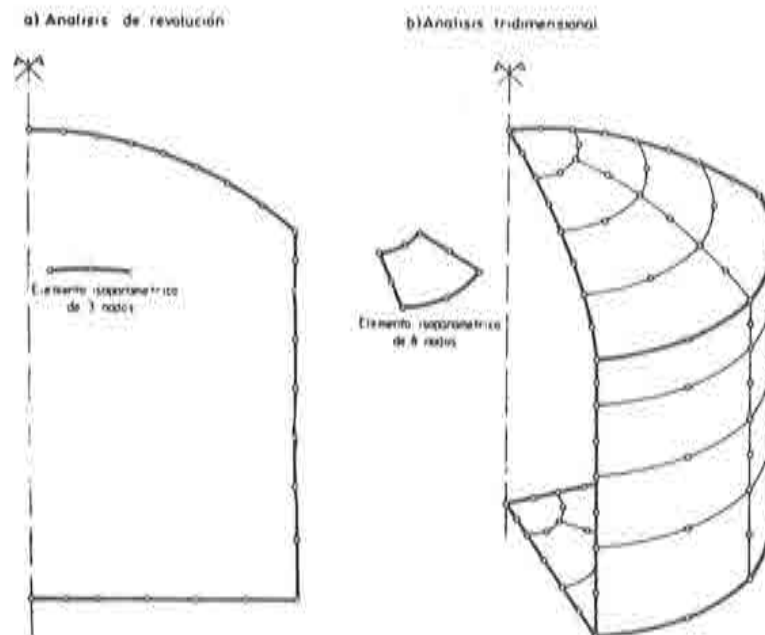


Figura III.2. Discretización del depósito para el análisis tensional.

2.3. Comprobación del diseño de un depósito para almacenamiento de G.N.L.

Se trata de un depósito de 80.000 m^3 de capacidad, cuyas características geométricas y distribución de armaduras aparecen en la Figura III.4. En la Figura III.5 se presentan las mallas de elementos finitos utilizados para el análisis de revolución. Para el análisis térmico se dispusieron 6 elementos a lo largo del espesor, que se correspondían con otras tantas

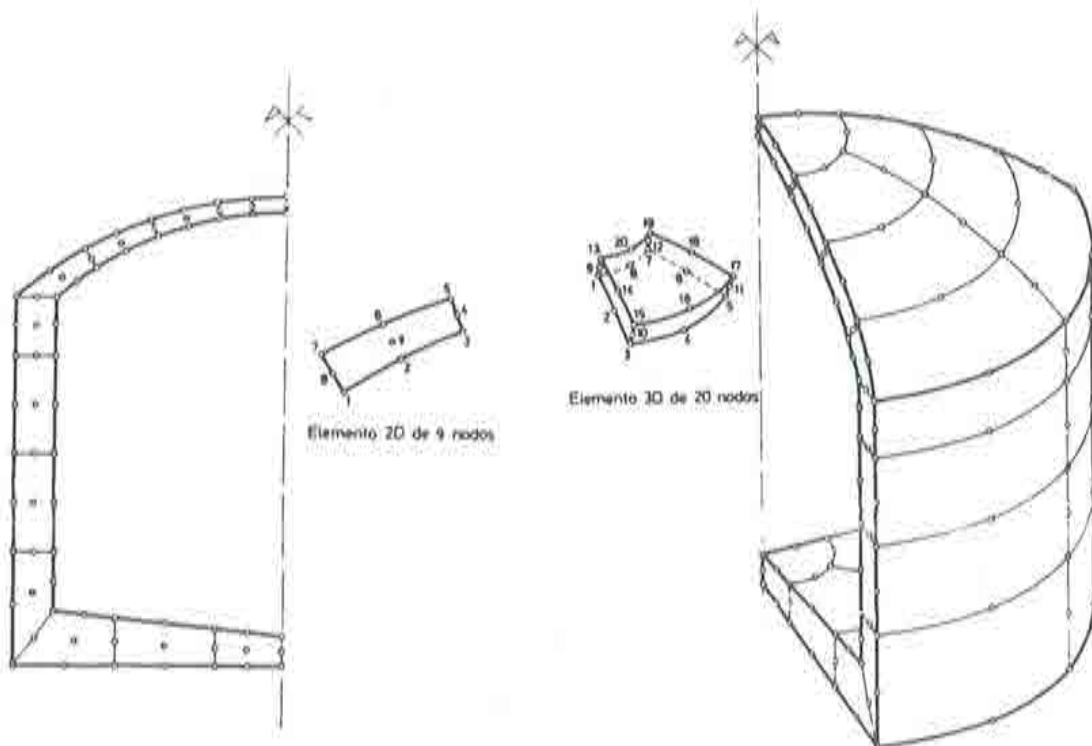


Figura III.3. Discretización del depósito para el análisis térmico.

capas del modelo tensional y que permitían un buen conocimiento de la evolución de las temperaturas sobre el espesor.

Las propiedades consideradas para los distintos materiales son las siguientes:

a) *Hormigón*

- Módulo de Elasticidad	320.000 kgs/cm ²
- Coeficiente de Poisson	0.2
- Tensión de rotura a tracción	25 kgs/cm ²
- Deformación última a tracción	0.0035
- Tensión de fluencia a compresión	350 kgs/cm ²
- Constante de dilatación térmica	0.00007° C ⁻¹

b) *Acero de armaduras pasivas*

- Módulo de elasticidad	2.100.000 kgs/cm ²
- Tensión de fluencia	4.200 kgs/cm ²
- Coeficiente de dilatación térmica	0.00009° C ⁻¹

c) *Acero de armaduras activas*

- Módulo de elasticidad	2.100.000 kgs/cm ²
- Tensión de fluencia	17.000 kg/cm ²
- Coeficiente de dilatación térmica	0.00009° C ⁻¹

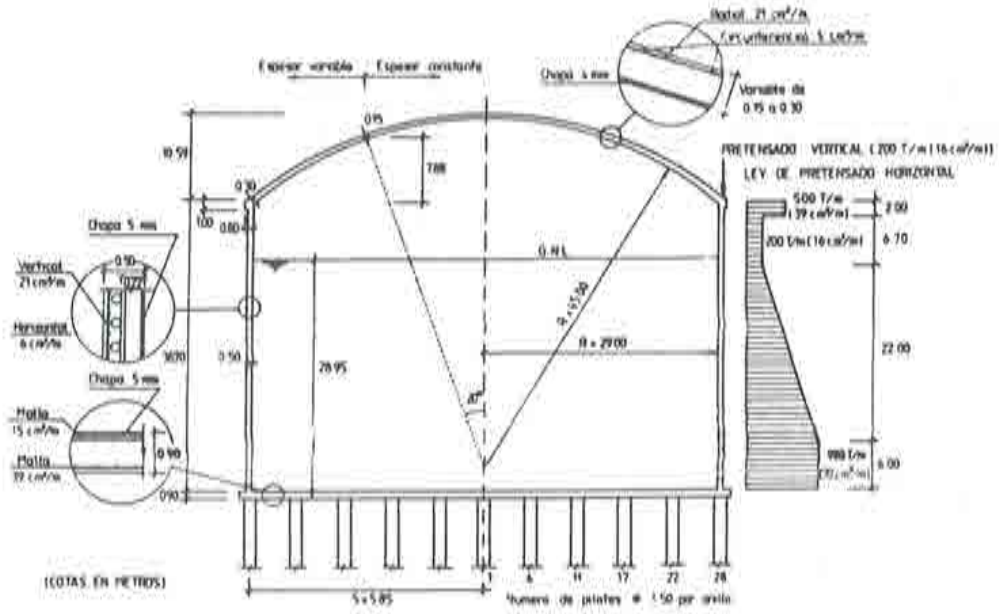


Figura III.4. Características geométricas del depósito para G.N.L.

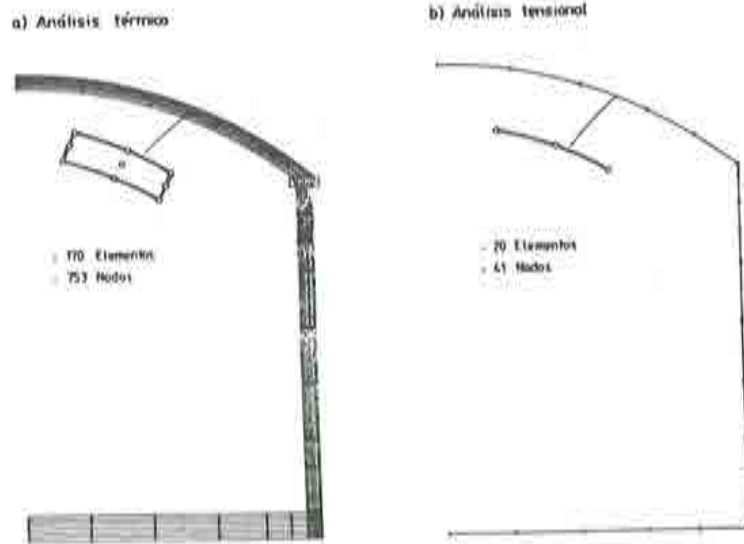


Figura III.5. Depósito de hormigón criogénico para G.N.L. Mallas utilizadas en el análisis.

d) *Chapa de acero de recubrimiento*

- Módulo de elasticidad	2.100.000 kgs/cm ²
- Coeficiente de Poisson	0.1
- Tensión de fluencia	2.100 kgs/cm ²
- Coeficiente de dilatación térmica	0.000009° C ⁻¹

Se consideran los siguientes casos de carga actuando secuencialmente:

- I Peso propio y acción del pretensado.
- II Presión hidrostática del líquido interior y sobrepresión interna uniforme de 0.12 atmósferas.
- III, IV, V y VI Derrame del líquido a través del aislamiento interior hasta entrar en contacto con la pared exterior del depósito. Se considera una temperatura del líquido de -160° C y una temperatura ambiente de 25° C. Se consideran los efectos térmicos en cuatro instantes a partir del derrame:
t = 11 min (III), 28 min (IV), 78 min (V) y t = ∞ (situación estacionaria VI).

Cada uno de estos estados de carga se aplica sobre el estado tensional resultado del estado de carga anterior.

En la Figura III.6 se presentan las líneas isoterma para distintos instantes después de producirse el derrame del líquido. Puede observarse como, partiendo de una situación estacionaria (antes del derrame) con variaciones térmicas lineales sobre el espesor, el contacto del líquido con la pared interior del depósito genera grandes gradientes térmicos antes de hacerse nuevamente estacionario. La existencia de dichos gradientes térmicos en instantes intermedios, motiva que no pueda conocerse "a priori" la situación más desfavorable a efectos del análisis estructural y que el análisis deba ser realizado a lo largo del tiempo obteniendo la respuesta de la estructura en sucesivos instantes desde el estado inicial al estacionario final.

En la Figura III.7 se presentan las deformadas del depósito bajo los distintos casos de carga, así como el estado de daño (fisuración y plastificación) de la estructura al final del análisis. Puede comprobarse como en este caso no existe continuidad de dicho daño a través del espesor de las paredes de hormigón, lo que podría garantizar la impermeabilidad del depósito durante todo el proceso accidental y la consiguiente aceptabilidad del diseño realizado.

3. ANALISIS DE LOS PROBLEMAS DE PATOLOGIA ESTRUCTURAL EN PRESAS, PRODUCIDOS POR EL ENTUMECIMIENTO DEL HORMIGON.

3.1. Introducción

Es bien conocido el hecho de que muchas presas de hormigón presentan zonas fisuradas, de diversa extensión, tanto en su superficie como en su interior. Las causas de dicha fisuración pueden ser diversas : gradientes térmicos producidos por los cambios térmicos estacionales y

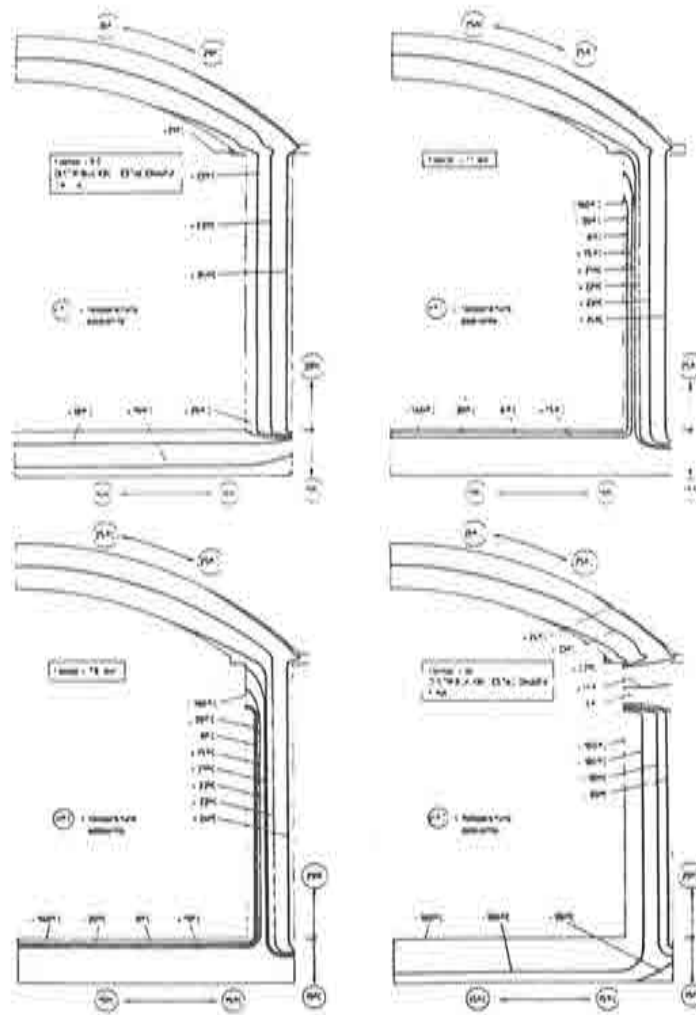


Figura III.6 Depósito de hormigón criogénico. Hipótesis de derrame interno del G.N.L.. Líneas isotermas para distintos tiempos de análisis.

la gran inercia térmica de dichas estructuras, asientos de la cimentación, movimientos de los estribos, etc.... Cualesquiera que sean dichas causas, uno de sus efectos más inmediatos es un aumento de las filtraciones de agua desde el embalse hacia el interior de la presa debido al espectacular aumento de la permeabilidad que la fisuración o microfisuración produce en el hormigón. Aunque la presencia de agua en el interior de las presas es un hecho normal, y la existencia de pantallas de drenaje para recogerla es una disposición constructiva común, en ciertas circunstancias puede tener efectos de excepcional importancia en cuanto se producen comportamientos muy distintos de los previstos en la estructura. El estudio de las causas y los efectos de dicho fenómeno es motivo de intensa investigación en el ámbito de dicho tipo de estructuras ^{28, 29, 30, 31, 32, 33}.

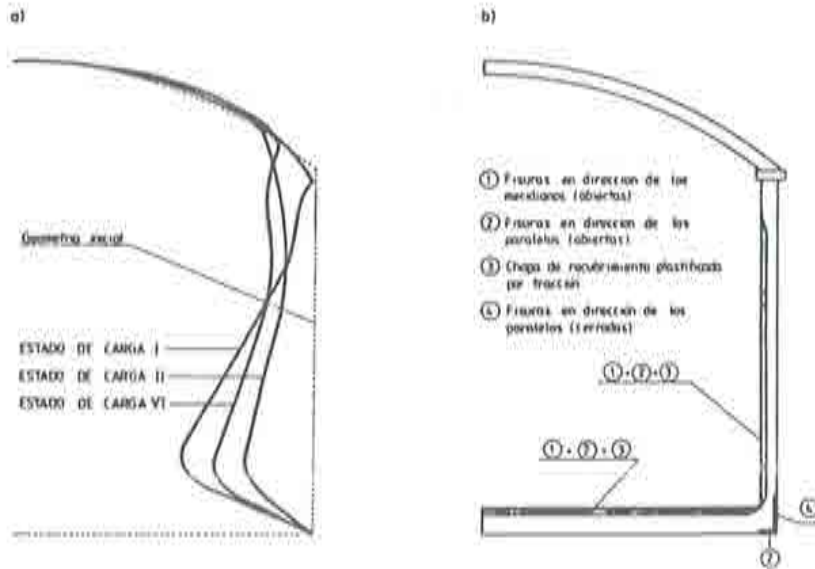


Figura III.7. a) Deformadas de la superficie media del depósito para diversos estados de carga (Desplazamientos aumentados 1.000 veces).
b) Zonas fisuradas y plastificadas al final del análisis.

En los últimos años han empezado a relacionarse estos comportamientos anómalos con las características químicas del hormigón que constituye la presa y su repercusión en una de sus propiedades físicas: el entumecimiento. El entumecimiento del hormigón es el fenómeno por el cual éste sufre expansiones cuando está en intenso contacto con el agua. Este fenómeno se produce en cualquier hormigón, y se caracteriza por una expansión creciente con el tiempo hasta estabilizarse en un valor próximo (ver Figura III.8). Los valores normales de dicha expansión pueden cuantificarse alrededor de un 0.03%. Sin embargo, bajo ciertas circunstancias, y en relación con el contenido de cal no hidratada en el hormigón, esta expansión puede estabilizarse en valores hasta cuatro veces mayores.

En los casos en que el entumecimiento se produce de forma no homogénea en el interior de una estructura, puede ser la causa generadora de tensiones muy importantes y de la aparición y progresión de la fisuración. En efecto, la expansión de la zona de la estructura en la que se produce entumecimiento, en la medida en que se halle coartada por el resto de la estructura, generará compresiones en la zona que se expande y tracciones, con la consiguiente fisuración en zonas inmediatas. Tanto el comportamiento no-lineal de la estructura producido por la aparición de dicha fisuración, como las consecuencias que tiene sobre la variación de la permeabilidad del hormigón y la consiguiente penetración del agua hacia otras zonas de la presa, motivan la utilización de modelos de fisuración, como los descritos en anteriores capítulos, para el análisis del problema.

Por otra parte las juntas de construcción son una disposición constructiva muy frecuente en presas de hormigón, en los casos de importantes expansiones que motivan su cierre. Los efectos de las juntas sobre el comportamiento global de la estructura, y su misión de

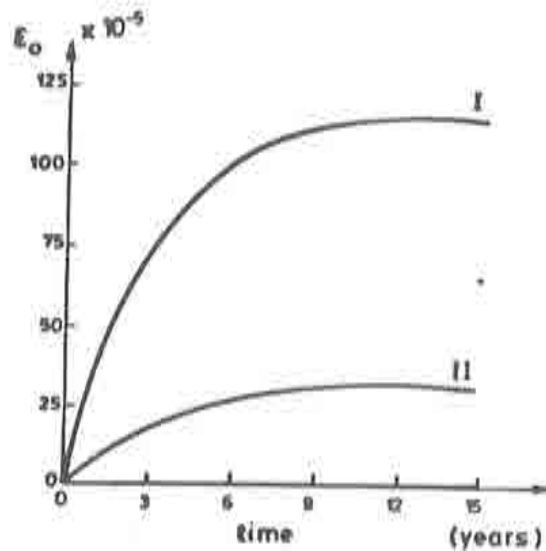


Figura III.8. Curvas típicas deformación-tiempo debidas al entumecimiento en probetas de hormigón sumergidas en agua.

transmisoras de esfuerzos entre las partes que delimitan es muy importante. De ahí surge también la necesidad de utilizar modelos de simulación de juntas en un análisis estructural como el que se está comentando.

En el contexto del presente trabajo de investigación, se ha dedicado un importante esfuerzo a la confección de modelos para la simulación del comportamiento de presas en las que se producen importantes expansiones del hormigón y a su aplicación al estudio de casos concretos. En los siguientes apartados se describen los elementos fundamentales de dichos modelos.

3.2. Elementos del modelo

a) COMPORTAMIENTO DEL HORMIGÓN

Para el hormigón se supone un comportamiento elástico fisurable de acuerdo con el modelo descrito en el epígrafe 4 del capítulo I. En los casos de análisis tridimensional, se utiliza una extensión del mismo a tres dimensiones¹².

b) COMPORTAMIENTO DE LAS JUNTAS

Para análisis bidimensionales se utiliza el "modelo discreto" presentado en el apartado 4.1 del capítulo II. Para los análisis tridimensionales se acude al "modelo distribuido" descrito en los apartados 4.2 y 4.3 de dicho capítulo.

c) ESQUEMA DE ENTUMECIMIENTO PROGRESIVO

Para modelizar de alguna forma la interacción entre la entrada de agua de la presa, el entumecimiento del hormigón y la generación de nuevas fisuras, se ha "idealizado" el

fenómeno a través de un esquema de progresión del entumecimiento desde el paramento de aguas arriba, en contacto con el agua del embalse, hacia el interior de la presa. La hipótesis subyacente en esta idealización es que la presencia de agua en el interior de la presa está directamente relacionada con la existencia de fisuración conectada con el paramento aguas arriba. Aunque el hormigón no fisurado tiene una cierta permeabilidad, ésta es varios órdenes de magnitud menor que la de un hormigón con cierto nivel de fisuración. De ahí que puede suponerse un grado de humectación muy superior en las zonas de la presa fisuradas con respecto a aquellas que no lo están. El mencionado esquema de entumecimiento es esencialmente el siguiente :

- Se asigna a las diversas zonas de la presa una curva de entumecimiento deformación libre-tiempo, como la de la Figura III.8, del tipo exponencial y cuyo valor máximo se determina a partir de ensayos de humectación acelerada en laboratorio, sobre testigos extraídos de cada zona. De dichos ensayos se toma como dato el valor máximo del entumecimiento pero no la escala de tiempo, puesto que es lógico suponer que, en las probetas ensayadas en laboratorio, la homogeneidad de la humectación es mucho mayor que en la estructura real. Para la escala de tiempo se toma un tiempo ficticio que será ajustado posteriormente mediante comparación entre los resultados del modelo y los reales.
- El análisis empieza considerando que, después de la aplicación de las acciones de peso propio y presión hidrostática del agua, únicamente los puntos en el paramento aguas arriba están efectivamente humedecidos. Estos puntos empiezan a recorrer su curva de entumecimiento correspondiente y a expandirse en consecuencia (ver Figura III.9a).

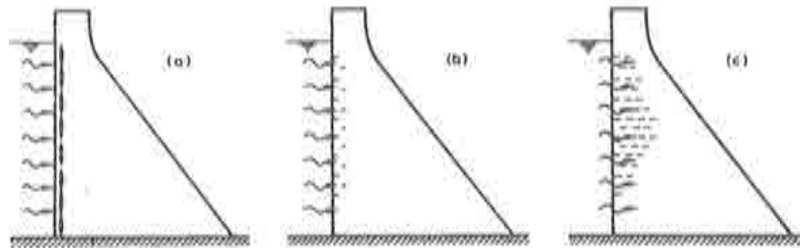


Figura III.9 Esquema de progresión del entumecimiento

- La expansión de dichos puntos genera tracciones, en las zonas del interior de la presa inmediatamente en contacto con ellos y compresiones en los mismos. En instantes posteriores algunos de los puntos traccionados superan el umbral de resistencia a tracción y, en consecuencia, a fisurarse (ver Figura III.9b). Se supone entonces que dichos puntos empiezan a recorrer su correspondiente curva de entumecimiento y a expansionarse generando tracciones en puntos más interiores (ver Figura III.9c). Obsérvese que un punto fisurado empieza a sufrir deformaciones de compresión debido a su propio entumecimiento lo que evidencia la necesidad de introducir mecanismos de apertura y cierre de fisuras como lo descrito en el apartado 4 del capítulo I.

- La progresión del agua y, consiguientemente, del entumecimiento hacia el interior de la presa puede verse detenida por la existencia de planos de drenaje efectivos en la misma. Esta circunstancia puede modelarse asignando curvas de entumecimiento nulo a los puntos situados aguas abajo de dichos planos de drenaje.

d) INCLUSION DE LOS EFECTOS TERMICOS Y DE LA PRESION INTERSTICIAL

Las presas de hormigón tienen una importante inercia térmica y, en consecuencia, pueden producirse gradientes térmicos importantes en su interior debido a los cambios estacionales de las temperaturas del aire ambiente y del agua del embalse. Los efectos térmicos se incluyen en el modelo de una forma tradicional^{12,13}, como deformaciones internas.

El análisis de un medio total a parcialmente saturado de agua debe ser llevado a cabo utilizando en la ecuación constitutiva el concepto de tensión efectiva σ^e , es decir la tensión teórica (σ) afectada por la presión de agua en su interior de la forma:

$$\sigma^e = \sigma + \eta p \quad (III.1)$$

donde η es un factor que depende de la porosidad del medio ($0 \leq \eta \leq 1$). En el modelo se incluye la posibilidad de realizar el análisis en tensiones reales o en tensiones efectivas.

3.3. Análisis de una presa de gravedad

Se presenta a continuación el análisis realizado con el modelo descrito en una presa de gravedad con problemas de patología.

Se trata de una presa de planta recta de 461 m. de largo y 80 m. de alto. Longitudinalmente la presa está construida mediante bloques independientes separados por juntas de construcción. Desde los primeros años de su explotación, se observaron movimientos anormalmente grandes de la presa hacia aguas abajo sobre todo en uno de los bloques (ver Figura III.10). Simultáneamente se detectó una importante fisuración del hormigón en el paramento de aguas arriba y en las galerías de inspección interiores. Estas circunstancias, motivaron una intensa instrumentación de la presa y una estrecha vigilancia de la misma que continua hasta la actualidad.

El estudio realizado tiene dos fases: a) un análisis bidimensional (2D) del bloque más afectado estudiado en tensión y deformación plana, y b) un análisis tridimensional de dicho bloque junto con los adyacentes para incluir los efectos de la interacción entre ellos.

3.4. Análisis bidimensional

Se estudió la sección transversal de la Figura III.11a. La zona I, corresponde a la estructura de toma para la que se supuso un comportamiento de tensión plana. Para la zona II, correspondiente al cuerpo de la presa, se consideró un comportamiento en deformación plana. En dicha Figura se observa también la trayectoria de una junta de construcción, que se extiende a lo largo de toda la longitud del bloque analizado, que discurre desde una galería de inspección descendiendo verticalmente en un primer tramo para, posteriormente, morir en el paramento aguas arriba.

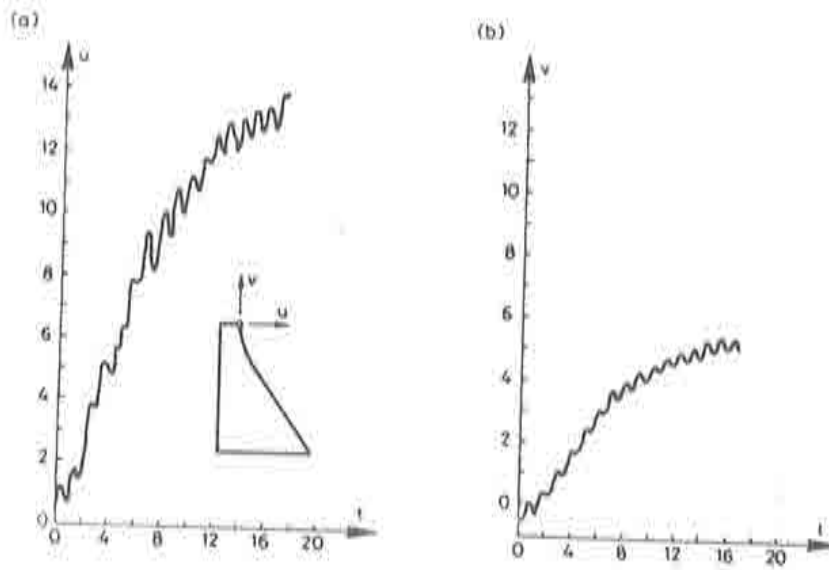


Figura III.10. Desplazamientos medidos en la coronación de la presa (en cms) a lo largo del tiempo (en años).

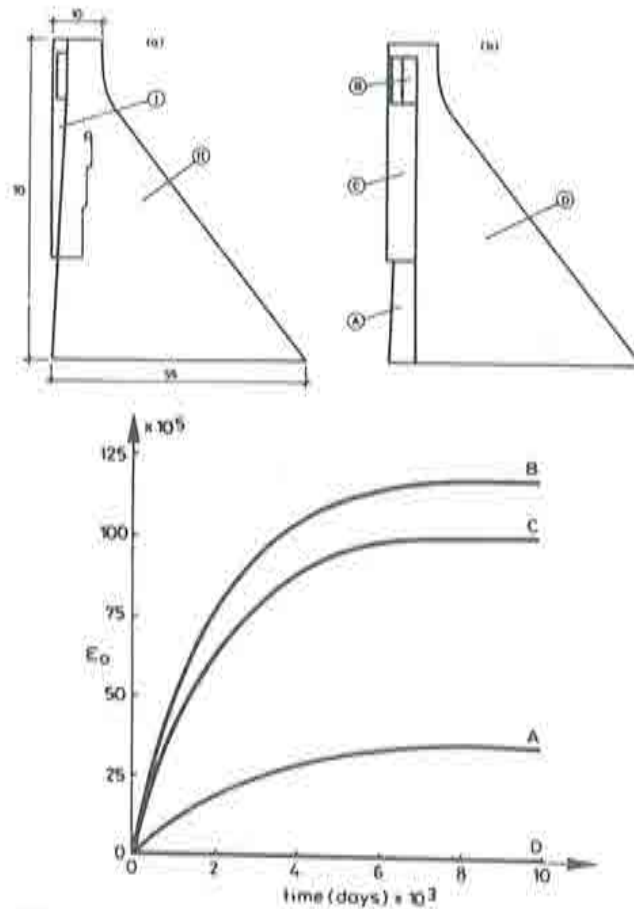


Figura III.11. Análisis bidimensional. Modelización de la presa.

Debido a que la auscultación indicaba que el comportamiento anómalo solo afectaba a los 65 metros superiores de la sección transversal, el análisis se limitó a dicha parte de la estructura.

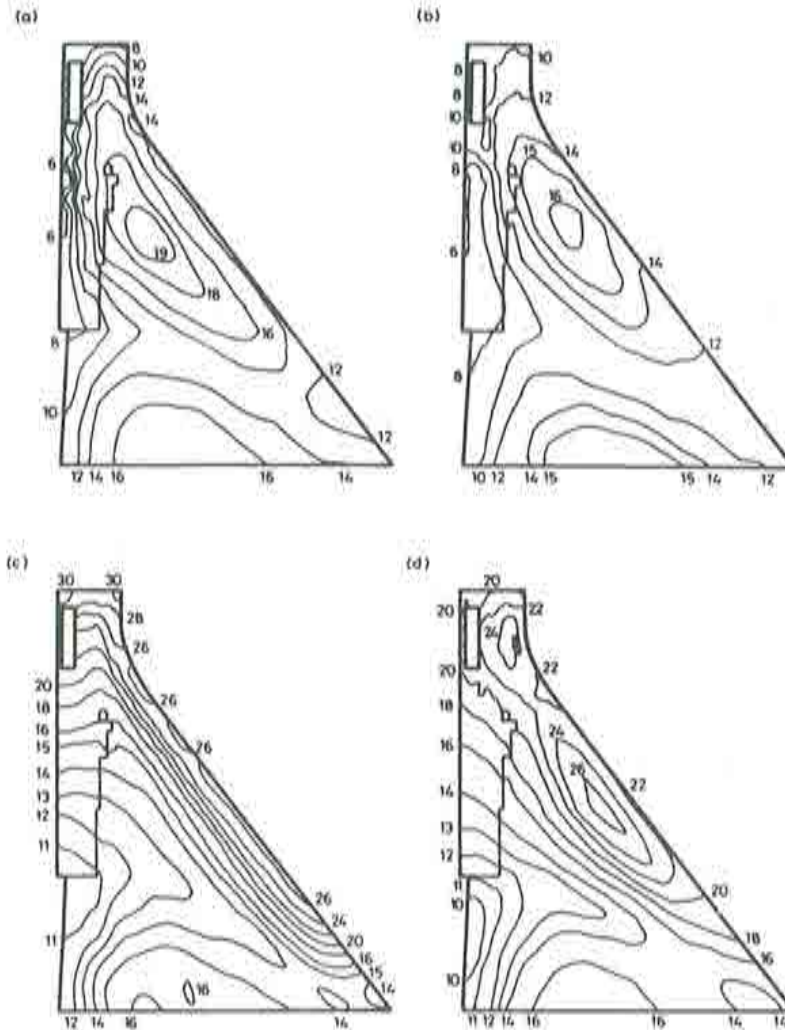


Figura III.12. Líneas isotermas en diversas épocas del año:

- a) Invierno
- b) Primavera
- c) Verano
- d) Otoño

En la Figura III.11b puede observarse la división en zonas de la sección transversal. Cada zona tiene asignada una curva de entumecimiento (extraída de los ensayos en laboratorio tal como se ha indicado más arriba). Dichas curvas de entumecimiento pueden observarse en la Figura III.11c. La existencia de un plano de drenaje, que separa las zonas

A, B y C de la D en la Figura III.11b fue modelizada asignando a la zona D una curva de entumecimiento nulo (ver Figura III.11.c). La zona A tiene asignado un entumecimiento máximo que se podría calificar de "normal" (alrededor del 0.03%) mientras que las zonas B y C tienen un comportamiento "anómalo" con valores máximos de hasta un 0.125%.

Los datos necesarios para la inclusión de los efectos térmicos fueron obtenidos a partir de la instrumentación de la presa, de la que se extrajeron las distribuciones térmicas correspondientes a cuatro meses típicos del año. En la Figura III.12 se presentan las curvas isotermas obtenidas, en las que puede observarse la existencia de un núcleo caliente en el interior de la presa que se desplaza hacia el exterior en los meses de verano.

A partir de los datos de temperatura extraídos de dichas distribuciones, y por procedimientos de interpolación, se obtienen las temperaturas en cualquier punto de la presa y en cualquier día del año. A estos efectos se supone que las variaciones térmicas en un mismo punto a lo largo del año siguen una distribución senoidal.

Los efectos de la presión intersticial se consideraron a partir de una distribución hipotética de presiones de agua como la indicada en la Figura III.13 en la que la presión se supone igual a la hidrostática, aguas arriba del plano de drenaje, para caer bruscamente y morir en el paramento aguas abajo.

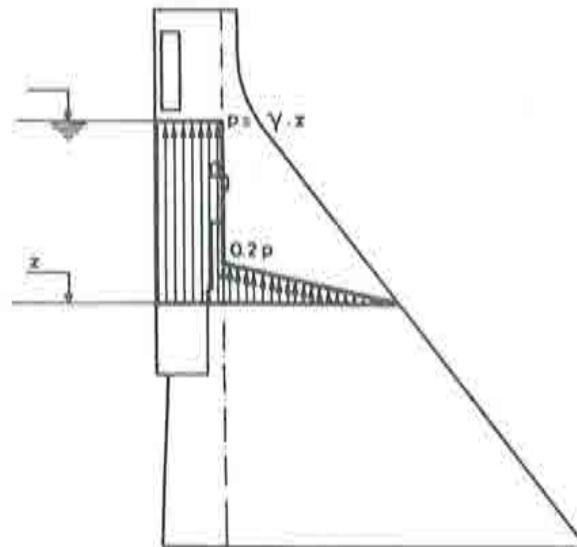


Figura III.13. Distribución de la presión intersticial.

Los distintos parámetros comentados fueron incluidos en el correspondiente programa de ordenador, realizándose una abundante experimentación numérica. Los resultados más importantes son los siguientes:

a) DESPLAZAMIENTOS

En las Figuras III.14 y III.15 se presentan los desplazamientos obtenidos en la coronación y en distintos puntos del paramento aguas abajo. En cada gráfico se presenta el

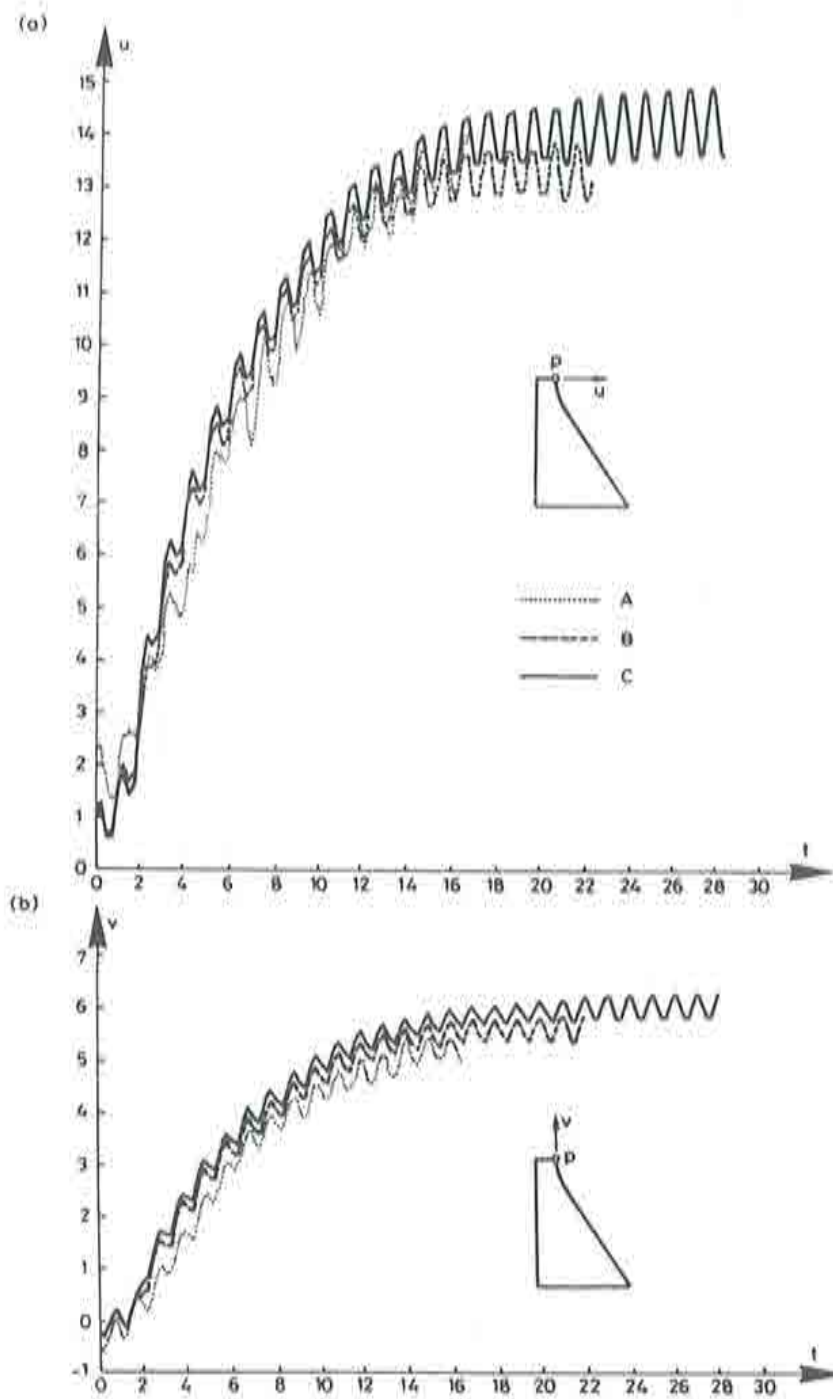


Figura III.14. Análisis bidimensional. Desplazamientos en la coronación:
 a) Medidos
 b) Calculados sin el efecto de la presión intersticial
 c) Calculados con el efecto de la presión intersticial

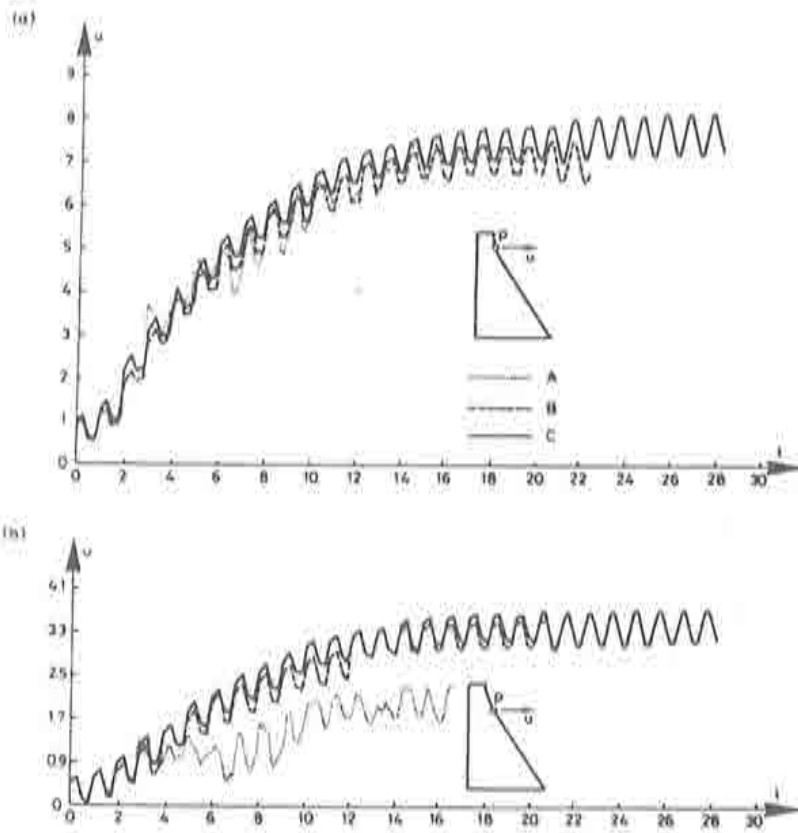


Figura III.15. Análisis bidimensional. Desplazamientos en el paramento aguas abajo:
 a) Medidos
 b) Calculados sin el efecto de la presión intersticial
 c) Calculados con el efecto de la presión intersticial

desplazamiento medido (curva A), el calculado numéricamente sin tener en cuenta el efecto de la presión intersticial (curva B) y el calculado teniendo en cuenta la presión intersticial (curva C). Los resultados numéricos fueron objeto de dos ajustes : a) un ajuste según el eje de abscisas para escalar el tiempo ficticio (introducido en las curvas de entumecimiento) con el tiempo real y b) un pequeño movimiento de sólido rígido para tener en cuenta los asientos de la cimentación.

Independientemente del grado de ajuste entre los resultados numéricos y experimentales, que como se puede observar es bueno, estos resultados permitieron obtener interesantes conclusiones entre las que destacaremos las siguientes :

- Los desplazamientos anormalmente grandes que sufre el bloque estudiado pueden explicarse desde la óptica del análisis realizado, es decir, teniendo como causa el entumecimiento del hormigón y su progresión con la fisuración. En este sentido el análisis contribuyó a aclarar un tema oscuro y controvertido antes del mismo.

- Todos los análisis muestran una estabilización de los desplazamientos transcurrido un cierto tiempo. El análisis numérico predice una estabilización de la deformación en los próximos 3-4 años en el caso de que la hipótesis hecha sobre el buen funcionamiento del plano de drenaje sea correcta.
- La influencia de las oscilaciones térmicas estacionales y de la presión intersticial es pequeña. Aquellas se limitan a superponer una curva senoidal de amplitud relativamente pequeña, a una tendencia general de los desplazamientos. La presión intersticial juega un papel relativamente poco importante modificándose los desplazamientos, al tenerla en cuenta o no, en un 10% aproximadamente.

b) TENSIONES Y FISURACION

La Figura III.16 muestra la distribución de las tensiones principales (graficadas mediante un trazo según su dirección y de longitud proporcional a su valor) correspondientes a la actuación del peso propio y la presión hidrostática al principio del análisis. Esta distribución podría calificarse de "normal", con una ausencia total de tensiones de tracción, y correspondería a las hipótesis de diseño de la estructura.

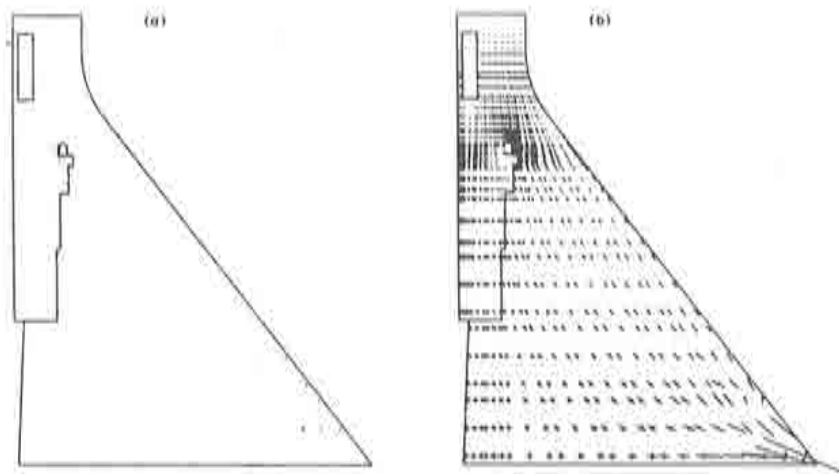


Figura III.16. Análisis bidimensional. Distribución de tensiones debidas al peso propio y a la presión del agua del embalse:
 a) Tensiones principales de tracción
 b) Tensiones principales de compresión.

En las Figuras III.17 a III.19 se presentan los estados tensionales y de fisuración (estos últimos dibujados sobre la deformada de la estructura) considerando la acción del entumecimiento a lo largo del tiempo. A este respecto puede observarse lo siguiente :

- El entumecimiento del hormigón provoca estados tensionales sensiblemente distintos de los previstos en la fase de diseño. En particular se produce un núcleo de tracciones (con

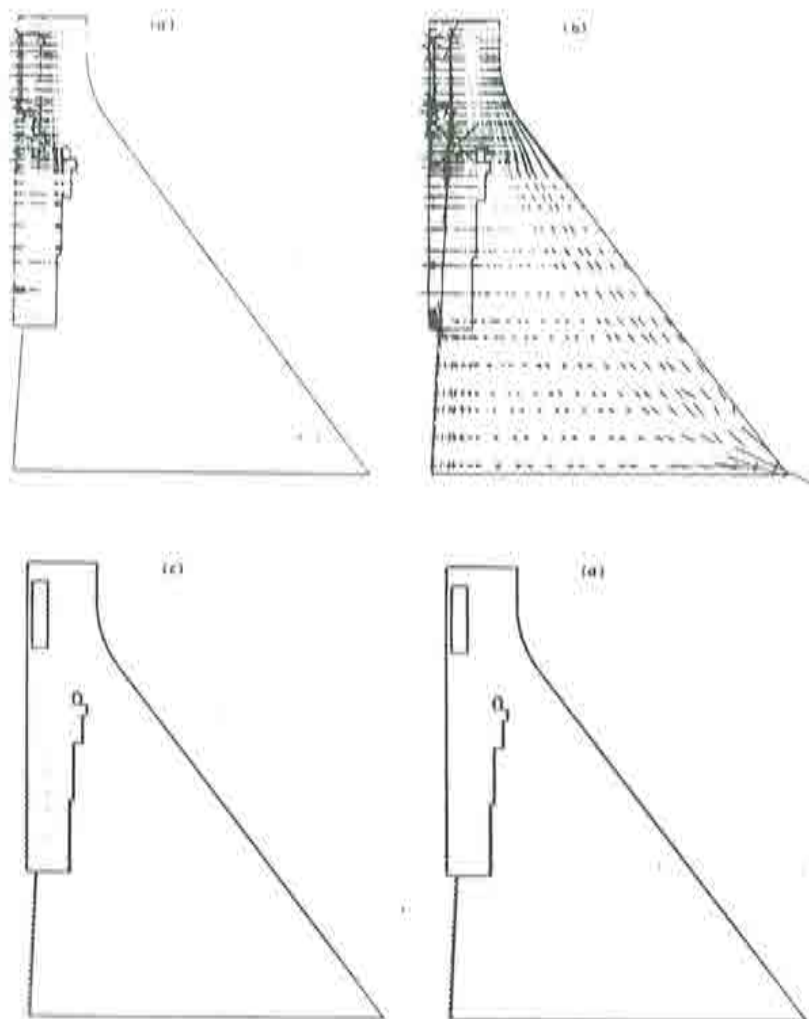


Figura III.17. Análisis bidimensional. Distribución de tensiones y de la fisuración después de un año:
 a) Tensiones principales de tracción
 b) Tensiones principales de compresión
 c) Microfisuras abiertas
 d) Microfisuras cerradas

la consiguiente fisuración) que se origina en el paramento aguas arriba y que crece hacia el paramento aguas abajo.

- El efecto de crecimiento y de volcado hacia aguas abajo de la parte superior de la estructura, que coincide con el observado en la realidad.
- El efecto de avance de la microfisuración con el tiempo y el cierre de algunas fisuras debido al propio entumecimiento (ver Figuras III.18 d y III.19d). Si el estado de

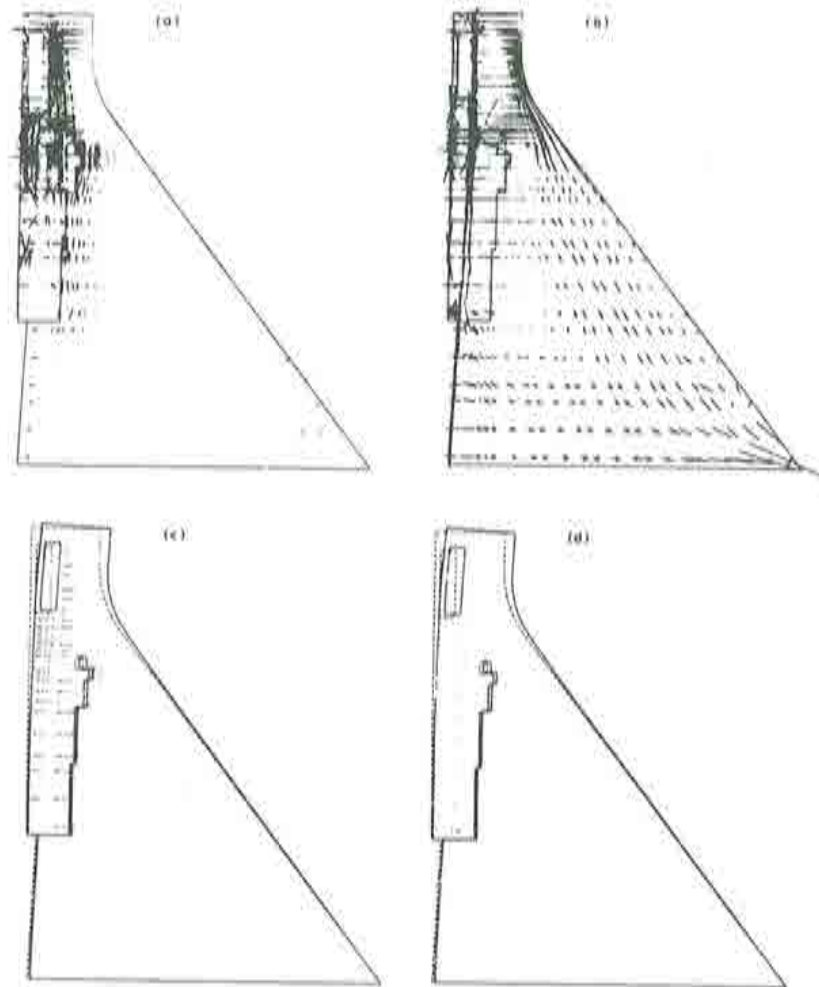


Figura III.18. Análisis bidimensional. Distribución de tensiones y de la fisuración después de dos años:
 a) Tensiones principales de tracción
 b) Tensiones principales de compresión
 c) Microfisuras abiertas
 d) Microfisuras cerradas

fisuración se representa selectivamente (dibujando solo las fisuras muy abiertas) se obtiene la representación de la Figura III.20. En ella pueden observarse lo que podría ser calificado como "macrofisuras". En la medida en que ha sido posible obtener información sobre ella, esta situación coincide, al menos cualitativamente con la realidad.

3.5. Análisis tridimensional

En la actualidad se está realizando un análisis tridimensional de la presa, en el que,

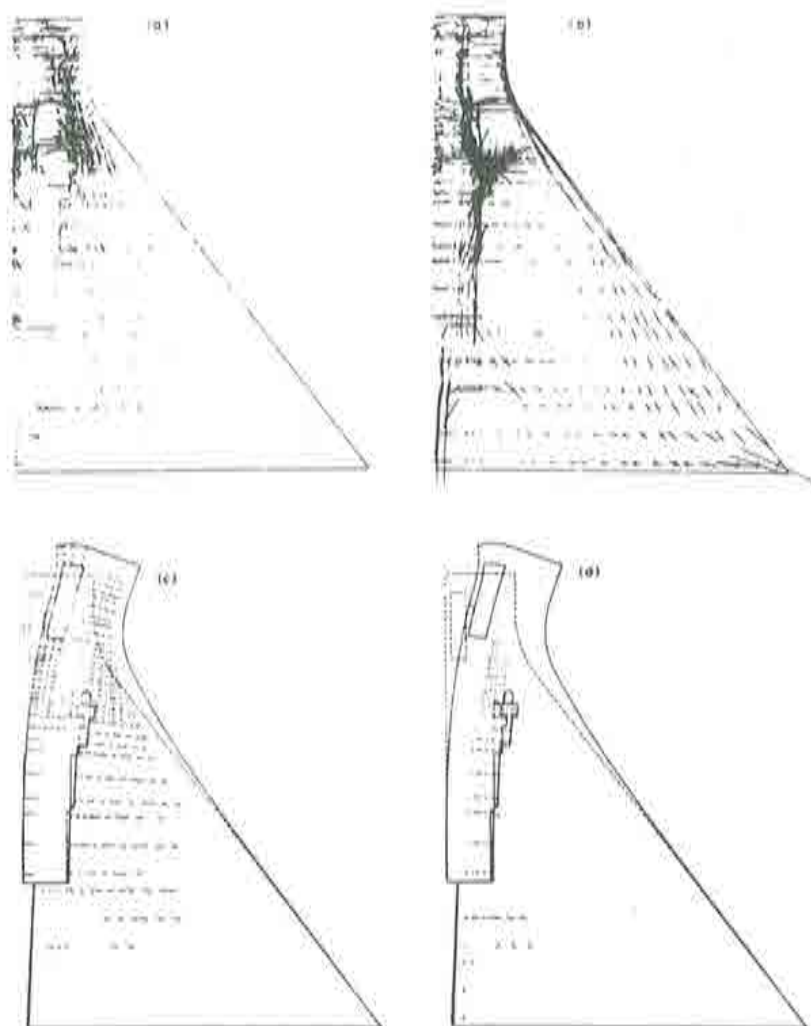


Figura III.19. Análisis bidimensional. Distribución de tensiones y de la fisuración después de 20 años:

- a) Tensiones principales de tracción
- b) Tensiones principales de compresión
- c) Microfisuras abiertas
- d) Microfisuras cerradas

además de los fenómenos considerados en el análisis bidimensional, se pretende tener en cuenta la interacción del bloque afectado con los adyacentes a través de las juntas transversales entre bloques.

La Figura III.21 corresponde a un análisis preliminar de dicho comportamiento. Se modelizan dos bloques conectados por una junta transversal. El bloque CD, en el que se modeliza además la junta longitudinal, sufre entumecimiento, mientras que el bloque AB ejerce una coacción a dicho movimiento a través del rozamiento de la junta BC.

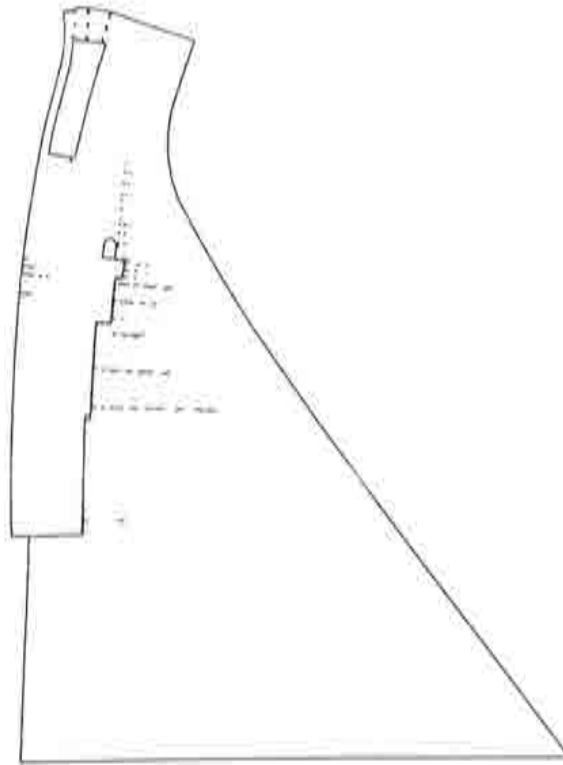


Figura III.20. Análisis bidimensional. Estado de macrofisuración al final del análisis.

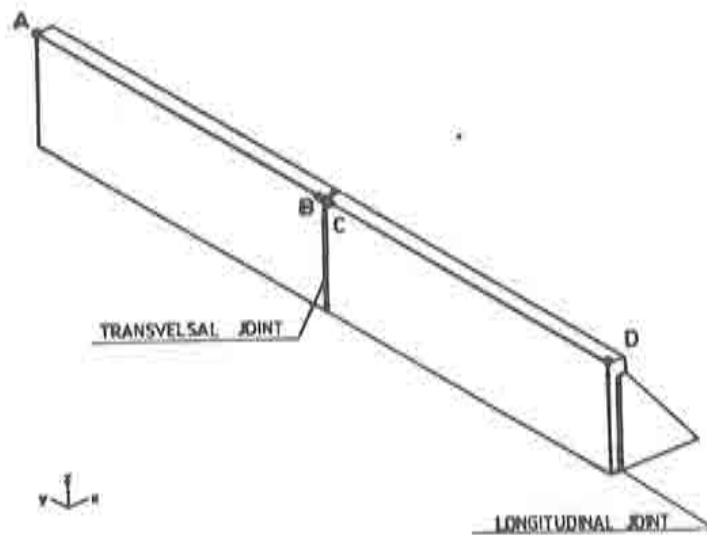


Figura III.21. Análisis tridimensional. Modelo preliminar.

En este análisis preliminar no se consideran las acciones térmicas y el efecto de la presión intersticial puesto que, como se vió en el análisis bidimensional, sus efectos no son determinantes.

En la Figura III.22 se presenta la deformada (amplificada 200 veces) de la presa al final del análisis, en el que puede observarse las diferencias de deformación en ambos bloques y el funcionamiento de la junta transversal.

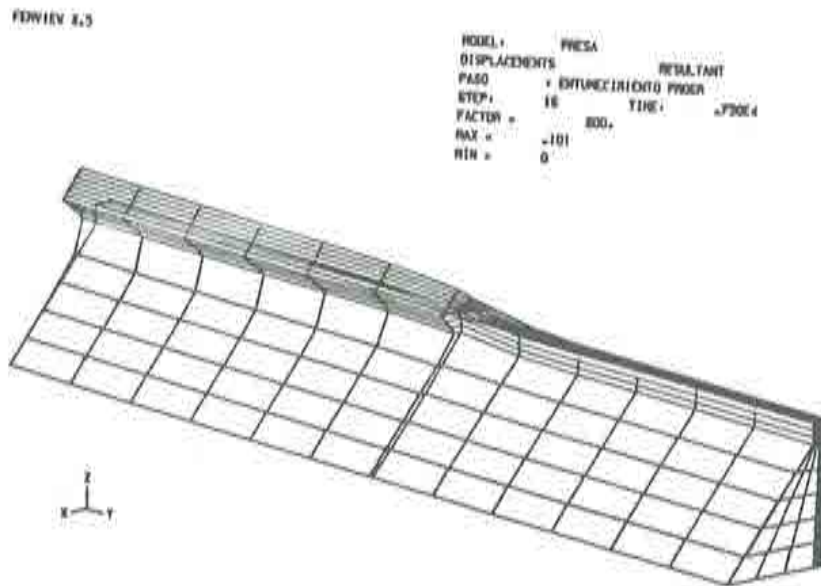


Figura III.22 Análisis tridimensional. Deformada de la presa.

En la Figura III.23a se muestra el desplazamiento a lo largo del tiempo del punto D (ver Figura III.21), en la coronación de la presa, que sigue un comportamiento cualitativo similar al obtenido en el análisis bidimensional. En la Figura III.23.b se presenta la evolución de dicho desplazamiento a lo largo de la coronación de la presa; puede observarse el "salto" de desplazamientos en la junta (puntos B-C) y el efecto de arrastre de un bloque sobre el otro que se ejerce a través de la misma. Finalmente en la Figura III.24 se presenta el estado de fisuración, representado por las líneas de igual deformación de fisuración, obtenido al final del análisis. Se observa que la fisuración se produce principalmente en el bloque que expande y que afecta únicamente a la parte superior de la presa. Al tratarse de un análisis preliminar en el que la única pretensión era verificar el correcto funcionamiento del modelo no pueden establecerse todavía conclusiones sobre el fenómeno estudiado.

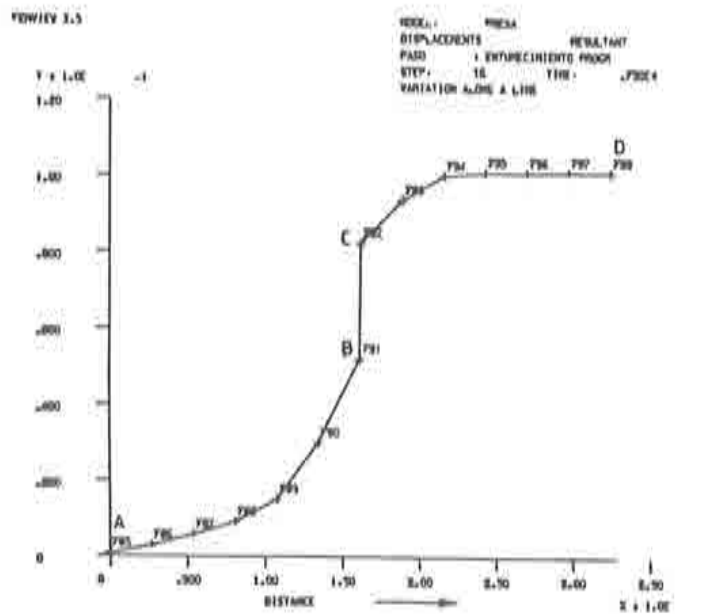
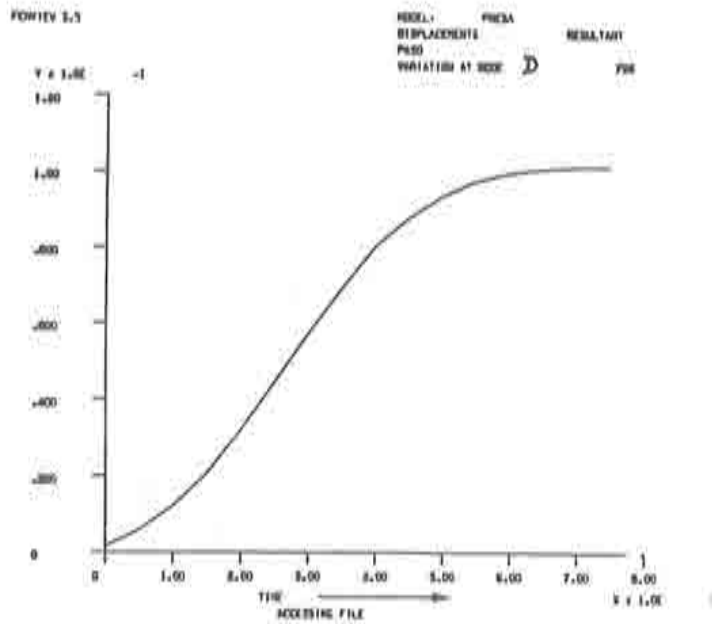


Figura III.23 Análisis tridimensional. Desplazamientos verticales en la coronación

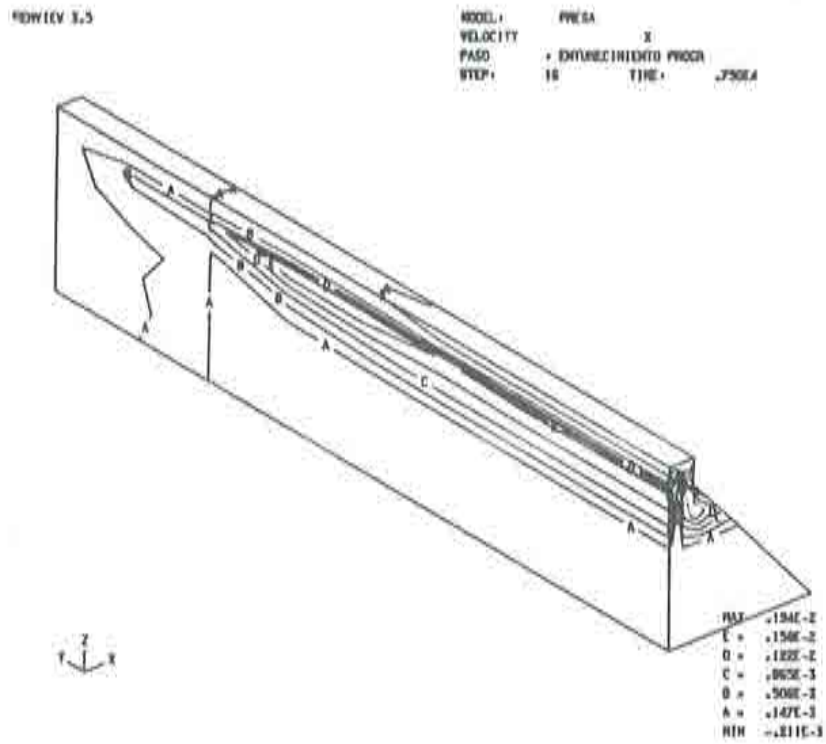


Figura III.24 Análisis tridimensional. Estado de fisuración al final del análisis

CAPITULO IV

CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS DE LA INVESTIGACION

A lo largo de este trabajo se ha presentado una perspectiva general de los modelos de fisuración existentes y de algunas aportaciones de la línea de investigación que se ha desarrollado, tanto en el dominio de la formulación teórica de dichos modelos como de su aplicación práctica.

Los modelos de fisura distribuida, en los que se ha incidido especialmente, se manifiestan como una herramienta de grandes posibilidades para la simulación de los procesos de fisuración y para su mejor comprensión. La generalidad y versatilidad de dichos modelos, que los hace aplicables al análisis de cualquier tipo de estructura de hormigón, ante cualquier sistema de cargas y estudiando su comportamiento hasta los estados últimos de su capacidad resistente, permite entrever su rápido desarrollo en el futuro. Es posible que, dentro de algunos años estos modelos se incorporen a los grandes códigos de cálculo por ordenador y que puedan ser utilizados en la práctica normal del análisis y diseño estructural. De hecho, esta es una circunstancia que empieza a producirse y ya existe algún programa de propósito general⁴⁴ que incorpora versiones, todavía un poco rudimentarias, de dichos modelos.

Sin embargo, queda aún un largo camino por recorrer que pasa por el asentamiento teórico de los fundamentos de los modelos de fisuración y la resolución de los numerosos problemas que aparecen al implementarlos en los métodos numéricos de cálculo por ordenador. En este trabajo, se han comentado algunos de estos problemas (objetividad respecto al tamaño de la malla de elementos finitos, localización de deformaciones, etc.) pero existen otros, en los que no se ha profundizado aquí, como son la predicción de inestabilidades y de bifurcaciones (soluciones que corresponden a estados de equilibrio que no pueden ser alcanzados físicamente pero sí por el algoritmo numérico) que absorben gran parte del esfuerzo investigador que se está realizando actualmente en el tema⁴⁴⁻⁴⁶. A pesar de ello los avances son constantes y todo hace pensar que en un corto plazo de tiempo estos modelos constituirán un ámbito de conocimiento bien asentado y de amplia utilización en el análisis y diseño estructural.

En este sentido, en el Capítulo III se han presentado dos aplicaciones concretas a problemas estructurales que no hubieran podido ser resueltos sin la utilización de este tipo de modelos. Es evidente que estas aplicaciones no son las únicas y que existen numerosas situaciones donde la disponibilidad de modelos de comportamiento del hormigón fiables y de amplio rango, así como de modelos de junta estructurales puede ser de gran utilidad. Entre ellas se podrían citar las siguientes:

- **Patologías estructurales.** Los modelos, y los correspondientes programas de

ordenador, podrían ser entendidos como "laboratorios" en el ordenador donde se pueden simular situaciones y experimentos dedicados al estudio de causas y efectos de patologías asociadas a la fisuración. No se quiere decir con ello, que puede abandonarse el estudio experimental de dichos fenómenos, sino que la simulación en ordenador, mucho más rápida, versátil y económica, permitirá completar cada vez más a la simulación experimental y abarcar un amplio abanico de estudios paramétricos de indudable utilidad para el mejor conocimiento de las causas y remedios de dichas patologías. Pensando, por ejemplo, en un elemento típico de la edificación, como es la tabiquería, un modelo que contemplara la fisurabilidad del ladrillo o del bloque profabricado de hormigón y su conexión mediante las juntas de mortero, permitiría estudiar un amplio abanico de disposiciones constructivas, elementos de refuerzo, etc., y obtener conclusiones importantes sobre este elemento constructivo. Consideraciones similares podrían establecerse sobre otros elementos constructivos como, por ejemplo, los muros de carga. En el capítulo III se ha expuesto ampliamente la aplicación de dichos modelos a estructuras de hormigón en masa, como son las presas, que puede ser extendida a otro tipo de situaciones. La influencia de la retracción, o de los efectos térmicos producidos por la insolación, en la aparición de fisuras en elementos estructurales es otro ámbito de aplicación de los modelos de fisuración a problemas de patologías estructurales.

- **Análisis y diseño estructural.** Es un hecho cierto, que el proyectista es cada vez más exigente con la estructura en el sentido de acudir a diseños más esbeltos y atrevidos; y ello es posible no sólo a la disposición de mejores materiales y técnicas constructivas sino también de mejores herramientas de cálculo que le permiten conocer mejor el funcionamiento de la estructura y llevarla en servicio a mayores regímenes de sollicitación.

En el caso de estructuras de hormigón, modelos como los estudiados en este trabajo, en los que los fenómenos dominantes en el comportamiento no-lineal del material, como son la fisuración o la degradación del hormigón, estarían representados en profundidad, permitirá avanzar en la tendencia indicada. Un ejemplo concreto de aplicación en este ámbito lo constituiría, el uso de los modelos de fisuración en el perfeccionamiento de las técnicas denominadas de "pretensado parcial" en las que la existencia de un cierto nivel "controlado" de fisuración se admite incluso en estados de servicio.

- **Desarrollo y validación de modelos simplificados o más específicos.** Se podría argumentar que en muchas circunstancias del diseño y cálculo de estructuras de hormigón, no es necesario acudir a modelos tan sofisticados como los presentados aquí y que existen métodos más sencillos que, aplicados a ciertas hipótesis como por ejemplo las vigas, permiten conocer su capacidad resistente máxima incluso en régimen no lineal. Esto es cierto, pero los modelos más amplios pueden ser un elemento de validación y contraste de las hipótesis simplificadoras de otros modelos que permita determinar su rango de validez así como un punto de arranque en el desarrollo de modelos para situaciones y tipologías más específicas. Por ejemplo, los modelos de cálculo no-lineal de estructuras de hormigón basados en la utilización de diagramas momento-curvatura

no lineales, pueden ser comparados, mejorados y validados mediante la aplicación de modelos bidimensionales de fisuración como los aquí estudiados a estructuras tipo viga.

En resumen, a pesar de que todavía se está relativamente lejos de poder calificar a los modelos de fisuración distribuida como "disponibles" y "aplicables", en el sentido más general de estas palabras, constituyen una alternativa que se vislumbra como válida y prometedora para profundizar en el conocimiento del fenómeno de la fisuración en el análisis de estructuras de hormigón.

REFERENCIAS

- [1] - *State of the art report on: Finite Element Analysis of Reinforced concrete* - ASCE - 1982.
- [2] - Rots J.G., Nauta P., Kuipers G. y Blaauwendraad J. - *Smearred crack approach and fracture localization in concrete* - Heron - Vol. 30 - Delft, Netherlands - 1985.
- [3] - Oliver J. y Fernandez Roure J.R. - *Análisis no lineal de estructuras bidimensionales de hormigón por el método de los elementos finitos* - II Simposium de Aplicaciones del Metodo de los Elementos Finitos en Ingeniería - Eds. Oñate E., Suarez B., Miquel Canet J.- Vol. 1 - pp. 447-463 - Barcelona 1986.
- [4] - Borst R. De - *Non linear analysis of frictional materials* - Ph. D. Thesis - Delft, The Netherlands - 1986.
- [5] - Oller S. - *Un modelo de daño plástico para materiales friccionales* - Tesis Doctoral - Universidad Politécnica de Cataluña - 1988.
- [6] - Armero F. - *Inestabilidad y Bifurcación de soluciones en problemas de mecánica de sólidos con ablandamiento por deformación* - Tesina de Especialidad - E.T.S. de Ingenieros de Caminos - Barcelona - 1988.
- [7] - Bažant Z.P. y Belytschko T. - *Wave propagation in a strain softening bar: exact solution* - Journal Eng. Mech. Division - Vol. 111 - Nro. EM3 - pp. 381-389 - 1985.
- [8] - Hillerborg A., Modeer M. y Petersson P. - *Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements* - Cement and Concrete Research - Vol. 6 - Nro. 6 - pp. 773-782 - 1976.
- [9] - Planas J. y Elices M. - *Fractura del hormigón en régimen lineal: intentos para medir la energía de fractura G_f* - Informes de la Construcción - Vol. 37 - Nro. 372 - 1985.
- [10] - Bažant Z. y Oh B. - *Crack band theory for fracture of concrete* - Mat. Construct. 16 (93) - pp. 155-177 - 1983.
- [11] - Bažant Z. y Cedolin L. - *Blunt crack propagation in finite element analysis* - Journal of The Engineering Division - Vol. 105 - Nro EM2 - pp. 297-315 - ASCE - 1979.
- [12] - Cervera M., Hinton E. y Hassan O. - *Non linear analysis of reinforced plate and shell structures using 20-nodes isoparametric brick elements* - Computer and Structures - Vol. 25 - Nro. 6 - pp. 845-870 - 1987.
- [13] - Zienkiewicz O.C. - *"El método de los elementos finitos"* - Edit. Reverté- Barcelona - 1982.
- [14] - Bathe K.J.- *"Finite Element Procedures in Engineering analysis"* - Prentice Hall - New Jersey - 1982.
- [15] - Borst R. De y Nauta P. - *Non-orthogonal cracks in a smeared finite element model*

- International Report inst. TNO for building material and building structures - Delft, Netherlands - 1984.
- [16] - Borst R. De y Vermeer P. - *Possibilities and limitations of finite elements for limit analysis* - Geotechnique 34 - Nro. 2 - pp. 199-210 - 1984.
- [17] - Cervera M. y Hinton E. - *Nonlinear analysis of reinforced concrete plates and shells using a three dimensional model* - Internal Report - Department of Civil Engineering Univ. College of Swansea U.K. - 1985.
- [18] - Oliver J. - *Una formulación cuasi-intrínseca para el estudio, por el Método de los elementos finitos de vigas, arcos, placas y láminas sometidas a grandes corrimientos en régimen elastoplástico* - Tesis doctoral - E.T.S. Ing. de Caminos - Barcelona - 1982.
- [19] - Lin C.S. - *Non linear analysis of Reinforced Concrete Slabs and Shells* - SESM report nRo. 13-1 - University of California - Berkeley - 1973.
- [20] - Oñate E., Oller S., Oliver J. y Lubliner J. - *A fully elastoplastic constitutive model for non linear analysis of concrete* - Int. Conf. on Num. Methods in Ingng., Theory and Applications - NUMETA - Eds. Pande G. and Middleton J. - Martinus Nijhoff Publishers - Swansea U.K. - 1987.
- [21] - Cristifield M.A. - *difficulties with current numerical models for reinforced concrete and some tentative solutions* - Proc. Int. Conf. on Computer-Aided Analysis and Design of Concrete Structures - Split - Yugoslavia - 1984.
- [22] - Simo J. C. y Ju J. M. - *On continuum damage - elastoplasticity at finite strains: a computational framework* - Paper submitted for consideration for publication in: "Computational Mechanics" - 1987.
- [23] - Dìtommaso A. - *Evaluation of concrete fracture - Fracture Mechanics of Concrete: Material characterization and testing* - Ed. by A. Carpinteri and A. Ingraffea - pp. 31-65 - Martinus Nijhoff Publishers - 1984.
- [24] - Chen W.F. - *"Plasticity in reinforced Concrete"* - Mc Graw Hill - 1982.
- [25] - Lubliner J., Oller S., Oliver J. y Oñate E. - *A plastic damage model for non linear analysis of concrete* - Paper submitted for consideration for publication in: Int. Journal Solids and Structures - 1988.
- [26] - Owen D.R.J. y Hinton E. - *"Finite Elements in Plasticity"* - Pineridge Press - Swansea - U.K. - 1980.
- [27] - Kupfer H. B., Hilsdorf H. y Rusch H. - *Behavior of concrete under biaxial stresses* - Journal ACI - Vol. 66 - Nro. 8 - 1969.
- [28] - Brebbia C.A. y Connor J.J. - *"Método de los elementos finitos en ingeniería civil"* - Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos - Madrid 1975.
- [29] - Buyukozturk O. y Shareef S. - *Constitutive modeling of concrete in finite element analysis* - Computers and Structures - Vol. 21 - Nro. 3 - pp. 581-610 - 1985.
- [30] - Dvorkin E., Torrent R. y Alvarado A. - *A constitutive relation for concrete* - Proceedings of the International Conference of Computational Plasticity - Edited by D. R. J. Owen, E. Hinton, E. Oñate - Part 2 - pp. 1415-1430 - Pineridge Press - 1987.
- [31] - Murray D.W., Chitnuyanondh L., Khazal Y. y Chung Wong - *Concrete Plasticity theory of biaxial stress analysis* - Jour. Eng. Mechanics Division - ASCE - Vol. 105 - Nro. EM6 - pp. 989-1106 - 1979.
- [32] - Arrea M. e Ingraffea A. R. - *Mixed mode crack propagation in mortar and concrete*

- Cornell University, Department of Structural Engineering - Report Nro. 81-13 - Ithaca - New York.
- [33] - Rice J. - *The localization of plastic deformation* - Theoretical and Applied Mechanics - pp. 207-220 - Ed. W. T. Koiter - North Holland Publishing Co. - 1976.
- [34] - Oliver J. - *A consistent characteristic length for smeared cracking models* - Int. Journal for Num. Meth in Eng. - (Aceptado para publicación) - - 1988.-
- [35] - Carol I., Alonso E. y Nuchart A. - *Modelos isoparamétricos de juntas en macizos rocosos* - Proc. I simp. Nacional sobre Aplicaciones del Método de los Elementos Finitos en Ingeniería - Barcelona - 1982.
- [36] - Oliver J., Oller S. y Oñate E. - *Modelos elasto-plásticos para la simulación numérica de procesos de fractura* - V Encuentro del Grupo Español de Fractura - Barcelona 1988.-
- [37] - Oliver J., Oñate E., Peraire J. y Chueca R. - *Análisis no lineal de tranques criogénicos bajo cargas térmicas* - Hormigón y Acero - Nro. 155 - 1982.
- [38] - Millet J.C., Renier D., Goguet B. y Michel G. - *Cracking in dams caused by concrete swelling* - Proc. 15º congress on Large Dams - Q.57 - R.35 - Lausanne - 1985.
- [39] - Boggs H.L. - *Cracking in concrete dams* - UBSR cases histories - Proc. 15º congress on Large Dams - Q.57 - R.10 - Lausanne - 1987.
- [40] - Del Hoyo R. y Guerreiro M. - *Concrete cracking in two dams* - Proc. 15º congress on Large Dams - Q.57 - R.18 - Lausanne - 1987.
- [41] - Murthy Y.K., Das B.P. y Divatia E. - *Cracking in Hirakud Concrete Dam* - Proc. 15º congress on Large Dams - Q.57 - R.23 - Lausanne - 1987.
- [42] - Oliver J., Cervera M., Oñate E. y Herrero E. - *A case study of a gravity dam subjected to severe internal actions: description and numerical simulation* - Proc. 16º Congress on Large Dams - C.29 - pp.1387-1409 - San Francisco - 1988.
- [43] - Oliver J., Oñate E., Bugeda G., Feliu T. y Herrero E. - *Un modelo numérico para el análisis de la seguridad en presas de gravedad bajo cargas internas* - Proc. 1ªª Jornadas Españolas de Presas - pp. 225-278 - Madrid - 1985.
- [44] - ADINA - distribuido por ADINA R&D - Watertown - Massachusetts - U.S.A.
- [45] - Ortiz M., Leroy Y. y Needleman - *A finite element method for localized failure analysis* - Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering - Vol. 61 - pp. 189-214 - North Holland - 1987.
- [46] - Willam K. y Sobh N. - *Bifurcation analysis of tangencial material operators* - Int. Conf. on Num. Methods in Ingng., Theory and Applications - NUMETA - Eds. Paude G. and Middleton J. - Martinus Nijhoff Publishers - Swansea U.K. - 1987.

