

# Análise elastoplástica de estruturas metálicas utilizando algoritmos de retorno radial

William Taylor Matias Silva

Departamento de Engenharia Civil, Faculdade de Tecnologia  
Universidade de Brasília - UnB  
Campus Darcy Ribeiro, 70910-900 Brasília, Brazil  
Tel.: 55-61-274 15 17; Fax: 55-61-273 464 4  
e-mail: taylor@unb.br

## Sumário

Neste trabalho faz-se uma análise elastoplástica de primeira ordem de estruturas metálicas usando um esquema preditor/corretor para manter os esforços seccionais sobre uma superfície de interação que define o estado limite último da seção transversal. Assume-se que a superfície de interação seja contínua, convexa e descrita em função dos esforços normal e cortante, dos momentos torsor e fletores. Utiliza-se o método de Newton-Raphson tanto a nível global, para obter a configuração de equilíbrio da estrutura, quanto a nível local, para trazer os esforços solicitantes para a superfície de interação. Apresenta-se alguns exemplos para demonstrar a eficácia do método.

## A RADIAL RETURN ALGORITHM APPLICATIONS IN A PLASTIC HINGE METHOD FOR STEEL FRAMES

## Summary

A method is presented for first-order elastoplastic analysis of framed structures using a radial return predictor/corrector solution strategy. This model uses the plastic hinge assumption coupled with the concept of a yield surface in the stress resultant space, which is assumed to be a continuous and convex function of the axial force, shear force, twisting and bending moment on a cross section. Combining the Newton-Raphson method and the radial return algorithm a consistent tangent modular matrix and accurate and fast converging algorithms are obtained. The single vector return algorithm is used for simulating one plastic hinge at a beam element end whereas the two vectors return algorithm is used for simulating two plastic hinges at the beam element ends. Several examples are presented to demonstrate the accuracy of the method.

## INTRODUÇÃO

Nas últimas décadas, no contexto de plasticidade computacional, tem-se desenvolvido algoritmos muito eficientes aplicados na integração de modelos constitutivos, tanto para materiais frágeis quanto para materiais dúteis<sup>16,5</sup>. Uma variedade grande de esquemas foram testados quanto a precisão e estabilidade. Dentre muitos esquemas de integração descritos na literatura, cabe destacar os algoritmos implícitos que têm sido utilizados com sucesso<sup>9,10,1</sup>. Os esquemas implícitos, como por exemplo, os algoritmos de retorno radial, permitem integrar o modelo constitutivo sob grandes deformações inelásticas, além de obter a matriz de rigidez tangente consistente que possibilita a convergência quadrática num processo incremental-iterativo quando se aplica o método de Newton-Raphson. Por outro lado, do ponto de vista numérico, estes esquemas foram empregados no espaço de tensões, isto é, utilizando elementos finitos de sólidos 2D e 3D, uma vez que, naturalmente, os modelos constitutivos vêm descritos no espaço de tensões. Recentemente, Krenk<sup>10</sup> estendeu a aplicação do algoritmo de retorno radial para o espaço de resultantes de tensões e o aplicou na análise elastoplástica de plataformas off-shore. Entretanto, na referência acima citada não se apresenta a formulação analítica do método em detalhes. Portanto, o objetivo principal deste trabalho, é o desenvolvimento analítico detalhado da extensão do algoritmo de retorno radial ao espaço dos esforços seccionais.

Neste trabalho faz-se uma análise elastoplástica de primeira ordem de estruturas metálicas, isto é, considera-se somente o efeito da não linearidade física, com o objetivo de somente determinar a carga de colapso plástico. Não se considera o endurecimento. Descreve-se a não linearidade física através do conceito da rótula plástica. O conceito da rótula plástica se baseia nas seguintes hipóteses<sup>12,8</sup>:

1. existência de uma superfície de escoamento, contínua e convexa, no espaço de resultantes de tensões, aqui, denominadas de curvas de interação;
2. a curva de interação define a capacidade portante última da seção transversal;
3. as deformações plásticas são governadas pelos gradientes das curvas de interação;
4. as deformações plásticas estão confinadas em zonas plásticas de comprimento nulo situadas nas extremidades do elemento de viga.

Para simular numericamente a presença de rótulas plásticas no elemento de viga utiliza-se dois esquemas distintos do algoritmo de retorno radial<sup>9</sup>. No primeiro esquema aplica-se o algoritmo de retorno com um vetor de fluxo plástico para simular a ocorrência de uma rótula plástica no elemento de viga. O segundo esquema faz uso do algoritmo de retorno com dois vetores de fluxo plástico para simular a presença de duas rótulas plásticas no elemento de viga.

Utiliza-se o método de Newton-Raphson tanto a nível global, para obter a configuração de equilíbrio da estrutura, quanto a nível local, para trazer os esforços solicitantes para a superfície de interação. Por outro lado, ao utilizar-se o método de Newton-Raphson conjuntamente com o algoritmo de retorno radial obtém-se a matriz de rigidez elastoplástica consistente, o que permite obter convergência quadrática em um processo incremental-iterativo, SIMO & HUGUES [1998]. Apresenta-se, neste trabalho, vários exemplos numéricos para demonstrar a eficácia do algoritmo de retorno radial na análise elastoplástica de estruturas metálicas.

Finalmente, cabe destacar, alguns trabalhos pioneiros no uso do conceito de rótulas plásticas juntamente com procedimentos incrementais-iterativos na determinação da carga de colapso de estruturas metálicas, como por exemplo<sup>2,13,6,14,15,17</sup>. Não obstante, estes autores utilizaram diferentes técnicas para integração do modelo constitutivo que em sua quase totalidade eram inconsistentes do ponto de vista da teoria da plasticidade, isto é, nós plastificados durante o processo de carga não permaneciam na superfície de interação,

ainda que houvesse um processo de correção. Por outro lado, neste trabalho demonstra-se a consistência do algoritmo de retorno radial em relação à teoria da plasticidade.

## SUPERFÍCIE DE INTERAÇÃO

Existe uma vasta literatura sobre o tema de superfícies de interação, para maiores detalhes consultar os livros dos autores<sup>18,3,11</sup>. Uma superfície de interação que define o estado limite último de uma secção transversal depende fundamentalmente de três fatores:

1. da forma geométrica da secção transversal;
2. do tipo de combinação de esforços seccionais que atuam na secção transversal;
3. da teoria de viga utilizada.

Soluções analíticas fechadas limita-se a casos especiais de combinações de esforços, tais como, momento fletor e esforço normal, e para alguns tipos secções transversais, como por exemplo, secções retangular e I<sup>8,12</sup>.

Neste trabalho, assume-se uma superfície de interação contínua, convexa e que se aplica a uma secção transversal arbitrária. Esta superfície é escrita em função dos esforços seccionais da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \Phi = & \alpha_1 \left( \frac{|F_x|}{F_{x_p}} \right)^{\alpha_2} + \alpha_3 \left( \frac{|F_y|}{F_{y_p}} \right)^{\alpha_4} + \alpha_5 \left( \frac{|F_z|}{F_{z_p}} \right)^{\alpha_6} + \alpha_7 \left( \frac{|M_x|}{M_{x_p}} \right)^{\alpha_8} + \alpha_9 \left( \frac{|M_y|}{M_{y_p}} \right)^{\alpha_{10}} + \\ & + \alpha_{11} \left( \frac{|M_z|}{M_{z_p}} \right)^{\alpha_{12}} + \alpha_{13} \left( \frac{|F_x|}{F_{x_p}} \right)^{\alpha_{14}} \left( \frac{|M_y|}{M_{y_p}} \right)^{\alpha_{15}} + \alpha_{16} \left( \frac{|F_x|}{F_{x_p}} \right)^{\alpha_{17}} \left( \frac{|M_z|}{M_{z_p}} \right)^{\alpha_{18}} - 1 = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

onde  $F_x$  é o esforço axial,  $F_y$  e  $F_z$  são os esforços cortantes,  $M_x$  é o momento torsor e  $M_y$  e  $M_z$  são momentos fletores.  $F_{x_p}$  é esforço normal de plastificação,  $F_{y_p}$  e  $F_{z_p}$  são os esforços cortantes de plastificação,  $M_{x_p}$  é o momento torsor de plastificação, e  $M_{y_p}$  e  $M_{z_p}$  são os momentos fletores de plastificação. Cabe comentar que os esforços de plastificação são puros.  $\alpha_i$  representam constantes reais positivas que dependem da forma geométrica da secção transversal. Assume-se valores positivos maiores ou iguais a 1 para as constantes que representam os expoentes. Dentro do contexto da análise elastoplástica perfeita de estruturas considera-se que:

1. os esforços seccionais contidos no interior da superfície de interação geram somente deformações elásticas;
2. os esforços seccionais que estejam na superfície de interação geram deformações plásticas;
3. os esforços seccionais fora da superfície de interação representam estados de tensões inadmissíveis, pois não se leva em conta o endurecimento.

Durante o processo de carga os esforços seccionais em alguns nós dos elementos da estrutura poderão sair da superfície de interação. Para trazer estes esforços seccionais de volta à superfície utiliza-se o algoritmo de retorno radial. Para descrever o desenvolvimento analítico deste método é necessário calcular as derivadas de primeira e segunda ordem da superfície de interação em relação aos esforços seccionais.

### Derivadas de primeira ordem da superfície de interação

Considerando a equação (1), as derivadas de primeira ordem da superfície de interação em relação aos esforços seccionais escrevem-se como

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \Phi}{\partial F_x} &= \alpha_1 \alpha_2 \frac{|F_x|^{\alpha_2-1}}{F_{x_p}^{\alpha_2}} \text{sign\_fx} + \alpha_{13} \alpha_{14} \frac{|F_x|^{\alpha_{14}-1}}{F_{x_p}^{\alpha_{14}}} \text{sign\_fx} \left( \frac{|M_y|}{M_{y_p}} \right)^{\alpha_{15}} + \\
 &\quad + \alpha_{16} \alpha_{17} \frac{|F_x|^{\alpha_{17}-1}}{F_{x_p}^{\alpha_{17}}} \text{sign\_fx} \left( \frac{|M_z|}{M_{z_p}} \right)^{\alpha_{18}} \\
 \frac{\partial \Phi}{\partial F_y} &= \alpha_3 \alpha_4 \frac{|F_y|^{\alpha_4-1}}{F_{y_p}^{\alpha_4}} \text{sign\_fy} \\
 \frac{\partial \Phi}{\partial F_z} &= \alpha_5 \alpha_6 \frac{|F_z|^{\alpha_6-1}}{F_{z_p}^{\alpha_6}} \text{sign\_fz} \\
 \frac{\partial \Phi}{\partial M_x} &= \alpha_7 \alpha_8 \frac{|M_x|^{\alpha_8-1}}{M_{x_p}^{\alpha_8}} \text{sign\_mx} \\
 \frac{\partial \Phi}{\partial M_y} &= \alpha_9 \alpha_{10} \frac{|M_y|^{\alpha_{10}-1}}{M_{y_p}^{\alpha_{10}}} \text{sign\_my} + \alpha_{13} \alpha_{15} \left( \frac{|F_x|}{F_{x_p}} \right)^{\alpha_{14}} \frac{|M_y|^{\alpha_{15}-1}}{M_{y_p}^{\alpha_{15}}} \text{sign\_my} \\
 \frac{\partial \Phi}{\partial M_z} &= \alpha_{11} \alpha_{12} \frac{|M_z|^{\alpha_{12}-1}}{M_{z_p}^{\alpha_{12}}} \text{sign\_mz} + \alpha_{16} \alpha_{18} \left( \frac{|F_x|}{F_{x_p}} \right)^{\alpha_{17}} \frac{|M_z|^{\alpha_{18}-1}}{M_{z_p}^{\alpha_{18}}} \text{sign\_mz}
 \end{aligned} \tag{2}$$

onde  $\text{sign\_f}_i = \frac{|F_i|}{F_i}$  denota o sinal das componentes do vetor de forças nodais.

Com o objetivo de obter uma forma compacta, essas derivadas são coletadas na forma de um vetor. Assumindo a superfície de interação como um potencial plástico, as componentes desse vetor definem o fluxo plástico nos nós do elemento durante o processo de carga. Portanto, escreve-se um vetor de fluxo plástico para cada nó do elemento. Esses vetores são expressos como

$$\left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_j} \right\}_1 = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial F_{x_1}} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial F_{y_1}} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial F_{z_1}} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial M_{x_1}} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial M_{y_1}} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial M_{z_1}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}; \quad \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_j} \right\}_2 = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial F_{x_2}} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial F_{y_2}} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial F_{z_2}} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial M_{x_2}} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial M_{y_2}} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial M_{z_2}} \end{array} \right\} \tag{3}$$

### Derivadas de segunda ordem da superfície de interação

O gradiente do vetor de fluxo plastico é obtido através da diferenciação de cada componente desse vetor em relação aos esforços seccionais. Desta maneira, considerando a equação (2), a derivada da primeira componente  $\frac{\partial \Phi}{\partial F_x}$  do vetor  $\left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_j} \right\}_1$  pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial F_x \partial F_x} &= \alpha_1 \alpha_2 (\alpha_2 - 1) \frac{|F_x|^{\alpha_2 - 2}}{F_{x_p}^{\alpha_2}} + \alpha_{13} \alpha_{14} (\alpha_{14} - 1) \frac{|F_x|^{\alpha_{14} - 2}}{F_{x_p}^{\alpha_{14}}} \left( \frac{|M_y|}{M_{y_p}} \right)^{\alpha_{15}} + \\
 &\quad + \alpha_{16} \alpha_{17} (\alpha_{17} - 1) \frac{|F_x|^{\alpha_{17} - 2}}{F_{x_p}^{\alpha_{17}}} \left( \frac{|M_z|}{M_{z_p}} \right)^{\alpha_{18}} \\
 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial F_x \partial F_y} &= 0 \\
 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial F_x \partial F_z} &= 0 \\
 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial F_x \partial M_x} &= 0 \\
 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial F_x \partial M_y} &= \alpha_{13} \alpha_{14} \alpha_{15} \frac{|F_x|^{\alpha_{14} - 1}}{F_{x_p}^{\alpha_{14}}} \text{sign\_fx} \frac{|M_y|^{\alpha_{15} - 1}}{M_{y_p}^{\alpha_{15}}} \text{sign\_my} \\
 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial F_x \partial M_z} &= \alpha_{16} \alpha_{17} \alpha_{18} \frac{|F_x|^{\alpha_{17} - 1}}{F_{x_p}^{\alpha_{17}}} \text{sign\_fx} \frac{|M_z|^{\alpha_{18} - 1}}{M_{z_p}^{\alpha_{18}}} \text{sign\_mz}
 \end{aligned} \tag{4}$$

As derivadas das demais componentes do vetor  $\left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_j} \right\}_1$  em relação aos esforços seccionais podem ser obtidas de maneira similar ao processo descrito na equação (4). Coletando essas derivadas em forma matricial obtém-se o gradiente do fluxo plastico para cada nó do elemento. Essas matrizes podem ser escritas como

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial F_{x_1} \partial F_{x_1}} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial F_{x_1} \partial F_{y_1}} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial F_{x_1} \partial F_{z_1}} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial F_{x_1} \partial M_{x_1}} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial F_{x_1} \partial M_{y_1}} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial F_{x_1} \partial M_{z_1}} \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial F_{y_1} \partial F_{x_1}} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial F_{y_1} \partial F_{y_1}} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial F_{y_1} \partial F_{z_1}} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial F_{y_1} \partial M_{x_1}} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial F_{y_1} \partial M_{y_1}} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial F_{y_1} \partial M_{z_1}} \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial F_{z_1} \partial F_{x_1}} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial F_{z_1} \partial F_{y_1}} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial F_{z_1} \partial F_{z_1}} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial F_{z_1} \partial M_{x_1}} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial F_{z_1} \partial M_{y_1}} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial F_{z_1} \partial M_{z_1}} \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial M_{x_1} \partial F_{x_1}} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial M_{x_1} \partial F_{y_1}} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial M_{x_1} \partial F_{z_1}} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial M_{x_1} \partial M_{x_1}} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial M_{x_1} \partial M_{y_1}} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial M_{x_1} \partial M_{z_1}} \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial M_{y_1} \partial F_{x_1}} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial M_{y_1} \partial F_{y_1}} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial M_{y_1} \partial F_{z_1}} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial M_{y_1} \partial M_{x_1}} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial M_{y_1} \partial M_{y_1}} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial M_{y_1} \partial M_{z_1}} \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial M_{z_1} \partial F_{x_1}} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial M_{z_1} \partial F_{y_1}} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial M_{z_1} \partial F_{z_1}} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial M_{z_1} \partial M_{x_1}} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial M_{z_1} \partial M_{y_1}} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial M_{z_1} \partial M_{z_1}} \end{bmatrix} \tag{5a}$$

$$\left[ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial F_j \partial F_k} \right]_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{5b}$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial F_{x_2} \partial F_{x_2}} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial F_{x_2} \partial F_{y_2}} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial F_{x_2} \partial F_{z_2}} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial F_{x_2} \partial M_{x_2}} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial F_{x_2} \partial M_{y_2}} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial F_{x_2} \partial M_{z_2}} \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial F_{y_2} \partial F_{x_2}} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial F_{y_2} \partial F_{y_2}} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial F_{y_2} \partial F_{z_2}} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial F_{y_2} \partial M_{x_2}} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial F_{y_2} \partial M_{y_2}} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial F_{y_2} \partial M_{z_2}} \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial F_{z_2} \partial F_{x_2}} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial F_{z_2} \partial F_{y_2}} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial F_{z_2} \partial F_{z_2}} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial F_{z_2} \partial M_{x_2}} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial F_{z_2} \partial M_{y_2}} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial F_{z_2} \partial M_{z_2}} \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial M_{x_2} \partial F_{x_2}} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial M_{x_2} \partial F_{y_2}} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial M_{x_2} \partial F_{z_2}} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial M_{x_2} \partial M_{x_2}} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial M_{x_2} \partial M_{y_2}} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial M_{x_2} \partial M_{z_2}} \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial M_{y_2} \partial F_{x_2}} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial M_{y_2} \partial F_{y_2}} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial M_{y_2} \partial F_{z_2}} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial M_{y_2} \partial M_{x_2}} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial M_{y_2} \partial M_{y_2}} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial M_{y_2} \partial M_{z_2}} \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial M_{z_2} \partial F_{x_2}} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial M_{z_2} \partial F_{y_2}} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial M_{z_2} \partial F_{z_2}} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial M_{z_2} \partial M_{x_2}} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial M_{z_2} \partial M_{y_2}} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial M_{z_2} \partial M_{z_2}} \end{bmatrix} \quad (6a)$$

$$\left[ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial F_j \partial F_k} \right]_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \quad (6b)$$

onde  $\mathbf{0}$  é uma matriz  $6 \times 6$  com elementos nulos.

## ALGORÍTMO DE RETORNO À SUPERFÍCIE DE INTERAÇÃO

Quando os esforços seccionais, de um ou de ambos nós do elemento de viga, sair da superfície de interação, forma-se uma ou duas rótulas plásticas, respectivamente. Neste caso, aplica-se o algoritmo de retorno radial para trazer de volta os esforços seccionais à superfície de interação. Portanto, assume-se, inicialmente, que exista uma combinação de esforços seccionais em um dos nós do elemento que esteja fora da superfície de interação. Utilizando-se o algoritmo de retorno radial, corrige-se o vetor de forças nodais do seguinte modo

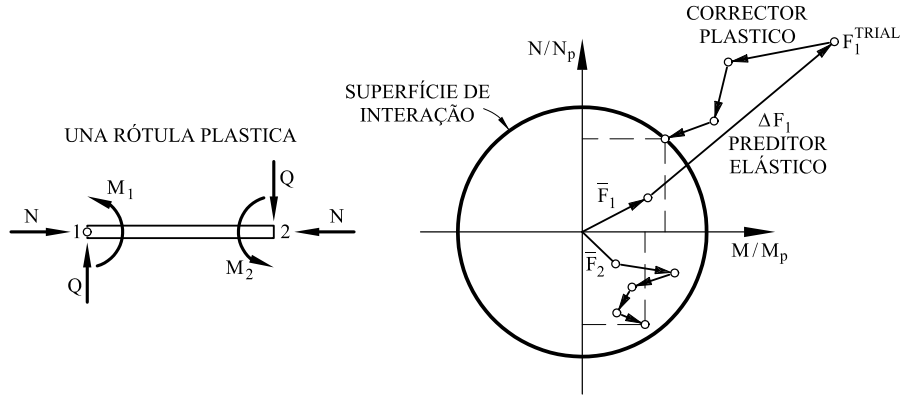
$$\hat{F}_i = F_i^{trial} - \lambda_1 K_{ij} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_j} \right\}_1 \quad (7)$$

onde  $F_i^{trial} = \bar{F}_i + K_{ij} dU_j$  corresponde a um vetor de forças nodais estimado. Este vetor é obtido elasticamente através dos incrementos de deslocamentos nodais  $dU_j$  e da matriz de rigidez linear elástica  $K_{ij}$  do elemento de viga 3D.  $\bar{F}_i$  é o vetor de forças nodais do último passo de carga convergido. O vetor  $\bar{F}_i$  estará dentro ou sobre a superfície de interação. Por outro lado,  $\left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_j} \right\}_1$  é vetor de fluxo plástico definido em relação aos esforços seccionais que estão fora da superfície de interação e  $\lambda_1$  é o multiplicador plástico, tal que,  $\lambda_1 \geq 0$ .

Pode-se obter o vetor de forças nodais de partida  $F_i^{trial}$  através de outros métodos<sup>9</sup>. Geralmente, os vetores de forças nodais estimado  $F_i^{trial}$  e corrigido  $\hat{F}_i$  não satisfazem o critério de escoamento, isto é, não estão sobre a superfície de interação. Portanto, algum processo iterativo é necessário para trazer o estado de tensão (esforços seccionais) de volta à superfície de interação.

### Algoritmo de retorno com um vetor

Quando ocorre somente uma rótula plástica no elemento de viga, ativa-se somente um vetor de fluxo plástico correspondente aos esforços seccionais que estiver fora da superfície de interação. Durante o processo iterativo utiliza-se vetores de fluxo plástico atualizados para aproximar-se da superfície de interação. A este procedimento denomina-se de algoritmo de retorno com um vetor. Na Figura 1 encontra-se a interpretação geométrica deste algoritmo.



**Figura 1.** Retorno a superfície com um vetor

Admitindo-se que os vetores de forças nodais atual  $F_i$  e corrigido  $\hat{F}_i$  não cumprem o critério de escoamento, isto é,  $\Phi(F_i) > 1$  e  $\Phi(\hat{F}_i) > 1$ , define-se o vetor de forças residuais  $r_i$  como

$$r_i = F_i - \hat{F}_i = F_i - \left( F_i^{trial} - \lambda_1 K_{ij} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_j} \right\}_1 \right) \quad (8)$$

Expandindo-se em série de Taylor até os termos de primeira ordem a equação (8) e mantendo o vetor de forças nodais de partida  $F_i^{trial}$  fixo, obtém-se um novo vetor de forças residuais  $r_i^{new}$ , que pode ser escrito como

$$r_i^{new} = r_i^{old} + dF_i + d\lambda_1 K_{ij} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_j} \right\}_1 + \lambda_1 K_{ij} \left[ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial F_j \partial F_k} \right]_1 dF_k \quad (9)$$

onde  $dF_i$  é uma variação em  $F_i$ ,  $d\lambda_1$  é uma variação em  $\lambda_1$  e  $\left[ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial F_j \partial F_k} \right]_1 dF_k$  é uma variação em  $\left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_j} \right\}_1$ . Impondo-se a condição  $r_i^{new} = 0$ , a equação (9) pode ser reescrita como

$$0 = r_i^{old} + d\lambda_1 K_{ij} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_j} \right\}_1 + \left( \delta_{ik} + \lambda_1 K_{ij} \left[ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial F_j \partial F_k} \right]_1 \right) dF_k \quad (10)$$

Definindo a matriz  $Q_{ik}$  como

$$Q_{ik} = \delta_{ik} + \lambda_1 K_{ij} \left[ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial F_j \partial F_k} \right]_1 \quad (11)$$

E após algumas manipulações algébricas e indiciais, determina-se a correção do vetor de forças nodais na iteração atual, que é dada pela seguinte expressão

$$dF_i = -Q_{il}^{-1} \left( r_l^{old} + d\lambda_1 K_{lj} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_j} \right\}_1 \right) \quad (12)$$

Por outro lado, expandindo a função de escoamento  $\Phi$  em série de Taylor até os termos de primeira ordem em torno do vetor de forças nodais final  $F_i$ , obtém-se

$$\Phi_1^{new} = \Phi_1^{old} + \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_i} \right\}_1 dF_i \quad (13)$$

Impondo  $\Phi_1^{new} = 0$  na equação (13) e usando a equação (12), determina-se a correção do multiplicador plástico, na iteração atual, como

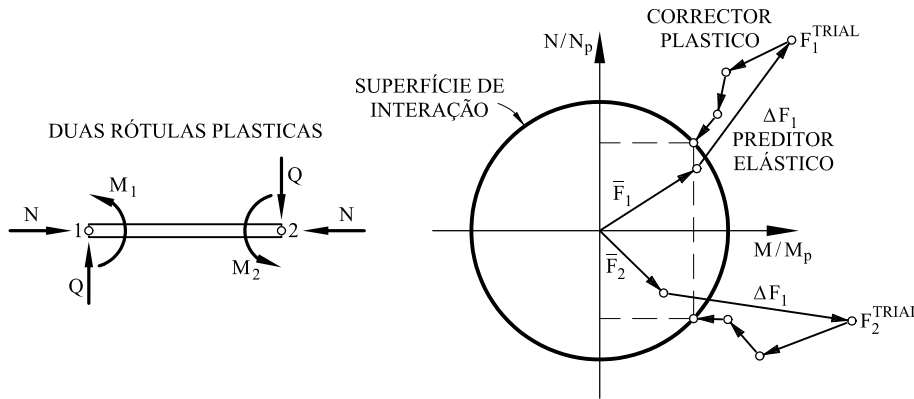
$$d\lambda_1 = \frac{\Phi_1^{old} - \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_i} \right\}_1 Q_{il}^{-1} r_l^{old}}{\left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_i} \right\}_1 Q_{il}^{-1} K_{lj} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_j} \right\}_1} \quad (14)$$

Este procedimento iterativo termina quando se cumprem os seguintes critérios de parada

$$r^{norm} = \sqrt{\frac{\|r_i\|}{\|F_i^{trial}\|}} < \text{TOL} \quad (15)$$

$$\Phi^{norm} = |\Phi - 1.0| < \text{TOL}$$

onde  $\|r_i\|$  é a norma euclidiana do vetor de forças residuais,  $\|F_i^{trial}\|$  é a norma euclidiana do vetor de forças estimado e TOL é a tolerância para convergência. Neste trabalho adota-se  $\text{TOL} = 10^{-10}$ .



**Figura 2.** Retorno a superfície com dois vetores

### Algoritmo de retorno com dois vetores

Quando ocorre duas rótulas plásticas no elemento de viga, ativa-se dois vetores de fluxo plástico, um vetor para cada nó,  $\left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_j} \right\}_1$  e  $\left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_j} \right\}_2$ . Estes vetores constituem-se de esforços seccionais de cada nó, que estão fora da superfície de interação, isto é,  $\Phi_1(F_j) > 1$  e  $\Phi_2(F_j) > 1$ . Durante o processo iterativo utilizam-se esses vetores de fluxo plástico atualizados para aproximar-se da superfície de interação. A este procedimento denomina-se de algoritmo de retorno com dois vetores. A interpretação geométrica deste algoritmo encontra-se na Figura 2. Definindo o vetor de forças nodais de partida como  $F_i^{trial} = \bar{F}_i + K_{ij} dU_j$ , onde  $\bar{F}_i$  é o vetor de forças nodais do último passo de carga convergido. O vetor  $\bar{F}_i$  estará dentro ou sobre a superfície de interação, isto é,  $\Phi(\bar{F}_i) < 1$  ou  $\Phi(\bar{F}_i) = 1$ , respectivamente. O vetor de forças nodais corrigido expressa-se como



$$\hat{F}_i = F_i^{trial} - \lambda_1 K_{ij} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_j} \right\}_1 - \lambda_2 K_{ij} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_j} \right\}_2 \quad (16)$$

onde,  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são os multiplicadores plasticos, tal que,  $\lambda_1 \geq 0$  e  $\lambda_2 \geq 0$ . Admitindo-se que os vetores de forças nodais atual  $F_i$  e corrigido  $\hat{F}_i$  não cumprem a condição de escoamento, isto é,  $\Phi(F_i) > 1$  e  $\Phi(\hat{F}_i) > 1$ , define-se o vetor de forças residuais  $r_i$  como

$$r_i = F_i - \hat{F}_i = F_i - \left( F_i^{trial} - \lambda_1 K_{ij} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_j} \right\}_1 - \lambda_2 K_{ij} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_j} \right\}_2 \right) \quad (17)$$

Expandindo-se em série de Taylor até os termos de primeira ordem a equação (17) e mantendo o vetor de forças nodais de partida  $F_i^{trial}$  fixo, obtém-se um novo vetor de forças residuais  $r_i^{new}$ , que pode ser escrito como

$$\begin{aligned} r_i^{new} = r_i^{old} + dF_i + d\lambda_1 K_{ij} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_j} \right\}_1 + \lambda_1 K_{ij} \left[ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial F_j \partial F_k} \right]_1 dF_k + \\ + d\lambda_2 K_{ij} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_j} \right\}_2 + \lambda_2 K_{ij} \left[ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial F_j \partial F_k} \right]_2 dF_k \end{aligned} \quad (18)$$

Impondo-se a condição  $r_i^{new} = 0$ , a equação (18) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} 0 = r_i^{old} + d\lambda_1 K_{ij} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_j} \right\}_1 + d\lambda_2 K_{ij} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_j} \right\}_2 + \\ + \left( \delta_{ik} + \lambda_1 K_{ij} \left[ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial F_j \partial F_k} \right]_1 + \lambda_2 K_{ij} \left[ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial F_j \partial F_k} \right]_2 \right) dF_k \end{aligned} \quad (19)$$

Definindo a matriz  $Q_{ik}$  como

$$Q_{ik} = \delta_{ik} + \lambda_1 K_{ij} \left[ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial F_j \partial F_k} \right]_1 + \lambda_2 K_{ij} \left[ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial F_j \partial F_k} \right]_2 \quad (20)$$

E após algumas manipulações algébricas e indiciais, determina-se a correção do vetor de forças nodais na iteração atual, que é dada pela seguinte expressão

$$dF_i = -Q_{il}^{-1} \left( r_i^{old} + d\lambda_1 K_{lj} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_j} \right\}_1 + d\lambda_2 K_{lj} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_j} \right\}_2 \right) \quad (21)$$

Por outro lado, expandindo a funções de escoamento no nó 1,  $\Phi_1$ , e no nó 2,  $\Phi_2$ , em série de Taylor até os termos de primeira ordem em torno do vetor de forças nodais final  $F_i$ , obtém-se

$$\begin{aligned} \Phi_1^{new} = \Phi_1^{old} + \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_i} \right\}_1 dF_i \\ \Phi_2^{new} = \Phi_2^{old} + \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_i} \right\}_2 dF_i \end{aligned} \quad (22)$$

Impondo  $\Phi_1^{new} = 0$  e  $\Phi_2^{new} = 0$  na equação (22) e usando a equação (21), chega-se a um sistema de equações  $2 \times 2$  dado por

$$\begin{aligned} \Phi_1^{old} - \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_i} \right\}_1 Q_{il}^{-1} r_l^{old} &= d\lambda_1 \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_i} \right\}_1 Q_{il}^{-1} K_{lj} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_j} \right\}_1 + d\lambda_2 \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_i} \right\}_1 Q_{il}^{-1} K_{lj} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_j} \right\}_2 \\ \Phi_2^{old} - \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_i} \right\}_2 Q_{il}^{-1} r_l^{old} &= d\lambda_1 \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_i} \right\}_2 Q_{il}^{-1} K_{lj} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_j} \right\}_1 + d\lambda_2 \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_i} \right\}_2 Q_{il}^{-1} K_{lj} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_j} \right\}_2 \end{aligned} \quad (23)$$

Cujas incógnitas são as correções dos multiplicadores plasticos  $d\lambda_1$  e  $d\lambda_2$  durante o processo iterativo. Introduzindo algumas variáveis auxiliares, o sistema de equações (23) pode ser colocado na forma

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\lambda_1 \\ d\lambda_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix} \quad (24)$$

Aplicando-se a regra de Cramer, a solução deste sistema pode ser escrita como

$$\begin{aligned} d\lambda_1 &= \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} \\ d\lambda_2 &= \frac{b_2 a_{11} - b_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} \end{aligned} \quad (25)$$

As variáveis auxiliares são definidas como

$$\begin{aligned} b_1 &= \Phi_1^{old} - \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_i} \right\}_1 Q_{il}^{-1} r_l^{old} \\ b_2 &= \Phi_2^{old} - \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_i} \right\}_2 Q_{il}^{-1} r_l^{old} \\ a_{11} &= \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_i} \right\}_1 Q_{il}^{-1} K_{lj} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_j} \right\}_1 \\ a_{12} &= \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_i} \right\}_1 Q_{il}^{-1} K_{lj} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_j} \right\}_2 \\ a_{21} &= \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_i} \right\}_2 Q_{il}^{-1} K_{lj} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_j} \right\}_1 \\ a_{22} &= \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_i} \right\}_2 Q_{il}^{-1} K_{lj} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_j} \right\}_2 \end{aligned} \quad (26)$$

Este procedimento iterativo termina quando se cumprem os seguintes critérios de parada

$$\begin{aligned} r^{norm} &= \sqrt{\frac{\|r_i\|}{\|F_i^{trial}\|}} < \text{TOL} \\ \Phi_1^{norm} &= |\Phi_1 - 1.0| < \text{TOL} \\ \Phi_2^{norm} &= |\Phi_2 - 1.0| < \text{TOL} \end{aligned} \quad (27)$$

## MATRIZ DE RIGIDEZ CONSISTENTE

Durante um processo incremental-iterativo si se utiliza, na fase corretora, o método de Newton-Raphson para determinar a configuração de equilíbrio do sistema estrutural, é necessário obter uma matriz de rigidez tangente consistente para não destruir a convergência quadrática do método. Neste ítem descrevem-se dois casos para a obtenção da matriz de rigidez consistente. Para o caso do elemento ter uma rótula plastica utiliza-se o algoritmo de retorno com um vetor. Para o caso do elemento possuir duas rótulas plasticas utiliza-se o algoritmo de retorno com dois vetores. Uma vez alcançada a convergência, isto é, satisfeitos os critérios de parada descritos nas equações (15) ou (27), atualiza-se a matriz de rigidez consistente ao início de cada passo de carga.

### Algoritmo com um vetor de retorno

Assumindo que a correção para trazer os esforços seccionais para a superfície de interação, ao final do processo iterativo, é descrita por

$$F_i = F_i^{trial} - \lambda_1 K_{ij} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_j} \right\}_1, \quad \text{com } \lambda_1 > 0 \quad (28)$$

E que o vetor de forças nodais de partida é definido como  $F_i^{trial} = \bar{F}_i + K_{ij} dU_j$ , o diferencial total da equação (28) é descrito como

$$dF_i = K_{ij} dU_j - d\lambda_1 K_{ij} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_j} \right\}_1 - \lambda_1 K_{ij} \left[ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial F_j \partial F_k} \right]_1 dF_k \quad (29)$$

Colocando o termo  $dF_i$  em evidência, e observando as regras da notação indicial, chega-se a

$$\left( \delta_{ik} + \lambda_1 K_{ij} \left[ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial F_j \partial F_k} \right]_1 \right) dF_k = K_{ij} dU_j - d\lambda_1 K_{ij} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_j} \right\}_1 \quad (30)$$

Usando a matriz  $Q_{ik}$  definida na equação (11) e definindo a matriz de redução plastica como  $R_{ij} = Q_{il}^{-1} K_{lj}$ , pode-se reescrever a equação (30) como

$$dF_i = R_{ij} \left( dU_j - d\lambda_1 \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_j} \right\}_1 \right) \quad (31)$$

Nota-se que a equação (31) é similar a forma não consistente, com excessão da mudança do termo  $K_{ij}$  por  $R_{ij} = Q_{il}^{-1} K_{lj}$  e pelo fato do vetor de fluxo plastico ser avaliado no ponto de retorno à superfície de interação. Uma vez que o vetor de forças nodais final  $F_i$  cumpre a condição  $\Phi(F_i) = 0$ , diferenciando-se esta condição e usando a equação (31), chega-se a

$$\left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_i} \right\}_1 dF_i = 0 \implies \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_i} \right\}_1 R_{ij} \left( dU_j - d\lambda_1 \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_j} \right\}_1 \right) = 0 \quad (32)$$

De onde se obtém o multiplicador plastico  $d\lambda_1$

$$d\lambda_1 = \frac{\left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_i} \right\}_1 R_{ij} dU_j}{\left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_i} \right\}_1 R_{ij} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_j} \right\}_1} \quad (33)$$

Finalmente, usando as equações (31) e (33), obtém-se a matriz de rigidez elastoplástica consistente  $K_{ij}^{AL}$  dada pela seguinte expressão

$$K_{ij}^{AL} = R_{ij} - \frac{R_{im} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_m} \right\}_1 \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_n} \right\}_1 R_{nj}}{\left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_m} \right\}_1 R_{mn} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_n} \right\}_1} \quad (34)$$

### Algoritmo com dois vetores de retorno

Assumindo que,  $\Phi_1(F_i) = 0$  e  $\Phi_2(F_i) = 0$ , a correção para trazer os esforços seccionais de ambos nós para a superfície de interação, ao final do processo iterativo, é descrita por

$$F_i = F_i^{trial} - \lambda_1 K_{ij} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_j} \right\}_1 - \lambda_2 K_{ij} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_j} \right\}_2, \quad \text{com } \lambda_1 > 0 \text{ e } \lambda_2 > 0 \quad (35)$$

Lembrando que o vetor de forças nodais de partida é definido como  $F_i^{trial} = \bar{F}_i + K_{ij} dU_j$ , o diferencial total da equação (35) é descrito como

$$\begin{aligned} dF_i = & K_{ij} dU_j - d\lambda_1 K_{ij} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_j} \right\}_1 - \lambda_1 K_{ij} \left[ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial F_j \partial F_k} \right]_1 dF_k - \\ & - d\lambda_2 K_{ij} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_j} \right\}_2 - \lambda_2 K_{ij} \left[ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial F_j \partial F_k} \right]_2 dF_k \end{aligned} \quad (36)$$

Colocando o termo  $dF_i$  em evidência, e observando as regras da notação indicial, chega-se a

$$\begin{aligned} & \left( \delta_{ik} + \lambda_1 K_{ij} \left[ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial F_j \partial F_k} \right]_1 + \lambda_2 K_{ij} \left[ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial F_j \partial F_k} \right]_2 \right) dF_k = \\ & = K_{ij} dU_j - d\lambda_1 K_{ij} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_j} \right\}_1 - d\lambda_2 K_{ij} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_j} \right\}_2 \end{aligned} \quad (37)$$

Usando a matriz  $Q_{ik}$  definida na equação (20) e definindo a matriz de redução plástica como  $R_{ij} = Q_{il}^{-1} K_{lj}$ , pode-se reescrever a equação (37) como

$$dF_i = R_{ij} \left( dU_j - d\lambda_1 \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_j} \right\}_1 - d\lambda_2 \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_j} \right\}_2 \right) \quad (38)$$

Uma vez que o vetor de forças nodais final  $F_i$  cumpre as condições  $\Phi_1(F_i) = 0$  e  $\Phi_2(F_i) = 0$ , diferenciando-se estas condições e usando a equação (38), chega-se a

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_i} \right\}_1 dF_i = 0 & \implies \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_i} \right\}_1 R_{ij} \left( dU_j - d\lambda_1 \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_j} \right\}_1 - d\lambda_2 \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_j} \right\}_2 \right) = 0 \\ \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_i} \right\}_2 dF_i = 0 & \implies \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_i} \right\}_2 R_{ij} \left( dU_j - d\lambda_1 \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_j} \right\}_1 - d\lambda_2 \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_j} \right\}_2 \right) = 0 \end{aligned} \quad (39)$$

ou reorganizando os termos

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_i} \right\}_1 R_{ij} dU_j &= d\lambda_1 \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_i} \right\}_1 R_{ij} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_j} \right\}_1 + d\lambda_2 \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_i} \right\}_1 R_{ij} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_j} \right\}_2 \\ \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_i} \right\}_2 R_{ij} dU_j &= d\lambda_1 \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_i} \right\}_2 R_{ij} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_j} \right\}_1 + d\lambda_2 \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_i} \right\}_2 R_{ij} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_j} \right\}_2 \end{aligned} \quad (40)$$

As equações anteriores representam um sistema  $2 \times 2$  com as incógnitas  $d\lambda_1$  e  $d\lambda_2$ . Introduzindo algumas variáveis auxiliares definidas como

$$\begin{aligned} c_1 &= \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_i} \right\}_1 R_{ij} dU_j \\ c_2 &= \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_i} \right\}_2 R_{ij} dU_j \\ b_{11} &= \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_i} \right\}_1 R_{ij} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_j} \right\}_1 \\ b_{12} &= \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_i} \right\}_1 R_{ij} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_j} \right\}_2 \\ b_{21} &= \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_i} \right\}_2 R_{ij} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_j} \right\}_1 \\ b_{22} &= \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_i} \right\}_2 R_{ij} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_j} \right\}_2 \end{aligned} \quad (41)$$

E utilizando a regra de Cramer, a solução deste sistema  $2 \times 2$  é dada por

$$\begin{aligned} d\lambda_1 &= \frac{c_1 b_{22} - c_2 b_{12}}{b_{11} b_{22} - b_{12} b_{21}} \\ d\lambda_2 &= \frac{c_2 b_{11} - c_1 b_{21}}{b_{11} b_{22} - b_{12} b_{21}} \end{aligned} \quad (42)$$

ou,

$$\begin{aligned} d\lambda_1 &= \left( \frac{b_{22} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_m} \right\}_1 R_{mn} - b_{12} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_m} \right\}_2 R_{mn}}{b_{11} b_{22} - b_{12} b_{21}} \right) dU_n \\ d\lambda_2 &= \left( \frac{b_{11} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_m} \right\}_2 R_{mn} - b_{21} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_m} \right\}_1 R_{mn}}{b_{11} b_{22} - b_{12} b_{21}} \right) dU_n \end{aligned} \quad (43)$$

Cabe comentar que, se qualquer multiplicador plástico assume valores negativos,  $d\lambda_1 < 0$  ou  $d\lambda_2 < 0$ , atribui-se valor zero e desativa-se a rótula plástica correspondente ao multiplicador plástico negativo. Novamente, introduzindo novas variáveis auxiliares descritas como

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{b_{22}}{b_{11} b_{22} - b_{12} b_{21}}; & d_2 &= \frac{b_{12}}{b_{11} b_{22} - b_{12} b_{21}} \\ d_3 &= \frac{b_{11}}{b_{11} b_{22} - b_{12} b_{21}}; & d_4 &= \frac{b_{21}}{b_{11} b_{22} - b_{12} b_{21}} \end{aligned} \quad (44)$$

A equação (43) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} d\lambda_1 &= \left( d_1 \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_m} \right\}_1 R_{mn} - d_2 \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_m} \right\}_2 R_{mn} \right) dU_n \\ d\lambda_2 &= \left( d_3 \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_m} \right\}_2 R_{mn} - d_4 \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_m} \right\}_1 R_{mn} \right) dU_n \end{aligned} \quad (45)$$

Finalmente, usando as equações (38) e (45), obtém-se a matriz de rigidez elastoplastica consistente  $K_{ij}^{AL}$  dada pela seguinte expressão

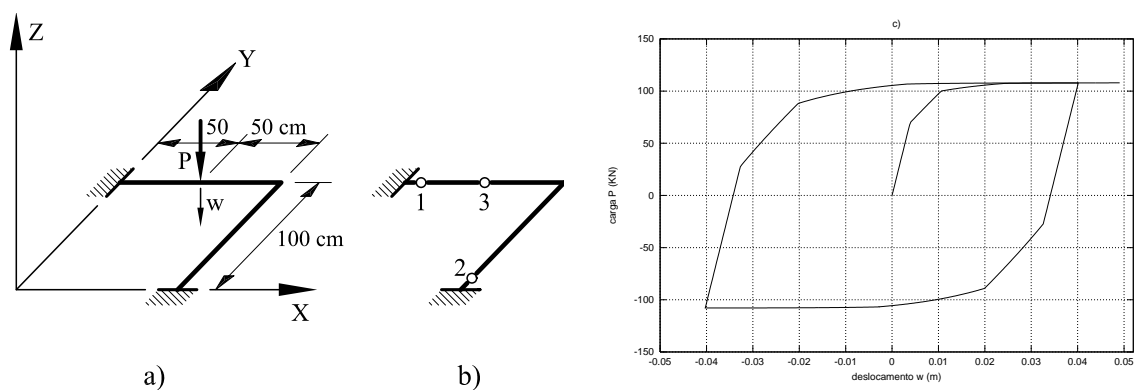
$$\begin{aligned} K_{ij}^{AL} &= R_{ij} - \left( d_1 R_{im} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_m} \right\}_1 \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_n} \right\}_1 R_{nj} - d_2 R_{im} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_m} \right\}_1 \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_n} \right\}_2 R_{nj} \right) - \\ &\quad - \left( d_3 R_{im} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_m} \right\}_2 \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_n} \right\}_2 R_{nj} - d_4 R_{im} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_m} \right\}_2 \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_n} \right\}_1 R_{nj} \right) \end{aligned} \quad (46)$$

## EXEMPLOS NUMÉRICOS

Apresenta-se nesta seção alguns exemplos para demonstrar a eficiencia dos algoritmos de retorno descritos nos itens anteriores. No esquema preditor/corretor global, usado para obter a configuração de equilíbrio da estrutura, adotou-se uma tolerância  $TOL = 10^{-5}$ , enquanto que no esquema preditor/corretor local, utilizado para trazer os esforços seccionais de volta para a superfície de interação, assumiu-se uma tolerância  $TOL = 10^{-10}$ . Para obter a curva carga×deslocamento utilizou-se o método de longitude de arco<sup>4</sup>.

### Grelha plana com dois elementos

Neste exemplo trata-se de uma grelha plana composta por dois elementos de viga, que formam entre si um ângulo de 90 graus, com uma carga  $P$  aplicada na extremidade livre.



**Figura 3.** Grelha plana com dois elementos: a) características geométricas e carregamento, b) sequência de formação de rótulas plasticas, c) curva carga×deslocamento

Suas características geométricas encontram-se descritas na Figura 3a. Possui uma rigidez a flexão de  $EI = 388,08 \text{ KN.m}^2$ , uma rigidez a torção de  $GJ = 297,92 \text{ KN.m}^2$ , um momento fletor de plastificação de  $M_p = 21,95 \text{ KN.m}$  e um momento torsor de plastificação de  $T_p = 17,24 \text{ KN.m}$ .

Ueda y Yao<sup>17</sup> fizeram uma análise elastoplástica de primeira ordem desta grelha adotando a seguinte superfície de interação  $(T/T_p)^2 + (M/M_p)^2 = 1$ . Na Figura 3b mostra-se a sequência de formação de rótulas plásticas, e na Figura 3c a curva carga×deslocamento considerando um ciclo de carga/descarga. Os resultados obtidos tiveram uma excelente aproximação com os resultados descritos em 7 y 17.

Na Tabela I mostram-se as evoluções dos erros relativo e absoluto definidos em (15) para determinados passos de carga utilizando o algoritmo de retorno com um vetor. Pode-se observar nesta tabela a convergência quadrática deste algoritmo. Enquanto que na Tabela II mostram-se as evoluções dos erros relativo e absoluto definidos em (27) utilizando o algoritmo de retorno com dois vetores, onde, também, observa-se a convergência quadrática deste algoritmo.

Algoritmo de retorno com um vetor			
passo de carga 47		passo de carga 445	
forças residuais $r^{\text{norm}}$	sup. int. residual $\Phi^{\text{norm}}$	forças residuais $r^{\text{norm}}$	sup. int. residual $\Phi^{\text{norm}}$
1,47597039E-03	1,30559818E-03	8,56514641E-05	9,37779227E-05
1,48013748E-06	4,26512984E-07	5,9731394E-09	2,21160446E-09
3,72157338E-13	4,59632332E-14	9,21947265E-17	2,22044605E-16

**Tabela I.** Forças residuais e superfície de interação residual. Rótula plástica 2

Algoritmo de retorno com dois vetores					
passo de carga 106			passo de carga 450		
forças residuais $r^{\text{norm}}$	sup. int. residual $\Phi_1^{\text{norm}}$	sup. int. residual $\Phi_2^{\text{norm}}$	forças residuais $r^{\text{norm}}$	sup. int. residual $\Phi_1^{\text{norm}}$	sup. int. residual $\Phi_2^{\text{norm}}$
1,65303075E-03	1,20357837E-05	1,47408979E-03	3,87694523E-03	6,19251038E-04	4,56960163E-03
1,89552293E-06	1,23009056E-07	5,42558567E-07	1,6054938E-05	7,05089222E-07	5,25607314E-06
5,81448484E-13	1,04360964E-14	7,37188088E-14	4,57042787E-11	2,61368704E-12	7,06168457E-12

**Tabela II.** Forças residuais e superfície de interação residual. Rótulas plásticas 1 e 3

Para este exemplo, fez-se um estudo sobre a convergência do esquema preditor/corretor a nível global utilizando a matriz de rigidez elastoplástica consistente. Para este fim, adotou-se uma tolerância a nível global de  $TOL = 10^{-10}$ . Os resultados encontram-se descritos na Tabela III. Nesta tabela mostram-se as evoluções das normas das forças residuais e de energia para determinados passos de carga, onde, pode-se notar a convergência quadrática. Por outro lado, observa-se que o valor da norma de energia residual decresce mais rapidamente que o valor da norma de forças residuais.

Esquema preditor/corrector global			
passo de carga 16		passo de carga 250	
forças residuais	energia	forças residuais	energia
0,11634E-04	0,1E+01	0,21960E-03	0,1E+01
0,18054E-08	0,41898E-12	0,18174E-07	0,19603E-10
0,74031E-16	0,93424E-24	0,18630E-14	0,65129E-23

Tabela III. Forças residuais e energia. Equilíbrio global

### Pórtico plano com dois pavimentos

Analisa-se neste exemplo um pórtico plano com dois pavimentos. Suas características geométricas e condições de carregamento encontram-se descritas na Figura 4a. Todos os elementos possuem módulo de elasticidade igual a  $E = 2,1 \times 10^{10} \text{ kgf.cm}^{-2}$ , as demais características geométricas e físicas estão descritas na Tabela IV.

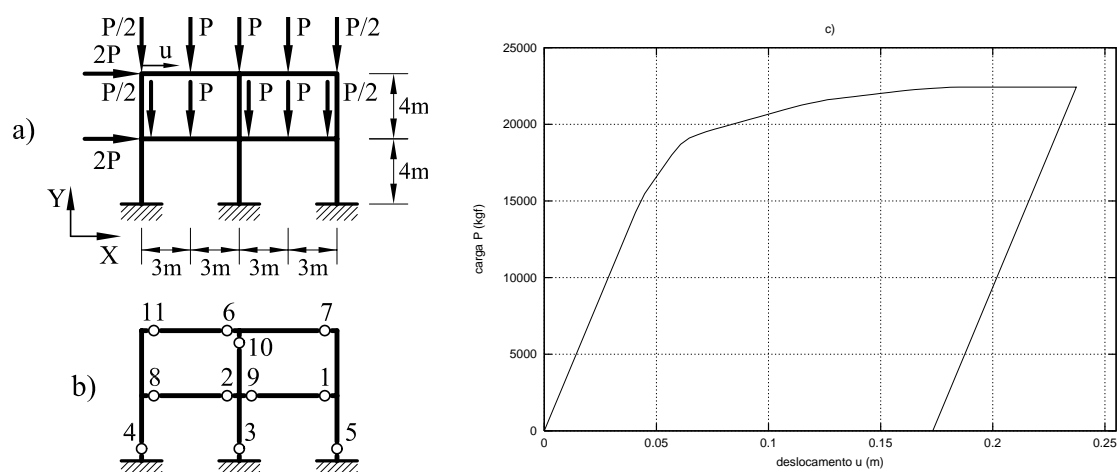


Figura 4. Pórtico plano com dois pavimentos: a) características geométricas e carregamento, b) sequência de formação de rótulas plásticas, c) curva carga×deslocamento

	PILARES	VIGAS
$A \text{ (m}^2\text{)}$	0,0192	0,0118
$I \text{ (m}^4\text{)}$	$0,511 \times 10^{-3}$	$0,292 \times 10^{-3}$
$N_p \text{ (kgf)}$	$480 \times 10^3$	$295 \times 10^3$
$M_p \text{ (kgf.m)}$	$73,2 \times 10^3$	$42,0 \times 10^3$
$\Phi \text{ (sup. int.)}$	$\left(\frac{N}{N_p}\right)^2 + \frac{ M }{M_p} = 1$	

Tabela IV. Propriedades geométricas e físicas dos elementos



Este pórtico foi analisado por Argyris *et al.*<sup>2</sup> adotando a superfície de interação descrita na Tabela IV. Estes autores fizeram uma análise elastoplastica considerando tanto deformações infinitesimais quanto deformações finitas utilizando um programa denominado LARSTRAN. Por outro lado, Haldar y Nee<sup>6</sup> fizeram uma análise elastoplastica considerando grandes deformações. Na Figura 4b mostra-se a sequência de formação de rótulas plasticas, e na Figura 4c a curva carga×deslocamento considerando um processo de carga e descarga. Os resultados obtidos tiveram uma excelente aproximação com os resultados descritos em 2 sob o regime de pequenas deformações.

Algoritmo de retorno com um vetor			
passo de carga 11		passo de carga 60	
forças residuais $r^{\text{norm}}$	sup. int. residual $\Phi^{\text{norm}}$	forças residuais $r^{\text{norm}}$	sup. int. residual $\Phi^{\text{norm}}$
1,20935377E-04	2,41865226E-07	8,93804269E-04	6,2560199E-06
3,45076307E-11	6,60402844E-11	6,22404505E-09	9,11217879E-09
8,02626977E-17	0,	5,12166402E-17	0,

**Tabela V.** Forças residuais e superfície de interação residual. Rótula plastica 1

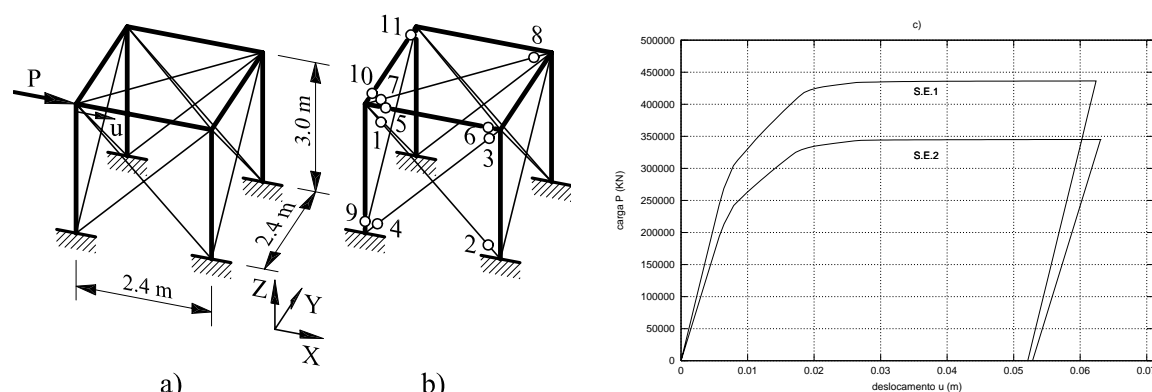
Na Tabela V mostram-se as evoluções dos erros relativo e absoluto definidos em (15) para determinados passos de carga utilizando o algoritmo de retorno com um vetor. Pode-se observar nesta tabela a convergência quadrática deste algoritmo.

Esquema preditor/corrector global			
passo de carga 16		passo de carga 47	
forças residuais	energia	forças residuais	energia
0,80063E-02	0,1E+01	0,23954E-01	0,1E+01
0,18017E-03	0,24336E-06	0,14595E-01	0,82672E-03
0,15248E-08	0,50571E-13	0,15491E-05	0,11855E-08
0,49717E-13	0,39726E-23	0,87519E-13	0,28146E-19

**Tabela VI.** Forças residuais e energia. Equilíbrio global

### Módulo tubular de uma plataforma off-shore

Neste exemplo analisa-se um módulo de uma plataforma off-shore. Na Figura 5a encontram-se as características geométricas e carregamento deste sistema estrutural. Este módulo é constituído de 4 pernas principais com perfil circular vazado de parede fina de 273  $\varnothing \times 6,3$  WT. Para enrijecer as 4 pernas são utilizadas 14 barras secundárias com seção transversal circular vazada de parede fina. Para estas 14 barras adotam-se duas seções transversais distintas. O primeiro conjunto de barras, denominado sistema estrutural tipo 1 (S.E.1), utiliza o perfil 88,9  $\varnothing \times 3,2$  WT. O segundo conjunto de barras, denominado S.E.2, utiliza o perfil 108  $\varnothing \times 2,0$  WT. Todos os elementos destes sistemas estruturais possuem módulo de elasticidade de  $E = 210$  GPa e módulo de elasticidade transversal de  $G = 80$  GPa. Para determinar os esforços de plastificação foi adotado a tensão de escoamento de  $\sigma_y = 200$  MPa e a tensão de cisalhamento de escoamento de  $\tau_y = 115,5$  MPa. O esforço normal de plastificação é dado por  $N_p = \pi (r_{\text{ext}}^2 - r_{\text{int}}^2) \sigma_y$ , o momento torsor de plastificação por  $T_p = 2\pi/3 (r_{\text{ext}}^3 - r_{\text{int}}^3) \tau_y$  e o momento fletor de plastificação por  $M_p = (r_{\text{ext}} + r_{\text{int}})^2 (r_{\text{ext}} - r_{\text{int}}) \sigma_y$ . Os valores destas constantes e as demais características geométricas para os sistemas estruturais S.E.1 e S.E.2 estão detalhadas na Tabela VII.



**Figura 5.** Módulo tubular de uma plataforma off-shore: a) características geométricas e carregamento, b) sequência de formação de rótulas plásticas, c) curva carga×deslocamento

	273 $\varnothing$ 6,3	88,9 $\varnothing$ 3,2 (S.E.1)	108 $\varnothing$ 2,0 (S.E.2)
$A$ (m <sup>2</sup> )	$5,28 \times 10^{-3}$	$8,62 \times 10^{-4}$	$6,66 \times 10^{-4}$
$J$ (m <sup>4</sup> )	$9,39 \times 10^{-5}$	$1,58 \times 10^{-6}$	$1,87 \times 10^{-6}$
$I$ (m <sup>4</sup> )	$4,07 \times 10^{-5}$	$7,92 \times 10^{-7}$	$9,36 \times 10^{-7}$
$N_p$ (KN)	$1055,71 \times 10^3$	$172,31 \times 10^3$	$133,20 \times 10^3$
$T_p$ (KN.m)	$81,29 \times 10^3$	$4,26 \times 10^3$	$4,08 \times 10^3$
$M_p$ (KN.m)	$89,62 \times 10^3$	$4,70 \times 10^3$	$4,49 \times 10^3$
$\Phi$ (sup. int.)	$\left(\frac{F_x}{N_p}\right)^2 + \left(\frac{M_x}{T_p}\right)^2 + \left(\frac{M_y}{M_p}\right)^2 + \left(\frac{M_z}{M_p}\right)^2 = 1$		

**Tabela VII.** Propriedades geométricas e físicas dos elementos

Shi y Atluri<sup>15</sup> fizeram uma análise elastoplástica de segunda ordem dos sistemas S.E.1 e S.E.2 adotando a superfície de interação dada na Tabela VII. Neste trabalho, fez-se uma análise elastoplástica de primeira ordem desses sistemas. Na Figura 5b mostra-se a sequência de formação de rótulas plásticas, e na Figura 5c a curva carga×deslocamento considerando um processo de carga e descarga para os sistemas estruturais S.E.1 e S.E.2. A sequência de formação de rótula plástica foi idêntica para ambos sistemas S.E.1 e S.E.2, conforme se mostra na Figura 5b.

Nas Tabelas VII e IX mostram-se as evoluções dos erros relativo e absoluto definidos em (27) para passos de carga específicos utilizando o algoritmo de retorno com dois vetores. Pode-se observar nestas tabelas a convergência quadrática deste algoritmo.

Algoritmo de retorno com dois vetores					
passo de carga 12			passo de carga 41		
forças residuais $r^{\text{norm}}$	sup. int. resid. $\Phi_1^{\text{norm}}$	sup. int. resid. $\Phi_2^{\text{norm}}$	forças residuais $r^{\text{norm}}$	sup. int. resid. $\Phi_1^{\text{norm}}$	sup. int. resid. $\Phi_2^{\text{norm}}$
8,03978006E-03	9,81043834E-03	9,79441075E-03	1,36989462E-02	1,79089005E-02	1,78810582E-02
6,24153357E-05	2,3839694E-05	2,37928885E-05	1,96679153E-04	7,88306625E-05	7,86893201E-05
8,85460742E-10	1,48586699E-10	1,44924517E-10	9,31316656E-09	1,60199565E-09	1,58390967E-09
8,20520831E-17	0,	3,33066907E-16	2,40162583E-17	0,	0,

**Tabela VIII.** S.E.1. Forças residuais e superfície de interação residual. Rótulas plásticas 1 e 2

Algoritmo de retorno com dois vetores					
passo de carga 12			passo de carga 41		
forças residuais $r^{\text{norm}}$	sup. int. resid. $\Phi_1^{\text{norm}}$	sup. int. resid. $\Phi_2^{\text{norm}}$	forças residuais $r^{\text{norm}}$	sup. int. resid. $\Phi_1^{\text{norm}}$	sup. int. resid. $\Phi_2^{\text{norm}}$
8,03359176E-03	9,80846569E-03	9,78495657E-03	1,36815406E-02	1,7895261E-02	1,7853019E-02
6,23470796E-05	2,38312272E-05	2,37622611E-05	1,96249346E-04	7,8764461E-05	7,85560337E-05
8,84047353E-10	1,42486467E-10	1,41957335E-10	9,29161239E-09	1,76712267E-09	1,64043112E-09
3,12120416E-18	1,11022302E-16	1,11022302E-16	8,12816025E-17	4,4408921E-16	0,

**Tabela IX.** S.E.2. Forças residuais e superfície de interação residual. Rótulas plásticas 1 e 2

Para este exemplo, fez-se um estudo sobre a convergência do esquema preditor/corretor a nível global utilizando a matriz de rigidez elastoplástica consistente. Para este fim, adotou-se uma tolerância a nível global de  $\text{TOL} = 10^{-10}$ . Os resultados encontram-se descritos nas Tabelas X e XI. Nestas tabelas mostram-se as evoluções das normas das forças residuais e de energia para determinados passos de carga, onde, pode-se notar a convergência quadrática. Por outro lado, observa-se que o valor da norma de energia residual decresce mais rapidamente que o valor da norma de forças residuais.

Esquema preditor/corrector global			
passo de carga 12		passo de carga 52	
forças residuais	energia	forças residuais	energia
0,11997E-03	0,1E+01	0,20903E-03	0,1E+01
0,16535E-09	0,27673E-12	0,41175E-07	0,43179E-10
0,18777E-15	0,41131E-25	0,36921E-15	0,24472E-22

**Tabela X.** S.E.1. Forças residuais e energia. Equilíbrio global

Esquema preditor/corrector global			
passo de carga 25		passo de carga 45	
forças residuais	energia	forças residuais	energia
0,34837E-03	0,1E+01	0,75999E-03	0,1E+01
0,10245E-05	0,44342E-08	0,81462E-06	0,89862E-08
0,95123E-11	0,12589E-15	0,13896E-11	0,88152E-16

**Tabela XI.** S.E.2. Forças residuais e energia. Equilíbrio global

## CONCLUSÕES

De maneira sucinta destaca-se as principais conclusões deste trabalho.

- Apresentou-se de forma detalhada a formulação analítica da extensão do algoritmo de retorno radial ao espaço de esforços seccionais.
- A combinação do método de Newton-Raphson com o algoritmo de retorno radial permitiu a obtenção de uma matriz de rigidez elastoplástica consistente. Desta combinação resultou um algoritmo eficaz, consistente e com convergência quadrática tanto a nível local quanto global.
- O uso do algoritmo de retorno radial permite simular ciclos histeréticos de carga utilizando o conceito de rótulas plásticas. Por outro lado, é possível utilizar o conceito de rótula somente quando se assume a existência de uma superfície de interação no espaço dos esforços seccionais.
- Foi proposto um esquema preditor/corrector com um vetor de retorno para simular a ocorrência de uma rótula plástica no elemento de viga.
- Foi proposto um esquema preditor/corrector com dois vetores de retorno para simular a presença de duas rótulas plásticas no elemento de viga.
- O algoritmo de retorno radial garante a permanência na superfície de interação dos nós plastificados durante o processo de carga. O método também permite a descarga elástica durante um ciclo de carga/descarga.

## AGRADECIMENTO

O autor agradece à CAPES pela ajuda financeira através da bolsa de pós-doutorado que se está realizando no Centro Internacional de Métodos Numéricos em Engenharia (CIMNE) da Universidade Politècnica da Catalunya (UPC), Barcelona, Espanha.

## REFERÊNCIAS

- 1 F.G.A. Al-Bermani y K. Zhu, “Nonlinear elastoplastic analysis of spatial structures under dynamic loading using kinematic hardening models”, *Engineering Structures*, Vol. **18**, N° 8, pp. 568–576, (1996).
- 2 O.C. Argyris, B. Boni, U. Hindenlang y M. Kleiber, “Finite element analysis of two and three-dimensional elasto-plastic frames - the natural approach”, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. **35**, pp. 221–248, (1982)
- 3 W.F. Chen y T. Atsuta, “*Theory of beam-columns*”, Vol. 1 y Vol. 2, McGraw-Hill, New York, (1976, 1977).
- 4 M.A. Crisfield, “*Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures. Volume 1: Essentials*”, Wiley, Chichester, (1991).
- 5 I. Doltsinis, “*Elements of plasticity: theory and computation (High performance structures and materials Vol. 1)*”, WIT Press/Computational Mechanics, (2000).
- 6 A. Haldar y K.M. NEE, “Elasto-plastic large deformation analysis of PR steel frames for LRFD”, *Computers & Structures*, Vol. **31**, pp. 811–823, (1989).
- 7 P.G. Hodge, “*Plastic analysis of structures*”, McGraw-Hill, New York, (1959).
- 8 M.R. Horne, “*Plastic theory of structures*”, Pergamon Press, 2ª ed., (1972).
- 9 B. Jeremić, “Implicit integration rules in plasticity: theory and implementation”, Thesis of the MSc, Department of Civil, Architectural and Environmental Engineering, University of Colorado, (1994).
- 10 S. Krenk, C.V. Jørgensen y L. Thesbjerg, “Efficient collapse analysis techniques for framed structures”, *Computers & Structures*, Vol. **72**, pp. 481–496, (1999).
- 11 J. Lubliner, “*Plasticity Theory*”, Pearson Education POD; Photocopy edition, (1998).
- 12 B.G. Neal, “*The plastic methods of structural analysis*”, Chapman and Hall, London, (1997).
- 13 K.M. Nee y A. Haldar, “Elastoplastic nonlinear post-buckling analysis of partially restrained space structures”, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. **71**, pp. 69–97, (1988).
- 14 J.G. Orbison, W. McGuire y J.F. Abel, “Yield surface applications in nonlinear steel frame analysis”, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. **33**, pp. 557–573, (1982).
- 15 G. Shi y N. Atluri, “Elasto-plastic large deformation analysis of space-frames: a plastic-hinge and stress-based explicit derivation of tangent stiffnesses”, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **26**, pp. 589–615, (1988).
- 16 J.C. Simó y T.J.R. Hugues, *Computational inelasticity*, Springer Verlag N.Y., (1998).
- 17 Y. Ueda y T. Yao, “The plastic node method: a new method of plastic analysis”, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. **34**, pp. 1089–1104, (1982).
- 18 M. Zyczkowski, “*Combined loadings in the theory of plasticity*”, Sijthoff y Noordhoff, (1983).