

# **Formulación de un método de distribución de fuerzas horizontales en edificios altos**

Carlos A. Recarey

Universidad Central de Las Villas  
Centro de Investigación y Desarrollo de las Estructuras y los Materiales (CIDEM)  
Santa Clara, Villa Clara, Cuba  
UCLV, Facultad de Construcciones, CIDEM  
CP 54830 Santa Clara, Villa Clara Cuba  
Tel.: 53-42-281 561; Fax: 53-42-281 539  
e-mail: recarey@uclv.edu.cu  
e-mail: recarey@cimne.upc.es

Nereyda Pupo

Universidad de Camagüey  
Facultad de Construcciones  
Carretera de Circunvalación Norte km 5 1/2  
Tel.: 53-32-262 336; Fax: 53-32- 262 336  
e-mail: nere@reduc.cmw.edu.cu

## Resumen

Se formula un método de distribución de fuerzas horizontales en edificios, el cual incluye el caso de estructuras resistentes verticales con aportación espacial y considera además el efecto del momento flexo-torsor, para las especificaciones de las estructuras resistentes verticales de sección abiertas (denominadas de paredes delgadas con sección abierta). Para lograr este último aspecto se aplicó consecuentemente la teoría de Vlasov. Se aplica el método de los desplazamientos en su forma matricial.

## **FORMULATION OF A METHOD OF DISTRIBUTION OF HORIZONTAL FORCES IN HIGH BUILDINGS**

## Summary

A method of distribution of horizontal forces is formulated in buildings, in which it is included the case of vertical resistant structures with space contribution and it is also considered the effect of the moment flexo-torsor, in the opened vertical resistant structures of section (denominated of thin walls with open section). to achieve this last aspect it was applied the theory of Vlasov consequently. The method of the displacements its applied in its matricial form.

## INTRODUCCIÓN

Para los ingenieros estructurales resulta indispensable conocer la forma en que se distribuyen las fuerzas horizontales y la magnitud de los desplazamientos que se producen a medida que se incrementa la altura para de esta forma concebir y predecir un adecuado comportamiento de los edificios altos frente a los efectos horizontales de viento y sismos. Los métodos de distribución de fuerzas horizontales publicados hasta el momento presentan diferentes enfoques y cada uno de ellos es válido en su campo de acción de acuerdo con las hipótesis asumidas. Con respecto a este tema se han desarrollado diversas investigaciones<sup>1,2,7,8,9</sup> las cuales posibilitan realizar la distribución de fuerzas horizontales en edificios con pórticos y tímpanos.

Uno de los métodos más generales es precisamente el método PPG<sup>7</sup> debido a la gran cantidad de sistemas estructurales que resuelve (pórticos, diafragmas y estructura mixtas - pórticos y diafragmas interconectados). Sin embargo, presenta algunas limitaciones, como son:

1. Sólo considera la aportación de rigidez de las estructuras en una dirección.
2. No se considera la aportación espacial de las estructuras resistentes verticales.
3. No se toma en cuenta el efecto del bimomento en los rigidizadores que pueden denominarse de paredes delgadas y sección transversal abierta.

Con la finalidad de lograr una formulación más general en el proceso de la fundamentación teórica de un método de distribución de fuerzas laterales en edificios, podrían introducirse los aspectos señalados como limitaciones. Esto conduce, por consiguiente, a establecer una formulación más general, ampliándose el panorama de tipos de edificios que se analizarían por un mismo método. En este caso se tiene en cuenta la contribución espacial de los rigidizadores y la introducción y consideración de la aportación de los diafragmas y tímpanos de secciones abiertas (alabeo de la sección transversal).

## DESARROLLO

### Hipótesis del método

Siempre que se pretende dar solución a un problema estructural es necesario realizar una modelación de la geometría de los elementos y de la edificación en su conjunto, del comportamiento de los materiales y de las cargas o acción de los agentes externos para así concebir y establecer el modelo más apropiado o de más fácil aplicación práctica. Está claro que al realizarse la modelación se está llevando la estructura real a un modelo ideal equivalente y este proceso implica asumir ciertas hipótesis como válidas que simplifican el fenómeno físico real.

Cuando se establece un modelo es necesario asumir una serie de hipótesis simplificadoras que en este caso quedan delimitadas por:

- Se supone que el material es elástico, homogéneo e isótropo.
- Los desplazamientos son pequeños comparados con las dimensiones de la estructura de modo que puede plantearse el equilibrio en la estructura sin desplazar.
- Los pisos (entrepisos o forjados) son infinitamente rígidos en su plano e infinitamente flexibles en la dirección normal al mismo. Se suponen conocidas las cargas actuantes de viento y/o sismo, así como otro tipo de cargas laterales.

La solución será obtenida tomando como base el Método de los Desplazamientos en su enfoque matricial. Al suponerse los entrepisos infinitamente rígidos y emplearse el método de los desplazamientos, los desplazamientos son las incógnitas y vienen dados por tres componentes, dos lineales ortogonales y uno angular (Figura 1).

## Exposición general del método

En este método de análisis de estructuras de edificios es necesario identificar el sistema de rigidizadores verticales que componen el sistema estructural, que son los encargados de soportar las cargas laterales. Después de haber precisado lo anterior, se define qué método de análisis se utilizará y posteriormente se asume el sistema base.

## Obtención del sistema base

Para concebir el sistema base se emplea el concepto de subestructuración y se realiza un cuerpo libre independiente de cada una de las estructuras resistentes verticales (Figura 2) y, de forma similar, un cuerpo libre de cada una de las plantas (entrepisos o forjados) que conforman el edificio (Figura 1). En los dos subsistemas bases se toma en consideración la aportación en términos de rigidez a flexión y cortante en las direcciones ortogonales y, además, en los casos de estructuras resistentes verticales con comportamiento espacial, la torsión y flexo-torsión (en el caso de secciones abiertas). En el subsistema base de cada nivel (forjado o entrepiso), la modelación se hará planteando tres ligaduras en cada piso, dos ligaduras lineales ortogonales y una angular (Figura 1).

## Desarrollo del método

Se sabe que la ecuación matricial del método de los desplazamientos es

$$\mathbf{P} = \mathbf{K} \mathbf{Z} \quad (1)$$

donde  $\mathbf{P}$  es el vector de las fuerzas en las ligaduras,  $\mathbf{K}$  la matriz de rigidez global de la edificación y  $\mathbf{Z}$  el vector de los desplazamientos de los pisos en la dirección de las ligaduras.

Las fuerzas  $\mathbf{P}$  se calculan por la estática, como se puede apreciar en la Figura 1 para una planta de un piso cualquiera.

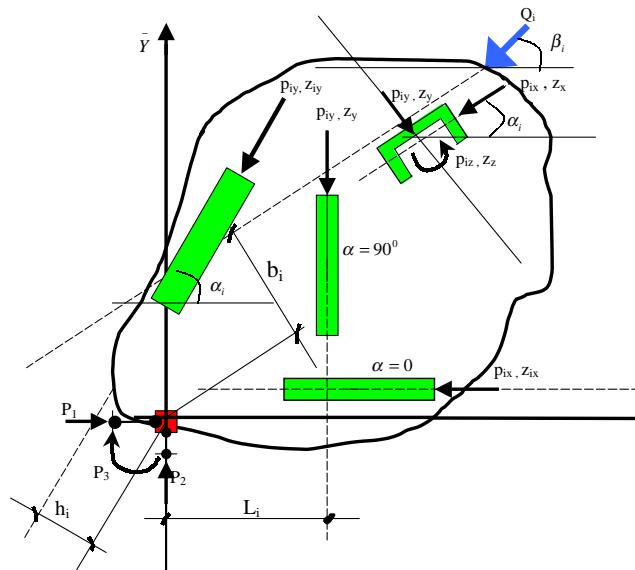


Figura 1. Planta tipo para la exposición del método

Este procedimiento es el mismo en todos los niveles de la estructura objeto de estudio.

Si  $\mathbf{Q}$  es el vector de las cargas laterales externas (Figura 1), el equilibrio será

$$\mathbf{P}_i = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_i \cos \beta_i \\ Q_i \sin \beta_i \\ Q_i b_i \end{Bmatrix} \quad (2)$$

y el vector general  $\mathbf{P}$  para toda la edificación queda expresado por

$$\mathbf{P} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_{3n} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

al cual corresponde un vector desplazamiento  $\mathbf{Z}$  dado por

$$\mathbf{Z} = \begin{Bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \\ \vdots \\ \vdots \\ Z_{3n} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

La matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  es cuadrada y su tamaño es  $3n \times 3n$  (donde  $n$  es el número de pisos o niveles que tiene la edificación). La obtención de esta matriz es fundamental siempre que se aplica el método de los desplazamientos.

Para comenzar el cálculo de  $\mathbf{K}$ , se plantea la ecuación

$$\mathbf{p} = \mathbf{k} \mathbf{z} \quad (5)$$

donde  $\mathbf{p}$  es el vector de las acciones de los rigidizadores sobre los pisos,  $\mathbf{z}$  el vector de los desplazamientos en las direcciones de  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{k}$  la matriz de rigidez ordenada por piso.

El cálculo de la matriz  $\mathbf{K}$  se hace de forma indirecta (Figura 2), por lo complejo que resulta obtenerla directamente en este caso. Este proceso es relativamente sencillo y fácil de computarizar. Para ello es necesario la aplicación del principio del contragradiante<sup>7</sup> que implica que

$$\mathbf{P} = \mathbf{C}^t \mathbf{p} \quad (6)$$

La matriz  $\mathbf{C}$  se denomina matriz de conexión y  $\mathbf{C}^t$  matriz de conexión transpuesta.

### Cálculo de la matriz de rigidez de la edificación aplicando el método indirecto

Haciendo abstracción de las cargas  $Q$  (ya que se está calculando una rigidez y la misma es independiente de las cargas externas), se tiene para el caso general (Figura 1)

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \operatorname{sen} \alpha & 0 \\ \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 \\ h & L & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_{ix} \\ p_{iy} \\ p_{iz} \end{Bmatrix}$$

Para el caso de una estructura resistente vertical plana se expresa de la siguiente manera:

- Si su aportación es en el eje  $x$

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & 0 \\ \operatorname{sen} \alpha & 0 & 0 \\ h & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}$$

- Si su aportación es en el eje  $y$

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \operatorname{sen} \alpha & 0 \\ 0 & \cos \alpha & 0 \\ 0 & L & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}$$

- Si su aportación es en  $X$  y  $Y$ , sin aportación en  $Z$

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \operatorname{sen} \alpha & 0 \\ \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 \\ h & L & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}$$

De forma general, para el sistema de estructuras resistentes verticales en su conjunto pertenecientes al nivel  $i$  de la edificación se tiene

$$\mathbf{P}_i = \begin{bmatrix} \cos \alpha_1 & \operatorname{sen} \alpha_1 & 0 & \cos \alpha_2 & \operatorname{sen} \alpha_2 & 0 & \dots & \cos \alpha_n & \operatorname{sen} \alpha_n & 0 \\ \operatorname{sen} \alpha_1 & \cos \alpha_1 & 0 & \operatorname{sen} \alpha_2 & \cos \alpha_2 & 0 & \dots & \operatorname{sen} \alpha_n & \cos \alpha_n & 0 \\ h_1 & L_1 & 1 & h_2 & L_2 & 1 & \dots & h_n & L_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix} \quad (7)$$

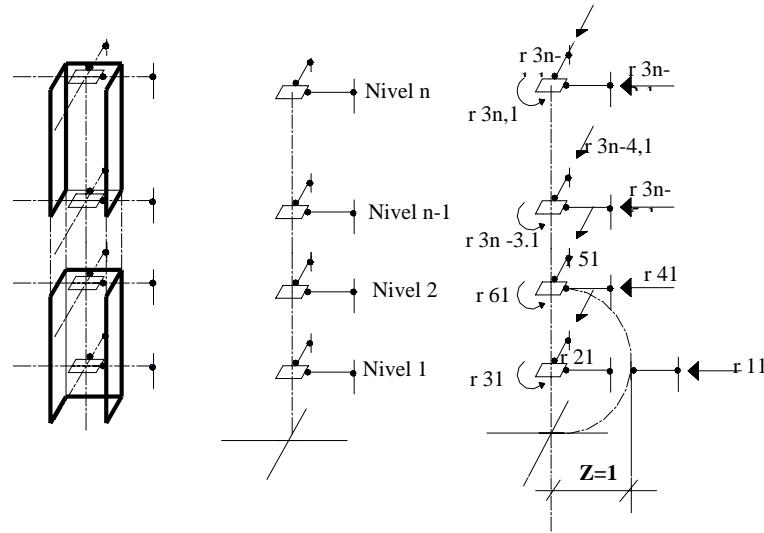
donde  $n$  es el número de estructuras resistentes verticales que inciden en ese nivel o planta y

$$\mathbf{C}_i^t = \begin{bmatrix} \cos \alpha_1 & \operatorname{sen} \alpha_1 & 0 & \cos \alpha_2 & \operatorname{sen} \alpha_2 & 0 & \dots & \cos \alpha_n & \operatorname{sen} \alpha_n & 0 \\ \operatorname{sen} \alpha_1 & \cos \alpha_1 & 0 & \operatorname{sen} \alpha_2 & \cos \alpha_2 & 0 & \dots & \operatorname{sen} \alpha_n & \cos \alpha_n & 0 \\ h_1 & L_1 & 1 & h_2 & L_2 & 1 & \dots & h_n & L_n & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

siendo  $\mathbf{P} = \mathbf{C}^t \mathbf{p}$

Otras expresiones análogas a la (8) pueden escribirse para los demás pisos o niveles. Como todas estas expresiones son independientes entre sí, es decir, como el equilibrio se plantea por pisos o niveles individuales, la matriz de conexión transpuesta de toda la estructura se escribe como

$$\mathbf{C}^t = \begin{bmatrix} C_1^t & & & & & & \\ & C_2^t & & & & & \\ & & C_3^t & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & C_n^t & \end{bmatrix} \quad (9)$$



**Figura 2.** Cálculo de la matriz de rigidez de forma indirecta en una estructura resistente vertical

donde  $C_1^t, C_2^t, \dots, C_n^t$  es la matriz de conexiones transpuestas del nivel  $1, 2, \dots, n$  y  $n$  el número de niveles de entrepiso.

Por el principio del contragradiante<sup>7</sup> se deduce que

$$\mathbf{K} = \mathbf{C}^t \mathbf{k} \mathbf{C} \quad (10)$$

Ahora, para calcular  $\mathbf{K}$  por la expresión (10) sólo falta obtener  $\mathbf{k}$  por el método indirecto al que antes se hizo referencia (Figura 2). Para ello, se parte de la expresión (11) la cual se puede aplicar considerando la hipótesis de respuesta elástica de los materiales que conforman la edificación. Esta hipótesis es válida si se tiene en cuenta la naturaleza de las cargas (cargas de corta duración) las cuales producen acciones de carácter instantáneo sobre la estructura.

$$\mathbf{q} = \mathbf{r} \mathbf{y} \quad (11)$$

donde las fuerzas  $\mathbf{q}$  son las mismas fuerzas  $\mathbf{p}$ , pero ordenadas por elementos verticales (rigidizadores) y no por pisos o niveles. De la misma forma, los desplazamientos  $\mathbf{y}$  son los mismos desplazamientos  $\mathbf{z}$ , pero ordenados igual que las fuerzas  $\mathbf{q}$ .

Entonces  $\mathbf{r}$  es una matriz de rigidez ordenada por elementos verticales. Esta matriz se calcula por submatrices y queda expresada por

$$\mathbf{r}_i = \begin{bmatrix} N1 & \mathbf{r}_{11} & \mathbf{r}_{12} & \mathbf{r}_{13} & \mathbf{r}_{14} & \mathbf{r}_{15} & \mathbf{r}_{16} & \dots & \mathbf{r}_{1,n-2} & \mathbf{r}_{1,n-1} & \mathbf{r}_{1,n} \\ v2 & \mathbf{r}_{21} & \mathbf{r}_{22} & \mathbf{r}_{23} & \mathbf{r}_{24} & \mathbf{r}_{25} & \mathbf{r}_{26} & \dots & \mathbf{r}_{2,n-2} & \mathbf{r}_{2,n-1} & \mathbf{r}_{2,n} \\ 13 & \mathbf{r}_{31} & \mathbf{r}_{32} & \mathbf{r}_{33} & \mathbf{r}_{34} & \mathbf{r}_{35} & \mathbf{r}_{36} & \dots & \mathbf{r}_{3,n-2} & \mathbf{r}_{3,n-1} & \mathbf{r}_{3,n} \\ N1 & \mathbf{r}_{41} & \mathbf{r}_{42} & \mathbf{r}_{43} & \mathbf{r}_{44} & \mathbf{r}_{45} & \mathbf{r}_{46} & \dots & \mathbf{r}_{4,n-2} & \mathbf{r}_{4,n-1} & \mathbf{r}_{4,n} \\ v2 & \mathbf{r}_{51} & \mathbf{r}_{52} & \mathbf{r}_{53} & \mathbf{r}_{54} & \mathbf{r}_{55} & \mathbf{r}_{56} & \dots & \mathbf{r}_{5,n-2} & \mathbf{r}_{5,n-1} & \mathbf{r}_{5,n} \\ 23 & \mathbf{r}_{61} & \mathbf{r}_{62} & \mathbf{r}_{63} & \mathbf{r}_{64} & \mathbf{r}_{65} & \mathbf{r}_{66} & \dots & \mathbf{r}_{6,n-2} & \mathbf{r}_{6,n-1} & \mathbf{r}_{6,n} \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ N1 & \mathbf{r}_{n-2,1} & \mathbf{r}_{n-2,2} & \mathbf{r}_{n-2,3} & \mathbf{r}_{n-2,4} & \mathbf{r}_{n-2,5} & \mathbf{r}_{n-2,6} & \dots & \mathbf{r}_{n-2,n-2} & \mathbf{r}_{n-2,n-1} & \mathbf{r}_{n-2,n} \\ v2 & \mathbf{r}_{n-1,1} & \mathbf{r}_{n-1,2} & \mathbf{r}_{n-1,3} & \mathbf{r}_{n-1,4} & \mathbf{r}_{n-1,5} & \mathbf{r}_{n-1,6} & \dots & \mathbf{r}_{n-1,n-2} & \mathbf{r}_{n-1,n-1} & \mathbf{r}_{n-1,n} \\ 33 & \mathbf{r}_{n,1} & \mathbf{r}_{n,2} & \mathbf{r}_{n,3} & \mathbf{r}_{n,4} & \mathbf{r}_{n,5} & \mathbf{r}_{n,6} & \dots & \mathbf{r}_{n,n-2} & \mathbf{r}_{n,n-1} & \mathbf{r}_{n,n} \end{bmatrix}$$

donde  $\mathbf{r}_i$  es la matriz de rigidez del rigidizador  $i$  y  $\mathbf{r}_{ij}$  los términos de la matriz de rigidez que toman en cuenta las aportaciones a flexión, cortante, torsión y bimomento o efecto de flexo-torsión.

En esta matriz los términos  $\mathbf{r}_{3 \times i, 3 \times j}$  están compuestos por dos sumandos

$$\mathbf{r}_{3 \times i, 3 \times j} = \mathbf{r}_{3 \times i, 3 \times j}^t + \mathbf{r}_{3 \times i, 3 \times j}^{ft}$$

donde los sumandos no son más que las rigideces a torsión y flexo-torsión, respectivamente. En el caso del resto de los  $\mathbf{r}_{ij}$  corresponden a los términos que toman en cuenta los efectos de rigidez a la flexión y cortante, respectivamente, en función del tipo de rigidizador con que se esté trabajando.

### Cálculo de los términos $\mathbf{r}_{ij}$ que toman en cuenta el efecto de rigidez a flexo-torsión

Si se parte de la teoría de Vlasov<sup>2,6,13</sup>, se pueden precisar las ecuaciones que caracterizan la rigidez a flexo-torsión y torsión de una estructura vertical resistente de sección transversal de paredes delgadas, así como las ecuaciones que relacionan el momento rasante o transversal de la sección ( $M_{\text{total}}$ ) con el momento torsor ( $M_t$ ) y el momento flexo-torsor ( $M_{ft}$ ). Conociendo las bases de esta teoría, se tienen los elementos esenciales para la obtención de los términos  $\mathbf{r}_{ij}$  que caracterizan la rigidez a torsión y flexo-torsión, respectivamente.

Para obtener los valores de los términos de rigidez a torsión y flexo-torsión, respectivamente, hay que partir de

$$GI_t \phi - EI_\omega \frac{d^2\phi}{dz^2} = M_{\text{total}}$$

introduciendo la notación

$$\frac{GI_t}{GI_\omega} = \alpha^2$$

se obtiene la ecuación diferencial de la torsión restringida

$$\frac{d^2\phi}{dz^2} - \alpha^2 \phi = \frac{M_{\text{total}}}{GI_\omega}$$

En el proceso de cálculo de los términos  $\mathbf{r}_{ij}$  en este caso, se parte de la ecuación fundamental que caracteriza al ángulo de giro ( $\phi$ ), producido por la torsión restringida en elementos resistentes verticales que se clasifican como elementos de paredes delgadas de sección abierta. La solución de esta ecuación queda delimitada por

$$\phi = \frac{M_{\text{total}}}{GI_t} [1 + \tanh(\alpha H) \operatorname{senh}(\alpha Z_i) - \cosh(\alpha Z_i)] = KM_{\text{total}} = (K_t + K_{ft})M_{\text{total}}$$

lo que implica que

$$K = (K_t + K_{ft}) = \frac{GI_t}{[1 + \tanh(\alpha H) \operatorname{senh}(\alpha Z_i) - \cosh(\alpha Z_i)]} \quad (12)$$

Esta expresión caracteriza la aportación de rigidez a torsión y flexo-torsión, respectivamente, y posibilita obtener los términos  $\mathbf{r}_{3i,3j}$  que conforman la matriz de rigidez del rigidizador correspondiente.

$$\mathbf{r}_i = \begin{bmatrix} & & & & \cdots & & \\ & & & & & & \\ & \mathbf{r}_{33(t+ft)} & & \mathbf{r}_{36(t+ft)} & & \cdots & \mathbf{r}_{3,n(t+ft)} \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & \mathbf{r}_{63(t+ft)} & & \mathbf{r}_{66(t+ft)} & & \cdots & \mathbf{r}_{6,n(t+ft)} \\ & & & & & & \\ & \cdots & & \cdots & & \cdots & \cdots \\ & & & & & & \\ & \mathbf{r}_{n,3(t+ft)} & & \mathbf{r}_{n,6(t+ft)} & & \cdots & \mathbf{r}_{n,n(t+wft)} \end{bmatrix}$$

Esta matriz que caracteriza la aportación a torsión y flexo-torsión en estructuras resistentes verticales de paredes delgadas y sección abierta debe completarse con los correspondientes términos que definen la rigidez a flexión y cortante, respectivamente, (Figura 2) hasta constituir la matriz de rigidez de este tipo de estructura.

En este caso específico, la matriz de rigidez de este tipo de rigidizador queda caracterizada por

$$\mathbf{r}_i = \begin{bmatrix} N1 & \mathbf{r}_{11} & 0 & 0 & \mathbf{r}_{14} & 0 & 0 & \cdots & \mathbf{r}_{1,n-2} & 0 & 0 \\ v2 & 0 & \mathbf{r}_{22} & 0 & 0 & \mathbf{r}_{25} & 0 & \cdots & 0 & \mathbf{r}_{2,n-1} & 0 \\ 13 & 0 & 0 & \mathbf{r}_{33(t+ft)} & 0 & 0 & \mathbf{r}_{36(t+ft)} & \cdots & 0 & 0 & \mathbf{r}_{3,n(t+ft)} \\ N1 & \mathbf{r}_{41} & 0 & 0 & \mathbf{r}_{44} & 0 & 0 & \cdots & \mathbf{r}_{4,n-2} & 0 & 0 \\ v2 & 0 & \mathbf{r}_{52} & 0 & 0 & \mathbf{r}_{55} & 0 & \cdots & 0 & \mathbf{r}_{5,n-1} & 0 \\ 23 & 0 & 0 & \mathbf{r}_{63(t+ft)} & 0 & 0 & \mathbf{r}_{66(t+ft)} & \cdots & 0 & 0 & \mathbf{r}_{6,n(t+ft)} \\ \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \\ N1 & \mathbf{r}_{n-2,1} & 0 & 0 & \mathbf{r}_{n-2,4} & 0 & 0 & \cdots & \mathbf{r}_{n-2,n-2} & 0 & 0 \\ v2 & 0 & \mathbf{r}_{n-1,2} & 0 & 0 & \mathbf{r}_{n-1,5} & 0 & \cdots & 0 & \mathbf{r}_{n-1,n-1} & 0 \\ 33 & 0 & 0 & \mathbf{r}_{n,3(t+ft)} & 0 & 0 & \mathbf{r}_{n,6(t+ft)} & \cdots & 0 & 0 & \mathbf{r}_{n,n(t+wft)} \end{bmatrix}$$

### Ensamblaje de la matriz rigidez general del sistema

Una vez obtenidas las submatrices  $\mathbf{r}_i$  se pasa a ensamblar la matriz  $\mathbf{r}$  que no es más que la matriz de rigidez total de todo el edificio, y como los cálculos se realizan independientemente para cada rigidizador vertical, la matriz  $\mathbf{r}$  de toda la estructura se escribe simplemente por como

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix} \quad (13)$$

donde  $n$  es el número total de rigidizadores y  $\mathbf{r}_i$  la submatriz de rigidez de cada rigidizador.

A partir de la matriz  $\mathbf{r}$  se calcula la matriz de rigidez de la edificación ( $\mathbf{K}$ ). Ahora sólo falta calcular  $\mathbf{k}$  en función de  $\mathbf{r}$ . Para ello se aprovecha que los vectores  $\mathbf{y}$  y  $\mathbf{z}$  están compuestos por los desplazamientos, sólo que ordenados de forma distinta. En efecto, ya se expresó anteriormente que los  $\mathbf{z}$  están ordenados por pisos y los  $\mathbf{y}$  por rigidizadores verticales. Entonces se comprende que pueda escribirse la ecuación matricial

$$\mathbf{y} = \mathbf{A} \mathbf{z} \quad (14)$$

donde  $\mathbf{A}$  es la matriz que se denominará de incidencia y que, como es lógico, está compuesta sólo por unos y ceros.

Para calcular la matriz  $\mathbf{A}$  basta hacer

$$\begin{aligned} A_{ij} &= 1 && \text{si } y_i = z_i \\ A_{ij} &= 0 && \text{en caso contrario} \end{aligned}$$

De la expresión (13) se deduce por el principio del contragradiante<sup>7</sup>

$$\mathbf{p} = \mathbf{A}^t \mathbf{q} \quad (15)$$

Combinando las expresiones (15), (11) y (14), se obtiene

$$\mathbf{p} = \mathbf{A}^t \mathbf{r} \mathbf{A} \mathbf{z} \quad (16)$$

y comparando (5) y (16), se observa que

$$\mathbf{k} = \mathbf{A}^t \mathbf{r} \mathbf{A} \quad (17)$$

De esta forma queda calculada  $\mathbf{k}$  en función de  $\mathbf{r}$ ; basta ahora sustituir la expresión (14) en (10) para obtener la matriz  $\mathbf{K}$  deseada

$$\mathbf{K} = \mathbf{C}^t \mathbf{A}^t \mathbf{r} \mathbf{A} \mathbf{C} \quad (18)$$

Conocida la matriz de rigidez global del edificio (18) sólo falta resolver el sistema de ecuaciones que caracterizan al método de los desplazamientos

$$\mathbf{K} \mathbf{Z} = \mathbf{P} \quad (19)$$

donde  $\mathbf{K}$  es la matriz de rigidez de toda la edificación, que se determina por (18),  $\mathbf{Z}$  los desplazamientos de cada nivel (incógnitas) y  $\mathbf{P}$  el vector de fuerzas externas que se determina por (2) y (3).

Con la solución del sistema de ecuaciones (19) se obtienen los desplazamientos  $\mathbf{Z}$  de cada nivel o piso y con éstos los  $\mathbf{z}$  de cada estructura resistente vertical

$$\mathbf{z} = \mathbf{C} \mathbf{Z}$$

donde  $\mathbf{z}$  es el desplazamiento de las estructuras resistentes verticales,  $\mathbf{C}$  la matriz de conexión y  $\mathbf{Z}$  el desplazamiento de cada nivel o piso.

En función de los desplazamientos  $\mathbf{z}$  se pueden determinar las fuerzas que toma cada estructura resistente vertical empleando la expresión

$$\mathbf{p} = \mathbf{k} \mathbf{z} \quad (20)$$

Después de determinar las  $\mathbf{p}$  a modo de comprobación de los cálculos se puede verificar

el equilibrio del sistema por

$$\mathbf{T} = \mathbf{C}^t \mathbf{p} \quad (21)$$

y conocido  $\mathbf{T}$

$$\mathbf{P} - \mathbf{T} = 0 \quad (22)$$

### Convenio de signos

- Se introduce un sistema de ejes ortogonales  $O, X, Y$  haciendo coincidir el origen con el punto de intersección de las ligaduras lineales en la planta.
- Para un rigidizador genérico  $i$  se obtiene la posición del centro de gravedad ( $G$ ) y la de los ejes principales  $GA_1$  y  $GA_2$  de su sección transversal. En el caso de estructuras resistentes verticales de paredes delgadas y de sección abierta la posición de la misma se obtienen con respecto al centro de cortante.
- Se obtiene el ángulo  $\alpha$  medido en sentido antihorario entre el sistema de ejes  $OXY$  y uno de los ejes principales de la sección de modo que se verifique que  $0 \leq \alpha \leq 90^\circ$ .
- Se definen los sentidos de los ejes  $GA_1$ ,  $GA_2$  de modo que el sistema de ejes  $A_2GA_1$ , se obtenga rotando el sistema  $YOX$  un ángulo  $\alpha$  en sentido antihorario.
- Las cargas  $Q_i$  se consideran positivas si están en sentido contrario a la dirección positiva de los ejes  $X$  e  $Y$ .
- Los ángulos  $\beta_i$  se miden en sentido antihorario entre el eje  $OX$  y la dirección de la carga, deberá cumplirse  $0 \leq \beta_i \leq 180^\circ$ .
- El signo del producto  $Q_i b_i$  se considera positivo si el momento de  $Q_i$  con respecto a  $O$  gira en el mismo sentido de  $P_{3n}$ .
- En el caso de las fuerzas  $p_i$  el convenio es igual que el de las  $Q_i$ .
- El producto  $p_{ix}L$  y  $p_{iy}H$  es positivo si se cumple lo enunciado para el producto  $Q_i b_i$ . Este convenio determina los signos de  $H$  y  $L$ .

### Ejemplo de cálculo

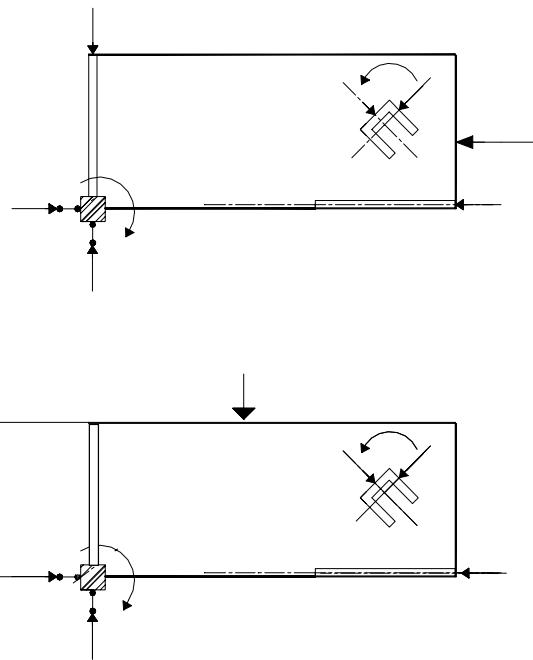
A modo de exemplificar las potencialidades de la formulación realizada se realiza un ejemplo numérico. En este caso se parte de un ejemplo completamente arbitrario, pero lo más general posible, ya que presenta los siguientes aspectos:

- estructuras resistentes verticales no monótonas en altura,
- tímpanos en esviaje y con secciones de paredes delgadas y abiertas.

En el ejemplo numérico no se contemplan todas las potencialidades de la formulación realizada y a diferencia con otros métodos este posibilita resolver los casos siguientes:

- estructuras resistentes verticales de diferentes tipos (pórticos, tímpanos o diafragmas, mixtas, tubulares, etc.),
- edificios donde las estructuras resistentes verticales estén en esviaje,
- estructuras resistentes verticales que no sean uniformes en toda la altura del edificio.

Las plantas de la edificación son las representadas en la Figura 3. La estructura que se muestra (Figura 3) está compuesta por dos niveles y presenta tres rigidizadores dispuestos asimétricamente en cada planta.



**Figura 3.** Planta de la edificación: ejemplo numérico

Los datos y propiedades de cada una de estas estructuras resistentes verticales se resumen a continuación:

### Datos del problema

Propiedades de los materiales

$$R'bk = 21 \text{ MPa}$$

$$Eb = 21996363,3 \text{ MPa}$$

$$\mu = 0,17$$

Los valores de las cargas actuantes son

$$Q_1 = 10 \text{ Kn}, \quad b_1 = 3 \text{ m}$$

$$Q_2 = 15 \text{ Kn}, \quad b_2 = 5 \text{ m}$$

Características geométricas de los rigidizadores

Rigidizador 1 y 4

$$I_{x1} = bh^3/12 = 3,6 \text{ m}^4 = I_{x4}$$

$$I_{y1} = 0,004 \text{ m}^4 = I_{y4}$$

Rigidizador 2

$$I_{x2} = 0,13 \text{ m}^4$$

$$I_{y2} = 0,0013 \text{ m}^4$$

Rigidizador de sección canal 3

$$\text{Espesor } (\delta) = 0,2 \text{ m}$$

$$\text{Longitud del contorno } (s) = 3,2 \text{ m}$$

$$\text{Altura } (h) = 3,6 \text{ m}$$

$$I_{x3} = 0,45 \text{ m}^4, \quad I_{\omega} = 0,0858 \text{ m}^6$$

$$I_{y3} = 0,133 \text{ m}^4, \quad I_t = 0,012 \text{ m}^4$$

La estructura resistente vertical N° 3 se puede considerar de sección abierta y de paredes

delgadas si se toma en cuenta sus dimensiones y el tipo de sección transversal (Tabal I).

Rig. vertical	$\alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$H$ (m)	$L$ (m)
1	$90^\circ$	0	0	0	-
2	0	1	0	0	-
3	$30^\circ$	0,87	0,5	-2	4
4	$90^\circ$	0	1	3	-

**Tabla I.** Parámetros geométricos de los rigidizadores verticales resistentes

Siguiendo el procedimiento, se obtiene la matriz  $\mathbf{r}$  de todas las estructuras resistentes verticales por el procedimiento descrito (Figura 2).

La matriz  $\mathbf{C}^T$  queda definida por

$$\mathbf{C}_1^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_2^T = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Realizando los pasos necesarios, se llega a la obtención de la matriz  $\mathbf{K}$  del sistema (de toda la edificación)

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1,72 \cdot 10^6 & 8,2 \cdot 10^5 & -1,171 \cdot 10^6 & -1,90 \cdot 10^7 & 2,68 \cdot 10^5 & 7,97 \cdot 10^5 \\ 8,2 \cdot 10^5 & 2,68 \cdot 10^6 & 6,435 \cdot 10^5 & -2,592 \cdot 10^5 & -2,389 \cdot 10^5 & -1,96 \cdot 10^5 \\ -1,171 \cdot 10^6 & 6,435 \cdot 10^5 & 1,448 \cdot 10^7 & 3,715 \cdot 10^5 & -1,894 \cdot 10^5 & -4,667 \cdot 10^6 \\ -1,90 \cdot 10^7 & -2,592 \cdot 10^5 & 3,715 \cdot 10^5 & 2,373 \cdot 10^5 & 1,109 \cdot 10^5 & -1,703 \cdot 10^5 \\ 2,68 \cdot 10^5 & -2,389 \cdot 10^5 & -1,894 \cdot 10^5 & 1,109 \cdot 10^5 & 8,01 \cdot 10^6 & -5,66 \cdot 10^6 \\ 7,97 \cdot 10^5 & -1,96 \cdot 10^5 & -4,667 \cdot 10^6 & -1,703 \cdot 10^5 & -5,66 \cdot 10^6 & 1,923 \cdot 10^7 \end{bmatrix}$$

Adicionalmente para completar el sistema de ecuaciones es necesario formular el vector de fuerzas y de desplazamientos, respectivamente

$$\mathbf{P} = \begin{Bmatrix} 10 \\ 0 \\ -30 \\ 0 \\ 15 \\ 75 \end{Bmatrix} \text{ vector de acciones externas}$$

$$\mathbf{P} = \begin{Bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \\ Z_5 \\ Z_6 \end{Bmatrix} \text{ vector de los desplazamientos}$$

Establecidos los vectores de las acciones de fuerzas externas y de los desplazamientos de cada nivel y la matriz de rigidez de la edificación, se procede a solucionar el siguiente sistema de ecuaciones

$$[K] \{Z\} = \{P\}$$

entonces

$$\{Z\} = \frac{\{P\}}{[K]} = [K]^{-1} \{P\}$$

De la solución del sistema de ecuaciones se obtiene

$$\{Z\} = \begin{Bmatrix} 9,378 \cdot 10^{-7} \text{ m} \\ 2,193 \cdot 10^{-5} \text{ m} \\ 2,834 \cdot 10^{-5} \text{ grad} \\ 3,022 \cdot 10^{-6} \text{ m} \\ 2,566 \cdot 10^{-4} \text{ m} \\ 8,649 \cdot 10^{-5} \text{ grad} \end{Bmatrix}$$

que no es más que el vector que representa los desplazamientos en cada nivel.

Conocidos estos desplazamientos globales de cada entepiso, se tienen los desplazamientos de las diferentes estructuras resistentes verticales

$$\mathbf{z} = \begin{Bmatrix} 2,193 \cdot 10^{-5} \text{ m} \\ 9,378 \cdot 10^{-5} \text{ m} \\ -4,491 \cdot 10^{-5} \text{ m} \\ 1,329 \cdot 10^{-5} \text{ m} \\ 2,834 \cdot 10^{-5} \text{ grad} \\ -3,022 \cdot 10^{-5} \text{ m} \\ -4,729 \cdot 10^{-5} \text{ m} \\ 5,651 \cdot 10^{-4} \text{ m} \\ 8,649 \cdot 10^{-5} \text{ grad} \\ 2,888 \cdot 10^{-6} \text{ m} \end{Bmatrix}$$

Determinados los desplazamientos de cada estructura resistente, se procede a determinar la fuerza que absorben los rigidizadores en función de su rigidez y posición en planta.

$$\mathbf{p} = \begin{Bmatrix} 41,875 \text{ kN} \\ 57,014 \text{ kN} \\ -38,38 \text{ kN} \\ 25,49 \text{ kN} \\ -6,86 \text{ kN} \\ -17,77 \text{ kN} \\ 10,264 \text{ kN} \\ 17,88 \text{ kN} \\ 7,437 \text{ kN} \\ -5,515 \text{ kN} \end{Bmatrix}$$

A modo de comprobación se verifica el equilibrio del sistema. Para realizar este proceso es necesario partir de

$$\{P\} = \begin{bmatrix} 10 \text{ kN} \\ 0 \\ -30 \text{ kNm} \\ 0 \\ 15 \text{ kN} \\ 75 \text{ kNm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{bmatrix}$$

Esta verificación se realiza empleando la siguiente igualdad

$$\{T\} = \lfloor C^T \rfloor \{p\} = \{P\}$$

de lo que resulta

$$\{T\} = \{P\} = \begin{bmatrix} 10 \text{ kN} \\ 0 \\ -30 \text{ kNm} \\ 0 \\ 15 \text{ kN} \\ 75 \text{ kNm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{bmatrix}$$

De la realización de esta comprobación se evidencia el equilibrio del sistema y la veracidad de la formulación realizada.

## CONCLUSIONES

La formulación de este sencillo método permite llegar a las siguientes conclusiones:

- Los métodos de análisis de distribución de fuerzas horizontales para edificios altos son muy variables y responden a la diversidad de las tipologías y disposición en planta de las estructuras resistentes verticales. La inmensa mayoría, en especial los métodos más refinados, generan una alta complejidad matemática que es amortiguada con el empleo de los medios de cálculo.

- El método de distribución de fuerzas horizontales formulado presenta un mayor grado de generalidad, pues cubre un amplio espectro de soluciones de rigidización vertical que no tenían respuesta con la utilización de los métodos precedentes. El haber tomado en consideración la aportación espacial de las estructuras verticales resistentes y, como caso particular, la introducción del efecto del momento flexo-torsor en aquellos rigidizadores que por sus características geométricas responden a estructuras de paredes delgadas y de sección abierta posibilita a esta formulación tener un carácter general.
- Se establece el procedimiento de cálculo detallado para la aplicación del método, haciendo énfasis en el cálculo de los términos  $r_{ij}$  que tienen en cuenta el efecto de torsión y flexo-torsión en ciertos tipos de rigidizadores.
- La introducción de los nuevos elementos en los métodos de distribución de fuerzas laterales en edificios conduce a análisis más eficientes y refinados, al permitir realizar un análisis espacial del comportamiento de las estructuras verticales resistentes, además de tener en cuenta el efecto de la flexo-torsión, detectándose de esta forma estados de tensiones no precisados por las ecuaciones de la estática.

## RECOMENDACIONES

- El resultado de esta investigación sienta las bases para la realización de un programa de computación donde se encuentre implementada la nueva formulación del método y se introduzcan los efectos de análisis espacial y las consideraciones de la aportación a torsión y a flexo-torsión, respectivamente, en el caso de rigidizadores de paredes delgadas.
- Se sugiere continuar la investigación introduciendo en el mismo el efecto de flexibilidad de forjado o entrepiso.

## REFERENCIAS

- 1 V.N. Baykov y E.E. Sigalov, “*Estructuras de hormigón armado*”, 2<sup>a</sup> ed., Moscú, Editorial Mir, (1980).
- 2 V.I. Feodosiev, “*Resistencia de materiales*”, tomo I, Editorial y asociación de estudiantes de tecnología, Publicaciones, (1965).
- 3 R.A. Fernández Álvarez, “Método de análisis de edificios sometidos a cargas laterales considerando la deformación del forjado”, R.A. Fernández Álvarez TGC, ISPJAE, pp. 88–89.
- 4 J.M. González, “Aplicación del método de la matriz transferencia al análisis de tímanos con huecos”, *Ingeniería Estructural y Vial*, Ciudad de La Habana, septiembre, (1981).
- 5 J.M. González y V.C. Trinh, “Programa de computación para analizar tímanos con huecos”, *Ingeniería Estructural y Vial*, Ciudad de La Habana, enero, (1985).
- 6 M.P. Gutiérrez, “Flexión y torsión de perfiles de paredes delgadas de sección abierta”, *Ingeniería Civil*, Vol. **XV**, N° 1, pp. 3–73, enero (1964).
- 7 J.E. Hernández Pérez, “Método de distribución de fuerzas horizontales en edificios con pórticos y tímanos”, *Ingeniería Estructural y Vial*, Ciudad de La Habana, Vol. **2**, pp. 34–45, (1994).
- 8 J.E. Hernández Pérez, “Fuerzas laterales en edificios con tímanos”, *Ingeniería Civil*, Ciudad de La Habana, Vol. **11**, 12, (1972).
- 9 J.E. Hernández Pérez, “Fuerzas laterales en edificios con tímanos”, *Ingeniería Civil*, Ciudad de La Habana, Vol. **12**, (1967).

- 10 C. Llanes Burón, “Algunos criterios sobre el diseño de edificios altos”, *Ingeniería Civil*, Ciudad de La Habana, Vol. **1**, pp. 16–28, (1984).
- 11 C. Llanes Burón, “Análisis tridimensional de estructuras”, primera parte, *Ingeniería Estructural*, Ciudad de La Habana, Vol. **2**, pp. 5–12, (1983).
- 12 A.S. Ruiz, “Deformaciones laterales en edificaciones”, *Ingeniería Estructural*, Ciudad de La Habana, Vol. **1**, (1985).
- 13 A.S. Ruiz, “Efecto del momento flexo torsor en los diafragmas de sección I”, *Ingeniería Civil*, Ciudad de La Habana, Vol. **6**, pp. 61–67, (1975).