

Análisis de elementos finitos estocásticos por estimaciones puntuales y expansión espectral

Jorge E. Hurtado

Universidad Nacional de Colombia
Apartado 127, Manizales, Colombia
Tel.: 57-68-863 906, Fax: 57-68-810 000
e-mail: jhurtado@emtelsa.multi.net.co

Resumen

En este artículo se expone un método simple que permite estimar los momentos estadísticos de orden inferior de respuestas estructurales bajo el efecto de campos aleatorios, los cuales se discretizan en forma de elementos finitos estocásticos. El cálculo de los momentos se realiza por el método de las estimaciones puntuales en el espacio creado por el desacoplamiento espectral de la covarianza del campo. La comparación de los resultados con una simulación intensa de Monte Carlo muestra que la aproximación que se obtiene por esta vía es excelente. Además, para su aplicación no se requieren algoritmos de cálculo diferentes de los corrientemente usados para cálculo determinista, a diferencia de otras técnicas de análisis de elementos finitos estocásticos.

STOCHASTIC FINITE ELEMENT ANALYSIS VIA POINT ESTIMATES AND SPECTRAL EXPANSIONS

Summary

A simple method for estimating the low-order statistical moments of structural responses under the effect of random fields, which are discretized as stochastic finite elements is developed. The estimation is carried out by means of the method of point estimates in the space resulting from the spectral decoupling of the field covariance. The comparison with an intensive Monte Carlo simulation shows an excellent agreement. Besides, in contrast to other stochastic finite element methods, the application of this approach does not require the use of a special finite element solvers different from those commonly used for deterministic analysis.

INTRODUCCIÓN

Tradicionalmente, la mecánica computacional se ha interesado por el desarrollo de técnicas numéricas que permitan la mayor aproximación posible a las soluciones analíticas clásicas, usualmente consideradas como exactas. En años recientes, sin embargo, ha surgido un interés por el estudio de los efectos de la incertidumbre inherente a los parámetros de diseño, lo cual conduce necesariamente a un enfoque de tipo probabilista, en el que la cuestión de la exactitud del método numérico pasa a un segundo plano. En efecto, si dichos parámetros pueden tener fluctuaciones aleatorias de, digamos, 20 o 30 por ciento con respecto a su valor nominal, la importancia que corrientemente se otorga al error del método de los elementos finitos se desdibuja, especialmente si se hace uso de un mallado suficientemente fino. El análisis probabilista, por otra parte, permite responder a la importante cuestión sobre la confiabilidad de la estructura, ausente en el enfoque determinista convencional.

Las incertidumbres en el análisis estructural pueden modelarse de dos formas:

1. Como variables aleatorias. Este modelo es adecuado para parámetros tales como cargas puntuales, rigideces de apoyos flexibles, etc, es decir, valores que no se encuentren distribuidos espacialmente. En el caso contrario, la modelación como variables aleatorias de parámetros que oscilan espacialmente, tales como los módulos de elasticidad y de Poisson o el coeficiente de expansión térmica, por ejemplo, corresponde a un análisis probabilista un tanto grueso, aunque empleado corrientemente en la práctica.
2. Como campos aleatorios. Esta es la aproximación adecuada para los parámetros mencionados que varían espacialmente de manera aleatoria alrededor de un valor medio. Como ilustración la Figura 1 muestra una fluctuación aleatoria típica del módulo de elasticidad en una placa de hormigón.

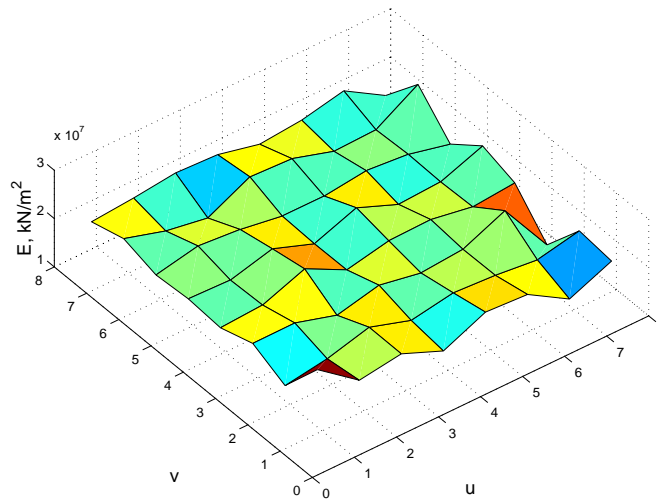


Figura 1. Campo aleatorio

Ambos modelos, de hecho, pueden combinarse en ciertas situaciones. Por ejemplo, si se trata de producir una serie de estructuras iguales, el modelo correcto estaría compuesto por campos aleatorios fluctuantes alrededor de un valor medio aleatorio.

Para este propósito se han desarrollado diversos métodos. Entre ellos se destaca el método de perturbación,¹⁻³ el cual permite estimar los momentos estadísticos de primer y segundo orden de las respuestas estructurales, bajo la condición de que la fluctuación aleatoria de las variables y los campos sea pequeña. Digno de mención es también el método espectral,⁴⁻⁵ en el que se hace uso de la transformación de Karhunen-Loève de la función de covarianza del campo aleatorio en combinación con los llamados polinomios caóticos desarrollados por Wiener.⁶ En ambos casos se requiere de algoritmos particulares de elementos finitos. Por el contrario, la aplicación del método de Monte Carlo puede hacerse utilizando repetidamente un programa determinista de elementos finitos, debido a que en él se busca producir una muestra artificial de respuestas estructurales a partir del uso repetido del algoritmo del sistema con datos diferentes cada vez. Estos datos son realizaciones de las variables y campos aleatorios especificados, los cuales se simulan por medio de técnicas adecuadas para cada tipo de modelo probabilista.⁷ Este método, evidentemente, puede resultar altamente costoso desde el punto de vista computacional, ya que implica la utilización intensa del programa de cálculo determinista.

En este trabajo se desarrolla un método que permite estimar con precisión razonable los momentos estadísticos de orden bajo de las respuestas estructurales. El método se basa

en la técnica estadística de estimaciones puntuales,^{8,9} la cual se aplica sobre el vector de variables independientes obtenido de la descomposición de Karhunen-Loève de la matriz de covarianza del campo aleatorio. Es importante anotar que el método reúne las ventajas de los dos grupos de técnicas mencionadas anteriormente. Es decir, por una parte permite realizar la estimación con un costo computacional bajo, como en el caso de los métodos de perturbación y espectral. Por otra, no requiere de un programa especial de elementos finitos, como en el método de Monte Carlo. De esta manera, puede utilizarse para una descripción estadística rápida de la dispersión de las incertidumbres en una estructura bajo el efecto de variables y/o campos aleatorios sin necesidad de programas especiales.

En la sección siguiente se exponen en secuencia los fundamentos del método, a saber, los elementos básicos de la teoría de campos aleatorios y la técnica de estimaciones puntuales. Como aplicación se presenta luego un ejemplo concerniente a la estimación de la media aritmética y cuadrática de la tensión de von Mises de una viga modelada con elementos triangulares de deformación constante. La no linealidad de esta función con respecto al campo aleatorio de base, cual es el módulo de elasticidad, sirve para calificar la robustez del método propuesto. Como referencia para juzgar los resultados del método se toma un análisis de Monte Carlo.

FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Campos aleatorios

Un campo aleatorio está definido como una variable aleatoria asociada a una posición espacial. De esta manera, mientras X denota una variable aleatoria convencional cuyas realizaciones son x_1, x_2, \dots, x_n , $X(u, v)$ es una función aleatoria de las coordenadas espaciales (u, v) con realizaciones $x_1(u, v), x_2(u, v), \dots, x_n(u, v)$. Esto implica que en cada coordenada (u, v) el campo aleatorio presenta una realización concreta, la cual debe tener algún tipo de relación con los valores circundantes. Es decir, mientras que la variable aleatoria X puede modelarse con una función de distribución

$$F(x) = P[X \leq x] \quad (1)$$

un campo aleatorio bidimensional debe modelarse con funciones del tipo

$$F(x_1, x_2, \dots, x_m; \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \dots, \mathbf{t}_m) = P[X_1(\mathbf{t}_1) \leq x_1 \cap X_2(\mathbf{t}_2) \leq x_2 \cap \dots \cap X_m(\mathbf{t}_m) \leq x_m] \quad (2)$$

donde m es un número suficiente de puntos y $\mathbf{t} = [u, v]$ ¹⁰. En el caso especial en que el campo sea gaussiano, es posible especificar la función de distribución $F(x_1, x_2, \dots, x_m; \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \dots, \mathbf{t}_m)$ por medio de los momentos de segundo orden, a saber, el vector de medias aritméticas $\boldsymbol{\mu}$

$$\boldsymbol{\mu}^T = [E\{X(t_1)\}, \dots, E\{X(t_m)\}] \quad (3)$$

y la matriz de covarianza \mathbf{B} , cuyo elemento (i, j) es

$$E\{[X(t_i) - E\{X(t_i)\}][X(t_j) - E\{X(t_j)\}]\} \quad (4)$$

De esta manera se tiene, en tal caso,

$$F(x_1, x_2, \dots, x_m; \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \dots, \mathbf{t}_m) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2} |\mathbf{B}|^{1/2}} \exp\left[-\frac{(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T}{2}\right] \quad (5)$$

para $m \geq 1$. En el límite, cuando $m \rightarrow \infty$, la matriz de covarianza se convierte en la función de autocovarianza $B(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)$, la cual se reduce a $B(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2) \equiv B(\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_2) \equiv B(\boldsymbol{\tau})$ si el campo es homogéneo, es decir, que sus momentos de primer y segundo orden no dependen de las posiciones \mathbf{t}_1 y \mathbf{t}_2 sino de su diferencia $\boldsymbol{\tau} \equiv \mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_2$. Esta condición de homogeneidad se cumple ampliamente en la práctica ingenieril como consecuencia de las condiciones de fabricación de los elementos estructurales.

La función de covarianza de campos homogéneos está relacionada con la llamada función de densidad espectral de potencia $S(\boldsymbol{\omega}) = S(\omega_1, \omega_2)$ definida por la transformación de Fourier (conocida con el nombre de relación de Wiener-Jinchin¹⁰)

$$S(\boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} B(\boldsymbol{\tau}) e^{-i\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\tau}} d\boldsymbol{\tau} \quad (6)$$

Para la generación de realizaciones de campos aleatorios como el que muestra la Figura 1 se parte, o bien de la función de covarianza del campo,¹¹⁻¹² o bien de su densidad espectral de potencia.¹³⁻¹⁴

Estimaciones puntuales

El método de las estimaciones puntuales, originalmente propuesto por Rosenblueth⁸ y desarrollado recientemente por Hong,⁹ es una herramienta valiosa para el cálculo de momentos estadísticos de respuestas de sistemas aleatorios con precisión satisfactoria. Sea $Y = h(X)$ una función de una variable aleatoria X . En el contexto del análisis mecánico, $h(X)$ es una respuesta estructural obtenida por algún método analítico o numérico, tal como el método de los elementos finitos. La expansión de Taylor de una potencia de Y , $Y^j = g(X)$ alrededor de la media de X es

$$Y^j = g(X) = g(\mu) + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l!} g^{(l)}(\mu) (X - \mu)^l \quad (7)$$

Al tomar valor esperado en ambos términos se obtiene

$$E[Y^j] = g(\mu) + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l!} g^{(l)}(\mu) \gamma_{x,l} \sigma^l \quad (8)$$

donde σ es la desviación estándar de X y $\gamma_{x,l}$ es un momento central normalizado definido como

$$\gamma_{x,l} = \frac{1}{\sigma^l} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^l f(x) dx \quad (9)$$

Si se multiplica sucesivamente la ecuación (7) por dos pesos $w_i, i = 1, 2$ localizados en los puntos x_i y se suman los resultados se obtiene

$$w_1 g(x_1) + w_2 g(x_2) = g(\mu) (w_1 + w_2) + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l!} g^{(l)}(\mu) (w_1 \xi_1^l + w_2 \xi_2^l) \sigma^l \quad (10)$$

donde $\xi_i, i = 1, 2$ es la variable normalizada

$$\xi_i = \frac{x_i - \mu}{\sigma} \quad (11)$$

Al resolver la ecuación (10) para $g(\mu)$, imponer la condición $w_1 + w_2 \equiv 1$ y reemplazar el resultado en (8) se obtiene

$$E[Y^j] = w_1 g(x_1) + w_2 g(x_2) + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l!} g^{(l)}(\mu) [\gamma_{x,l} - (w_1 \xi_1^l + w_2 \xi_2^l)] \sigma^l \quad (12)$$

lo que sugiere la aproximación

$$E[Y^j] \doteq w_1 g(x_1) + w_2 g(x_2) = w_1 h(x_1)^j + w_2 h(x_2)^j \quad (13)$$

la cual da una buena aproximación si los pesos y localizaciones satisfacen la siguiente condición adicional que se impone para anular los primeros términos de la expansión (12)

$$w_1 \xi_1^i + w_2 \xi_2^i = \gamma_{x,i} \quad (14)$$

En el caso más general en el que Y dependa de $n > 1$ variables aleatorias no correlacionadas $X_k, k = 1, \dots, n$, agrupadas en el vector \mathbf{X} , se puede aplicar el método anterior variable por variable, dando a cada una de ellas el valor $x_{k,i}$ y manteniendo las restantes en su valor medio. En tal caso, el estimador del momento de orden j de la respuesta es

$$E[Y^j] \doteq \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^2 w_{k,i} h(x_{k,i})^j \quad (15)$$

donde los pesos y puntos de concentración para $i = 1, 2$ son la solución de

$$\sum_{i=1}^2 w_{k,i} = \frac{1}{n}, \quad \sum_{i=1}^2 w_{k,i} \xi_{k,i}^j = \gamma_{x_k,j} \quad (16)$$

El resultado final es

$$\xi_{k,i} = \frac{\gamma_{x_k,3}}{2} + (-1)^{3-i} \sqrt{n + \left(\frac{\gamma_{x_k,3}}{2}\right)^2}, \quad w_{k,i} = \frac{1}{n} (-1)^i \frac{\xi_{k,3-i}}{\zeta} \quad (17)$$

Esta aproximación es correcta hasta el tercer orden de la expansión de Taylor. En principio, el método permite alcanzar aproximaciones adecuadas para momentos de orden superior aumentando el número de puntos.⁹ En este trabajo, sin embargo, se aplicará la versión expuesta para determinar los momentos de orden uno y dos. En tal caso, los momentos pueden obtenerse directamente por medio de las ecuaciones (15) y (17).

ESTIMACIONES PUNTUALES DE CAMPOS ALEATORIOS

La exposición anterior del método de estimaciones puntuales concierne solamente al caso en que las variables $X_k, k = 1, 2, \dots, n$ no guarden correlación alguna. Esto no se cumple en el caso de campos aleatorios, salvo que se trate de un campo del tipo ruido blanco, que es poco frecuente en la práctica ya que conlleva una fuerte idealización matemática. Para aplicar el método en este caso se hará uso de la expansión de Karhunen-Loève de la covarianza del campo.⁵ En el caso continuo, la expansión de una realización $x(\mathbf{t})$ del campo $X(\mathbf{t})$ de media nula está definida por

$$x(\mathbf{t}) = \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_i} f_i(\mathbf{t}) z_i \quad (18)$$

donde λ_i y $f_i(s)$ son la solución del problema de autovalores

$$\lambda_i f_i(\mathbf{t}) = \int_{\mathcal{D}} B(\mathbf{t}, \mathbf{r}) f_i(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (19)$$

y \mathcal{D} es el dominio del campo. Por otra parte, las z_i son realizaciones de variables Z_i no correlacionadas de media aritmética nula y desviación estándar igual a la unidad.

Para resolver el problema de valores propios de la expansión de Karhunen-Loève se puede aplicar el método de Nyström,¹⁵ el cual simplemente consiste en formular la ecuación (19) en forma de cuadraturas de Gauss e interpolar los valores de las funciones propias $f_i(\mathbf{t})$, necesarias en la ecuación (18) por medio de esas mismas cuadraturas. Para campos aleatorios de una dimensión se tiene, en consecuencia, el problema siguiente

$$\lambda_i f_{ji} = \sum_{k=1}^L B_{jk} p_k f_i(r_k); \quad j, k = 1, 2, \dots, L \quad (20)$$

donde B_{jk} es el valor de la función de covarianza en las coordenadas (t_j, r_k) , p_k son los pesos y r_j las raíces de Gauss, respectivamente. El problema de autovalores resultantes es

$$\mathbf{A} \mathbf{g}_i = \lambda_i \mathbf{g}_i \quad (21)$$

donde $\mathbf{A} = \mathbf{P}^{\frac{1}{2}} \mathbf{B} \mathbf{P}^{\frac{1}{2}}$, $\mathbf{g}_i = \mathbf{P}^{\frac{1}{2}} \mathbf{f}_i$ y \mathbf{P} es una matriz diagonal formada por los pesos de Gauss. La interpolación de las funciones propias se realiza por medio de la ecuación

$$\lambda_i f_i(t) \doteq \sum_{k=1}^L B(t, r_k) p_k f_i(r_k) \quad (22)$$

Ecuaciones similares rigen el caso de dos dimensiones. De acuerdo con esto se tiene el siguiente algoritmo para la aplicación del método de estimaciones puntuales ante la presencia de campos aleatorios:

Algoritmo 1:

1. Resolver el problema de valores propios de la expansión de Karhunen-Loève.
2. Calcular los puntos de estimaciones puntuales del vector \mathbf{Z} .
3. Obtener los valores correspondientes de las variables físicas del campo por medio de la ecuación (18), en la cual las funciones propias se interpolan por medio de la ecuación (19).
4. Resolver los problemas deterministas de elementos finitos.

Como alternativa, se puede hacer uso de la transformación discreta de Karhunen-Loève¹⁶ de la matriz de covarianza del dominio de elementos finitos estocásticos. En este caso, el vector de variables no correlacionadas \mathbf{Z} está dado por

$$\mathbf{Z} = \mathbf{f} \mathbf{X} \quad (23)$$

donde \mathbf{f} es la matriz de autovectores de la matriz de covarianza \mathbf{B} , obtenida por la discretización del campo en puntos arbitrarios, que pueden ser los centros de gravedad de los elementos finitos. Esto indica que se debe resolver el problema

$$\mathbf{B} \mathbf{f}_i = \lambda_i \mathbf{f}_i \quad (24)$$

donde $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, N$ son los correspondientes autovalores y N es el número de valores en los que se discretiza el campo, que puede coincidir o no con el número de elementos finitos. En consecuencia se tiene el algoritmo siguiente:

Algoritmo 2:

1. Discretizar la función de covarianza en N puntos.
2. Resolver el problema de valores propios de la expansión discreta de Karhunen-Loève, de manera que los autovectores estén normalizados ($\mathbf{f}\mathbf{f}^T = \mathbf{I}$).
3. Calcular los puntos de estimaciones puntuales del vector \mathbf{Z} .
4. Obtener los valores correspondientes de las variables físicas del campo $\mathbf{X} = \mathbf{f}^T \mathbf{Z}$. Si el número de puntos de discretización es menor que el número de elementos finitos se debe aplicar alguna técnica adecuada de interpolación.
5. Resolver los problemas deterministas de elementos finitos.

Aparentemente el algoritmo No. 2 es más sencillo debido a su estructura convencional. Sin embargo, puede observarse que, debido a la notoria precisión de las cuadraturas de Gauss, para grandes dimensiones el primer método resulta conveniente puesto que permite estimar correctamente las funciones propias $f_i(\mathbf{t})$ en unos pocos puntos y, además, dispone de un mecanismo propio para su interpolación a todos los puntos de la estructura, del cual carece el segundo algoritmo.

EJEMPLO DE APLICACIÓN

La Figura 2 muestra una viga de relación altura/longitud igual a 4, la cual se encuentra discretizada con elementos finitos triangulares de deformación lineal constante. La estructura está sometida a la acción de dos cargas deterministas p y q , de valores 500 y 50 kN,

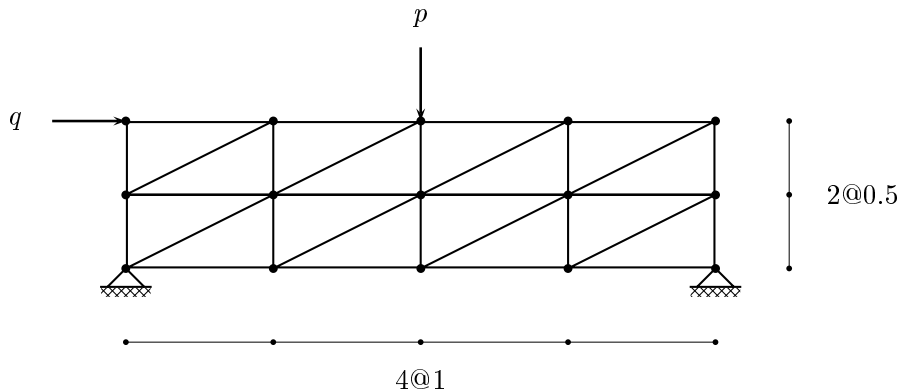


Figura 2. Ejemplo de aplicación

respectivamente. El módulo de elasticidad de la estructura está definido como un campo aleatorio $E(\mathbf{t}) = E(u, v)$, donde u y v son las dos direcciones del espacio indicadas en la figura. La covarianza del campo es de tipo exponencial-cuadrático

$$B(\boldsymbol{\tau}) = \sigma^2 \exp \left[- \left(\frac{|\boldsymbol{\tau}|}{l} \right)^2 \right] \quad (25)$$

donde σ^2 es la varianza del campo y l es la llamada longitud de correlación. En el análisis se usaron los valores $\sigma = 3 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$ y $l = 3 \text{ m}$. El valor medio del campo es de

$\mu = 2 \times 10^7$ kN/m². Nótese que la relación σ/μ es de 0,15, la cual es superior a lo que se recomienda como máximo valor de aplicación del método de perturbación.³

El propósito del análisis es cuantificar el error del método de estimaciones puntuales con respecto a la tensión de von Mises de todos los elementos, definida por¹⁷

$$s_M = \sqrt{\frac{s_1^2 - s_1 s_2 + s_2^2}{3}} \quad (26)$$

donde $s_i, i = 1, 2$ son las tensiones principales

$$s_1 = \frac{s_x + s_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{s_x - s_y}{2}\right)^2 + s_{xy}^2} \quad (27)$$

$$s_2 = \frac{s_x + s_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{s_x - s_y}{2}\right)^2 + s_{xy}^2} \quad (28)$$

siendo s_x, s_y y s_{xy} las tensiones normales y tangencial, respectivamente. Obsérvese que s_M es una función fuertemente no lineal del módulo de elasticidad, lo cual es conveniente para probar la robustez del método ante transformaciones no lineales del campo aleatorio.

Como referencia para juzgar los resultados del método se utiliza un análisis de Monte Carlo realizado por el método de preconditionamiento estadístico,¹² que para igual número de muestras puede considerarse como el más exacto de los publicados en la literatura internacional en términos de acercamiento a la matriz de covarianza dada como dato. Se calcularon 2560 muestras del vector de valores del módulo de elasticidad en cada elemento, con las cuales se obtuvo la matriz de covarianza empírica que aparece en la Figura 3, la cual puede compararse con la exacta que se muestra en la Figura 4. Puede observarse que la excelente aproximación obtenida con el método del preconditionamiento estadístico permite tomar los resultados del análisis de Monte Carlo como referencia. Como comparación del costo computacional de ambas técnicas, baste decir que el método de estimaciones puntuales implica realizar $2M$ llamadas del programa de elementos finitos, donde M es un número de autovalores que se considere suficiente. Este número depende solamente de la longitud de correlación l y no de la dimensión física del problema. Por tanto, valores de M del orden de 2 a 5 pueden ser suficientes para $l = 3$ m, mientras que valores del orden de 10 pueden ser necesarios para $l = 1$ m. En el caso presente se usó $M = 3$, por lo que el número total de análisis deterministas es seis, lo que representa una cantidad muy inferior al total de simulaciones de Monte Carlo.

Las Figuras 5 y 6 muestran, respectivamente, el valor medio ($j = 1$) de la tensión de von Mises estimada por el método de estimaciones puntuales con $M = 3$ autovalores y la diferencia con el resultado de Monte Carlo. Algo similar muestran las Figuras 7 y 8 con respecto a la media cuadrática ($j = 2$). Se observa que la magnitud de las diferencias es en ambos casos pequeña para propósitos prácticos, siendo ligeramente mayores para el caso de la media cuadrática. En principio, estas diferencias pueden reducirse si se emplea un número mayor de puntos de concentración, lo cual requiere resolver previamente un sistema de ecuaciones no lineales semejante al de la ecuación (16).⁹ Nótese que en lo anterior hemos hablado de “diferencias” y no de “errores”, ya que, como es propio de la estadística, los valores esperados reales permanecen desconocidos. En consecuencia, los resultados de un análisis de Monte Carlo no pueden tomarse como exactos.

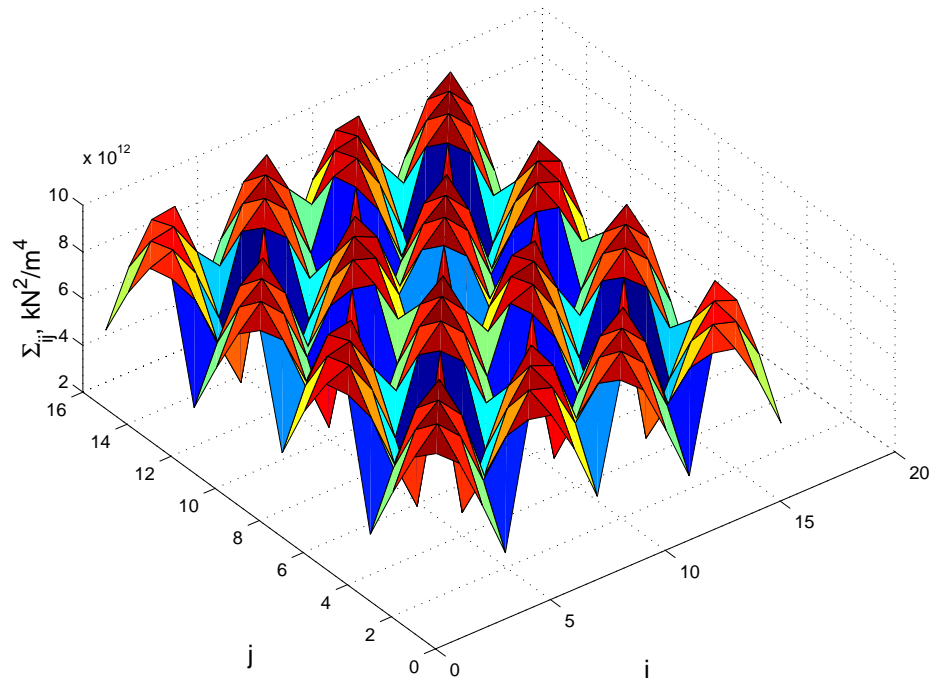


Figura 3. Matriz de covarianza empírica obtenida por el método de Monte Carlo

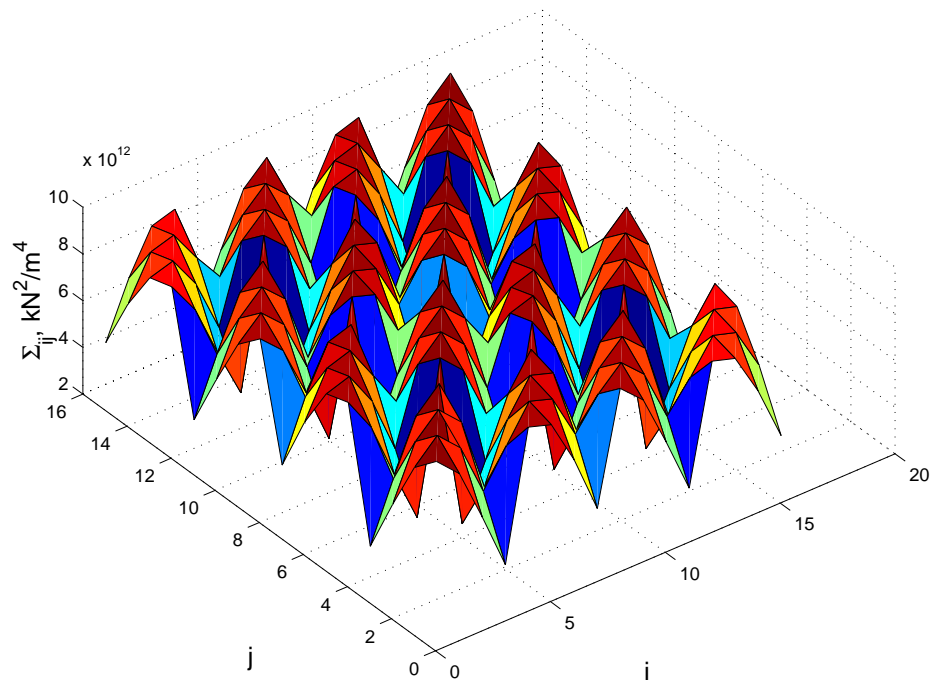


Figura 4. Matriz de covarianza exacta

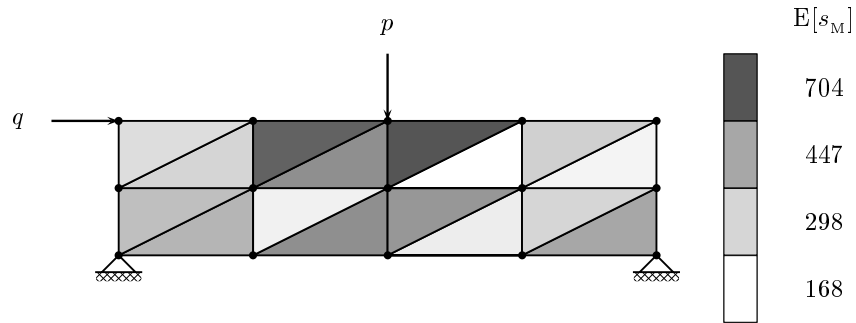


Figura 5. Media de la tensión de von Mises

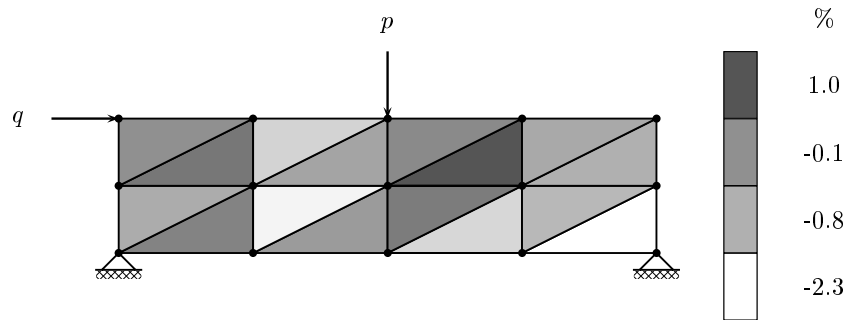


Figura 6. Errores en la estimación de la media de la tensión de von Mises

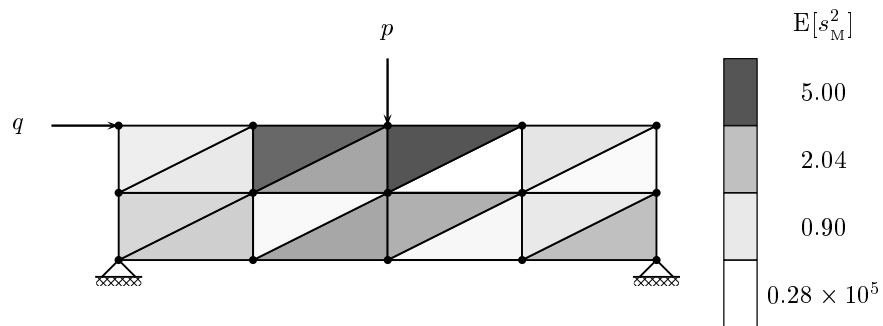


Figura 7. Media cuadrática de la tensión de von Mises

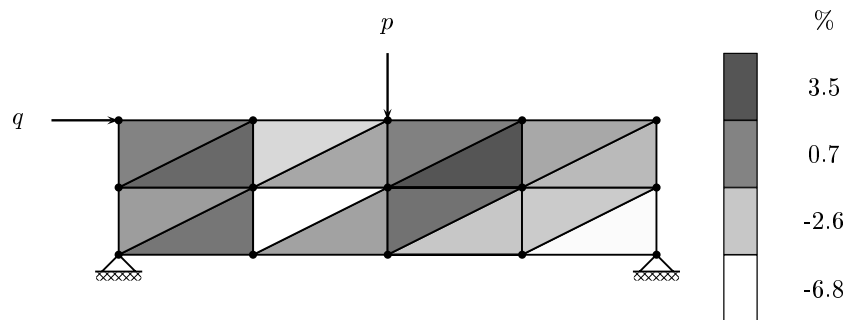


Figura 8. Errores en la estimación de la media cuadrática de la tensión de von Mises

CONCLUSIONES

Se han presentado dos algoritmos que permiten aplicar el método de las estimaciones puntuales a la solución de problemas de mecánica probabilista que involucren campos aleatorios discretizados en la forma de elementos finitos estocásticos. Uno de ellos ha sido utilizado en el ejemplo de aplicación, que concierne a la estimación de los momentos estadísticos de las tensiones de von Mises de una viga de gran canto sometida a una fuerza horizontal y otra vertical. La comparación con un análisis de Monte Carlo muestra unos resultados altamente satisfactorios. La relevancia del método desde el punto de vista práctico se hace mayor si se tiene en cuenta (a) su bajo costo computacional en comparación con el método de Monte Carlo y (b) la posibilidad de usar directamente programas convencionales de análisis determinista de elementos finitos, lo que contrasta con la necesidad de usar programas especiales cuando se aplican otros métodos.

AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo se realizó con el apoyo de la Universidad Nacional de Colombia en el marco del proyecto CINDEC 99IA0012. El autor expresa su reconocimiento por dicho apoyo.

REFERENCIAS

- 1 W.K. Liu, T. Belytschko y A. Mani, "Random field finite elements", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, vol. **23**, pp. 1831–1845, (1986).
- 2 W.K. Liu, T. Belytschko y Y.J. Lua, "Probabilistic finite element method", en "*Probabilistic structural mechanics handbook*", C. Sundararajan, (ed.), Chapman and Hall, New York, (1995).
- 3 M. Kleiber y T.D. Hien, "*The stochastic finite element method*", John Wiley and Sons, New York, (1992).
- 4 P.D. Spanos y R. Ghanem, "Stochastic finite element expansion for random media", *J. Engng. Mech.*, vol. **115**, pp. 1035–1053, (1989).
- 5 R. Ghanem y P.D. Spanos, "*Stochastic finite elements: a spectral approach*", Springer Verlag, New York, (1991).
- 6 N. Wiener, "The homogeneous chaos", *Amer. J. Math.*, vol. **60**, pp. 897–936, (1938).
- 7 J.E. Hurtado y A.H. Barbat, "Monte Carlo techniques in computational stochastic mechanics", *Arch. Comp. Meth. Engng.*, vol. **5**, pp. 3–30, (1998).
- 8 E. Rosenblueth, "Aproximaciones de segundos momentos en probabilidades", *Bol. Inst. Mex. Plan. Op. Sist.*, vol. **26**, pp. 1–12, (1974).
- 9 H. P. Hong, "An efficient point estimate method for probabilistic analysis", *Reliab. Engng. Sys. Saf.*, vol. **59**, pp. 261–267, (1998).
- 10 E. Vanmarcke, "*Random fields: analysis and synthesis*", M.I.T. Press, Cambridge, (1983).
- 11 N. A. C. Cressie, "*Statistics for spatial data*", John Wiley and Sons, New York, (1993).
- 12 F. Yamazaki y M. Shinozuka, "Simulation of stochastic fields by statistical preconditioning", *J. Engng. Mech.*, vol. **116**, pp. 268–287, (1990).

- 13 M. Shinozuka, "Stochastic fields and their digital simulation", en "*Stochastic methods in structural dynamics*", G.I. Schüeller y M. Shinozuka, (eds.), Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht, (1987).
- 14 A. Mantoglu, "Digital simulation of multivariate two- and three-dimensional stochastic processes with a spectral turning bands method", *Math. Geol.*, vol. **19**, pp. 129–149, (1987).
- 15 K. Atkinson, "*The Numerical Solution of Integral Equations of the Second Kind*", Cambridge University Press, Cambridge, (1997).
- 16 J.N. Kapur, "*Maximum Entropy Models in Science and Engineering*", John Wiley and Sons, New Delhi, (1989).
- 17 I.H. Shames y F.A. Cozzarelli, "*Elastic and Inelastic Stress Analysis*", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, (1992).