

# **Análisis Dinámico de Estructuras de Láminas y Vigas**

**F. Flores  
E. Oñate**

# **Análisis Dinámico de Estructuras de Láminas y Vigas**

**F. Flores**

**E. Oñate**

**Publicación CIMNE Nº 39, Octubre 1993**

**Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería**

Gran Capitán s/n, 08034 Barcelona, España



# ANÁLISIS DINÁMICO DE ESTRUCTURAS DE LÁMINAS Y VIGAS

Fernando Flores \*  
y  
Eugenio Oñate

*Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería\*\*  
Universidad Politécnica de Cataluña  
08034 Barcelona, España*

## RESUMEN

En este trabajo se realiza inicialmente un resumen teórico de las teorías de láminas y vigas desarrolladas por Simo y colaboradores<sup>[2-6,12-15]</sup>. Luego se presentan un elemento cuadrilátero y 4 elementos triangulares adecuados para el análisis no lineal geométrico y material en régimen dinámico. Se presentan también un elemento de viga y se propone un criterio de fluencia en esfuerzos generalizados. Se muestran algunos ejemplos del comportamiento de los elementos y la teoría subyacente, incluyendo problemas de contacto entre cuerpos deformables. Finalmente se presenta una metodología para la compatibilización de desplazamientos entre elementos de láminas, vigas y sólidos que permita el análisis de estructuras compuestas sin necesidad de elementos transición entre diferentes elementos y maneje rigidizadores excéntricos.

## 1- INTRODUCCIÓN

El objetivo de este trabajo es presentar algunos resultados obtenido en el análisis dinámico de láminas y vigas. Se han utilizado formulaciones que permiten modelar grandes desplazamientos y grandes rotaciones de forma tal que las deformaciones (y esfuerzos) sean independientes de traslaciones y giros de cuerpo rígido. Esta objetividad de las formulaciones es indispensable para el tratamiento del tipo de problemas que se quiere estudiar, que se refieren principalmente a modelizaciones de impacto entre diferentes elementos estructurales, lo que conduce a grandes deformaciones y comportamiento anelástico del material.

Las formulaciones de láminas y vigas utilizadas se enmarcan dentro de las aproximaciones clásicas en cuanto a que se trabaja con esfuerzos y momentos integrados en el espesor o la sección transversal, en contraste con aproximaciones del tipo de "sólido

---

\* Inv. Asistente de CONICET y Prof. Adjunto Univ. Nacional de Córdoba (Argentina). En la actualidad investigador invitado en \*\*.



*degenerado*". De tal forma que se trabaja con magnitudes sobre la superficie media de la lámina o la línea de centroides de la viga, sin necesidad de utilizar costosas integraciones numéricas en el espesor o la sección transversal. Esto último, por otra parte, representa una limitación en cuanto a la generalidad del tipo de relaciones constitutivas que se pueden considerar. En ambos casos se consideran deformaciones de corte transversal, para lo cual se parametriza en forma independiente la posición de la superficie media y el campo director en las láminas, y la línea de centroides y la terna local en las vigas. La formulación de elementos finitos requiere entonces de elementos con continuidad  $C^0$ .

La discretización numérica de las ecuaciones a resolver se realiza usando el método de elementos finitos en lo que se refiere a la parte espacial. El avance en el tiempo se realiza mediante un esquema del tipo explícito para lo cual se usa una aproximación en diferencias centrales y matriz de masa diagonalizada. El código de ordenador desarrollado a tal efecto (SIMPACT) dispone además de elementos exahédricos para la discretización de elementos estructurales continuos y de rutinas para contacto tridimensional usando el método de penalización.

Un bosquejo del resto de este trabajo es el siguiente: en los apartados 2 y 3 se resumen los elementos esenciales de las teorías de láminas y vigas en que se basan los elementos finitos que se presentan en las secciones 4 y 5. En el apartado 6 se explica que tipo de aproximación se ha utilizado para compatibilizar la unión entre distintos tipos de elementos. En la sección 7 se presentan algunos ejemplos numéricos con objeto de comparar con resultados existentes en la literatura. Finalmente en el apartado 8 se agrupan algunas conclusiones de este trabajo.

## 2- TEORÍA DE LÁMINAS UTILIZADA

La aproximación al comportamiento de láminas utilizada se inscribe dentro de las teorías de láminas (en contraste con la denominada aproximación de sólido degenerado<sup>[1]</sup>), en cuanto a que está formulada en términos de deformaciones generalizadas y esfuerzos. En los apartados siguientes se presenta un resumen de los conceptos esenciales de la formulación, para más detalles se recomienda consultar las referencias.<sup>[2-6]</sup>

### 2.1 Descripción cinemática de la lámina

Cualquier configuración de la lámina en  $\mathbb{R}^3$  queda definida en términos de:

- i) Superficie media de la lámina, definida por una transformación  $\varphi : \bar{\mathcal{A}} \rightarrow \mathbb{R}^3$
- ii) El campo director, definido por la transformación  $\mathbf{t} : \bar{\mathcal{A}} \rightarrow S^2$ .

Dicho campo define en cada punto de la superficie media la dirección de la fibra que se mantiene recta independientemente de la deformación (la normal a la superficie media en las teorías de láminas clásicas),

El dominio  $\bar{\mathcal{A}} \subset \mathbb{R}^2$  se supone compacto con contorno suave  $\partial\mathcal{A}$  y puntos caracterizados por  $(\xi^1, \xi^2) \in \bar{\mathcal{A}}$ . Llamaremos  $\partial_\varphi\mathcal{A} \subset \partial\mathcal{A}$  y  $\partial_t\mathcal{A} \subset \partial\mathcal{A}$  las partes de

$\partial\mathcal{A}$  donde están prescritos  $\varphi$  y  $\mathbf{t}$  respectivamente.  $S^2$  es la esfera de radio unitario y el hecho de que  $\mathbf{t}$  pertenezca a ella implica la inextensibilidad del campo director.

Con esta notación, usando una hipótesis de Kirchhoff generalizada, toda configuración de la lámina se describe por

$$\mathcal{S} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / \mathbf{x} = \varphi + \xi \mathbf{t} \quad , \quad \xi \in [h^-, h^+]\} \quad (2.1)$$

donde  $[h^-, h^+]$  define el espesor de la lámina. Agregaremos un supraíndice '0' a las variables geométricas asociadas con la configuración de referencia  $S^0$ .

Usando una base estandar  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  en  $\mathbb{R}^3$  podemos escribir

$$\varphi = \varphi^i \mathbf{e}_i \quad \varphi'_{i\alpha} = \varphi'^i_{i\alpha} \mathbf{e}_i \quad \mathbf{t} = t^i \mathbf{e}_i \quad (2.2)$$

donde hemos introducido la notación  $(\ )'_{i\alpha} = \frac{\partial(\ )}{\partial \xi^\alpha}$ .

Las medidas de la superficie media en las configuraciones original y actual son respectivamente

$$d\mu^0 = \bar{j}^0 d\xi^1 d\xi^2 \quad d\mu = \bar{j} d\xi^1 d\xi^2 \quad (2.3)$$

con

$$\bar{j}^0 = (\varphi'^0_{i1} \times \varphi'^0_{i2}) \cdot \mathbf{t}^0 \quad \bar{j} = (\varphi'_{i1} \times \varphi'_{i2}) \cdot \mathbf{t} \quad (2.4)$$

también definiremos

$$\bar{J} = \bar{j} / \bar{j}^0 \quad (2.5)$$

Tanto en la superficie media deformada como la indeformada, es posible definir un sistema coordenado convectivo de la forma

$$\{\varphi'_{i\alpha}, \mathbf{t}\} \equiv \{\mathbf{a}_\alpha, \mathbf{a}_3\} \quad y \quad \{\varphi'^0_{i\alpha}, \mathbf{t}^0\} \equiv \{\mathbf{a}^0_\alpha, \mathbf{a}^0_3\}$$

El gradiente de deformación relativo (para  $\xi = 0$ ) en  $\mathbf{x}^0 = \varphi^0(\xi^1, \xi^2)$  es una aplicación lineal

$$\bar{\mathbf{F}} := \mathbf{a}_\alpha \otimes \mathbf{a}^{0\alpha} + \mathbf{t} \otimes \mathbf{a}^{03} \equiv \mathbf{a}_i \otimes \mathbf{a}^{0i} \quad (2.6)$$

$$\bar{\mathbf{F}} = \nabla \Phi (\nabla \Phi_0)^{-1} \quad (2.7)$$

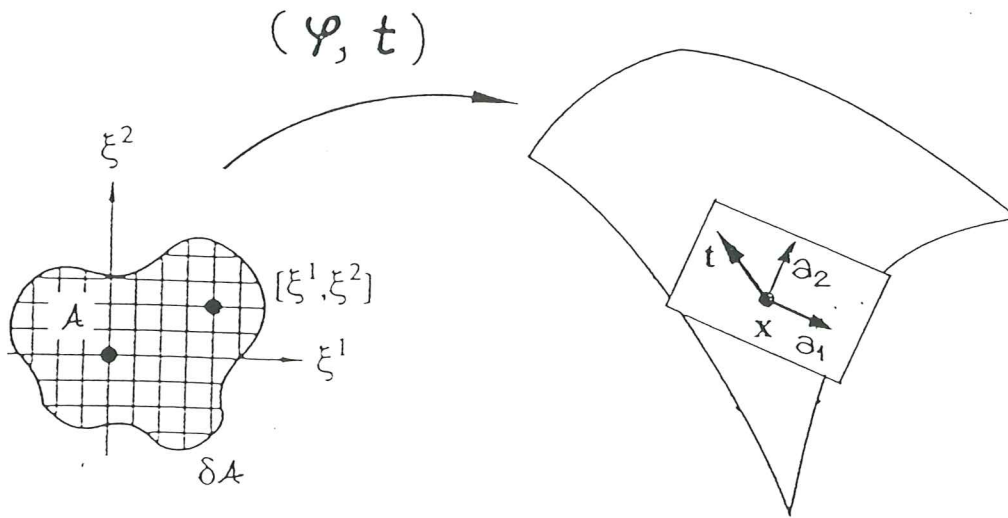


Figura 1 Ilustración de la geometría que define la cinemática del modelo de la lámina

En la configuración presente podemos definir los tensores que definen la métrica del sistema:

a) 1ra forma fundamental

$$a_{\alpha\beta} = \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_\beta \quad (2.8)$$

b) ángulo entre el campo director y la superficie media

$$\gamma_\alpha = \varphi'_{i\alpha} \cdot \mathbf{t} \quad (2.9)$$

c) pseudo 2da. forma fundamental

$$\kappa_{\alpha\beta} = \varphi'_{i\alpha} \cdot \mathbf{t}'_{i\beta} \quad (2.10)$$

Usando idénticas definiciones para la configuración de referencia  $S^0$  podemos definir medidas de deformación Lagrangianas generalizadas, que en forma matricial son

a) deformaciones de la superficie media

$$\epsilon(\Phi) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} a_{11} - a_{11}^0 \\ a_{22} - a_{22}^0 \\ 2(a_{12} - a_{12}^0) \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

b) deformaciones de corte transversal

$$\delta(\Phi) = \begin{bmatrix} \gamma_1 - \gamma_1^0 \\ \gamma_2 - \gamma_2^0 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

c) cambios de curvatura de la superficie media

$$\chi(\Phi) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \kappa_{11} - \kappa_{11}^0 \\ \kappa_{22} - \kappa_{22}^0 \\ 2(\kappa_{12} - \kappa_{12}^0) \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

## 2.2 Variaciones admisibles

Sea

$$\mathcal{C} := \{\Phi := (\varphi, \mathbf{t}) : \mathcal{A} \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \times S^2\} \quad (2.14)$$

el espacio de transformaciones y  $\Phi \in \mathcal{C}$  la configuración presente. Supongamos además que  $\varepsilon \rightarrow \Phi_\varepsilon \in \mathcal{C}$  sea la curva de configuraciones con origen en  $\Phi$ , esto es  $\Phi_\varepsilon|_{\varepsilon=0} = \Phi$ . Por definición el campo tangente a una curva de este tipo en  $\varepsilon = 0$  se denomina una variación admisible. Así,

$$T_\Phi \mathcal{C} = \{\delta\Phi := (\delta\varphi, \delta\mathbf{t}) : \bar{\mathcal{A}} \rightarrow \mathbb{R}^3 \times T_t S^2 / \delta\varphi|_{\delta_\varphi \mathcal{A}} = 0 \text{ y } \delta\mathbf{t}|_{\delta_t \mathcal{A}} = 0\} \quad (2.15)$$

donde

$$T_t S^2 := \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3 / \mathbf{w} \cdot \mathbf{t} = 0\} \quad (2.16)$$

es el espacio tangente a  $S^2$ . Debido a esta última condición  $\delta\mathbf{t}$  puede escribirse como

$$\begin{matrix} \delta\mathbf{t} & = & \bar{\Lambda} & \delta\mathbf{T} \\ (3 \times 1) & & (3 \times 2) & (2 \times 1) \end{matrix} \quad (2.17)$$

Siendo  $\Lambda_{3 \times 3}$  la matriz ortogonal que transforma el vector  $\mathbf{e}_3$  del sistema coordenado global a la posición actual de  $\mathbf{t}$ , y  $\bar{\Lambda}_{3 \times 2}$  es las dos primeras columnas de  $\Lambda$ . Resulta de mucha utilidad definir

$$\delta\mathbf{t} = \delta\theta \times \mathbf{t} \quad (2.18)$$

cumplíndose

$$\delta\theta \cdot \mathbf{t} = 0 \quad (2.19)$$

## 2.3 Definición de esfuerzos

El problema tridimensional se reduce a uno bidimensional en la forma usual de la teoría de láminas, esto se logra integrando las tensiones en el espesor y definiendo

esfuerzos resultantes a lo largo de las líneas coordenadas de la superficie media. Estos esfuerzos se pueden escribir en términos de medidas de tensión referidas a la configuración deformada o a la de referencia

$$\mathbf{n}^\alpha = \frac{1}{j} \int_{h^-}^{h^+} \sigma g^{\alpha j} d\xi = \frac{1}{j} \int_{h^-}^{h^+} \mathbf{P} g_0^{\alpha j^0} d\xi \quad (2.20)$$

$$\mathbf{m}^\alpha = \mathbf{t} \times \frac{1}{j} \int_{h^-}^{h^+} \xi \sigma g^{\alpha j} d\xi = \mathbf{t} \times \frac{1}{j} \int_{h^-}^{h^+} \xi \mathbf{P} g_0^{\alpha j^0} d\xi = \mathbf{t} \times \tilde{\mathbf{m}}^\alpha \quad (2.21)$$

$$\mathbf{l} = \frac{1}{j} \int_{h^-}^{h^+} \sigma g^3 j d\xi = \frac{1}{j} \int_{h^-}^{h^+} \mathbf{P} g_0^3 j^0 d\xi \quad (2.22)$$

donde  $\sigma$  y  $\mathbf{P}$  son los tensores de tensiones de Cauchy y Iero. de Piola-Kirchhoff respectivamente y  $\mathbf{g}^i = \nabla \Phi^{-T} \mathbf{e}^i$ . Por otra parte  $\mathbf{n}^\alpha$  y  $\mathbf{m}^\alpha$  se definen como los esfuerzos y momentos resultantes a lo largo de una línea con  $\xi^\alpha$  constante y  $\mathbf{l}$  es el esfuerzo resultante a través del espesor. Finalmente  $\tilde{\mathbf{m}}^\alpha$  es una definición conveniente que denominaremos momento director. Expresando

$$\mathbf{t}_{i\alpha} = \lambda_\alpha^\mu \varphi_{i\mu} + \lambda_\alpha^3 \mathbf{t} \quad (2.23)$$

podemos definir los esfuerzos resultantes 'efectivos'

$$\tilde{n}^{\beta\alpha} := n^{\beta\alpha} - \lambda_\mu^\beta \tilde{m}^{\alpha\mu} \quad (2.24)$$

$$\tilde{q}^\alpha := q^\alpha - \lambda_\mu^3 \tilde{m}^{\alpha\mu} \quad (2.25)$$

## 2.4 Ecuaciones constitutivas locales

La potencia desarrollada por las tensiones en la teoría tridimensional se expresa en la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{W} &:= \int_{\mathcal{V}} \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} d\mathcal{V} \\ &= \int_{\bar{\mathcal{A}}} [\mathbf{n}^\alpha \cdot \dot{\varphi}_{i\alpha} + \tilde{\mathbf{m}}^\alpha \cdot \dot{\mathbf{t}}_{i\alpha} + \mathbf{l} \cdot \dot{\mathbf{t}}] d\mu \\ &= \int_{\bar{\mathcal{A}}} \left[ \tilde{n}^{\beta\alpha} \frac{1}{2} \dot{a}_{\beta\alpha} + \tilde{q}^\alpha \dot{\gamma}_\alpha + \tilde{m}^{\alpha\beta} \dot{\kappa}_{\beta\alpha} \right] d\mu \\ &= \int_{\bar{\mathcal{A}}} [\tilde{\mathbf{n}} : L_u \boldsymbol{\varepsilon} + \tilde{\mathbf{q}} : L_u \boldsymbol{\delta} + \tilde{\mathbf{m}} : L_u \boldsymbol{\chi}] d\mu \end{aligned} \quad (2.26)$$



donde hemos introducido consecutivamente, la integración en el espesor de la lámina y con ella los esfuerzos resultantes, la definición de la métrica y los esfuerzos efectivos, y finalmente las derivadas respecto del tiempo de las medidas de deformación.

Definiendo una función de energía interna  $\psi$  y usando la desigualdad de Clausius-Duhem en la forma usual se obtiene

$$\bar{n}^{\beta\alpha} = \bar{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{\beta\alpha}} \quad \bar{q}^\alpha = \bar{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \delta_\alpha} \quad \bar{m}^{\beta\alpha} = \bar{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \chi_{\beta\alpha}} \quad (2.27)$$

$$\bar{\rho} = \frac{1}{\bar{J}} \int_{h^-}^{h^+} \rho_j d\xi \quad (2.28)$$

a partir de la cual queda claro el porque de la definición de los esfuerzos efectivos que resultan conjugados de las medidas de deformación Lagrangiana.

#### 2.4.1 Respuesta tensional hiperelástica

Por razones de simplicidad supondremos una respuesta hiperelástica lineal del material, de tal forma que las ecuaciones constitutivas resultan

$$\bar{J} \bar{n}^{\alpha\beta} = \frac{E h}{1 - \nu^2} H^{\alpha\beta\gamma\delta} (\varepsilon_{\gamma\delta} - \varepsilon_{\gamma\delta}^p) \quad (2.29.a)$$

$$\bar{J} \bar{q}^\alpha = G h \kappa a^{(0)\alpha\beta} (\delta_\beta - \delta_\beta^p) \quad (2.29.b)$$

$$\bar{J} \bar{m}^{\alpha\beta} = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)} H^{\alpha\beta\gamma\delta} (\chi_{\gamma\delta} - \chi_{\gamma\delta}^p) \quad (2.29.c)$$

donde  $h = h^+ - h^-$  es el espesor de la lámina,  $E$  y  $G$  son los módulos elásticos longitudinal y de corte respectivamente,  $\nu$  es la relación de Poisson,  $\kappa = \frac{5}{6}$  y  $H^{\alpha\beta\gamma\delta}$  está dado por

$$H^{\alpha\beta\gamma\delta} = \nu a^{(0)\alpha\beta} a^{(0)\gamma\delta} + \frac{1}{2}(1 - \nu)[a^{(0)\alpha\gamma} a^{(0)\beta\delta} + a^{(0)\beta\gamma} a^{(0)\alpha\delta}] \quad (2.30)$$

En (2.29) hemos supuesto descomposición aditiva del tensor de deformaciones en una parte elástica (que denotaremos con un índice  $e$ ) y una parte plástica (índice  $p$ ).

Para el caso de un sistema cartesiano local el tensor métrico covariante en la geometría inicial  $a_{ij}^{(0)} = \varphi_{\xi i}^0 \cdot \varphi_{\xi j}^0$  es la identidad e igualmente  $a^{(0)\alpha\beta} = \delta^{\alpha\beta}$  entonces el

tensor de 4<sup>to</sup> orden  $H^{\alpha\beta\gamma\delta}$  resulta muy sencillo y permite escribir la expresión (1.29.a) matricialmente en la forma

$$\bar{J}\bar{n} = \begin{bmatrix} \bar{n}^{11} \\ \bar{n}^{22} \\ \bar{n}^{12} \end{bmatrix} = \frac{Eh}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^e \\ \varepsilon_{22}^e \\ 2\varepsilon_{12}^e \end{bmatrix} = C\varepsilon^e \quad (2.31)$$

#### 2.4.2 Condición de fluencia, regla de flujo y ley de endurecimiento

Se utiliza el modelo de plasticidad propuesto en la Ref.[5] que esta expresado en términos de los esfuerzos resultantes  $r$ . El modelo es equivalente al de von-Mises (basado en la energía de corte), admite endurecimiento isotrópico y cinemático (ambos lineales) y la ley de flujo es asociada. La superficie de fluencia está formada por dos superficies suaves definidas por:

$$\Phi_\mu(r-p) = f_\mu(r-p) - \frac{\kappa^2(e^p)}{\kappa_0^2} \leq 0 \quad \mu = 1, 2 \quad (2.32)$$

donde  $f_\mu$  es la energía de distorsión (por unidad de superficie de la lámina) normalizada respecto a  $\frac{2}{3}\kappa_0^2 h$  y puede escribirse como

$$f_\mu = (r-p)^T A_\mu (r-p) \quad (2.33)$$

siendo  $\kappa$  la tensión de fluencia uniaxial,  $e^p$  la deformación plástica efectiva,  $p$  la tensión de retorno y

$$r = \bar{J}[\bar{n}^{11}, \bar{n}^{22}, \bar{n}^{12}, \bar{m}^{11}, \bar{m}^{22}, \bar{m}^{12}, \bar{q}^1, \bar{q}^2]$$

$$A_\mu = \begin{bmatrix} \frac{1}{n_0^2} P & \frac{\text{sign}(\mu)}{2\sqrt{3}n_0 m_0} P & 0 \\ \frac{\text{sign}(\mu)}{2\sqrt{3}n_0 m_0} P & \frac{1}{m_0^2} P & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{q_0^2} \mathbf{1} \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

donde

$$\text{sign}(\mu) = \begin{cases} 1 & \mu = 1 \\ -1 & \mu = 2 \end{cases} \quad n_0 = \kappa_0 h \quad m_0 = \frac{\kappa_0 h^2}{4} \quad q_0 = \frac{\kappa_0 h}{\sqrt{3}} \quad (2.35)$$

Para la integración de la ecuación constitutiva se utiliza el algoritmo de retorno radial que en el caso más general conduce a un sistema no lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas que debe resolverse en forma iterativa. Los detalles del mismo pueden verse en la Ref.[5]

## 2.5 Formulación débil. Principio de trabajos virtuales.

A partir de la hipótesis cinemática básica, y usando las definiciones de esfuerzos y momentos resultantes, las ecuaciones de equilibrio espacial derivadas de las ecuaciones generales de equilibrio de un sólido tridimensional son (ver Apéndice de la Ref.[2])

$$\frac{1}{j}(\bar{j}\mathbf{n}^\alpha)_{,\alpha} + \bar{\mathbf{n}} = \bar{\rho}\ddot{\varphi} \quad (2.36)$$

$$\frac{1}{j}(\bar{j}\mathbf{m}^\alpha)_{,\alpha} + \varphi'_{,\alpha} \times \mathbf{n}^\alpha + \bar{\mathbf{m}} = I_\rho \dot{\mathbf{w}}^T \quad (2.37)$$

donde  $\bar{\mathbf{n}}$  y  $\bar{\mathbf{m}}$  son la fuerza aplicada y el momento resultante aplicado por unidad de superficie

$$\bar{\mathbf{n}} = \frac{1}{j} \left[ j\sigma g^3 \Big|_{\xi=h^-}^{\xi=h^+} + \int_{h^-}^{h^+} j\rho B d\xi \right] \quad (2.38)$$

$$\bar{\mathbf{m}} = \frac{1}{j} \mathbf{t} \times \left[ \xi j\sigma g^3 \Big|_{\xi=h^-}^{\xi=h^+} + \int_{h^-}^{h^+} \xi j\rho B d\xi \right] \quad (2.39)$$

con  $B$  la fuerza másica,  $I_\rho$  es el momento de inercia de la sección por unidad de longitud respecto a la superficie media y  $\dot{\mathbf{w}}$  es la derivada temporal del vector velocidad del campo director  $\mathbf{t}$  definido por

$$\frac{d\mathbf{t}}{dt} = \dot{\mathbf{t}} = \mathbf{w} \times \mathbf{t} \quad \text{o} \quad \mathbf{w} = \mathbf{t} \times \dot{\mathbf{t}} \quad (2.40)$$

Multiplicando las ecuaciones de equilibrio por las variaciones admisibles, integrando por partes en el área, usando las definiciones de los esfuerzos efectivos y de sus deformaciones conjugadas se llega a (ver Ref.[2])

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{A}} \left[ \bar{n}^{\alpha\beta} \delta\varepsilon_{\alpha\beta} + \bar{m}^{\alpha\beta} \delta\chi_{\alpha\beta} + \bar{q}^\alpha \delta\gamma_\alpha \right] dA = \\ & \int_{\mathcal{A}} \left[ \bar{\mathbf{n}} \cdot \delta\varphi + (\bar{\mathbf{m}} \times \mathbf{t}) \cdot \delta\mathbf{t} \right] dA + \int_{\partial_n \mathcal{A}} \bar{\mathbf{n}} \cdot \delta\varphi \bar{j} ds + \int_{\partial_m \mathcal{A}} \bar{\mathbf{m}} \cdot \delta\mathbf{t} \bar{j} ds + \\ & \int_{\mathcal{A}} \left[ \bar{\rho}\ddot{\varphi} \cdot \delta\varphi + I_\rho \dot{\mathbf{w}} \cdot \delta\mathbf{t} \right] dA \end{aligned} \quad (2.41)$$



En la cual  $\bar{\mathbf{n}}$  y  $\bar{\mathbf{m}}$  son la fuerza y el momento prescritos sobre el contorno de la superficie media de la lámina

$$\bar{\mathbf{n}} = \mathbf{n}^\alpha \nu_\alpha \quad \text{sobre} \quad \partial_n \mathcal{A} \quad \text{y} \quad \bar{\mathbf{m}} = \bar{\mathbf{n}}^\alpha \nu_\alpha \quad \text{sobre} \quad \partial_m \mathcal{A}$$

donde  $\boldsymbol{\nu} = \nu_\alpha \mathbf{a}^\alpha$  es el campo normal al contorno de la superficie media  $\boldsymbol{\varphi}$  ( $\partial \mathcal{A}$ ). Por supuesto que debe satisfacerse que  $\partial_n \mathcal{A} \cap \partial_\varphi \mathcal{A} = \partial_m \mathcal{A} \cap \partial_t \mathcal{A} = \emptyset$ .

## 2.6 FORMULACIÓN UTILIZADA

Describiremos brevemente las formulaciones variacionales utilizadas por los diferentes elementos que se describen en el apartado 4. Resulta necesario distinguir las diferentes contribuciones a la energía interna y a las ecuaciones de equilibrio. Como es usual analizaremos separadamente las contribuciones provenientes de los esfuerzos de membrana, de flexión y la debida al corte transversal.

Supondremos una aproximación de elementos finitos estandar de la forma

$$\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}^0 + \mathbf{u} = \sum_{I=1}^{NN} N^I ((\boldsymbol{\varphi}^0)^I + \mathbf{u}^I) \quad (2.42)$$

$$\mathbf{t}^{(0)} = \sum_{I=1}^{NN} N^I \mathbf{t}^{(0)I} \quad \|\mathbf{t}^{(0)I}\| = 1 \quad (2.43)$$

$$\mathbf{t} = \sum_{I=1}^{NN} N^I \mathbf{t}^I \quad \|\mathbf{t}^I\| = 1 \quad (2.44)$$

y

$$\Delta \mathbf{T} = \sum_{I=1}^{NN} N^I \Delta \mathbf{T}^I \quad (2.45)$$

donde  $N^I$  son las funciones de forma típicas de elementos bidimensionales de clase  $C_0$ .<sup>[10]</sup> En cada paso de tiempo la actualización del director en los nodos se realiza mediante la expresión

$$\mathbf{t}^{(k+1)} = \exp_{\mathbf{t}^k}[\Delta \mathbf{t}^k] := \cos \|\Delta \mathbf{t}^k\| \mathbf{t}^k + \frac{\sin \|\Delta \mathbf{t}^k\|}{\|\Delta \mathbf{t}^k\|} \Delta \mathbf{t}^k \quad (2.46)$$

### 2.6.1 Comportamiento membranal

Se han utilizado 3 modelos para representar el comportamiento membranal: un modelo en desplazamientos estandar y dos modelos en deformaciones impuestas

### 2.6.1.1 Modelo en desplazamientos

El modelo en desplazamientos es estandar. Las deformaciones membranales pueden escribirse agrupadas en un vector de la forma

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\varphi'_{11} \cdot \varphi'_{11} - \varphi^0_{11} \cdot \varphi^0_{11}) \\ \frac{1}{2}(\varphi'_{22} \cdot \varphi'_{22} - \varphi^0_{22} \cdot \varphi^0_{22}) \\ (\varphi'_{11} \cdot \varphi'_{22} - \varphi^0_{11} \cdot \varphi^0_{22}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\varphi'_{11} \cdot \varphi'_{11} - 1) \\ \frac{1}{2}(\varphi'_{22} \cdot \varphi'_{22} - 1) \\ \varphi'_{11} \cdot \varphi'_{22} \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

La contribución al principio de trabajos virtuales asociada a la parte membranal se escribe

$$\mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{u} = \int_{\mathcal{A}} \tilde{\mathbf{n}}^T \delta \boldsymbol{\varepsilon} dA - \int_{\mathcal{A}} \mathbf{q} \delta \mathbf{u} dA \quad (2.48)$$

Reescribiendo esta expresión en la forma habitual del método de elementos finitos, la contribución de los términos de membrana a las ecuaciones de equilibrio (fuerzas residuales) se expresa

$$\mathbf{F}_m^I = \int_{\mathcal{A}} (\mathbf{B}_m^I)^T \tilde{\mathbf{n}} dA - \mathbf{f}^I \quad (2.49)$$

donde

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}_m \delta \mathbf{u} \quad (2.50)$$

$$\mathbf{B}_m^I = \begin{bmatrix} N_{r_1}^I \varphi'_{11} \\ N_{r_2}^I \varphi'_{22} \\ N_{r_1}^I \varphi'_{22} + N_{r_2}^I \varphi'_{11} \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

$$\mathbf{f}^I = \int_{\mathcal{A}} N^I \mathbf{q} dA \quad (2.52)$$

### 2.6.1.2 Modelos en deformaciones impuestas

En los modelos de deformaciones impuestas, se interpolan las deformaciones en el dominio del elemento a partir de un conjunto de parámetros, que se ligan a las deformaciones consistentes con el campo de desplazamientos en un conjunto elegido de puntos. Resulta conveniente interpolar las deformaciones en el sistema natural de coordenadas del elemento (identificaremos con  $(\ )'$  las magnitudes expresadas en

el sistema natural de coordenadas). Las deformaciones en este sistema convectivo se expresan como

$$\varepsilon'(u) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{\xi\xi} \\ \varepsilon_{\eta\eta} \\ 2\varepsilon_{\xi\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\varphi'_{i\xi} \cdot \varphi'_{i\xi} - \varphi^0_{i\xi} \cdot \varphi^0_{i\xi}) \\ \frac{1}{2}(\varphi'_{i\eta} \cdot \varphi'_{i\eta} - \varphi^0_{i\eta} \cdot \varphi^0_{i\eta}) \\ (\varphi'_{i\xi} \cdot \varphi'_{i\eta} - \varphi^0_{i\xi} \cdot \varphi^0_{i\eta}) \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

que se relaciona con las deformaciones en un sistema cartesiano local  $(x_1, x_2)$  (elegido arbitrariamente) mediante

$$\varepsilon = \mathbf{J}^{-1} \varepsilon' \mathbf{J}^{-T}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (J_{11}^{-1})^2 & (J_{12}^{-1})^2 & J_{11}^{-1} J_{12}^{-1} \\ (J_{21}^{-1})^2 & (J_{22}^{-1})^2 & J_{21}^{-1} J_{22}^{-1} \\ 2J_{21}^{-1} J_{11}^{-1} & 2J_{22}^{-1} J_{12}^{-1} & J_{11}^{-1} J_{22}^{-1} + J_{12}^{-1} J_{21}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{\xi\xi} \\ \varepsilon_{\eta\eta} \\ 2\varepsilon_{\xi\eta} \end{bmatrix} = \mathbf{J}_2 \varepsilon' \quad (2.54)$$

donde  $\mathbf{J}$  es la matriz jacobiana de la transformación en cada punto.

$$J_{\alpha a} = \frac{\partial x_a}{\partial \xi_\alpha} \quad y \quad J_{a\alpha}^{-1} = \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial x_a} \quad (2.55)$$

Se propone una variación lineal en ambas coordenadas naturales para las 3 componentes del tensor de deformación en el plano  $(\varepsilon_{\xi\xi}, \varepsilon_{\eta\eta}, 2\varepsilon_{\xi\eta})$

$$\bar{\varepsilon}'(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} \bar{\varepsilon}_{\xi\xi} \\ \bar{\varepsilon}_{\eta\eta} \\ 2\bar{\varepsilon}_{\xi\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta & & & \\ & & & 1 & \xi & \eta \\ & & & & & & 1 & \xi & \eta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = \mathbf{A}(\xi, \eta) \boldsymbol{\alpha} \quad (2.56)$$

donde los coeficientes  $\alpha_i$  se eliminan evaluando componentes del tensor de deformación en puntos elegidos.

$$\hat{\varepsilon} = \mathbf{Q} \boldsymbol{\alpha} \quad (2.57)$$

de donde

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{Q}^{-1} \hat{\varepsilon} \quad (2.58)$$

y finalmente

$$\bar{\varepsilon}' = \mathbf{A}(\xi, \eta) \mathbf{Q}^{-1} \hat{\varepsilon} = \mathbf{P}(\xi, \eta) \hat{\varepsilon} \quad (2.59)$$

Conocido entonces el campo de deformaciones impuestas en el sistema natural, se tienen las deformaciones en el sistema cartesiano a través de (2.54). Con éstas se pueden evaluar los esfuerzos membranales  $\bar{\mathbf{n}}$ . Finalmente la contribución a la ecuación de equilibrio es

$$\int_{\mathcal{A}} \delta \bar{\varepsilon}^T \bar{\mathbf{n}} \, dA = \int_{\mathcal{A}} [\mathbf{J}_2(\xi, \eta) \mathbf{P}(\xi, \eta) \bar{\mathbf{B}}_m \delta \mathbf{u}]^T \bar{\mathbf{n}} \, dA = \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{B}}_m^T \int_{\mathcal{A}} \mathbf{P}^T(\xi, \eta) \mathbf{J}_2^T(\xi, \eta) \bar{\mathbf{n}} \, dA \quad (2.60)$$

donde hemos introducido

$$\delta \hat{\varepsilon} = \sum_{I=1}^{NN} \bar{\mathbf{B}}_m^I \delta \mathbf{u}^I = \bar{\mathbf{B}}_m \delta \mathbf{u} \quad (2.61)$$

Llamando

$$\beta = \int_{\mathcal{A}} \mathbf{P}(\xi, \eta) \mathbf{J}_2^T(\xi, \eta)^T \bar{\mathbf{n}} \, dA \quad (2.62)$$

resulta

$$\mathbf{F}_m^T \delta \mathbf{u} = \beta^T \bar{\mathbf{B}}_m \delta \mathbf{u} \quad (2.63)$$

### 2.6.2 Comportamiento flexional

El comportamiento flexional está formulado exclusivamente en desplazamientos en la forma estandar. Para el caso de coordenadas cartesianas la contribución de los momentos a las ecuaciones de equilibrio es

$$\mathbf{F}_b^T \delta \mathbf{U} = \int_{\mathcal{A}} \bar{\mathbf{m}}^T \delta \chi \, dA \quad (2.64)$$

Explicitando la (2.13) y expresándola en forma de vector

$$\kappa(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} \kappa_{11} \\ \kappa_{22} \\ 2\kappa_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}'_1 \cdot \boldsymbol{\varphi}'_1 \\ \mathbf{t}'_2 \cdot \boldsymbol{\varphi}'_2 \\ (\mathbf{t}'_1 \cdot \boldsymbol{\varphi}'_2 + \mathbf{t}'_2 \cdot \boldsymbol{\varphi}'_1) \end{bmatrix} \quad (2.65)$$

La contribución a las ecuaciones de equilibrio se escribe

$$\delta \mathbf{U}^T \mathbf{F}_b = \delta \mathbf{U}^T \int_A \mathbf{B}_b^T \bar{\mathbf{m}} dA \quad (2.66)$$

donde

$$\mathbf{B}_b^I \delta \mathbf{U}^I = \begin{bmatrix} t_{11} N_{i1}^I \\ t_{12} N_{i2}^I \\ t_{12} N_{i1}^I + t_{11} N_{i2}^I \end{bmatrix} \delta \mathbf{u}^I + \begin{bmatrix} \varphi_{i1} N_{i1}^I \\ \varphi_{i2} N_{i2}^I \\ \varphi_{i2} N_{i2}^I + \varphi_{i1} N_{i1}^I \end{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}^I \delta \mathbf{T}^I \quad (2.67)$$

### 2.6.3 Tratamiento del corte transversal

Para el tratamiento del corte transversal se usa un método de deformaciones impuestas, dicho método se basa en la utilización de un funcional del tipo Hu-Washizu. La metodología utilizada sigue los razonamientos del procedimiento general descrito en la Ref.[8].

#### 2.6.3.1 Elementos triangulares (cuadráticos)

Las deformaciones se expresan en coordenadas naturales y se interpolan bilinealmente en coordenadas naturales en el elemento.

$$\boldsymbol{\gamma}' = \begin{bmatrix} \gamma_\xi \\ \gamma_\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \xi & \eta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_6 \end{bmatrix} = \mathbf{A} \boldsymbol{\alpha} \quad (2.68)$$

Interesa relacionar los coeficientes de  $\alpha_i$  con deformaciones de corte en los lados del triángulo. Exigiremos que la deformación de corte tangente al lado varíe linealmente a lo largo del mismo. Elegiremos para ello 2 puntos en cada lado, correspondientes a los puntos de Gauss de un elemento unidimensional  $(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$

Evaluando  $\mathbf{A}$  en los puntos elegidos y proyectando en la dirección tangente en cada lado

$$\begin{bmatrix} \gamma_t^{\prime 1} \\ \gamma_t^{\prime 2} \\ \gamma_t^{\prime 3} \\ \gamma_t^{\prime 4} \\ \gamma_t^{\prime 5} \\ \gamma_t^{\prime 6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \xi_1 & \eta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \xi_2 & \eta_2 & 0 & 0 & 0 \\ -a & -a\xi_3 & -a\eta_3 & a & a\xi_3 & a\eta_3 \\ -a & -a\xi_4 & -a\eta_4 & a & a\xi_4 & a\eta_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \xi_5 & \eta_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \xi_6 & \eta_6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{bmatrix} \quad (2.69)$$

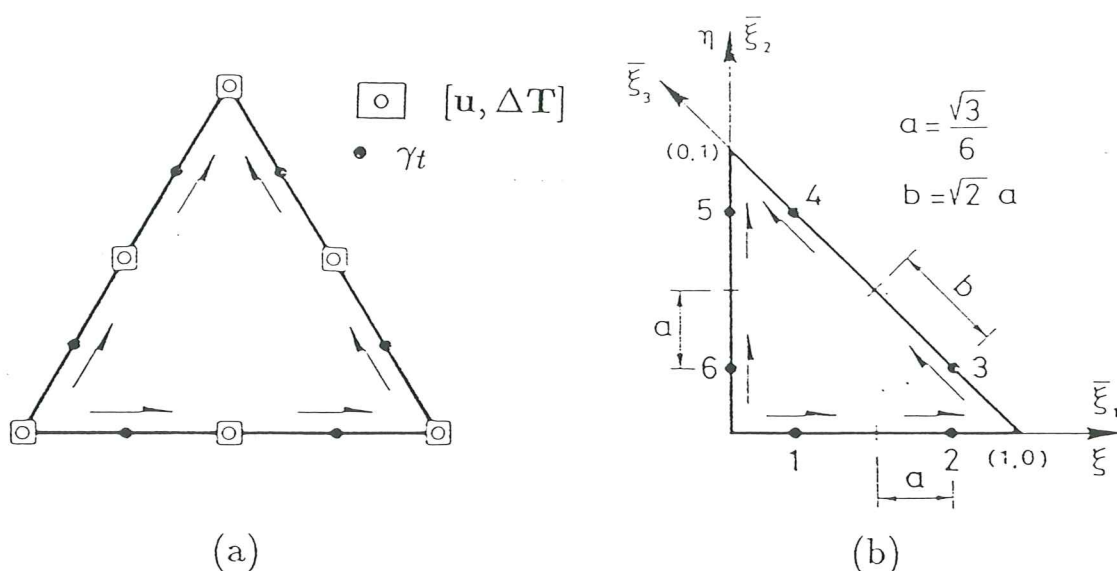


Figura 2 Elemento triangular plano de seis nodos.  
 (a) Grados de libertad. (b) Puntos de evaluación del corte

$$\bar{\gamma}'_t = \mathbf{P} \alpha \quad (2.70)$$

invirtiendo la relación podemos expresar los coeficientes  $\alpha_i$  en términos de las deformaciones de los lados

$$\alpha = \mathbf{P}^{-1} \bar{\gamma}'_t \quad (2.71)$$

de donde

$$\gamma' = \mathbf{A} \mathbf{P}^{-1} \bar{\gamma}'_t = \mathbf{A} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{T} \bar{\gamma}' \quad (2.72)$$

donde  $\mathbf{T}$  es la matriz de cosenos directores que permite expresar las deformaciones tangentes en términos de las deformaciones en las direcciones convectivas y  $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & & & & & & & & & \\ & 1 & 0 & & & & & & & & & \\ & & & -a & a & & & & & & & \\ & & & & & -a & a & & & & & \\ & & & & & & & 0 & 1 & & & \\ & & & & & & & & & 0 & 1 & \end{bmatrix} \quad (2.73)$$

$$\bar{\gamma}'^T = [\gamma_\xi^1 \ \gamma_\eta^1 \ \gamma_\xi^2 \ \gamma_\eta^2 \ \gamma_\xi^3 \ \gamma_\eta^3 \ \gamma_\xi^4 \ \gamma_\eta^4 \ \gamma_\xi^5 \ \gamma_\eta^5 \ \gamma_\xi^6 \ \gamma_\eta^6] \quad (2.74)$$

Debido a la forma de  $\mathbf{T}$  se puede ver que  $(\gamma_\eta^1 \ \gamma_\eta^2 \ \gamma_\xi^5 \ \gamma_\xi^6)$  no tienen influencia en  $\gamma'$  por lo que podemos redefinir  $\mathbf{T}$  y  $\bar{\gamma}'$  eliminando estas cuatro columnas



$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & \\ & & -a & a & & & & & \\ & & & & -a & a & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad (2.75)$$

$$\bar{\gamma}'^T = [\gamma_\xi^1 \ \gamma_\xi^2 \ \gamma_\xi^3 \ \gamma_\eta^3 \ \gamma_\xi^4 \ \gamma_\eta^4 \ \gamma_\eta^5 \ \gamma_\eta^6] \quad (2.76)$$

Las deformaciones en coordenadas cartesianas se obtienen fácilmente

$$\gamma = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \gamma' = \mathbf{J}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{T} \bar{\gamma}' \quad (2.77)$$

donde podríamos haber reemplazado

$$\bar{\gamma}' = \begin{bmatrix} \mathbf{J}^1 & & & & & & & \\ & \mathbf{J}^2 & & & & & & \\ & & \mathbf{J}^3 & & & & & \\ & & & \mathbf{J}^4 & & & & \\ & & & & \mathbf{J}^5 & & & \\ & & & & & \mathbf{J}^6 & & \end{bmatrix} \bar{\gamma} = \mathbf{Z} \bar{\gamma} \quad (2.78)$$

sin embargo esto último no resulta necesario ya que es más sencillo evaluar en los puntos de muestreo directamente las deformaciones en el sistema natural. De (2.9) y (2.12) las deformaciones de corte en las direcciones naturales son

$$\gamma' = \begin{bmatrix} \gamma_\xi \\ \gamma_\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \cdot \varphi'_{i\xi} - t^0 \cdot \varphi'_{i\xi}^0 \\ t \cdot \varphi'_{i\eta} - t^0 \cdot \varphi'_{i\eta}^0 \end{bmatrix} \quad (2.79)$$

La contribución del corte transversal a las ecuaciones de equilibrio puede escribirse

$$\delta \mathbf{U}^T \mathbf{F}_s = \int_{\mathcal{A}} \delta \gamma^T \bar{\mathbf{q}} \, dA \quad (2.80)$$

si reemplazamos aquí (2.77) tendremos

$$\delta \mathbf{U}^T \mathbf{F}_s = \int_{\mathcal{A}} \left[ \mathbf{J}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{T} \delta \bar{\gamma}' \right]^T \bar{\mathbf{q}} \, dA = \delta \mathbf{U}^T \bar{\mathbf{B}}_s^T \mathbf{T}^T \mathbf{P}^{-t} \int_{\mathcal{A}} \mathbf{A}^T \mathbf{J}^{-t} \bar{\mathbf{q}} \, dA \quad (2.81)$$

Podemos definir un vector de esfuerzos de corte generalizados en el elemento

$$\bar{\mathbf{q}} = \mathbf{T}^T \mathbf{P}^{-t} \int_{\mathcal{A}} \mathbf{A}^T \mathbf{J}^{-t} \bar{\mathbf{q}} dA \quad (2.82)$$

además hemos reemplazado

$$\delta \bar{\boldsymbol{\gamma}}' = \bar{\mathbf{B}}_s \delta \mathbf{U} \quad (2.83)$$

Con lo que finalmente

$$\delta \mathbf{U}^T \mathbf{F}_s = \delta(\bar{\boldsymbol{\gamma}}')^T \bar{\mathbf{q}} \quad (2.84)$$

Por otra parte la matriz  $\bar{\mathbf{B}}_s$  tiene la forma

$$\bar{\mathbf{B}}_s^T = [\mathbf{B}_{s\xi}^1 \quad \mathbf{B}_{s\xi}^2 \quad \mathbf{B}_{s\xi}^3 \quad \mathbf{B}_{s\eta}^3 \quad \mathbf{B}_{s\xi}^4 \quad \mathbf{B}_{s\eta}^4 \quad \mathbf{B}_{s\eta}^5 \quad \mathbf{B}_{s\eta}^6] \quad (2.85)$$

con componentes

$$\mathbf{B}_{s\xi}^I \delta \mathbf{U}^I = \left[ N_{i\xi}^I t \quad , \quad N^I \varphi_{i\xi} \bar{\boldsymbol{\Lambda}}^I \right] \cdot \begin{bmatrix} \delta \mathbf{u}^I \\ \delta \mathbf{T}^I \end{bmatrix} \quad (2.86)$$

$$\mathbf{B}_{s\eta}^I \delta \mathbf{U}^I = \left[ N_{i\eta}^I t \quad , \quad N^I \varphi_{i\eta} \bar{\boldsymbol{\Lambda}}^I \right] \cdot \begin{bmatrix} \delta \mathbf{u}^I \\ \delta \mathbf{T}^I \end{bmatrix} \quad (2.87)$$

Para el caso de elementos triangulares lineales, se considera un valor de la deformación tangente al lado constante en cada lado, dicho valor se toma como el promedio de los valores usados para muestreo. Bajo esta condición algunas operaciones pueden realizarse en forma explícita como veremos en detalle al discutir los distintos elementos.

### 2.6.3.2 Elementos cuadriláteros (bilineales)

Para evitar el bloqueo por cortante se trabaja con deformaciones de corte impuestas al igual que en los elementos triangulares. La formulación sigue los razonamientos del subapartado anterior (2.6.3.1) y puede encontrarse en [3,8]. En este caso las deformaciones de corte tangentes al lado, que coinciden con una coordenada local, se suponen constantes en el lado, lo que implica a su vez una variación lineal en la otra coordenada natural. Se utilizan entonces 4 puntos de muestreo que se eligen en la mitad de cada lado. Esto puede resumirse de la forma:



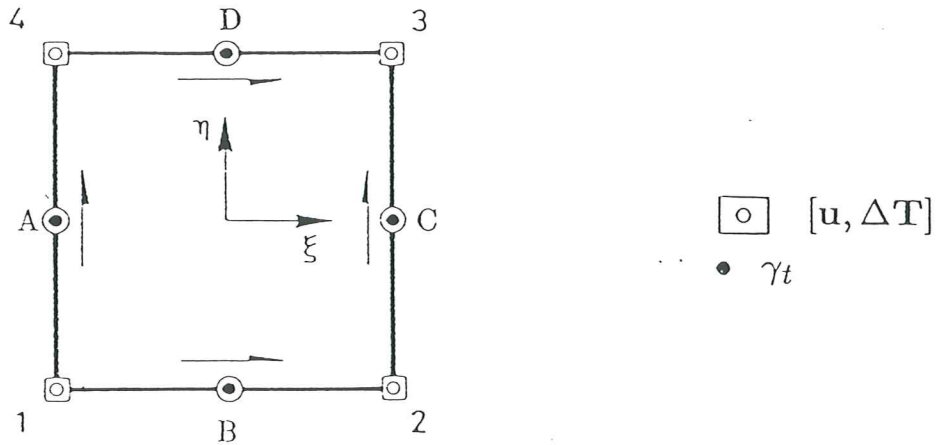


Figura 3 Elemento cuadrilátero de cuatro nudos

$$\gamma' = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1-\xi) & \frac{1}{2}(1-\eta) & \frac{1}{2}(1+\eta) \\ \frac{1}{2}(1-\xi) & \frac{1}{2}(1+\eta) & \frac{1}{2}(1+\eta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{\eta}^A \\ \gamma_{\xi}^B \\ \gamma_{\eta}^C \\ \gamma_{\xi}^D \end{bmatrix} = \mathbf{P} \bar{\gamma}' \quad (2.88)$$

donde  $(\xi, \eta)$  son las coordenadas locales del elemento cuadrilátero

$$\gamma = \mathbf{J}^{-1} \gamma' = \mathbf{J}^{-1} \mathbf{P} \bar{\gamma}' \quad (2.89)$$

sustituyendo en (2.80) e integrando resulta

$$\delta \mathbf{U}^T \mathbf{F}_s = \int_{\mathcal{A}} \delta \left[ \mathbf{J}^{-1} \mathbf{P} \bar{\gamma}' \right]^T \bar{\mathbf{q}} dA = \delta \mathbf{U}^T \bar{\mathbf{B}}_s^T \int_{\mathcal{A}} \mathbf{P}^t \mathbf{J}^{-t} \bar{\mathbf{q}} dA \quad (2.90)$$

El vector de esfuerzos de corte generalizados en el elemento se define ahora como

$$\bar{\mathbf{q}} = \int_{\mathcal{A}} \mathbf{P}^T \mathbf{J}^{-t} \bar{\mathbf{q}} dA \quad (2.91)$$

en tanto que la matriz  $\bar{\mathbf{B}}_s$  tiene por componentes

$$\bar{\mathbf{B}}_s^T = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{s\eta}^A & \mathbf{B}_{s\xi}^B & \mathbf{B}_{s\eta}^C & \mathbf{B}_{s\xi}^D \end{bmatrix} \quad (2.92)$$

usando (2.86) y (2.87) podemos a partir de (2.90)-(2.92) evaluar las contribuciones del corte transversal a las ecuaciones de equilibrio.

### 3-TEORÍA DE VIGAS UTILIZADA

En esta sección se resume la teoría de vigas que da sustento al elemento finito implementado en el código de análisis. Un desarrollo más detallado de la misma, incluyendo las expresiones para el análisis implícito puede verse en las Referencias[12-14]. Aquí se hace hincapié, por otra parte, en las ecuaciones expresadas en términos de rotaciones alrededor de los ejes locales, esto es en componentes materiales, pero manteniendo los desplazamientos en componentes globales.

#### 3.1 Cinemática Básica

##### 3.1.1 Hipótesis Cinemática

La posición del eje (curvo) o centroide de la viga queda definida por la aplicación

$$S \in I \mapsto \varphi_0(S) \in \mathbb{R}^3 \quad (3.1)$$

donde  $I$  es un intervalo de  $\mathbb{R}$  y  $S$  en general define la longitud de arco sobre la viga en la configuración de referencia. En cada punto de la línea de centroides definimos una sección transversal a través de su normal

$$S \in I \mapsto t^1(S) \in S^2 \quad (3.2)$$

que en general no coincidirá con la tangente a la línea de centroides, aún en la geometría indeformada, en forma similar al apartado anterior donde el director no necesariamente coincide con la normal a la lámina.

Dentro de la sección transversal definimos una dirección arbitraria a la que denominaremos  $t^2 \in S^2$ , que por razones de simplicidad y sin pérdida de generalidad haremos coincidir con uno de los ejes principales de inercia de la sección. Una segunda dirección en la sección queda definidamente naturalmente por

$$t^3 = t^1 \times t^2 \quad (3.3)$$

Esta terna espacial define una matriz de transformación  $\Lambda$  en el grupo ortogonal especial ( $SO(3)$ )

$$\Lambda = \begin{bmatrix} t^1 & t^2 & t^3 \end{bmatrix} \in SO(3) \quad (3.4)$$

que mapea la base canónica de  $\mathbb{R}^3\{e_1, e_2, e_3\}$  en la posición espacial actual de la terna móvil.

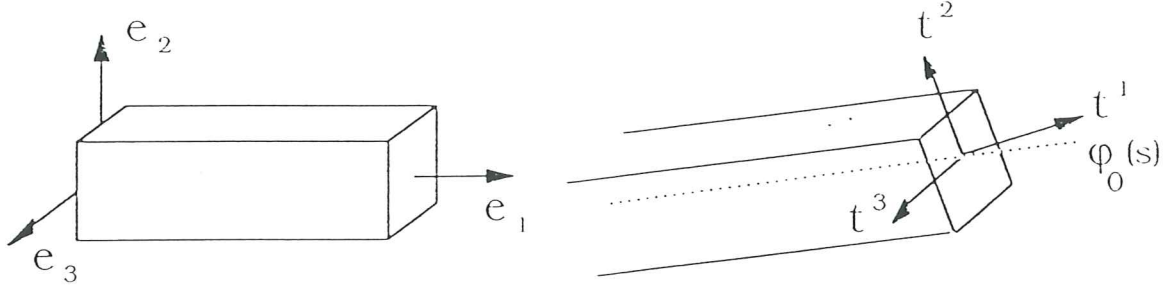


Figura 4 Ilustración de la geometría que define la cinemática del modelo de la viga.

La hipótesis cinemática básica supone que la posición de cada punto de la viga está dada por:

$$\varphi : I \times A \mapsto \mathbb{R}^3$$

$$\mathbf{x} = \varphi(S, \xi^2, \xi^3) = \varphi_0(S) + \sum_{\alpha=2}^3 \xi^\alpha \mathbf{t}^\alpha(S) \quad (3.5)$$

donde  $A \in \mathbb{R}^2$  es compacta y define la sección transversal, en tanto que  $\xi^\alpha$  mide la distancia sobre el eje  $\mathbf{t}^\alpha$  de un punto de  $A$  a la línea de centroides  $\varphi_0(S)$ . Esta hipótesis conduce entonces a la indeformabilidad de la sección transversal y no permite el alabeo de la misma.

La relación entre este sistema coordenado  $(\Lambda)$  y la base convectiva se encuentra usando el gradiente de deformación  $\mathbf{F}(\xi)$  (Reemplazaremos algunas veces  $S$  por  $\xi^1$  y más generalmente  $(S, \xi^2, \xi^3)$  por  $\xi$ )

$$\mathbf{F}(\xi) = \left[ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^1}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^2}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^3} \right] \quad (3.6)$$

definiendo

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_0(S) &= \mathbf{F}(S, \xi^2, \xi^3) |_{\xi^2=\xi^3=0} \\ &= \frac{d}{dS} \varphi_0(S) \otimes \mathbf{e}_1 + \sum_{\alpha=2}^3 \mathbf{t}^\alpha(S) \otimes \mathbf{e}_\alpha \end{aligned} \quad (3.7)$$

entonces la base convectiva puede definirse como:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_I &= \mathbf{F}_0(S)\mathbf{e}_I \\ \mathbf{a}_1 &= \frac{d}{dS}\varphi_0(S) \quad \mathbf{a}_2 = \mathbf{t}^2 \quad \mathbf{a}_3 = \mathbf{t}^3 \end{aligned} \quad (3.8)$$

la diferencia entre la terna móvil  $\Lambda$  y la base convectiva está en que en general  $\mathbf{a}_1 \neq \mathbf{t}^1$

### 3.1.2 Derivadas de la terna móvil

Las derivadas de cada vector componente de la terna respecto a la longitud de arco  $S$  resulta de

$$\begin{aligned} \mathbf{t}^I(S) &= \Lambda(S)\mathbf{e}_I \\ \mathbf{e}_I &= \Lambda^T(S)\mathbf{t}^I(S) \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\frac{d}{dS}\mathbf{t}^I = \left[ \frac{d}{dS}\Lambda(S) \right] \mathbf{e}^I$$

premultiplicando por  $\Lambda^T$  para obtener las componentes materiales, esto es respecto al sistema local

$$\Lambda^T(S)\frac{d}{dS}\mathbf{t}^I(S) = \Lambda^T(S) \left[ \frac{d}{dS}\Lambda(S) \right] \mathbf{e}_I = \mathbf{K}(S)\mathbf{e}_I \quad (3.10)$$

donde

$$\mathbf{K}(S) = \Lambda^T(S) \left[ \frac{d}{dS}\Lambda(S) \right] \quad (3.11)$$

es un campo tensorial antisimétrico, lo cual puede comprobarse fácilmente. Escribiremos

$$\mathbf{K}(S) = \begin{bmatrix} 0 & -\kappa_3(S) & \kappa_2(S) \\ \kappa_3(S) & 0 & -\kappa_1(S) \\ -\kappa_2(S) & \kappa_1(S) & 0 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Al vector axial de este tensor antisimétrico lo llamaremos

$$\kappa(S) = [\kappa_1(S), \kappa_2(S), \kappa_3(S)] \quad (3.13)$$

tal que para todo vector  $y \in \mathbb{R}^3$  se satisface

$$\mathbf{K}(S)y = \kappa(S) \times y \quad (3.14)$$

### 3.2 Cantidad de movimiento lineal y angular

Parametrizando el movimiento con el tiempo  $t$

$$t \mapsto \varphi(\xi, t) = \varphi_0(S, t) + \sum_{\alpha=2}^3 \xi^\alpha t^\alpha(S, t) \quad (3.15)$$

denotando con un punto la derivada material respecto del tiempo, las derivada temporal de la terna móvil resulta

$$\dot{t}^I(S, t) = \frac{d}{dt} [\Lambda(S, t)] e_I = \dot{\Lambda}(S, t) e_I \quad (3.16)$$

premultiplicando por  $\Lambda^T$  para obtener las componentes materiales obtenemos

$$\Lambda^T(S, t) \dot{t}^I(S, t) = \Lambda^T(S, t) \dot{\Lambda}(S, t) e_I = \Omega(S, t) e_I \quad (3.17)$$

donde  $\Omega(S, t)$  es un tensor antisimétrico y denominaremos con  $\omega$  al vector axial asociado

La cantidad de movimiento (*Momentun*) lineal por unidad de longitud de arco  $S$  se calcula como

$$\mathbf{L}_t = \int_A \rho_0(\xi) \dot{\varphi}(\xi, t) dA \quad (3.18)$$

llamando

$$A_\rho(S) = \int_A \rho_0(\xi) dA \quad (3.19)$$

siendo  $\varphi_0(S)$  la línea de centroides está implícita la condición

$$\int_A \rho_0(\xi) \xi^\alpha dA = 0 \quad (3.20)$$

por lo que el momentun lineal resulta

$$\mathbf{L}_t(S) = A_\rho(S)\dot{\varphi}_0(S) \quad (3.21)$$

El momentun angular, por otra parte, se define como la integral

$$\mathbf{H}_t = \int_A \rho_0(\xi) [\varphi(\xi, t) - \varphi_0(S, t)] \times \dot{\varphi}(\xi, t) dA \quad (3.22)$$

donde a partir de (3.5) y (3.17)

$$\dot{\varphi}(\xi, t) = \varphi_0(S, t) + \sum_{\alpha=2}^3 \xi^\alpha \dot{\mathbf{t}}^\alpha \equiv \varphi_0(S, t) + (\mathbf{\Lambda}\omega) \times [\varphi(\xi, t) - \varphi_0(S, t)] \quad (3.23)$$

Reemplazando esta expresi3n en la anterior premultiplicando  $\dot{\mathbf{H}}_t$  por  $\mathbf{\Lambda}^T$  para expresarlo en las componentes materiales e integrando, resulta

$$\mathbf{\Lambda}^T \dot{\mathbf{H}}_t = \dot{\mathbf{H}}_t^M = \mathbf{I}_\rho \omega \quad (3.24)$$

donde  $\mathbf{I}_\rho$  es el tensor de inercia de la secci3n en componentes materiales

$$\mathbf{I}_\rho = \sum_{\alpha=2}^3 \sum_{\beta=2}^3 \int_a \rho_0(\xi) \xi^\alpha \xi^\beta [\delta_{\alpha\beta} \mathbf{1} - \mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\beta] \quad (3.25)$$

que, como hemos elegido  $\mathbf{t}^2$  y  $\mathbf{t}^3$  en las direcciones principales de la secci3n, si denominamos

$$\begin{aligned} I_2(S) &= \int_A \rho_0(\xi) (\xi^3)^2 dA & I_3(S) &= \int_A \rho_0(\xi) (\xi^2)^2 dA \\ I_1(S) &= I_2(S) + I_3(S) \end{aligned} \quad (3.26)$$

resulta

$$\mathbf{I}_\rho = \begin{bmatrix} I_1 & & \\ & I_2 & \\ & & I_3 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

La derivada temporal del momentun angular  $\dot{\mathbf{H}}_t$  expresada en la configuraci3n material puede demostrarse que es



$$\Lambda^T \dot{\mathbf{H}}_t = \mathbf{I}_\rho \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H}_t^M \quad (3.28)$$

### 3.3 Ecuaciones de movimiento

Consideremos una sección transversal  $A_t = \varphi_t |_{S=fijo}$ . Sea  $\mathbf{P}(\boldsymbol{\xi})$  el primer tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff, el que podemos escribir

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{T}_1(\boldsymbol{\xi}) \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{T}_2(\boldsymbol{\xi}) \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{T}_3(\boldsymbol{\xi}) \otimes \mathbf{e}_3 \quad (3.29)$$

Claramente  $\mathbf{T}_1(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{P}(\boldsymbol{\xi})\mathbf{e}_1$  es el vector tensión sobre la sección transversal  $A_t \in \mathbb{R}^2$ . Premultiplicando por  $\Lambda^T$  e integrando sobre la sección obtenemos la fuerza resultante por unidad de longitud de arco (de referencia)

$$\mathbf{N}(S, t) = \Lambda^T \int_A \mathbf{T}_1(\boldsymbol{\xi}) dA \equiv \Lambda^T \int_A \mathbf{P}(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{e}_1 dA \quad (3.30)$$

Similarmente el momento resultante sobre la sección transversal por unidad de longitud de arco de referencia esta dado por la integral

$$\mathbf{M}(S, t) = \Lambda^T \int_A [\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}, t) - \varphi_0(S, t)] \times \mathbf{T}_1(\boldsymbol{\xi}) dA \quad (3.31)$$

Las ecuaciones de equilibrio dinámico en la configuración espacial toman la forma (ver Apéndice de la Ref. [12])

$$\frac{\partial}{\partial S}(\Lambda \mathbf{N}) + \bar{\mathbf{q}} = A_\rho \ddot{\varphi}_0 \quad (3.32)$$

$$\frac{\partial}{\partial S}(\Lambda \mathbf{M}) + \frac{\partial \varphi_0}{\partial S} \times (\Lambda \mathbf{N}) + \Lambda \bar{\mathbf{M}} = \dot{\mathbf{H}}_t \quad (3.33)$$

donde  $\bar{\mathbf{q}}$  es la resultante de las acciones externas por unidad de longitud de arco de referencia y  $\bar{\mathbf{M}}$  es el momento exterior medido en el sistema local.

Premultiplicando la segunda por  $\Lambda^T$  y desarrollando obtenemos

$$\boldsymbol{\kappa} \times \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial S} + (\Lambda^T \frac{\partial \varphi_0}{\partial S}) \times \mathbf{N} + \bar{\mathbf{M}} = \mathbf{I}_\rho \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H}_t^M \quad (3.34)$$

### 3.4 Trabajo interno y medidas de deformación

La potencia interna  $\mathcal{W}$  se puede expresar como

$$\mathcal{W} = \int_{A \times I} \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} \, dA \, dS = \int_{A \times I} (\mathbf{\Lambda}^T \mathbf{P}) : (\mathbf{\Lambda}^T \dot{\mathbf{F}}) \, dA \, dS \quad (3.35)$$

siendo

$$\begin{aligned} \mathbf{\Lambda}^T \dot{\mathbf{F}} = & \left\{ \mathbf{\Lambda}^T \frac{\partial \dot{\varphi}_0}{\partial S} + (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\kappa} + \dot{\boldsymbol{\kappa}}) \times \left( \sum_{\alpha=2}^3 \xi^\alpha \mathbf{e}_\alpha \right) + \boldsymbol{\kappa} \times \left[ \boldsymbol{\omega} \times \left( \sum_{\alpha=2}^3 \xi^\alpha \mathbf{e}_\alpha \right) \right] \right\} \otimes \mathbf{e}_1 \\ & + \sum_{\alpha=2}^3 (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_\alpha) \otimes \mathbf{e}_\alpha \end{aligned} \quad (3.36)$$

reemplazando esta última expresión en la anterior, integrando en la sección y operando se llega a que

$$\mathcal{W} = \int_I \{ \mathbf{N} \cdot \mathbf{\Lambda}^T \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \varphi_0}{\partial S} \right) - (\boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{\omega}) \times \frac{\partial \varphi_0}{\partial S} \right] + \mathbf{M} \cdot \dot{\boldsymbol{\kappa}} \} \, dS \quad (3.37)$$

Definamos como medida de deformación de la línea de centroides a

$$\boldsymbol{\Gamma} = \mathbf{\Lambda}^T \left[ \frac{\partial \varphi_0}{\partial S} - \mathbf{t}^1 \right] = \mathbf{\Lambda}^T \frac{\partial \varphi_0}{\partial S} - \mathbf{e}_1 \quad (3.38)$$

la derivada temporal de la cual resulta

$$\dot{\boldsymbol{\Gamma}} = \dot{\mathbf{\Lambda}}^T \frac{\partial \varphi_0}{\partial S} + \mathbf{\Lambda}^T \frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi_0}{\partial S} = \mathbf{\Lambda}^T \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi_0}{\partial S} - (\boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{\omega}) \times \frac{\partial \varphi_0}{\partial S} \right] \quad (3.39)$$

lo que nos permite escribir la potencia interna como

$$\mathcal{W} = \int_I (\mathbf{N} : \dot{\boldsymbol{\Gamma}} + \mathbf{M} : \dot{\boldsymbol{\kappa}}) \, dS \quad (3.40)$$

De esta forma quedan definidas las medidas de deformación  $(\boldsymbol{\Gamma}, \boldsymbol{\kappa})$  en la configuración material conjugadas de los esfuerzos resultantes  $\mathbf{N}$  y  $\mathbf{M}$ .

### 3.5 Formulación débil. Ecuación de trabajos virtuales

Para la obtención de la ecuación de trabajos virtuales es necesario definir primero el campo de variaciones admisibles consistente con el grupo ortogonal  $SO(3)$ . Para ello, sea  $\Phi(S) = (\varphi_0(S), \boldsymbol{\Lambda}(S))$  una configuración arbitraria. Construimos una configuración



perturbada relativa a  $\Phi(S)$  y la denotamos por  $\Phi_\varepsilon(S) = (\varphi_{0_\varepsilon}(S), \Lambda_\varepsilon(S))$  definida de la forma

$$\varphi_{0_\varepsilon}(S) = \varphi_0(S) + \varepsilon\eta_0(S) \quad \Lambda_\varepsilon(S) = \Lambda(S)\exp(\varepsilon\Theta(S)) \quad (3.41)$$

donde  $\varepsilon > 0$ ,  $\eta_0(S)$  es un desplazamiento infinitesimal admisible con las condiciones de contorno y  $\Theta(S)$  es un campo tensorial antisimétrico que se interpreta como una rotación infinitesimal superpuesta a  $\Lambda(S)$  cuyo vector axial asociado llamaremos  $\theta$ . La exponenciación de un tensor antisimétrico nos provee de un elemento de  $SO(3)$  (ver Ref[2,3,13,14] para una discusión más detallada). Existe una forma cerrada acreditada a Rodriguez

$$\exp(\Theta) = \mathbf{1} + \frac{\sin(\|\theta\|)}{\|\theta\|}\Theta + 2\frac{\sin^2(\|\theta\|/2)}{\|\theta\|^2}\Theta^2 \quad (3.42)$$

La definición de  $\Phi_\varepsilon(S)$  satisface que

$$\Phi_\varepsilon(S) |_{\varepsilon=0} = (\varphi_0(S), \Lambda(S)) \quad (3.43)$$

$$\frac{d\Phi_\varepsilon(S)}{d\varepsilon} |_{\varepsilon=0} = (\eta_0(S), \Lambda(S)\Theta(S)) \quad (3.44)$$

Esta última derivada nos provee del campo de variaciones admisibles, por otro lado consideraremos la componente material del campo de rotaciones por lo que finalmente la variación admisible toma la forma  $(\eta_0(S), \theta(S))$

Multiplicando las ecuaciones de equilibrio (3.32) y (3.34) por el campo de variaciones admisibles e integrando en la longitud de arco

$$\int_I \left[ \frac{\partial}{\partial S}(\Lambda N) + \bar{q} - A_\rho \ddot{\varphi}_0 \right] \cdot \eta_0 + \left[ \kappa \times M + \frac{\partial M}{\partial S} + (\Lambda^T \frac{\partial \varphi_0}{\partial S}) \times N + \bar{M} - I_\rho \dot{\omega} - \omega \times H_t^M \right] \cdot \theta \, dS = 0 \quad (3.45)$$

Integrando por partes los términos  $[\frac{\partial}{\partial S}(\Lambda N) \cdot \eta_0]$  y  $[\frac{\partial}{\partial S}M \cdot \theta]$  y recordando que la variación  $(\eta_0, \theta)$  se anula en el contorno, obtenemos

$$\int_I \left\{ N \cdot \left[ \Lambda^T \frac{\partial \eta_0}{\partial S} + (\Lambda^T \frac{\partial \varphi_0}{\partial S}) \times \theta \right] + M \cdot \left[ \frac{\partial \theta}{\partial S} + \kappa \times \theta \right] \right\} dS = \int_I \left[ (\bar{q} - A_\rho \ddot{\varphi}_0) \cdot \eta_0 + (\bar{M} - I_\rho \dot{\omega} - \omega \times H_t^M) \cdot \theta \right] dS \quad (3.46)$$

Denotando por  $(\ )' = \frac{\partial}{\partial S}(\ )$  es posible escribir la ecuación anterior en la forma

$$\int_I \left\{ [\mathbf{N}, \mathbf{M}] \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Lambda}^T \frac{\partial}{\partial S} \mathbf{1} & (\boldsymbol{\Lambda}^T \boldsymbol{\varphi}'_0) \times \\ 0 & \frac{\partial}{\partial S} \mathbf{1} + \boldsymbol{\kappa} \times \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\bar{\mathbf{q}} + A_\rho \ddot{\boldsymbol{\varphi}}_0 \\ -\bar{\mathbf{M}} + \mathbf{I}_\rho \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H}_t^M \end{bmatrix}^T \right\} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_0 \\ \boldsymbol{\theta} \end{bmatrix} dS = 0 \quad (3.47)$$

que nos provee la ecuación de trabajos virtuales que puede ser directamente utilizada para la discretización por elementos finitos.

### 3.6 Ecuaciones constitutivas

Los esfuerzos y momentos resultantes en sus componentes materiales se pueden expresar en la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= [ N, Q^2, Q^3 ] \\ \mathbf{M} &= [ M_t, M^2, M^3 ] \end{aligned} \quad (3.48)$$

en tanto que las deformaciones generalizadas conjugadas de las anteriores medidas de tensión se pueden escribir

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Gamma} &= [ \varepsilon, \gamma_2, \gamma_3 ] \\ \boldsymbol{\kappa} &= [ \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3 ] \end{aligned} \quad (3.49)$$

Definiendo una función de energía objetiva interna  $\psi$  a partir de (3.36), derivando respecto al tiempo y usando la desigualdad de Clausius-Duhem en la forma usual se obtiene

$$\begin{aligned} N &= \bar{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} & Q^2 &= \bar{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \gamma_2} & Q^3 &= \bar{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \gamma_3} \\ M_t &= \bar{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \kappa_1} & M^2 &= \bar{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \kappa_2} & M^3 &= \bar{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \kappa_3} \end{aligned} \quad (3.50)$$

Supondremos por razones de simplicidad una respuesta hiperelástica del material, de tal forma que suponiendo descomposición aditiva del tensor de deformaciones las ecuaciones constitutivas resultan

$$\begin{bmatrix} N \\ Q^2 \\ Q^3 \\ M_t \\ M^2 \\ M^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EA & & & & & \\ & GA_2 & & & & \\ & & GA_3 & & & \\ & & & GJ_1 & & \\ & & & & EJ_2 & \\ & & & & & EJ_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon - \varepsilon^p \\ \gamma_2 - \gamma_2^p \\ \gamma_3 - \gamma_3^p \\ \kappa_1 - \kappa_1^p \\ \kappa_2 - \kappa_2^p \\ \kappa_3 - \kappa_3^p \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

donde  $(A, A_2, A_3)$  son el área transversal y las áreas de corte que se consideren como efectivas, en tanto que  $(J_1, J_2, j_3)$  son los momentos de inercia polar y respecto a los ejes principales de la sección (definiciones similares a la expresión (3.26) pero sin incluir la masa  $\rho$ ).

### 3.6.1 Una aproximación al comportamiento plástico en vigas

Resulta sumamente complejo (sino imposible) expresar una superficie de fluencia de una viga de sección arbitraria, en términos de los esfuerzos resultantes sobre la sección. Existen algunos estudios sobre el comportamiento de algunas secciones a problemas de flexión pura, flexión compuesta (plana) y bajo torsión. Estas aproximaciones, sin embargo, no permiten realizar extrapolaciones a estados de sollicitación general (flexión + esfuerzo axial + torsión). Para el caso de flexión sobre ambos ejes principales de inercia, los estudios están restringidos a secciones rectangulares, en tanto que para el comportamiento torsional se han concentrado principalmente en secciones circulares o anulares y existen algunas resultados para secciones rectangulares.

El tensor de tensiones en un punto cualquiera de la sección de una viga tiene la forma (en componentes materiales)

$$\sigma(\xi) = \begin{bmatrix} \sigma^{11}(N, M^2, M^3) & \sigma^{12} & \sigma^{13} \\ \sigma^{21}(Q^2, M_t) & 0 & 0 \\ \sigma^{31}(Q^3, M_t) & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

Usando un criterio de fluencia basado en la energía de deformación por corte (von Mises) obtenemos que el segundo invariante del tensor desviador integrado en la sección es

$$J_2 = \int_A \left[ \frac{1}{3} \sigma^{11^2}(N, M^2, M^3) + \sigma^{12^2}(Q^2, M_t) + \sigma^{13^2}(Q^3, M_t) \right] dA \quad (3.53)$$

Como es usual normalizaremos los esfuerzos y momentos respecto de los esfuerzos y momentos últimos que individualmente hacen que la sección plastifique  $(N_u, Q_u^2, Q_u^3, M_{tu}, M_u^2, M_u^3)$ ; llamaremos

$$\begin{aligned} n &= \frac{N}{N_u} & q^2 &= \frac{Q^2}{Q_u^2} & q^3 &= \frac{Q^3}{Q_u^3} \\ m_t &= \frac{M_t}{M_{tu}} & M^2 &= \frac{M^2}{M_u^2} & M^3 &= \frac{M^3}{M_u^3} \end{aligned} \quad (3.54)$$

de esta forma un criterio de fluencia en esfuerzos toma la forma

$$\int_A \left[ \frac{1}{3} \sigma^{11^2}(n, m^2, m^3) + \sigma^{12^2}(q^2, m_t) + \sigma^{13^2}(q^3, m_t) \right] dA - \frac{A}{3} \kappa^2 \leq 0 \quad (3.55)$$

Recordemos algunos resultados publicados en la literatura (ver Ref.[9]). En una sección rectangular para el caso de flexión plana mas esfuerzo axil, el criterio de von Mises (y el de Tresca) conduce a

$$n^2 + m = 1 \quad (3.56)$$

Con el objeto de facilitar su utilización se puede aproximar esta expresión mediante una forma cuadrática

$$n^2 \pm \frac{1}{2\sqrt{3}}nm + m^2 = 1 \quad (3.57)$$

En el caso de flexión con componentes sobre ambos ejes principales de la sección se ha encontrado como una buena aproximación para algunas secciones (ver Ref.[9])

$$|m^2| + \frac{3}{4}(m^3)^2 = 1 \quad |m^2| \geq |m^3| \quad (3.58)$$

Similarmente al caso anterior podemos utilizar una forma cuadrática que aproxime la expresión (3.58)

$$(m^2)^2 \pm \frac{1}{2\sqrt{3}}m^2m^3 + (m^3)^2 = 1 \quad (3.59)$$

En la Fig.5.a y 5.b se puede apreciar la relación que existe entre las expresiones originales y las aproximaciones cuadráticas.

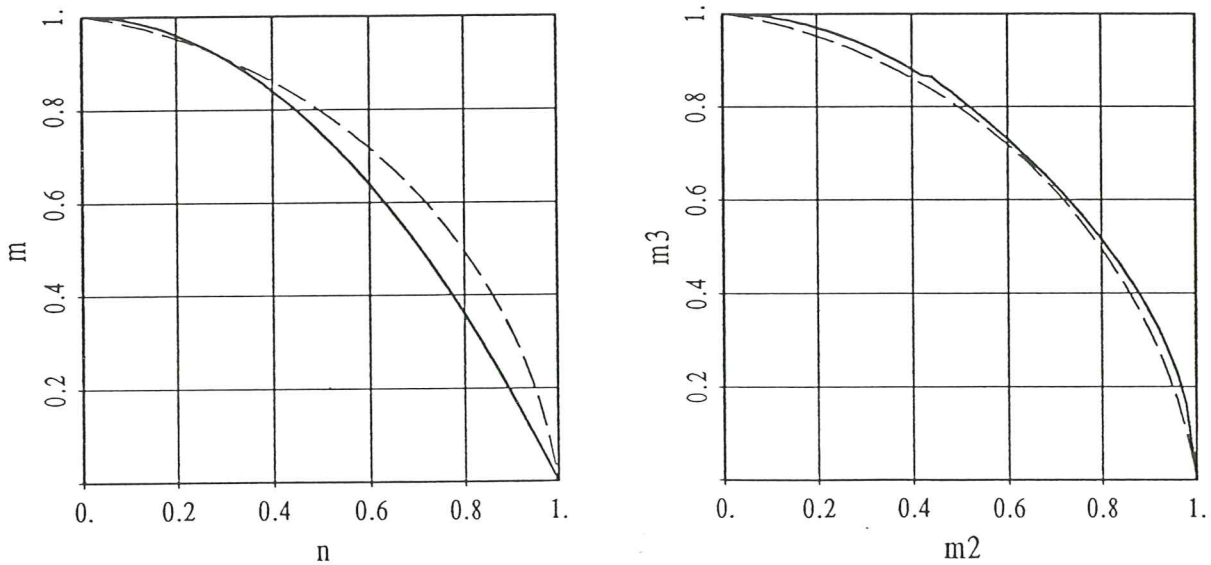


Figura 5 Relación entre las expresiones analíticas correctas (—) y las aproximaciones cuadráticas utilizadas (----)



De acuerdo a la expresión (3.53) la energía de distorsión se puede desacoplar en función de esfuerzos que producen tensiones axiales ( $N, M^2, M^3$ ) y que producen esfuerzos de corte ( $M_t, Q^2, Q^3$ ). La energía de corte debida a estos últimos puede aproximarse por

$$m_t^2 + (q^2)^2 + (q^3)^2 \pm \frac{1}{2\sqrt{3}}m_tq^2 \pm \frac{1}{2\sqrt{3}}m_tq^3 \quad (3.60)$$

Finalmente podría aceptarse como una aproximación el siguiente criterio de fluencia basado en la energía de distorsión

$$n^2 + (m^e)^2 \pm \frac{1}{2\sqrt{3}}nm^e + m_t^2 + (q^2)^2 + (q^3)^2 \pm \frac{1}{2\sqrt{3}}m_tq^2 \pm \frac{1}{2\sqrt{3}}m_tq^3 - 1 \leq 0 \quad (3.61)$$

donde  $m^e = [(m^2)^2 + (m^3)^2 \pm \frac{1}{2\sqrt{3}}m^2m^3]^{\frac{1}{2}}$

La función de fluencia definida de esta forma debe cotejarse con resultados obtenidos con aproximaciones tridimensionales. Además para secciones particulares resulta necesario validar las hipótesis sobre las que se apoya.

Aceptada la función de fluencia propuesta, no resulta difícil suponer un endurecimiento isotrópico, para lo cual debe definirse una medida de deformación plástica efectiva.

Para la integración temporal de la ecuación constitutiva se propone usar el método de Euler hacia atrás ("backward Euler"), dado que la superficie de fluencia resulta definida por la intersección de dieciseis superficies y que una aplicación directa del método de retorno radial no resulta sencilla.

### 3.7 FORMULACIÓN UTILIZADA

La formulación utilizada responde a la estándar en desplazamientos impuestos. Resulta conveniente una aproximación del tipo isoparamétrica; la geometría de la línea de centroides queda definida por

$$\begin{aligned} \varphi_0(S, t) &= \varphi_0^0(S) + \mathbf{u}(S, t) \\ &= \sum_{I=1}^{NN} N^I(S)(\varphi_0^{0I} + \mathbf{u}^I(t)) \end{aligned} \quad (3.62)$$

donde los  $N^I(S)$  son las funciones usuales (polinomios de Lagrange) de los elementos unidimensionales de clase  $C^0$ .

Para la parametrización de la terna se recurre al vector rotación  $\psi(S, t)$ , cuyas componentes se interpolan en el elemento en la misma forma que la línea de centroides

$$\psi(S, t) = \sum_{I=1}^{NN} N^I(S) \psi^I(t) \quad (3.63)$$

de manera que la terna  $\Lambda(S, t)$  se obtiene de

$$\Lambda(S, t) = \exp(\Psi(S, t)) \quad (3.64)$$

La actualización de la terna entre el paso de tiempo  $k$  y el  $k + 1$  se realiza mediante la expresión

$$\Lambda_{k+1}^I = \Lambda_k^I \exp(\Theta_k^I) \quad (3.65)$$

donde  $\theta_k^I$  es el rotación incremental entre el paso  $k$  y el paso  $k + 1$ . Conocida la nueva terna, para extraer de ella el vector rotación  $\psi_{k+1}^I$  se recurre al algoritmo de Spurrier (ver Apéndice de la Ref.[13]).

La discretización del principio de trabajos virtuales (3.47) se obtiene de reemplazar una aproximación discreta de las variaciones admisibles consistente con la aproximación isoparamétrica, esto es

$$\eta_0(S) = \sum_{I=1}^{NN} N^I(S) \eta^I \quad (3.66)$$

$$\theta(S) = \sum_{I=1}^{NN} N^I(S) \theta^I \quad (3.67)$$

en tal caso resulta

$$\begin{aligned} & \int_I \left\{ [N, M] \begin{bmatrix} \Lambda^T \frac{\partial}{\partial S} N^I & N^I(\Gamma + \mathbf{e}_1) \times \\ \mathbf{0} & \frac{\partial}{\partial S} N^I + N^I \kappa \times \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N^I \omega \times (\mathbf{I}_\rho \omega) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}^T \right\} dS - \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{q}}^I \\ \bar{\mathbf{M}}^I \end{bmatrix}^T \\ & + \sum_{J=1}^{NN} [\ddot{\varphi}_0^J, \dot{\omega}^J] \int_I \begin{bmatrix} N^I N^J A_\rho \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & N^I N^J \mathbf{I}_\rho \end{bmatrix} dS = 0 \end{aligned} \quad (3.68)$$

agrupando las medidas de tensión en  $\mathbf{R}^T = [N, M]$  y las aceleraciones en  $\mathbf{a}^J = [\ddot{\varphi}_0^J, \dot{\omega}^J]$ , definiendo la matriz de masa que relaciona los nodos  $I$  y  $J$

$$\mathbf{M}^{IJ} = \int_I \begin{bmatrix} N^I N^J A_\rho \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & N^I N^J \mathbf{I}_\rho \end{bmatrix} dS \quad (3.69)$$

y la matriz  $B^I$

$$B^I = \begin{bmatrix} \Lambda^T \frac{\partial}{\partial S} N^I & N^I (\Gamma + \mathbf{e}_1) \times \\ 0 & \frac{\partial}{\partial S} N^I + N^I \kappa \times \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

podemos escribir

$$\left\{ \int_I \{ \mathbf{R}^T B^I + [0, N^I \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{I}_\rho \boldsymbol{\omega})] \} dS - [\bar{\mathbf{q}}^I, \bar{\mathbf{M}}^I] + \sum_{J=1}^{NN} \mathbf{a}^{JT} \mathbf{M}^{IJ} \right\} = 0 \quad (3.71)$$

#### 4- ELEMENTOS DE LÁMINA DESARROLLADOS

A continuación se presentan las características de los elementos de lámina desarrollados e implementados en el programa de elementos finitos SIMPACT.

##### 4.1 Elemento isoparamétrico de cuatro nodos

###### 4.1.1 Geometría

La geometría del elemento está definida por funciones de forma bilineales, tanto para la posición de la superficie media como para la descripción del campo director.

$$\boldsymbol{\varphi}^{(0)} = \sum_{I=1}^4 N^I(\xi, \eta) \boldsymbol{\varphi}_I^{(0)} \quad (4.1)$$

$$\mathbf{t}^{(0)} = \sum_{I=1}^4 N^I(\xi, \eta) \mathbf{t}_I^{(0)} \quad (4.2)$$

donde  $\boldsymbol{\varphi}_I^{(0)}$  y  $\mathbf{t}_I^{(0)}$  son respectivamente la posición de la superficie media y el director en los nodos del cuadrilátero, y las  $N^I(\xi, \eta)$  son las funciones de forma que para cada nudo (de coordenadas  $(\xi^I, \eta^I)$ ) se escriben<sup>10</sup>

$$N^I(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi \xi^I)(1 + \eta \eta^I) \quad (4.3)$$

Observar que no se normaliza el campo director, por lo que sólo en los nodos se satisface la condición de que éste tenga módulo unitario. Los desplazamientos de

la superficie media y los incrementos en el director se interpolan usando las mismas funciones bilineales (en la Fig.3 se muestran los grados de libertad utilizados)

$$\mathbf{u} = \sum_{I=1}^4 N^I(\xi, \eta) \mathbf{u}^I \quad (4.4)$$

$$\Delta \mathbf{t} = \sum_{I=1}^4 N^I(\xi, \eta) \Delta \mathbf{t}^I \quad (4.5)$$

La geometría actualizada de la superficie media resulta

$$\varphi^{k+1} = \sum_{I=1}^4 N^I(\xi, \eta) (\varphi_I^{(0)} + \mathbf{u}_I^{k+1}) \quad (4.6)$$

Similarmente el campo director se interpola bilinealmente

$$\mathbf{t}^{k+1} = \sum_{I=1}^4 N^I(\xi, \eta) \mathbf{t}_I^{k+1} \quad (4.7)$$

para la actualización del campo director en los nodos se recurre a la expresión (2.46) como se discute a continuación.

Uno de los problemas a resolver es la determinación de  $\delta \mathbf{t}$  y de sus derivadas respecto a las coordenadas naturales. En cada punto debe satisfacerse que  $\mathbf{t} \cdot \Delta \mathbf{t} = 0$ . Esta condición puede ser relajada y es suficiente con satisfacerla en los nodos, lo que permite utilizar (4.5) y una expresión idéntica para la variación  $\delta \mathbf{t}$

$$\delta \mathbf{t} = \sum_{I=1}^4 N^I \delta \mathbf{t}^I \quad (4.8)$$

que también puede expresarse como

$$\delta \mathbf{t} = \delta \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{t} \quad (4.9)$$

donde  $\delta \boldsymbol{\theta}$  queda definido unívocamente por (4.9) y por la condición adicional

$$\delta \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{t} = 0 \quad (4.10)$$



por lo que  $\delta t$ ,  $\delta \theta$ ,  $t$  son mutuamente ortogonales. Siendo  $t$  un campo vectorial de longitud unitaria, en cada punto la variación del director queda restringida al plano normal al mismo, por lo que alcanza con dos variables para definirla, estas variables pueden asociarse con el plano 1-2 mediante la transformación.<sup>[2,3]</sup>

$$\begin{matrix} \delta t & = & \bar{\Lambda} & \delta T \\ (3 \times 1) & & (3 \times 2) & (2 \times 1) \end{matrix} \quad (4.11)$$

donde  $\bar{\Lambda}$  son las dos primeras columnas de la matriz de transformación del sistema de coordenadas local al sistema de coordenadas global. Esta matriz de transformación ha de calcularse en cada instante ya que es función de la dirección del director  $t$  en la posición deformada.

La geometría actualizada en función de esta descripción de los incrementos en el campo director se obtiene en el instante  $k + 1$  mediante la exponenciación de un vector según se indica en la expresión (2.46). Advirtasé que  $\Delta t^k$  mide la variación desde el incremento  $k$  al  $k + 1$ . La posición de un punto cualquiera fuera de la superficie media queda definida por su distancia  $\zeta$  a la misma ( $-\frac{h}{2} \leq \zeta \leq \frac{h}{2}$ ) medida sobre el director (no necesariamente normal a la superficie media, aún en la geometría inicial), siendo  $h$  el espesor de lámina

$$\mathbf{X}(\zeta, \xi, \eta) = \varphi(\xi, \eta) + \zeta t(\xi, \eta) \quad (4.12)$$

#### 4.1.2 Sistema local de coordenadas

En principio cualquier sistema de coordenadas locales es válido, sin embargo para una correcta visualización de los resultados es necesario que la dirección de acción de los esfuerzos sea fácilmente identificable e independiente de las conectividades del elemento, y que en lo posible los sistemas de coordenadas elementales y nodales sean lo más parecidos posible, para que haya correspondencia entre los valores gaussianos y los nodales obtenidos mediante suavizado.

Se ha optado por el siguiente sistema: definir el eje  $x_1$  local como la intersección del plano tangente a la lámina con el plano  $\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2$  global, y la orientación del mismo se fija obligando al eje  $x_3$  local a tener proyección positiva sobre el eje  $\mathbf{X}_3$  global (Figura 6). En el caso particular de que el plano del tangente coincida con el eje  $\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2$  global, las direcciones locales y globales se harán coincidir.

$$\mathbf{g}_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = \sum_{I=1}^4 N_{I\xi}^I \varphi_I^{(0)} \quad \mathbf{g}_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = \sum_{I=1}^4 N_{I\eta}^I \varphi_I^{(0)} \quad (4.13.a)$$

$$\mathbf{g}_3 = \mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2 \quad x_3 = \frac{\mathbf{g}_3}{\|\mathbf{g}_3\|} \quad (4.13.b)$$

$$\mathbf{x}_1 = (-(x_3)_2, -(x_3)_1, 0) \quad \textit{normalizado} \quad (4.13.c)$$

$$\mathbf{x}_2 = (-(x_3)_1(x_3)_3, -(x_3)_2(x_3)_3, ((x_3)_1^2 + (x_3)_2^2)) \quad \textit{normalizado} \quad (4.13.d)$$

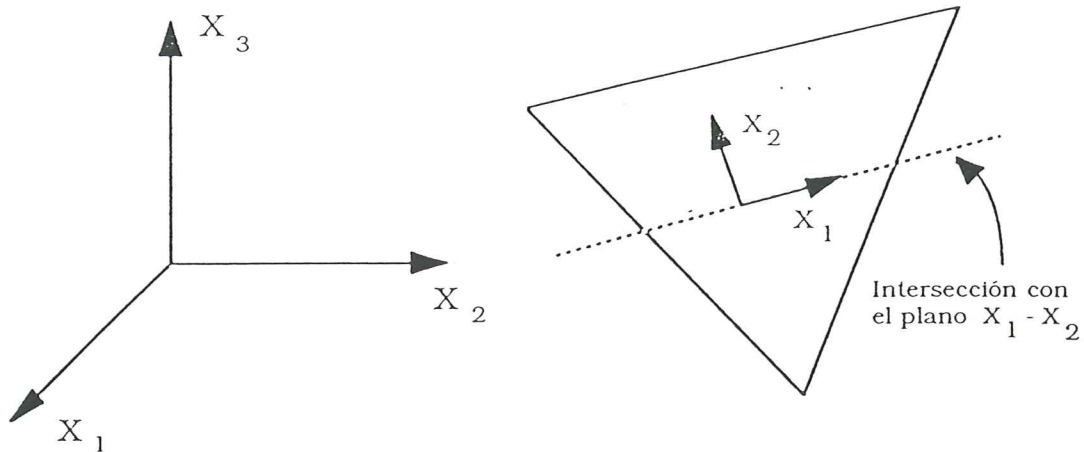


Figura 6 Sistema local de coordenadas cartesianas en triángulos

la matriz jacobiana  $\mathbf{J}$  resulta

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \eta} & \frac{\partial x_2}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{x}_1 & \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{g}_2 \cdot \mathbf{x}_1 & \mathbf{g}_2 \cdot \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

#### 4.1.4 Comportamiento membranar y flexional

El comportamiento flexional y membranar está formulado en forma estandar en base a los campos de desplazamientos impuestos (ver subapartados 2.6.1 y 2.6.2, en tanto que la formulación del corte transversal ha sido detallada en el subapartado 2.6.3.2. Las deformaciones y esfuerzos generalizados se evalúan en el sistema de coordenadas local definido en el subapartado anterior. Esta formulación membranar presenta alguna desventaja respecto a la formulación mixta de [3] (especialmente con mallas gruesas) como se indica en la Ref.[7].

Debido a la simplificación introducida en (4.5) y (4.7) las derivadas del campo director se expresan directamente por

$$\mathbf{t}_{I\alpha} = \sum_{I=1}^4 N_{I\alpha}^I \mathbf{t}^I \quad (4.15)$$

### 4.1.5 Matriz de masa

La matriz de masa surge de la discretización de la derivada temporal del momentun. Usando para las aceleraciones dentro del elemento, aproximaciones consistentes con (4.4) y (4.5), y teniendo en cuenta que  $\dot{w}^I = \bar{\Lambda}^I \dot{\omega}^I$  y  $\dot{t}^I = \bar{\Lambda}^I \dot{\theta}^I$  resulta

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{A}} [\bar{\rho} \ddot{\varphi} \cdot \delta \varphi + I_{\rho} \dot{w} \cdot \delta t] dA = \\ & \int_{\mathcal{A}} \left[ \bar{\rho} \sum_{I=1}^4 \sum_{J=1}^4 N^I N^J \mathbf{1}_3 \ddot{\varphi}^I \cdot \delta \varphi^J + \bar{I}_{\rho} \sum_{I=1}^4 \sum_{J=1}^4 N^I N^J \mathbf{1}_2 \dot{\omega}^I \cdot \delta \theta^J \right] dA = \quad (4.16) \\ & M_u^{IJ} \ddot{\varphi}^I \mathbf{1}_3 \delta \varphi^J + M_t^{IJ} \dot{\omega}^I \mathbf{1}_2 \delta \theta^J \end{aligned}$$

Debido a la naturaleza del método de avance en el tiempo se recurre a una aproximación diagonal de la matriz de masa para lo cual se suman los elementos de cada fila

$$M_u^{IJ} = \int_{\mathcal{A}} \bar{\rho} N^I dA \delta^{IJ} \quad (4.17.a)$$

$$M_t^{IJ} = \int_{\mathcal{A}} \bar{I}_{\rho} N^I dA \delta^{IJ} \quad (4.17.b)$$

## 4.2 Triángulo isoparamétrico de seis nodos

### 4.2.1 Geometría

La superficie media de la lámina y el campo director quedan definidos inicialmente por

$$\varphi^{(0)} = \sum_{I=1}^6 N^I(\xi, \eta) \varphi^{(0)I} \quad (4.18)$$

$$t^0 = \sum_{I=1}^6 N^I t_I^0 \quad (4.19)$$

donde  $\varphi_I^0$  y  $t_I^0$  son las coordenadas y directores en los nudos, las  $N^I$  son las funciones de forma cuadráticas y  $\varphi$  es la posición de la superficie media. Los desplazamientos e incrementos en el campo director se interpolan en la misma forma

$$\mathbf{u} = \sum_{I=1}^6 N^I \mathbf{u}^I \quad (4.20)$$

$$\Delta t = \sum_{I=1}^6 N^I(\xi, \eta) \Delta t^I \quad (4.21)$$

#### 4.2.2 Comportamiento membranal

Se han desarrollado tres variantes de este elemento. El primero corresponde al usual de desplazamientos impuestos (apartado 2.6.1.1) y se lo ha denominado T6ID (Triángulo de 6 nodos Isoparamétrico en Desplazamientos). Por otro lado es sabido que los elementos de geometría inicial curva formulados en desplazamientos presentan problemas de bloqueo membranal en mallas gruesas. Con el objeto de aliviar este problema y mejorar el comportamiento del elemento se han intentado otras variantes, las cuales se basan en formulaciones de deformaciones impuestas (sección 2.6.1.2). En lo referente a estas últimas, es necesario definir qué deformaciones (puntos de muestreo) han de utilizarse para determinar los coeficientes  $\alpha_i$  (ecuación 2.57). Se han intentado dos variantes en la elección de los puntos de muestreo

(i) T6IA1, evaluar las tres componentes en los nudos vértices del triángulo, en tal caso puede escribirse directamente

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}' &= \begin{bmatrix} \epsilon_{\xi\xi} \\ \epsilon_{\eta\eta} \\ 2\epsilon_{\xi\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \zeta & \xi & \eta & & & \\ & & & \zeta & \xi & \eta \\ & & & & & & \zeta & \xi & \eta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \epsilon_{\xi\xi}^1 \\ \epsilon_{\xi\xi}^2 \\ \epsilon_{\xi\xi}^3 \\ \epsilon_{\eta\eta}^1 \\ \epsilon_{\eta\eta}^2 \\ \epsilon_{\eta\eta}^3 \\ 2\epsilon_{\xi\eta}^1 \\ 2\epsilon_{\xi\eta}^2 \\ 2\epsilon_{\xi\eta}^3 \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{P}(\xi, \eta) \hat{\epsilon} \end{aligned} \quad (4.22)$$

(ii) T6IA2 evaluar la deformación en la dirección tangente al lado en los mismos puntos que se evalúa la deformación de corte transversal (6 medidas de deformación), más las tres componentes evaluadas en el centro del elemento. Utilizando la expresión (2.56) podemos escribir

$$\hat{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 1 \\ \varepsilon_t^1 \\ \varepsilon_t^2 \\ \varepsilon_t^3 \\ \varepsilon_t^4 \\ \varepsilon_t^5 \\ \varepsilon_t^6 \\ \varepsilon_{\xi\xi}^c \\ \varepsilon_{\eta\eta}^c \\ 2\varepsilon_{\xi\eta}^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & A & & & & & & & & \\ 1 & B & & & & & & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{B}{2} & \frac{A}{2} & \frac{1}{2} & \frac{B}{2} & \frac{A}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-B}{2} & \frac{-A}{2} & \\ \frac{1}{2} & \frac{A}{2} & \frac{B}{2} & \frac{1}{2} & \frac{A}{2} & \frac{B}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-A}{2} & \frac{-B}{2} & \\ & & & 1 & 0 & B & & & & \\ & & & 1 & 0 & A & & & & \\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & & & & & & & \\ & & & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & & & & \\ & & & & & & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_9 \end{bmatrix} = \mathbf{Q} \boldsymbol{\alpha} \quad (4.23)$$

con  $A = (1 - 1/\sqrt{3})/2$  y  $B = (1 + 1/\sqrt{3})/2$ . De aquí podemos eliminar los coeficientes  $\alpha_i$  y expresar las deformaciones en términos de las deformaciones en los puntos de muestreo.

$$\bar{\varepsilon}' = \mathbf{A} \mathbf{Q}^{-1} \boldsymbol{\beta} = \mathbf{P}(\xi, \eta) \hat{\varepsilon} \quad (4.24)$$

siendo por ejemplo para el caso (i)

$$\hat{\varepsilon} = \begin{bmatrix} (a_{11}^1 - a_{11}^{1(0)})/2 \\ (a_{11}^2 - a_{11}^{2(0)})/2 \\ (a_{11}^3 - a_{11}^{3(0)})/2 \\ (a_{22}^1 - a_{22}^{1(0)})/2 \\ (a_{22}^2 - a_{22}^{2(0)})/2 \\ (a_{22}^3 - a_{22}^{3(0)})/2 \\ (a_{12}^1 - a_{12}^{1(0)}) \\ (a_{12}^2 - a_{12}^{2(0)}) \\ (a_{12}^3 - a_{12}^{3(0)}) \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

entonces  $\delta(\hat{\varepsilon})$  resulta

$$\delta(\hat{\varepsilon}) = \sum_{I=1}^6 \begin{bmatrix} \varphi_{i_1}^1 N_{i_1}^{I1} \\ \varphi_{i_1}^2 N_{i_1}^{I2} \\ \varphi_{i_1}^3 N_{i_1}^{I3} \\ \varphi_{i_2}^1 N_{i_2}^{I1} \\ \varphi_{i_2}^2 N_{i_2}^{I2} \\ \varphi_{i_2}^3 N_{i_2}^{I3} \\ \varphi_{i_1}^1 N_{i_2}^{I1} + \varphi_{i_2}^1 N_{i_1}^{I1} \\ \varphi_{i_1}^2 N_{i_2}^{I2} + \varphi_{i_2}^2 N_{i_1}^{I2} \\ \varphi_{i_1}^3 N_{i_2}^{I3} + \varphi_{i_2}^3 N_{i_1}^{I3} \end{bmatrix} \delta u^I = \sum_{I=1}^6 \bar{\mathbf{B}}^I \delta u^I = \bar{\mathbf{B}} \delta u \quad (4.26)$$



### 4.2.3 Comportamiento flexional y corte transversal

En cuanto al comportamiento flexional y de corte corresponde al de los subpartados (2.6.2) y (2.6.3.1) respectivamente.

### 4.2.4 Matriz de masa

En este caso, la aproximación diagonal de la matriz de masa no puede realizarse con las expresiones (4.17) ya que en tal caso los nudos vértices resultan sin masa asociada. Para los elementos cuadráticos suele usarse la siguiente aproximación [10]

$$\tilde{M}^{II} = \int_{\mathcal{A}} \bar{\rho} (N^I)^2 dA \quad (4.27.a)$$

$$M^{II} = \int_{\mathcal{A}} \bar{\rho} dA \frac{\tilde{M}^{II}}{\sum_{J=1}^{NN} \tilde{M}^{II}} \quad (4.27.b)$$

Otra posibilidad resulta de dividir el triángulo cuadrático en 4 triángulos lineales sólo a los efectos de calcular la matriz de masa (resulta conveniente además usar la misma aproximación para las fuerzas de superficie) de tal manera que cada subtriángulo (J) tendrá una matriz de masa

$${}^J M_u^{II} = \int_{\mathcal{A}_J} \bar{\rho} \xi^I dA \quad {}^J M_t^{II} = \int_{\mathcal{A}_J} \bar{I}_\rho \xi^I dA \quad (4.28)$$

donde las  $\xi^I$  son las coordenadas de área de cada subtriángulo

## 4.3 Triángulo lineal no conforme

### 4.3.1 Geometría

La posición de la superficie media está definida por las coordenadas espaciales de los tres vértices del triángulo, por lo que el elemento resulta plano y su comportamiento membranal idéntico al triángulo de deformación constante.

$$\varphi^{(0)} = \sum_{I=1}^3 \xi^I \varphi^{(0)I} \quad (4.29)$$

$${}^T \varphi = \sum_{I=1}^3 \xi^I {}^T \varphi^I = \sum_{I=1}^3 \xi^I (\varphi^{(0)I} + {}^T \mathbf{u}^I) \quad (4.30)$$



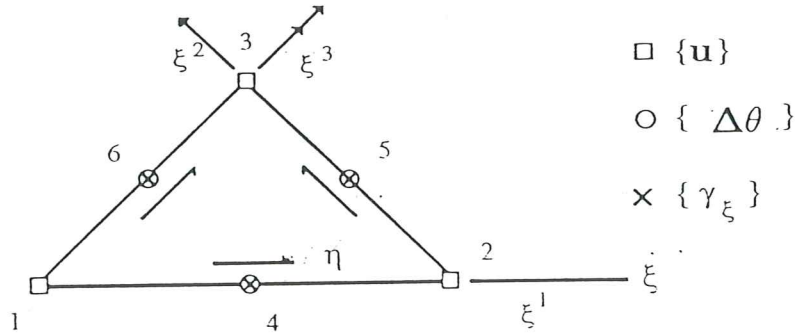


Figura 7 Triángulo de tres nodos lineal no conforme

El campo director se interpola linealmente a partir de los directores a la mitad de cada lado (ver Fig. 6)

$$\mathbf{t} = \sum_{K=4}^6 \bar{N}^K \mathbf{t}^I \quad (4.31)$$

siendo las funciones de interpolación

$$\begin{aligned} \bar{N}^4 &= 1 - 2\xi^3 \\ \bar{N}^5 &= 1 - 2\xi^1 \\ \bar{N}^6 &= 1 - 2\xi^2 \end{aligned} \quad (4.32)$$

Definido el campo director de esta forma, es fácil ver que no satisface continuidad a lo largo de todo el contorno entre elementos sino sólo en la mitad de cada lado por lo que el elemento es no conforme.

La variación del campo director es simplemente

$$\delta \mathbf{t} = \sum_{K=4}^6 \bar{N}^K \delta \mathbf{t}^K = \sum_{K=4}^6 \bar{N}^K \bar{\Lambda}^K \delta \mathbf{T}^K \quad (4.33)$$

Las derivadas de esta última expresión son sencillamente

$$\delta \mathbf{t}_{,\alpha} = \sum_{K=4}^6 \bar{N}_{,\alpha}^K \bar{\Lambda}^K \delta \mathbf{T}^K \quad (4.34)$$

### 4.3.2 Comportamiento flexional y tratamiento del corte

Dada la linealidad de la interpolación del campo director, el elemento resulta de curvatura constante. Las contribuciones de la parte flexional a las fuerzas residuales y a la matriz de rigidez se obtienen reemplazando las expresiones (4.33-4.34) en las del apartado 2.6.2. Siendo las curvaturas (y los esfuerzos) constantes es suficiente utilizar un único punto de integración para la correcta evaluación de las fuerzas residuales y la matriz de rigidez, lo mismo que para las contribuciones membranales.

En cuanto al corte transversal, siguiendo los razonamientos del subapartado 2.6.3.1 pero exigiendo ahora que las deformaciones de corte transversal tangentes al lado sean constantes, es posible expresar las deformaciones de corte transversal en la forma:

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} 1-\eta & \eta & \eta \\ \xi & -\xi & 1-\xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma^4 \\ \gamma^5 \\ \gamma^6 \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \mathbf{A} \bar{\boldsymbol{\gamma}} \quad (4.35)$$

donde

$$\bar{\boldsymbol{\gamma}} = \begin{bmatrix} \gamma^4 \\ \gamma^5 \\ \gamma^6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_{i\xi} \cdot t^4 \\ (\varphi_{i\xi} - \varphi_{i\eta}) \cdot t^5 \\ \varphi_{i\eta} \cdot t^6 \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

La contribución a la ecuación de trabajos virtuales resulta

$$\mathbf{F}_s = \int_{\mathcal{A}} \mathbf{B}_s^T \mathbf{q} \, dA = \bar{\mathbf{B}}_s^T \int_{\mathcal{A}} \mathbf{A}^T \mathbf{J}^{-T} \mathbf{q} \, dA = \bar{\mathbf{B}}_s^T \bar{\mathbf{q}} \quad (4.37)$$

donde

$$\bar{\mathbf{B}}_s \delta \mathbf{U} = \begin{bmatrix} N_{i\xi}^I t^4 \delta u^I & , & \varphi_{i\xi} \bar{\mathbf{A}}^4 \delta \mathbf{T}^4 \\ (N_{i\xi}^I - N_{i\eta}^I) t^5 \delta u^I & , & (\varphi_{i\xi} - \varphi_{i\eta}) \bar{\mathbf{A}}^5 \delta \mathbf{T}^5 \\ N_{i\eta}^I t^6 \delta u^I & , & \varphi_{i\eta} \bar{\mathbf{A}}^6 \delta \mathbf{T}^6 \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

$$\bar{\mathbf{q}} = \int_{\mathcal{A}} \bar{\mathbf{A}}^T \mathbf{J}^{-T} \mathbf{q} \, dA \quad (4.39)$$

En el caso elástico, la última integral puede integrarse en forma explícita si se reemplaza

$$\mathbf{q} = \mathbf{D}_s \mathbf{J}^{-1} \mathbf{A} \bar{\boldsymbol{\gamma}} \quad (4.40)$$

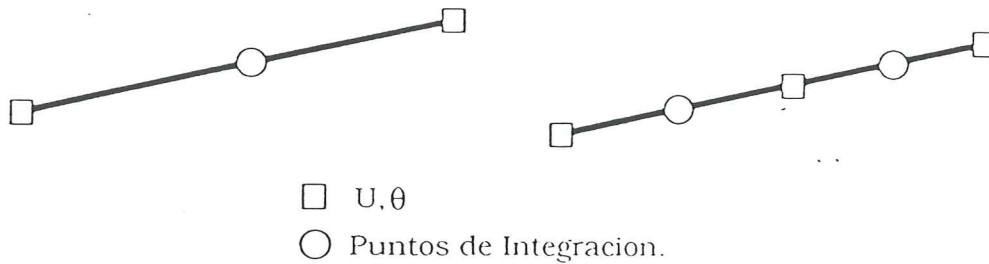


Figura 8 Elementos de viga implementados

### 4.3.3 Matriz de masa

En esta caso si es posible obtener la matriz de masa diagonalizada con expresiones similares a las (4.17)

$$M_u^{II} = \int A \bar{\rho} \xi^I dA \quad (4.41.a)$$

$$M_t^{II} = \int_A \bar{I}_\rho \bar{N}^I dA \quad (4.41.b)$$

## 5- ELEMENTO DE VIGA DESARROLLADO

### 5.1 Generalidades

Los elementos de viga implementados en el código numérico son del tipo isoparamétrico. La geometría de la línea de centroides y la terna local se interpolan y actualizan usando las expresiones (3.62)-(3.65). Se han considerado elementos de 2 y 3 nodos según se muestra en la Fig.8. La geometría inicial puede ser curva y la tangente a la línea de centroides puede no coincidir con el primer vector de la terna local. La formulación utilizada es la usual en desplazamientos impuestos (ver apartado 3.7) y para evitar que el elemento bloquee por corte transversal o por membrana, se utiliza integración reducida uniforme en el cálculo de las fuerzas residuales (1 punto de integración para el elemento de 2 nodos y 2 para el de 3 nodos). Es importante señalar que a diferencia del comportamiento de los elementos de lámina, los elementos de viga no presentan modos espúreos de deformación sin energía asociada cuando se utiliza integración incompleta.

## 5.2 Evaluación de las curvaturas

Recordemos que las curvaturas de la viga se obtenían al derivar la terna local respecto a la longitud de arco  $S$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(S) &= \mathbf{\Lambda}^T(S) \frac{d\mathbf{\Lambda}(s)}{dS} \\ &= \exp(-\bar{\Psi}(S)) \frac{d}{dS} \exp(\bar{\Psi}(S)) \end{aligned} \quad (5.1)$$

Para encontrar una expresión sencilla de la derivada de  $\exp(\bar{\Psi}(S))$  conviene recordar que el mapeamiento exponencial puede escribirse en forma cerrada en función del pseudo vector rotación  $\bar{\psi}$ .

$$\exp(\bar{\Psi}) = \mathbf{1}_3 + \frac{2}{1 + \|\bar{\psi}\|^2} (\bar{\Psi} + \bar{\Psi}^2) \quad (5.2)$$

donde el pseudo vector rotación se relaciona con el vector rotación mediante la expresión

$$\bar{\psi} = \frac{\operatorname{tg}(\frac{1}{2}\|\psi\|)}{\|\psi\|} \psi \quad (5.3)$$

Derivando la expresión (5.2) se obtiene

$$\frac{d}{dS} \exp(\bar{\Psi}(S)) = \frac{2}{1 + \|\bar{\psi}\|^2} \left[ \bar{\Psi}' + \bar{\Psi}' \bar{\Psi} + \bar{\Psi} \bar{\Psi}' - \frac{2\bar{\psi} \cdot \bar{\psi}' (\bar{\Psi} + \bar{\Psi}^2)}{1 + \|\bar{\psi}\|^2} \right] \quad (5.4)$$

premultiplicando por  $\exp(-\bar{\Psi})$  y operando se puede demostrar que el tensor de curvaturas resulta

$$\mathbf{K}(S) = \frac{2}{1 + \|\bar{\psi}\|^2} \left[ \bar{\Psi}' + \bar{\Psi} \bar{\Psi}' - \bar{\Psi}' \bar{\Psi} \right] \quad (5.5)$$

que tiene por vector axial asociado a

$$\mathbf{k}(S) = \frac{2}{1 + \|\bar{\psi}\|^2} \left[ \bar{\psi}' + (\bar{\psi} \times \bar{\psi}') \right] \quad (5.6)$$

La derivada del pseudo vector rotación se obtiene simplemente derivando la expresión (5.3)

$$\bar{\psi}' = \frac{tg(\frac{1}{2}\|\psi\|)}{\|\psi\|} \left[ \psi' - \left( 1 - \frac{\|\psi\|}{\sin(\|\psi\|)} \right) \left( \frac{\psi \cdot \psi'}{\|\psi\|} \right) \frac{\psi}{\|\psi\|} \right] \quad (5.7)$$

Notar que para valores pequeños de  $\|\psi\|$  resulta  $\kappa = \psi'$  y que para valores de  $\|\psi\|$  muy cercanos a  $\pi$  no es posible evaluar las expresiones (5.3) y (5.7). Una posibilidad para evitar este tipo de singularidades, es calcular las curvaturas rotando previamente los sistemas locales de forma que las rotaciones sean siempre moderadas y no alcancen valores cercanos a  $\pi$ . Esto último puede lograrse premultiplicando los ternas locales de los nudos  $\Lambda^I$  por la del primer nudo del elemento  $\Lambda^1$  o por la del nudo central en el caso de elementos de 3 nudos. Aún en este caso es necesario notar que no es admisible una rotación relativa entre nudos de un mismo elemento mayor a  $\pi$ ; esto es debido a que el algoritmo que extrae  $\psi$  de la terna  $\Lambda$  obtiene siempre vectores con módulo menor que  $\pi$ .

### 5.3 Matriz de masa

La matriz de masa resulta de realizar la integral (3.69), que luego es necesario diagonalizar. Notar que en los elementos cuadráticos es posible realizar suma sobre la fila a diferencia de los elemento bidimensionales. En consecuencia la matriz de masa resulta

$$\begin{aligned} M_u^{II} &= \int_I N^I(S) A_\rho \mathbf{1}_3 dS \\ M_t^{II} &= \int_I N^I(S) \mathbf{I}_\rho dS \end{aligned} \quad (5.8)$$

## 6- UNIÓN DE ELEMENTOS

### 6.1 Generalidades

En el análisis de estructuras complejas es muchas veces necesario compatibilizar desplazamientos (grados de libertad en general) a nivel nodal, ya sea porque provienen de diferentes tipos de elementos o porque son diferentes los sistemas locales en que se miden las diferentes contribuciones. En otros casos los desplazamientos nodales son los mismos pero las aproximaciones a lo largo del contorno interelemento son diferentes (por ej. unión de elementos lineales y cuadráticos). Existe un buen número de variantes que se pueden presentar; aquí nos concentraremos en las siguientes

- (i) Uniones excéntricas entre elementos de lámina y viga (la línea de centroides de la viga no coincide con la superficie media de la lámina)
- (ii) Quiebres importantes en láminas o ramificaciones (arista compartida por tres elementos de lámina)



- (iii) Unión de láminas con sólidos (unión de un nudo de una lámina con una arista de un elemento de sólido)

En general este tipo de uniones conducen a una dependencia de los grados de libertad de un nodo con los grados de libertad de otros nodos. Más generalmente, podemos decir que darán lugar a relaciones (en general no lineales) del tipo

$$u^S = f(u_1^M, u_2^M, \dots) \quad (6.1)$$

donde  $u^S$  es el grado de libertad dependiente (esclavo) y los  $u_i^M$  son los grados de libertad independientes (maestros) En base a los campos de desplazamientos admisibles de los grados de libertad independientes es posible expresar

$$\delta u^S = \sum a_i \delta u_i^M \quad (6.2)$$

los coeficientes  $a_i$  podrán ser constantes o dependientes de la configuración actual de acuerdo con la relación (6.1).

Teniendo en cuenta que se trabaja con una matriz de masa diagonal, las modificaciones que deben realizarse sobre los elementos de la matriz de masa, fuerzas nodales y fuerzas residuales de los grados de libertad maestros son respectivamente

$$\begin{aligned} \tilde{m}_i^M &= m_i^M + a_i^2 m^S \\ \tilde{f}_i^M &= f_i^M + a_i f^S \\ \tilde{g}_i^M &= g_i^M + a_i g^S \end{aligned} \quad (6.3)$$

donde con una tilde indicamos los valores modificados que entran en el algoritmo de integración en el tiempo. Conocidos los desplazamientos (configuración espacial y ternas locales), velocidades y aceleraciones de los grados de libertad independientes, los desplazamientos (configuración espacial y terna local), velocidades y aceleraciones de los grados de libertad independientes se calculan mediante (6.1) más

$$\begin{aligned} \dot{u}^S &= \sum a_i \dot{u}_i^M \\ \ddot{u}^S &= \sum a_i \ddot{u}_i^M \end{aligned} \quad (6.4)$$

Veamos en detalle como son las relaciones (6.1) y (6.2) en función del tipo de unión a considerar.

## 6.2 Unión rígida entre dos nudos

Llamaremos unión rígida entre dos nudos cuando la posición espacial y la terna local



asociada de uno de ellos (nudo esclavo) depende de la posición espacial y terna local del otro nodo (maestro) según las expresiones

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^S &= \mathbf{x}^M + \mathbf{\Lambda}^M \hat{\mathbf{d}} \\ \mathbf{\Lambda}^S &= \mathbf{\Lambda}^M \hat{\mathbf{\Lambda}} \end{aligned} \quad (6.5)$$

con (un subíndice 0 indica aquí la configuración de referencia)

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{d}} &= (\mathbf{\Lambda}_0^M)^T (\mathbf{x}_0^S - \mathbf{x}_0^M) \\ \hat{\mathbf{\Lambda}} &= (\mathbf{\Lambda}_0^M)^T \mathbf{\Lambda}_0^S \end{aligned} \quad (6.6)$$

Notar que  $\hat{\mathbf{d}}$  es la posición del nudo esclavo respecto al nudo maestro expresado en componentes materiales del nudo maestro y  $\hat{\mathbf{\Lambda}}$  son las componentes de la terna inicial del nudo esclavo expresada en el sistema del nudo maestro. Como suponemos que ambos nudos están rigidamente unidos  $\hat{\mathbf{d}}$  y  $\hat{\mathbf{\Lambda}}$  son independientes del tiempo.

Las variaciones admisibles resultan (trabajando siempre con componentes materiales de los giros)

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{x}^S &= \delta \mathbf{u}^S = \delta \mathbf{u}^M - \mathbf{\Lambda}^M (\hat{\mathbf{d}} \times \delta \theta^M) \\ \delta \theta^S &= \hat{\mathbf{\Lambda}}^T \delta \theta^M \end{aligned} \quad (6.7)$$

Notar que los coeficientes que relacionan  $\delta \mathbf{u}^S$  con  $\delta \theta^M$  son dependientes de la configuración ( $\mathbf{\Lambda}^M$ ) por lo que la matriz de masa (y el vector de fuerzas nodales si existieran fuerzas sobre los grados de libertad esclavos) asociada a los nudos independientes debe recalcularse en cada paso de tiempo.

Esta unión rígida entre nudos ha sido pensada para resolver el problema (i) de unión excéntrica entre viga y lámina, sin embargo también es capaz de resolver el problema (ii) que tiene por restricciones

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^S &= \mathbf{x}^M \\ \mathbf{\Lambda}^S &= \mathbf{\Lambda}^M \hat{\mathbf{\Lambda}} \end{aligned} \quad (6.8)$$

que es un caso particular de (6.5) cuando la posición de los nudos coincide y que conduce a una relación incremental independiente de la configuración

$$\delta \mathbf{x}^S = \delta \mathbf{u}^M \quad (6.9)$$

$$\delta \theta^S = \hat{\mathbf{\Lambda}}^T \delta \theta^M$$

En general debe elegirse como nudo maestro aquel que tenga el mayor número de grados de libertad (el nudo de la viga en el primer caso) o establecer (liberar) como grado de libertad del problema en estudio a la rotación alrededor de la normal en el nudo de la lámina (ii).

### 6.3 Unión de un nudo a una arista

En este caso exigimos que un nudo esclavo  $\mathbf{x}^S$  se mantenga sobre una línea definida por otros dos nudos maestros  $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2$  de forma tal que las distancias del nudo esclavo a los nudos maestros se mantengan proporcionales y que la dirección  $\mathbf{t}^3$  de la terna local del nudo esclavo se mantenga paralela a la arista, esto es

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^S &= \alpha_1 \mathbf{x}^1 + \alpha_2 \mathbf{x}^2 \\ \alpha_1 &= \frac{(\mathbf{x}_0^S - \mathbf{x}_0^1) \cdot (\mathbf{x}_0^2 - \mathbf{x}_0^1)}{\|\mathbf{x}_0^2 - \mathbf{x}_0^1\|^2} & \alpha_2 &= 1 - \alpha_1 \\ \mathbf{t}^3 &= \frac{\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1}{\|\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1\|} \end{aligned} \quad (6.10)$$

Las relaciones que ligan las variaciones admisibles de los grados de libertad son

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{x}^S &= \alpha_1 \delta \mathbf{x}^1 + \alpha_2 \delta \mathbf{x}^2 \\ \delta \mathbf{T}^S &= \frac{1}{\|\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1\|} (\bar{\mathbf{\Lambda}}^S)^T [\delta \mathbf{x}^2 - \delta \mathbf{x}^1] \end{aligned} \quad (6.11)$$

donde  $\bar{\mathbf{\Lambda}}^S$  son las dos primeras columnas de la terna local (no hay restricción al giro alrededor de  $\mathbf{t}^3$ ). Notar que en este caso la relación que liga  $\delta \mathbf{T}^S$  con los  $\delta \mathbf{x}^i$  es dependiente de la configuración.

Este modelo de restricción permite compatibilizar los desplazamientos de una arista de un sólido con los de un nudo de una lámina (problema (iii)) y es adecuado como transición entre elementos estructurales discretizados con elementos de lámina y aquellos discretizados con elementos de sólido.

Los modelos aquí presentados son adecuados para grandes desplazamientos y rotaciones, no llevan incluidos ningún tipo de aproximación implícita o explícita.

## 7- RESULTADOS NUMÉRICOS

En este apartado se presentan algunos resultados obtenidos con los elementos finitos descritos en los apartados anteriores.

### 7.1 Estructuras de láminas

#### 7.1.1 Domo rebajado bajo presión externa

Este ejemplo ha sido muy usado en la literatura para comparar diferentes elementos finitos y formulaciones elastoplásticas en régimen dinámico. Debido a que es un problema axilsimétrico, la forma más sencilla de analizarlo es con elementos de láminas o sólidos de revolución, como fue hecho originalmente<sup>[16]</sup>, aquí sin embargo, lo haremos con los diferentes elementos de lámina propuestos en el apartado 3. En la Fig.9 se muestra la geometría del domo y las características del material constitutivo. Se han usado mallas relativamente gruesas en el análisis con el objeto de observar el comportamiento de los elementos. La malla de cuadriláteros tiene 61 nodos y 48 elementos sobre un cuarto del domo; la de triángulos cuadráticos tiene 45 nodos y 16 elementos pero sobre sólo un octavo del domo, en tanto que la de triángulos lineales tiene 91 nodos y 36 elementos también sobre un octavo del domo.

$$\nu = 0.3$$

$$E = 10.5 \cdot 10^9 \text{ lb/in}^2$$

$$\kappa_0 = 24000 \text{ lb/in}^2$$

$$\kappa' = 8.75.$$

$$\delta = 2.45 \cdot 10^{-4} \text{ lb.seg}^2/\text{in}^4$$

$$p = 600 \text{ lb/in}$$

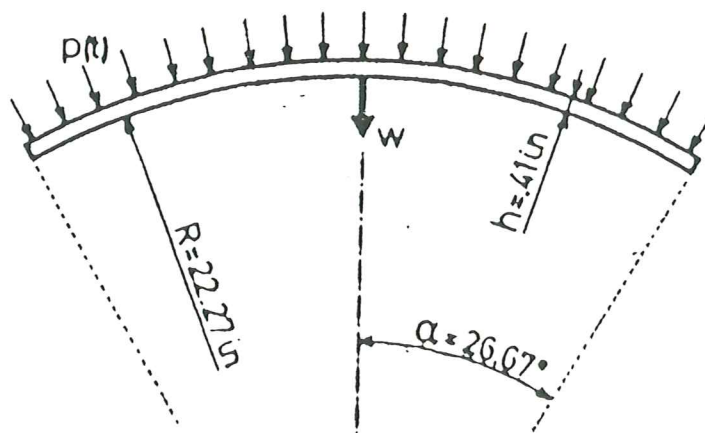
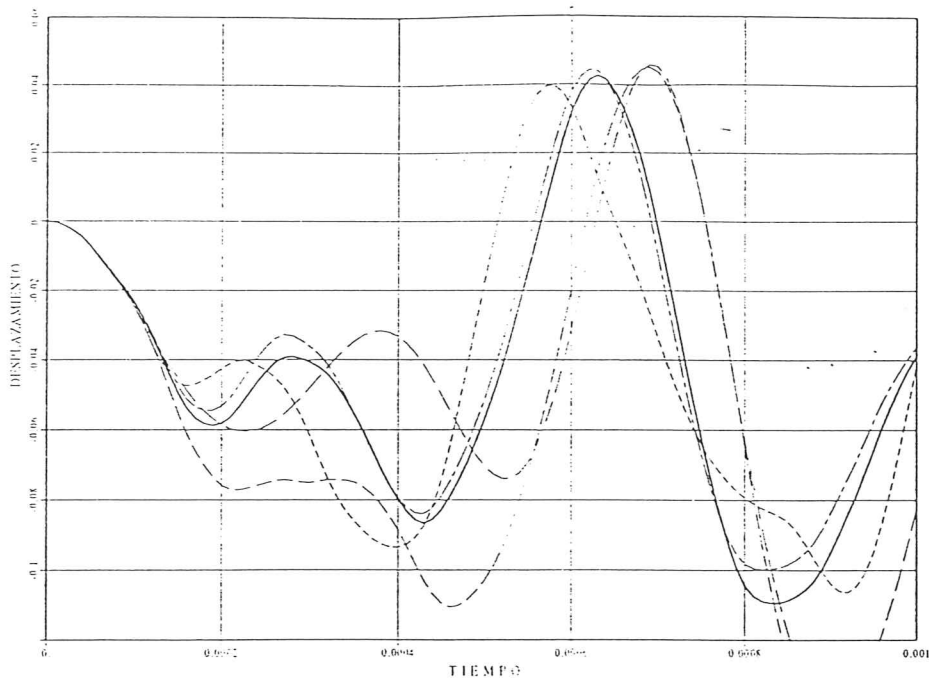


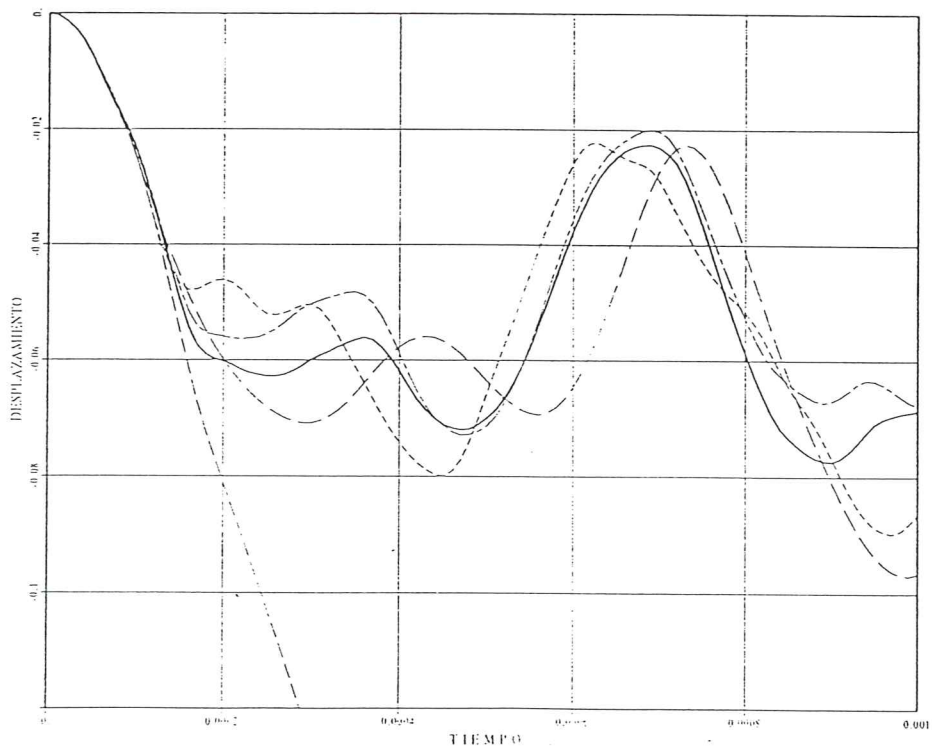
Figura 9. Domo Esférico bajo presión uniforme (carga escalón)

No existe una solución analítica para este problema y sólo se disponen de algunos resultados numéricos obtenidos con mallas de similar densidad a las aquí propuestas. En la Fig.10 se ha graficado el desplazamiento del centro del domo en función del tiempo para los diferentes elementos presentados en el apartado 3. En el caso elástico el elemento T6IA1 muestra un comportamiento excesivamente flexible, algo similar



(a)

- Q41D -----
- T61D \_\_\_\_\_
- T61A1 -----
- T61A2 -----
- TLNC - . - . - .



(b)

Figura 10. Domo esférico bajo presión uniforme. Desplazamiento vertical del centro.  
 (a)Comportamiento elástico. (b)Comportamiento elasto-plástico



puede decirse del elemento TLNC, en tanto que el resto de los elementos conducen a resultados cualitativamente similares a los existentes en las referencias<sup>[16,17]</sup>. Al considerar comportamiento elasto-plástico las cosas empeoran para el elemento T6IA1 que conduce a resultados inaceptables. En el caso de refinar la malla todos los elementos conducen a resultados similares.

### *7.1.2 Panel cilíndrico con velocidad inicial*

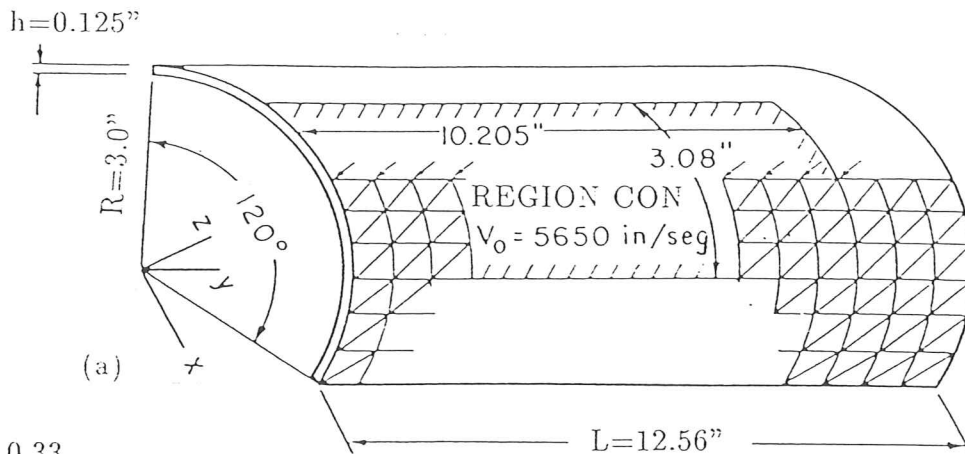
Un panel cilíndrico de 120 grados de apertura (Fig.11.a) se carga impulsivamente con una velocidad inicial en parte de la estructura. Debido a la simetría se ha modelado la mitad de la estructura donde se han usado 189 nudos y 80 elementos triangulares cuadráticos. Se ha supuesto que el panel está articulado en sus extremos y empotrado en los laterales. En la fig.11.b se comparan los desplazamientos del coronamiento del panel en las secciones  $y=6.28$  e  $y=9.42$ , con los obtenidos experimentalmente<sup>[17]</sup>, existe una excelente correlación entre ambos valores y también con resultados numéricos obtenidos con un código similar<sup>[18]</sup>.

### *7.1.3 Impacto de una barra contra una lámina*

Como tercer ejemplo se ha modelado un problema del cual se tienen resultados experimentales<sup>[19]</sup>. Se ha analizado el impacto de un proyectil de baja velocidad ( $V_0 = 6.97$  m/s) contra una lámina delgada. La lámina es cuadrada de 600 mm de lado y espesor 5.111 mm. El proyectil tiene un diámetro de 40 mm y una masa de 40.5 kg, se supone deformable y ha sido modelado con elementos sólidos de ocho nodos<sup>[20]</sup>. Para la lámina se han utilizado 24 elementos en la discretización (ver Fig.12) de un octavo de la estructura y 6 elementos de sólidos de 8 nodos para la barra. En la Fig.12 se muestran los contornos de desplazamiento vertical sobre la geometría deformada para el instante de máximo desplazamiento. Se ha graficado además el desplazamiento del centro de la placa en función del tiempo, desde el instante en que entra en contacto con el proyectil hasta la definitiva separación de los mismos. El máximo desplazamiento calculado en la lámina es de 27.5mm y ocurre para un tiempo igual a 0.0063 seg. El resultado experimental<sup>[19]</sup> es de 27.6 mm para un tiempo de 0.0055 seg lo que representa un error de -0.4% y 14.5% respectivamente.

### *7.1.4 Impacto entre dos tubos*

Finalmente, se estudia la deformación de dos cilindros impactando uno con el otro. La geometría y características del material se muestran en la Fig.13. Debido a la simetría del problema se ha discretizado un cuarto de la estructura usando 169 nodos y 72 elementos triangulares cuadráticos para cada cuarto de los cilindros. En la Fig.14.a se muestran algunas configuraciones deformadas para distintos instantes del proceso. En la Fig.14.b se ha graficado el desplazamiento del punto A (indicado sobre la discretización en la Fig.13). Este ejemplo ha sido tomado de la Ref.[21], los resultados son cualitativamente similares, el máximo desplazamiento del punto A coincide con la



$$\nu = 0.33$$

$$E = 10.5 \cdot 10^6 \text{ lb/in}^2$$

$$\kappa_0 = 44000 \text{ lb/in}^2$$

$$\kappa' = 0.00.$$

$$\delta = 2.5 \cdot 10^{-4} \text{ lb}\cdot\text{seg}^2/\text{in}^4$$

$$V_0 = 5650 \text{ in/seg}$$

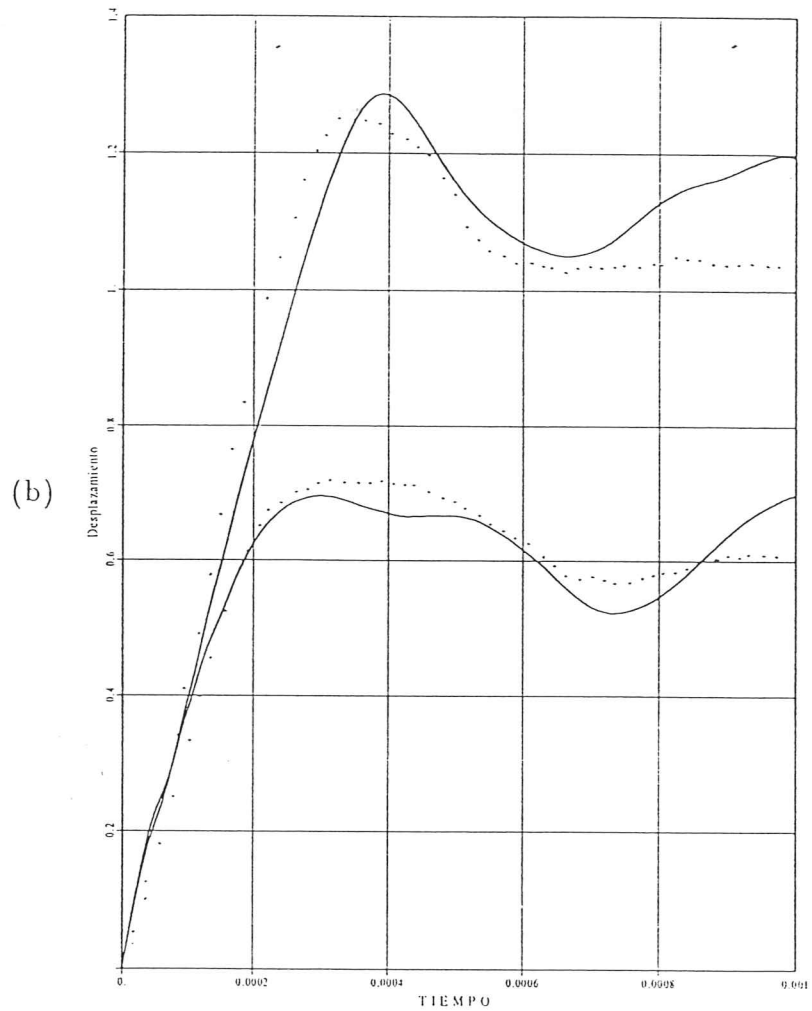


Figura 11. Panel cilíndrico con velocidad inicial. (a) geometría. (b) desplazamiento en  $(x=0, y=6.28)$  y  $(x=0, y=9.42)$ . — Numérico, ··· Experimental



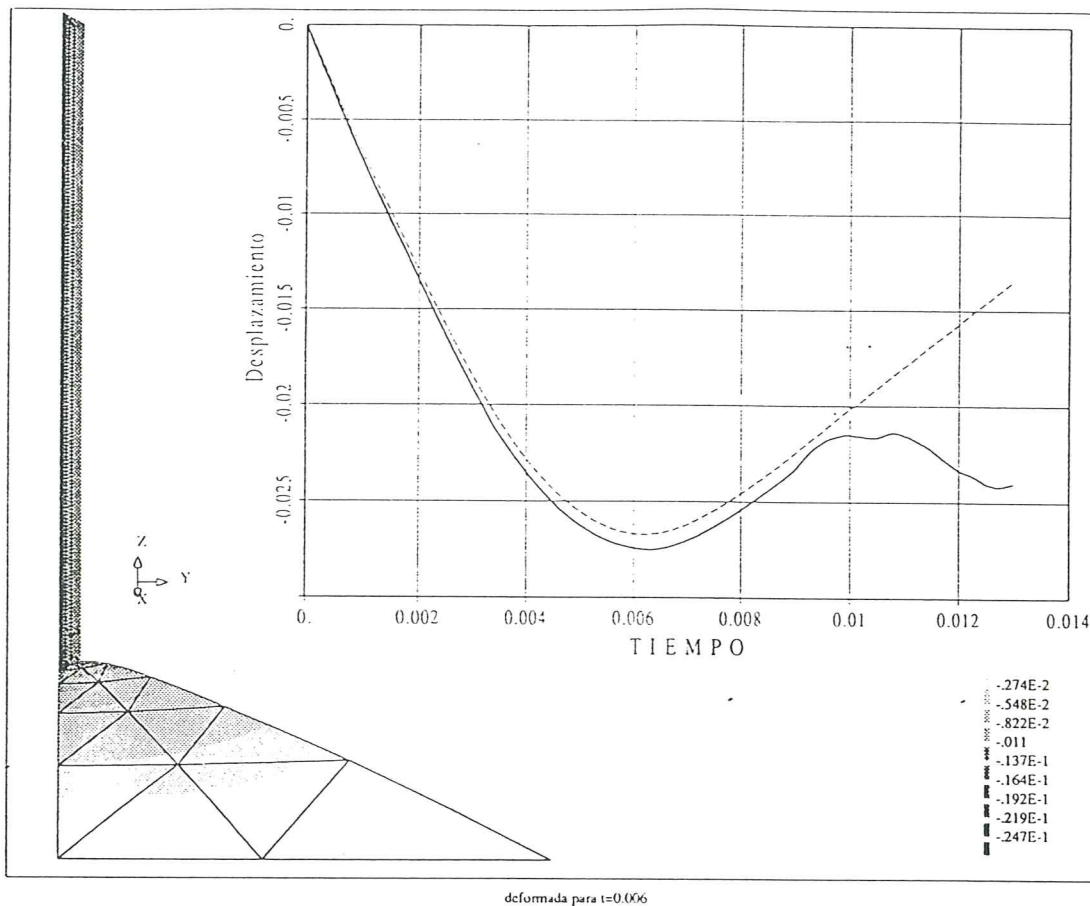


Figura 12. Impacto de un proyectil contra una lámina.  $E = 211.10^9 \text{ N/m}^2$ ,  $\nu = 0.3$ ,  
 $\delta = 7765 \text{ kg/m}^3$ ,  $\kappa_0 = 280.10^6 \text{ N/m}^2$ ,  $\kappa' = 690.10^6 \text{ N/m}^2$ .  
 — Lámina, - - - Proyectil

referencia pero aquí el rebote se produce un poco antes.

## 7.2 Estructuras de vigas

### 7.2.1 Viga empotrada bajo carga uniforme

Empezaremos con un ejemplo sencillo tomado de la Ref.[16]. Una viga en voladizo es sometida a una carga escalón uniformemente distribuida en toda su longitud. Las características geométricas y materiales son:  $L = 10''$ ,  $h = b = 1''$ ,  $E = 1.2 \times 10^4 \text{ lb/pulg}^2$ ,  $\nu = 0.2$ ;  $\delta = 10^{-6} \text{ lb seg}^2/\text{pulg}^4$ ,  $p = 2.85 \text{ lb/pulg}$ . Se han utilizado 10 elementos lineales de viga en la discretización. Con el objeto de realizar comparaciones se ha modelado la viga con elementos de lámina, para lo cual se han usado 10 elementos cuadriláteros de cuatro nodos y 10 elementos triangulares de 6 nodos, además se han utilizado 10 elementos triangulares de 6 nodos actuando membranalmente para una discretización bidimensional de la viga, en este último caso la carga se distribuyó sobre las superficies inferior y superior de la viga. En la Fig.15.a se muestra el desplazamiento

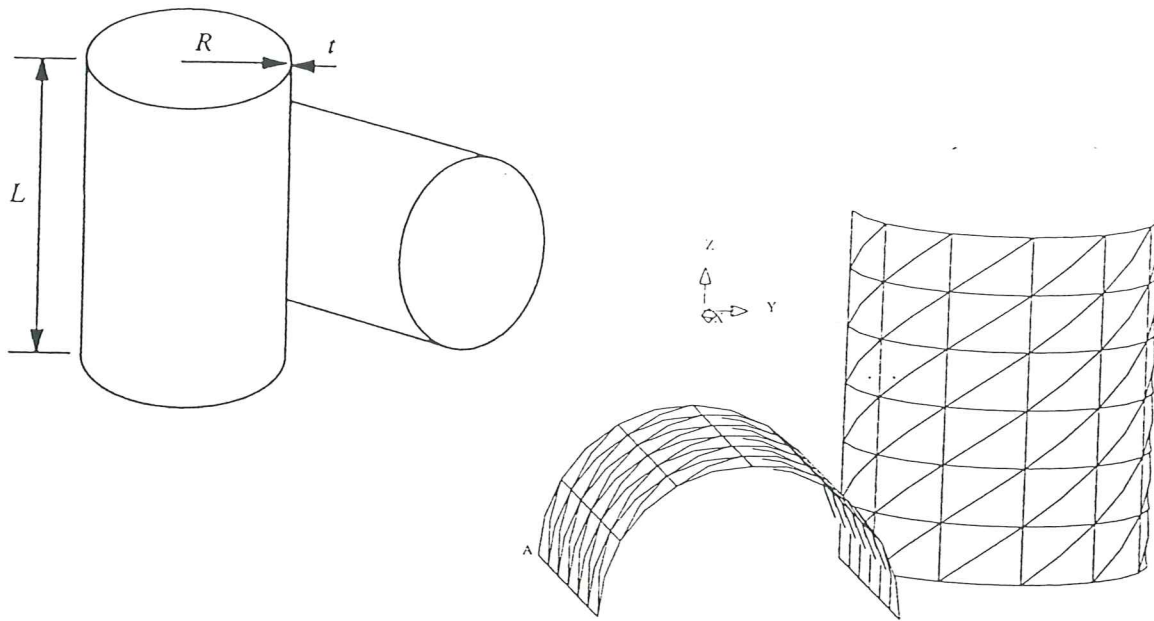


Figura 13. Impacto entre dos tubos. Geometría y discretización.

$R = 0.1 \text{ m}$ ,  $L = 0.46 \text{ m}$ ,  $t = 0.003 \text{ m}$ ,  $E = 200 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0.3$ ,  
 $\kappa_0 = 200 \text{ MPa}$ ,  $\rho = 7840 \text{ kg/m}^3$ ,  $V_0 = 30.0 \text{ m/seg}$

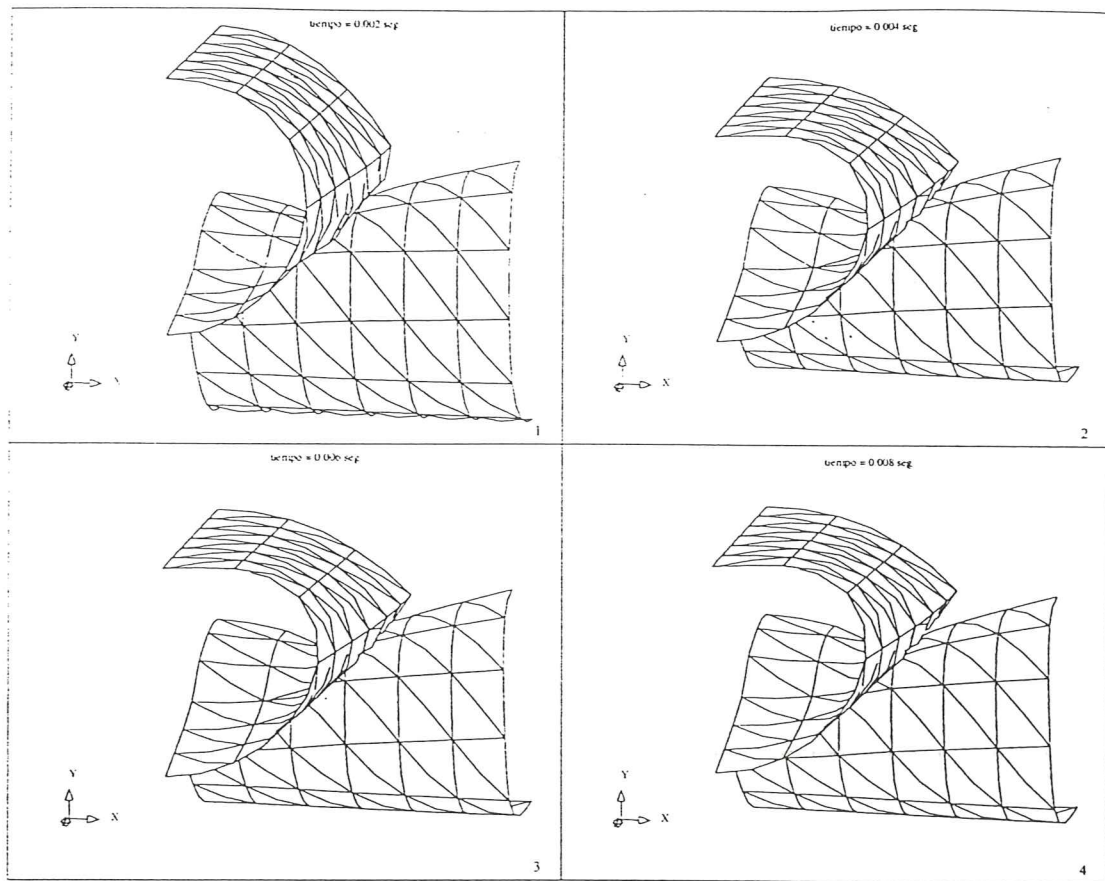
vertical del punto central del borde libre. Se observa una muy buena correlación entre la discretización con láminas y la bidimensional. Los resultados de la referencia (obtenidos con elementos cuadriláteros de ocho nodos de tensión plana) se acercan más a los obtenidos con el elemento viga.

Con el objeto de observar un primer ejemplo de plasticidad, se ha analizado el mismo problema con una tensión de fluencia  $\kappa_0 = 800 \text{ lb/pulg}^2$ . En la Fig.15.b se muestran los resultados considerando comportamiento plástico. La comparación con la malla bidimensional de triángulos permite ajustar el coeficiente del momento plástico (se ha usado  $M_u = \kappa_0 h / 3.6$ ). En la figura también aparecen los resultados obtenidos modelando la viga con elementos láminas trabajando a flexión y se observa un comportamiento más flexible que el modelo bidimensional. En este caso el modelo constitutivo de láminas utiliza un momento plástico de  $M_u = \kappa_0 h / 4$ .

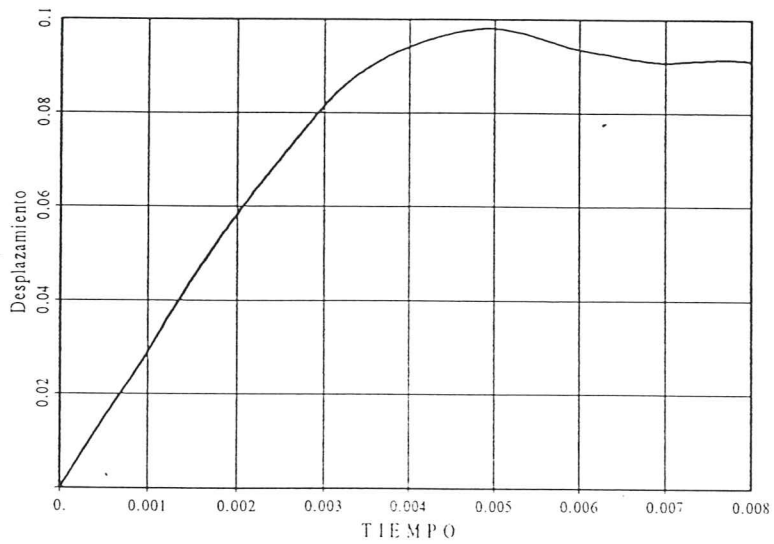
### 7.2.2 Angulo recto en voladizo con carga normal al plano

Este ejemplo ha sido tomado de la Ref.[14] y corresponde a una estructura formada por dos elementos rectos de igual longitud unidos a  $90^\circ$  y con un extremo empotrado. Se supone una carga impulsiva de corta duración actuando en la unión de los dos segmentos (codo) con dirección normal al plano de la estructura. En la Fig.16 se muestra el diagrama de la estructura, la historia de carga y las características del material. Se han utilizado 3 discretizaciones, la mas fina con 20 elementos cuadráticos cuyos resultados sirven de referencia para comparar las discretizaciones mas gruesas de 4 elementos cuadráticos y 4 elementos lineales.

En la Fig.17 se presenta los desplazamientos transversales en el borde libre y en el

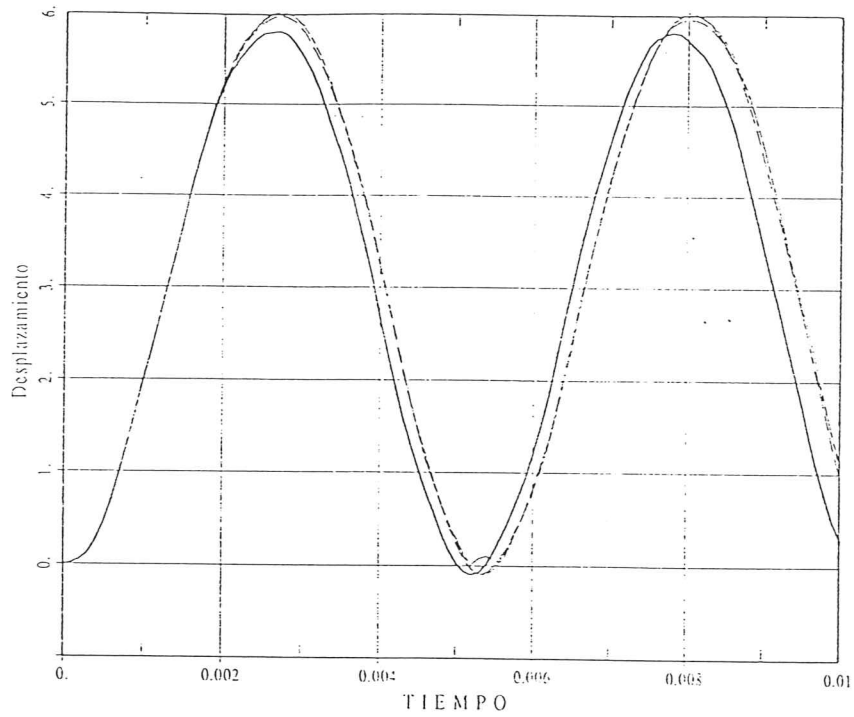


(a)

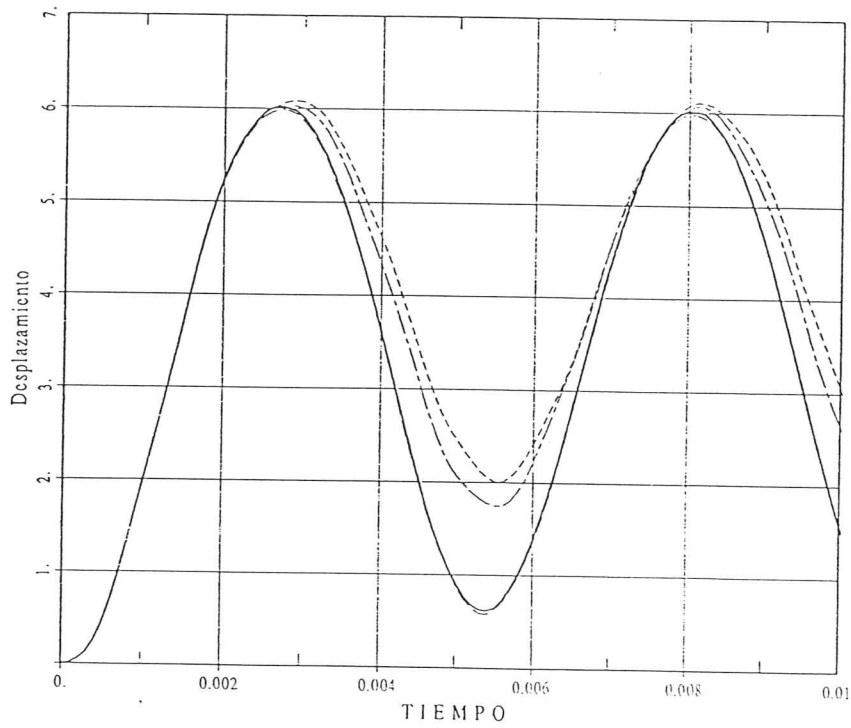


(b)

Figura 14. Impacto entre dos tubos. (a)deformada para  $t=0.002$  seg,  $t=0.004$  seg,  $t=0.006$  seg,  $t=0.008$  seg. (b)desplazamiento del punto A



(a)



(b)

Figura 15. Viga en voladizo bajo carga uniforme. Desplazamiento vertical del borde libre. — el.viga; - - - - el. 4 nodos; - · - · - el. 6 nodos; · · · · el. 6 nodos 2D. (a)Comportamiento elástico. (b)Comportamiento elasto-plástico



codigo para las tres discretizaciones usadas. Existe una muy buena correlación entre las mallas de elementos cuadráticos, en tanto que la discretización con elementos lineales (sólo 5 nudos) muestra un buena correlación en la primera etapa y luego una moderada dispersión típica de los análisis en el tiempo. Digamos finalmente que los resultados son cualitativamente similares a los de la referencia.

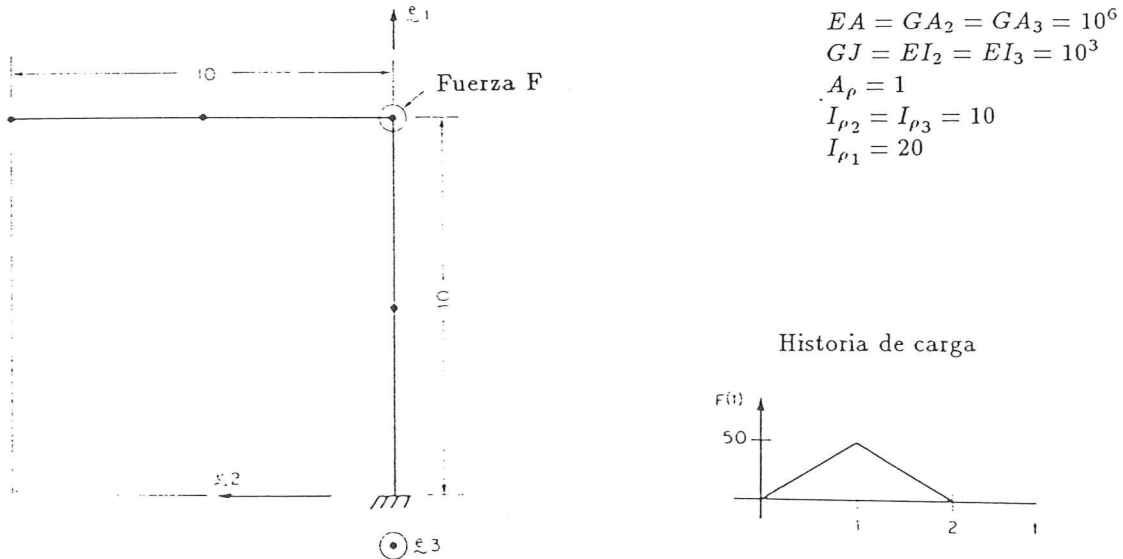


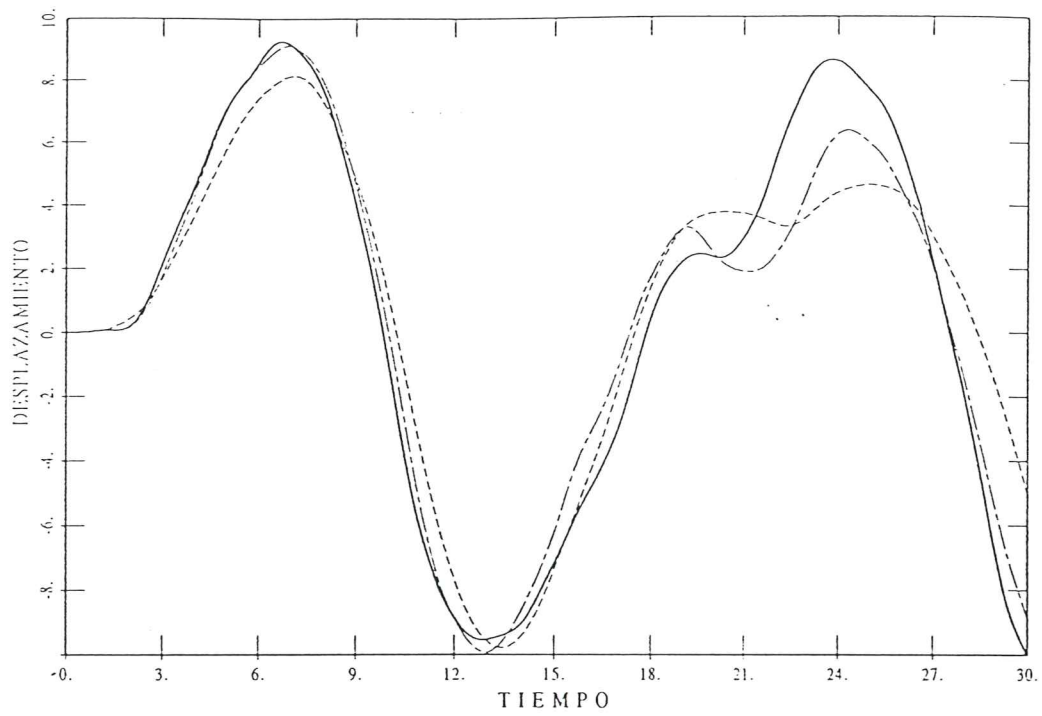
Figura 16. Angulo recto en voladizo con carga normal al plano

### 7.2.3 Domo reticulado

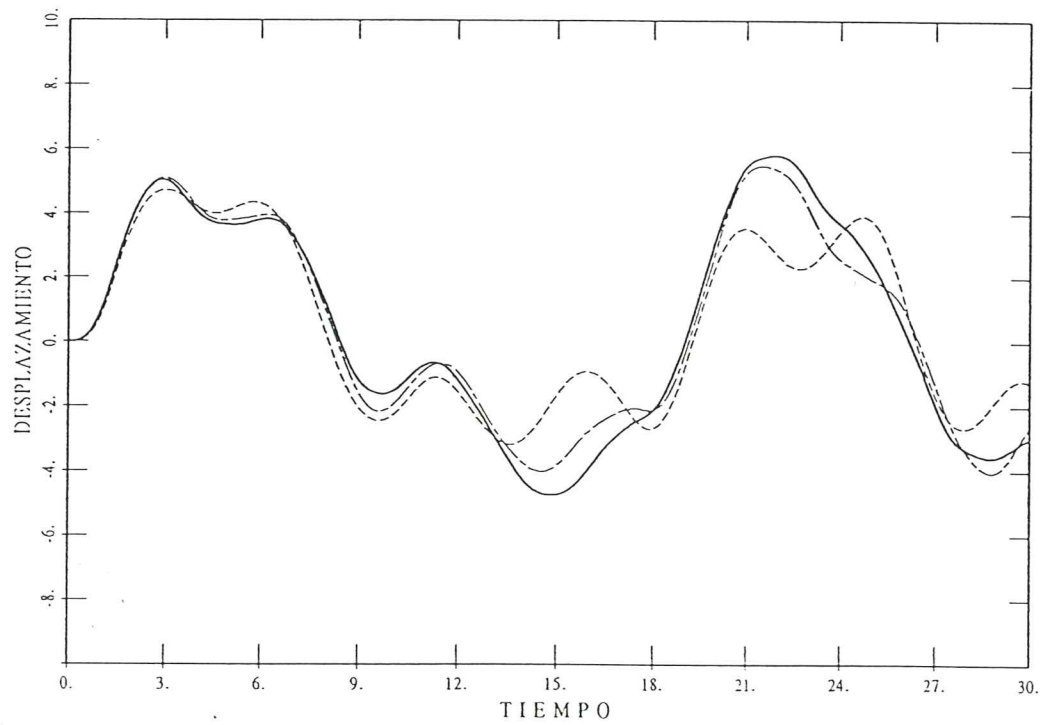
Este ejemplo ha sido tomado de la Ref.[22]. En la Fig.18 se muestra la geometría y las características del material. El sistema está sometido a una carga vertical aplicada en el vértice del domo. Se han considerado dos casos: (a) un incremento progresivo de la carga en un sistema fuertemente amortiguado lo que permite realizar una gráfica carga-desplazamiento cuasi-estática y (b) una variación armónica de la carga en un sistema sin amortiguamiento. Se han considerado 4 discretizaciones diferentes: 2 elementos lineales por segmento, 1 elemento cuadrático por segmento, 4 elementos lineales por segmento y 4 elementos cuadráticos por segmento. En la Fig.19.a se muestra el desplazamiento del vértice en función de la carga normalizada respecto a una carga crítica de referencia ( $P_{cr} = 123.8 MN$ ) para el caso cuasiestático. En la Fig.19.b se ha graficado el desplazamiento en función del tiempo para una carga armónica de valor  $p = 68.8 \times \text{sen}(41.88 t)MN$ . Los resultados resultan cualitativamente similares a los de la referencia, aunque ligeramente más rígidos.

### 7.2.4 Viga en cantilever bajo flexión compuesta asimétrica

Una viga recta empotrada en un extremo y libre en el otro cuya geometría está



(a)



(b)

Figura 17. Desplazamiento transversal en función del tiempo. — 20 elementos cuadráticos; - - - 4 elementos cuadráticos; - . - . 4 elementos lineales.  
 (a) Borde libre; (b) Punto de aplicación de la carga



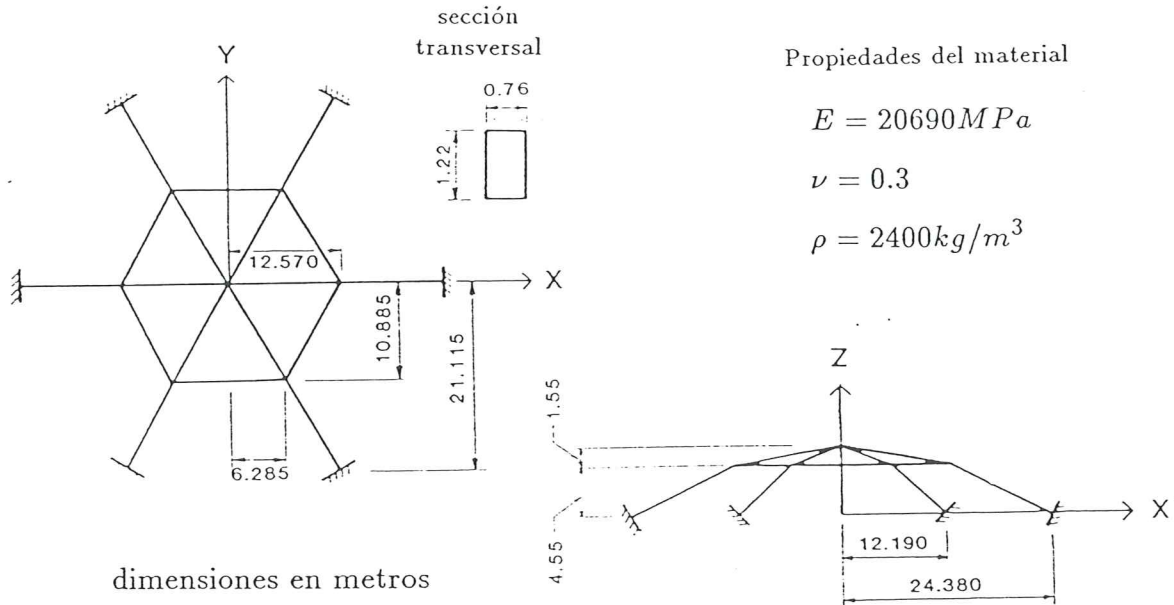


Figura 18. Domo articulado. Geometría y características materiales

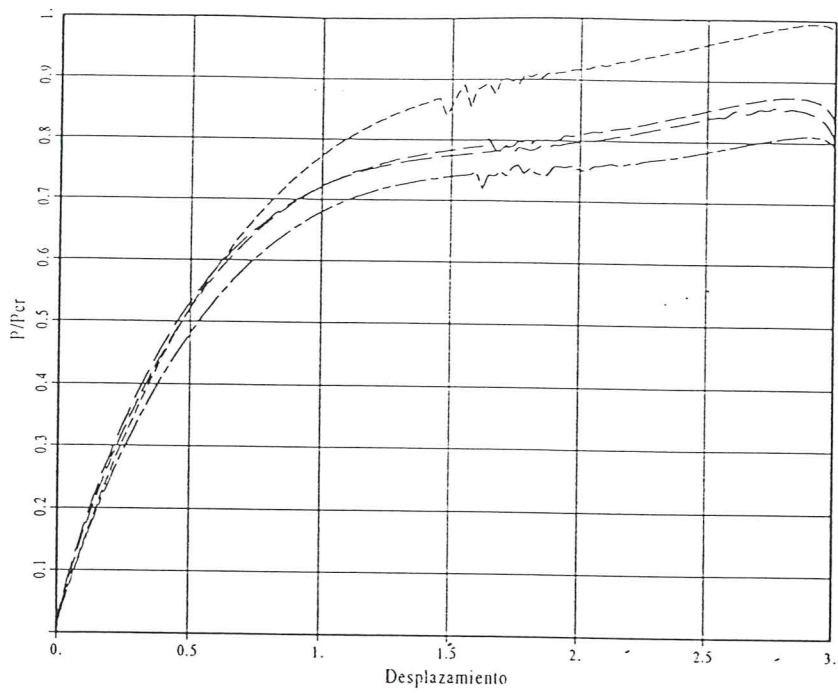
definida por  $L = 1.0$ ,  $b = 0.05$  y  $h = 0.1$ , con módulo elástico  $E = 2 \cdot 10^6$ , relación de Poisson  $\nu = 0.2$  y densidad  $\delta = 7800$ , se somete a una carga escalón en su borde libre con componentes  $(-1.0, 0.1, 1.0)$ . La viga se ha modelado con 20 elementos de viga lineales y también con 80 elementos de sólido distribuidos de a 4 sobre cada sección transversal, como se puede ver en la Fig.20. En la Fig.21.a se muestran los desplazamientos del extremo libre en sus tres componentes para ambas discretizaciones suponiendo comportamiento elástico lineal; en tanto que en la Fig.21.b se presentan los mismo resultados pero para comportamiento elasto-plástico perfecto con  $\kappa_0 = 12000$ .

### 7.3 Ejemplos con unión de elementos

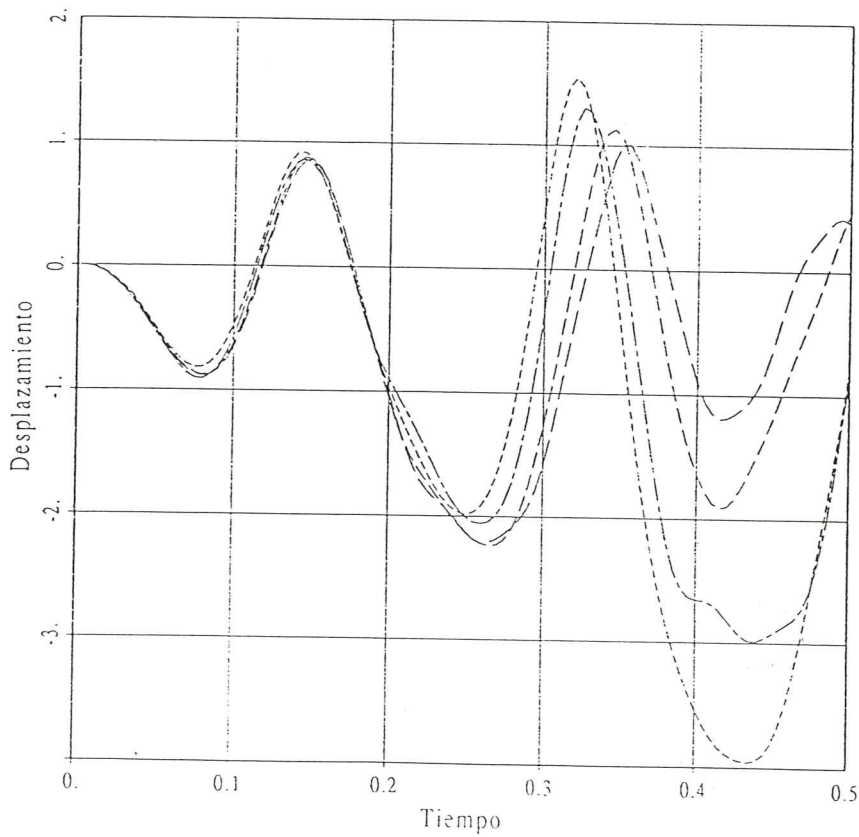
En este subapartado se presentan dos ejemplos donde se ha hecho uso de la metodología descrita en la sección 6.2 para la unión de elementos de diferente tipología.

#### 7.3.1 Viga en cantilever bajo carga uniforme

Se ha analizado el comportamiento de una viga empotrada en un extremo y libre en el otro sometida a una carga escalón uniformemente distribuida en su longitud. La sección transversal de la viga tiene forma de T. En la Fig.22.a se muestra una de las cuatro discretizaciones usadas. En este caso el ala ha sido modelada con 12 elementos cuadriláteros de lámina, en tanto que para el alma se han usado 6 elementos triangulares cuadráticos. En la unión entre ala y alma, los nudos si bien tienen las mismas coordenadas espaciales, los sistemas coordenados locales son diferentes. Debido a las características del código no es posible unir directamente tres elementos de lámina



(a)



(b)

Figura 19. Domo reticulado. - - - - 2 elementos lineales; - - - - 1 elemento cuadrático; - - - - 4 elementos lineales; — — — 4 elementos cuadráticos. (a) análisis cuasi-estático. (b) análisis dinámico.

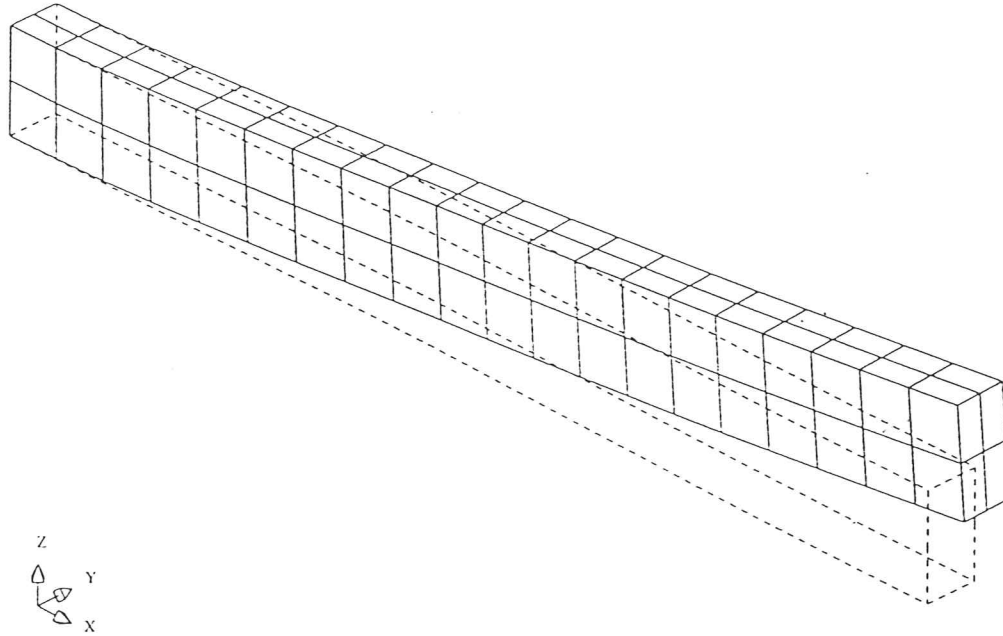


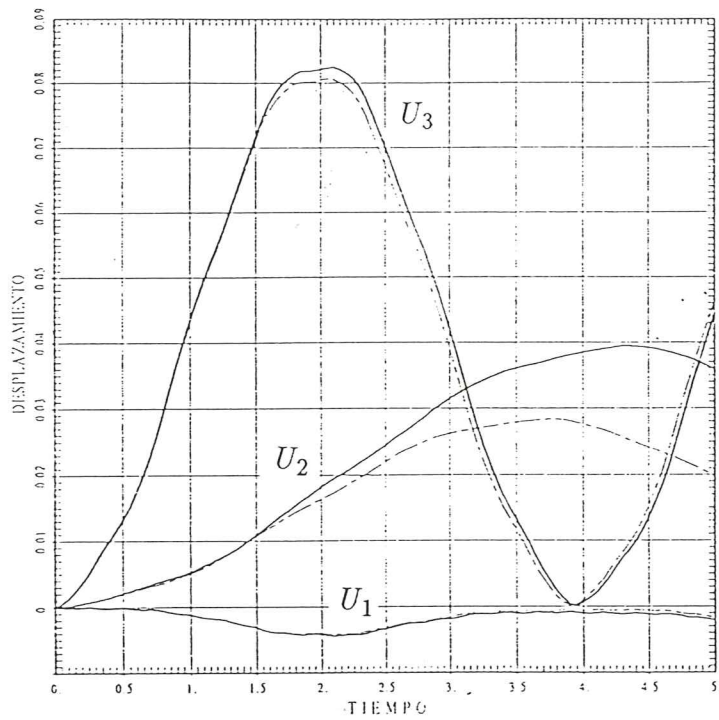
Figura 20. Viga en voladizo con cargas en el extremo libre. Discretización con elementos sólidos.

sobre una arista por lo que aquí se hace necesario imponer una unión rígida entre los nudos de ambas partes de la estructura como se indica en la sección 6.2. Se han utilizado dos discretizaciones con sólo elementos de viga (3 elementos cuadráticos o 6 elementos lineales) con el objeto de comparar los resultados obtenidos con la discretización anterior. Finalmente se ha combinado la discretización del ala con elementos de lámina cuadriláteros y elementos de viga lineales para la discretización del alma. En este último caso es necesario realizar un vinculación rígida entre el eje de la viga y el centro del alma mediante la técnica descrita en el apartado 6.2 debido a la distancia que media entre ambos.

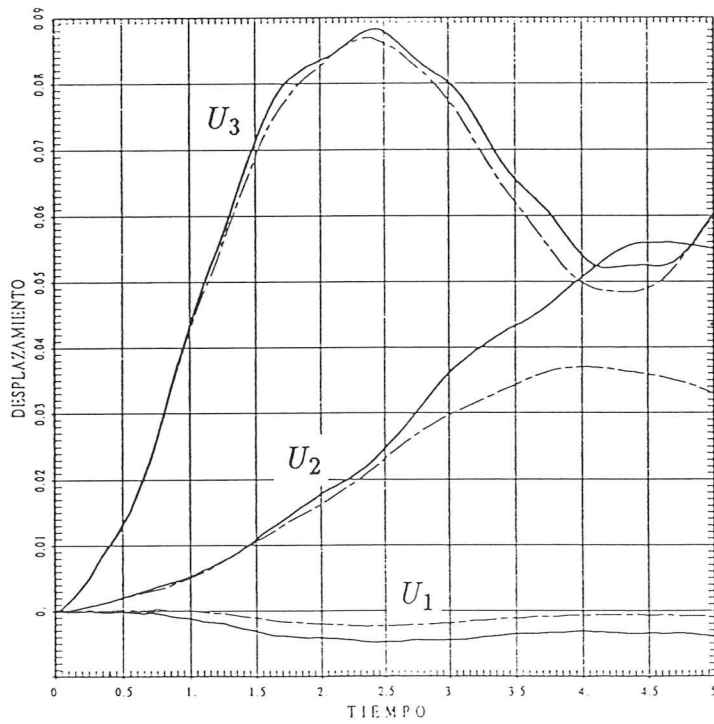
En la Fig.22.b se muestran los desplazamientos verticales del centro del extremo libre en función del tiempo para las cuatro discretizaciones. Puede notarse la excelente correlación entre los tres últimos modelos y una rigidez ligeramente mayor cuando se utilizan elementos de lámina (actuando membranalmente) para el modelado del alma.

### 7.3.1 Viga en cantilever bajo carga uniforme

Como segundo ejemplo se considera una placa cuadrada empotrada en su contorno y sujeta a una carga uniforme en la parte central. Inicialmente se ha modelado un cuarto de la placa con 25 elementos cuadriláteros de lámina. Posteriormente se han reemplazado los elementos de lámina del contorno por elementos de sólidos de 8 nodos, imponiendo restricciones del tipo descrito en la sección 6.3. En la Fig.23.a se muestra la discretización en este último caso. En la Fig.23.b se ha graficado el desplazamiento vertical del centro de la placa para ambas discretizaciones. Puede notarse la mayor rigidez que aparece en el segundo caso debido al pobre comportamiento del elemento de

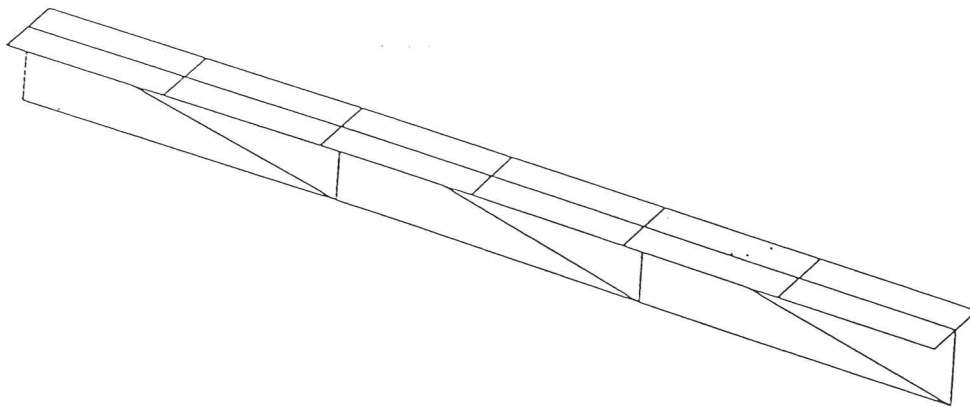


(a)

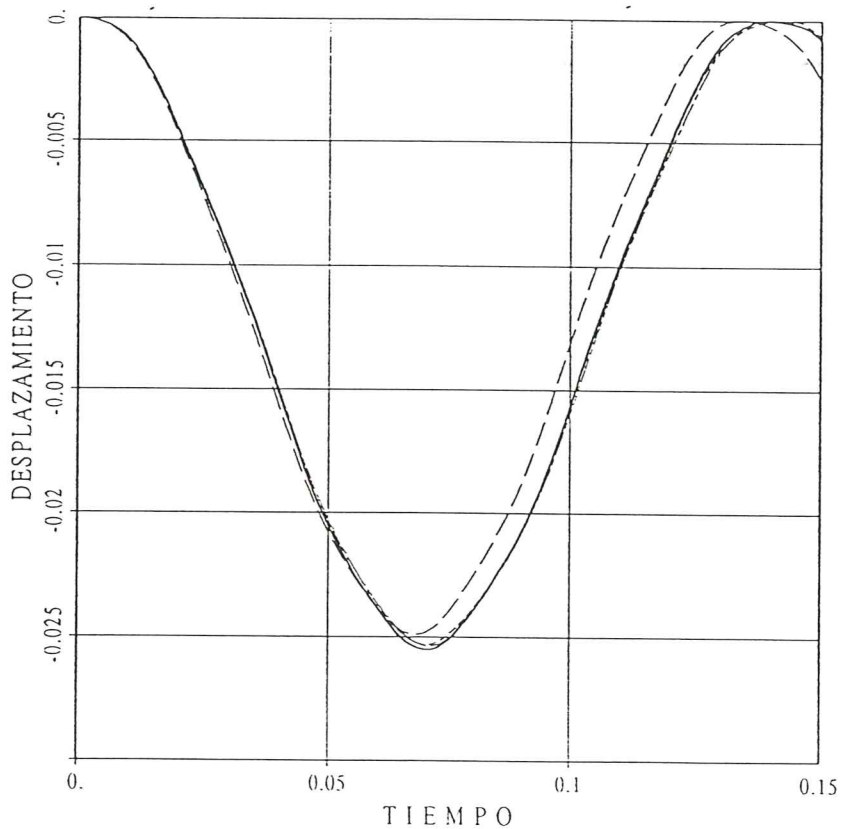


(b)

Figura 21. Viga en cantilever bajo cargas en el extremo libre. — elementos de viga.; - - - elementos sólidos. (a) comportamiento elástico. (b) comportamiento plástico



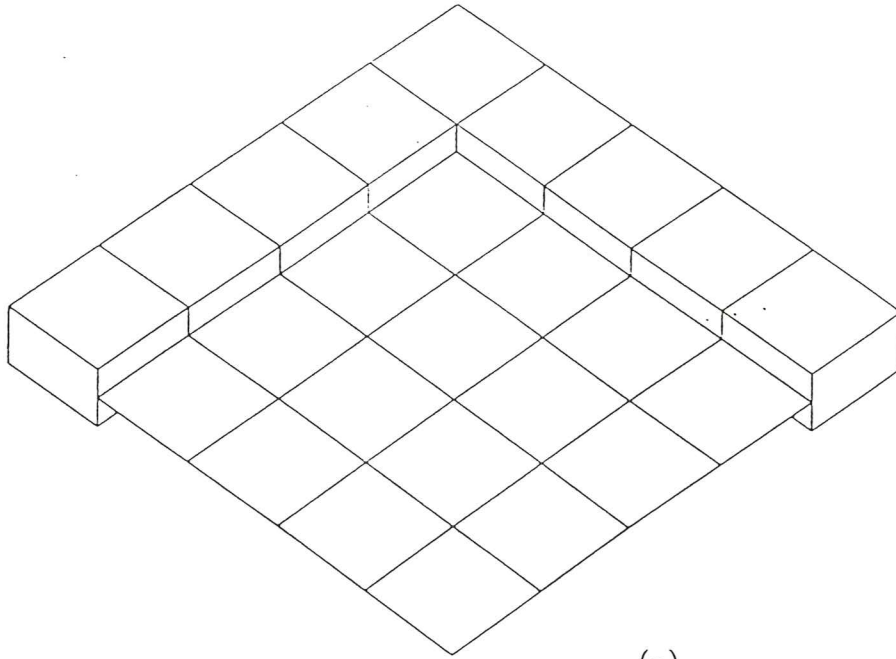
(a)



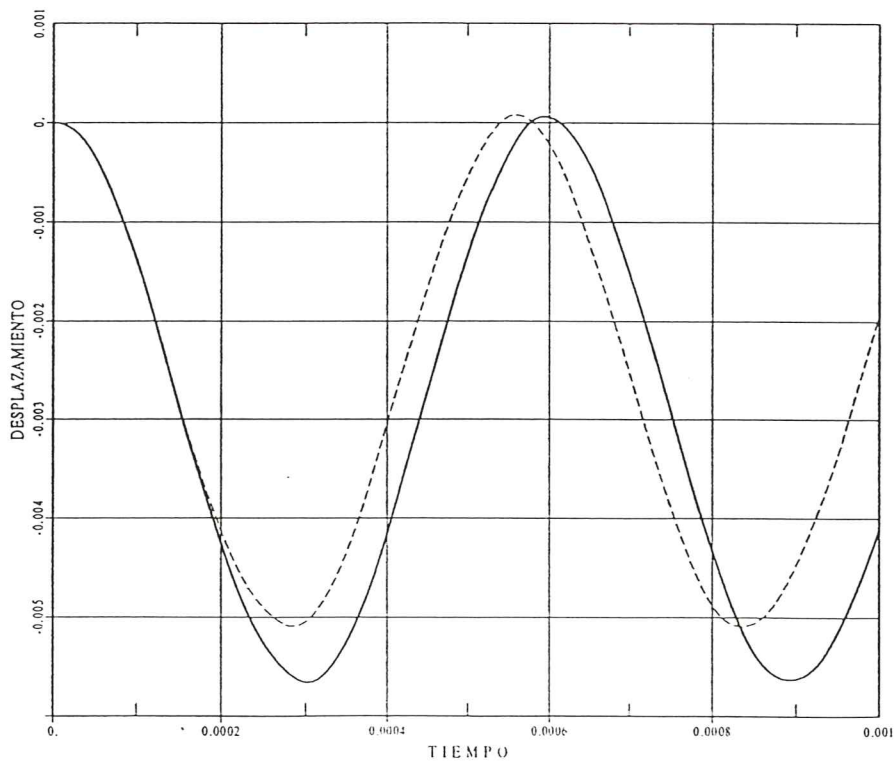
(b)

Figura 22. Viga en cantilever de sección T. (a) geometría y discretización con elementos de lámina. (b) desplazamiento vertical del extremo libre. ——— 3 elementos cuadráticos de viga.; - - - - - 6 elementos lineales de viga; - . - . - Combinación de elementos de lámina en el ala y de viga para el alma; . . . . - Elementos de lámina.





(a)



(b)

Figura 23. Placa cuadrada empotrada, modelada mezclando elementos de lámina y sólido. (a) discretización mixta. (b) desplazamiento vertical del centro.  
 ——— sólo elemento de lámina.; - - - - - discretización mixta.

sólido trabajando como elemento de lámina.

## 8- CONCLUSIONES

En este trabajo se han presentado algunos elementos de lámina, previamente evaluados en el análisis estático con grandes desplazamientos y rotaciones y plasticidad<sup>[7]</sup> que han demostrado también ser eficientes en el análisis dinámico. De los elementos presentados puede decirse que:

-Todos convergen a los resultados correctos cuando se refina la malla.

-Los elementos más robustos son el cuadrilátero de 4 nodos (Q4ID) y el triángulo isoparamétrico de 6 nodos (T6ID)

-El T6ID puede presentar problemas de bloqueo membranar en estructuras con geometría inicial curva y discretización gruesa.

-Los elementos triangulares con aproximaciones membranales en deformaciones impuestas (T6IA1 y T6IA2) no presentan problemas de bloqueo membranar pero no tienen un comportamiento regular.

-El elemento triangular lineal no conforme (TLNC) tiene la ventaja de su sencillez pero requiere de discretizaciones muy finas, que lo hacen más oneroso que los elementos cuadráticos.

El comportamiento del elemento de viga lineal es muy similar al del elemento cuadrático para el mismo nivel de discretización, y por ello resulta más económico.

El criterio de plasticidad propuesto en vigas condujo a buenos resultados para los ejemplos analizados (secciones rectangulares), sin embargo debe realizarse un análisis más exhaustivo en condiciones generales y un estudio detallado de otras secciones transversales que sean de interés.

La metodología utilizada para la unión de elementos con diferentes grados de libertad nodales o estructuras con elementos excéntricos, evita el uso de elementos de transición (difíciles de desarrollar para el caso de no linealidad geométrica o material) y conduce a resultados correctos, sin embargo algunas veces es necesario disminuir el paso de avance en el tiempo para lograr convergencia, lo que puede ser una severa penalización en lo que a tiempo de máquina se refiere.

Resulta necesario un estudio teórico del incremento de tiempo crítico para este tipo de análisis cuando se trabaja, como aquí, con estructuras con rotaciones como grados de libertad.

## AGRADECIMIENTOS

Agradezco a los doctores S.Botello, C.García Garino y J.Rojek por muchas útiles discusiones y por su colaboración en algunos aspectos computacionales. Agradezco también al profesor E.Oñate por su guía en estos desarrollos y por la corrección de los manuscritos. Este trabajo ha sido financiado por el Ministerio de Educación y Ciencia

Español en su programa de formación de personal investigador, mediante una beca post-doctoral.

## 9-BIBLIOGRAFÍA

- [ 1] S.Ahmad, B.M.Irons y O.C.Zienkiewicz, "Analysis of thick and thin shell structures by curved finite elements ". *Int. J. Num. Methods in Engng.* 2 (1970), 419-451.
- [ 2] J.C.Simo y D.D.Fox "On Stress Resultant Geometrically Exact Shell Model. Part I: Formulation and Optimal Parametrization", *Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg.* 72(1989) 267-304.
- [ 3] J.C.Simo, D.D.Fox y M.S.Rifai, "On Stress Resultant Geometrically Exact Shell Model. Part III: Computational Aspects of The Nonlinear Theory", *Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg.* 79(1990) 21-70.
- [ 4] J.C.Simo, M.S.Rifai y D.D.Fox , "On Stress Resultant Geometrically Exact Shell Model. Part IV: Variable Thickness Shells with Through-the-Thickness Stretching", *Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg.* 81(1990) 91-126.
- [ 5] J.C.Simo y J.G.Kennedy, "On Stress Resultant Geometrically Exact Shell Model. Part V. Nonlinear Plasticity: formulation and integration algorithms", *Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg.* 96(1992) 133-171.
- [ 6] J.C.Simo, M.S.Rifai y D.D.Fox , "On Stress Resultant Geometrically Exact Shell Model. Part VI: Conserving Algorithms for Non-linear Dynamics", *Int. J. Num. Methods Engng.* 34(1992) 117-164.
- [ 7] F.Flores y E.Oñate, "Evaluación de diferentes elementos finitos basados en la teoría de láminas de Simo", Inf.33, CIMNE, 1993.
- [ 8] E.Oñate, O.C.Zienkiewicz, B.Suarez y R.L.Taylor, "A General Methodology for Deriving Shear-Constrained Reissner-Mindlin Plate Elements". *Int. J. Num. Methds. in Engng.* (1992).
- [ 9] J.Lublimer, *Plasticity Theory*, Macmillan, Singapore, 1990.
- [10] E.Oñate, *Análisis de Estructuras por el Método de Elementos Finitos* , CIMNE, Barcelona, 1992.
- [11] E.Oñate, F.Zarate y F.Flores, "A Simple Triangular Element for Thick and Thin Plate and Shell Analysis", Second U.S. National Congress on Computational Mechanics, 16-18 agosto, 1993, a ser publicado en *Int. J. Num. Methods in Engng.*
- [12] J.C.Simo, "A Finite Strain Beam Formulation. The Three-Dimensional Dynamic Problem. Part I." *Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg.* 49(1985) 55-70.
- [13] J.C.Simo y L. Vu-Quoc. "A Three-Dimensional Finite Strain Rod Model. Part II: Computational Aspects." *Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg.* 58(1986) 79-116..
- [14] J.C.Simo y L. Vu-Quoc. "On the Dynamic in Space of Rods Undergoing Large Motions-A Geometrically Exact Approach." *Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg.* 58,(1988),125-161.
- [15] J.C.Simo y L.Vu-Quoc. "A Geometrically-exact Rod Model Incorporating Shear and Torsion-Warping Deformation." *Int. J. of Solids and Structures* 27(3),(1991),371-393.

- [16] K.J.Bathe, E.Ramm y E.L.Wilson. "Finite Element Formulation for Large Deformation Dynamic Analysis." *Int. J. Num. Methods in Engng.*, **9**, (1975),353-386.
- [17] H.A.Balmer y E.A.Witmer, "Theoretical-Experimental Correlation of Large Dynamic and Permanent Deformation of Impulsively Loaded Simple Structures". Air Force Flight Dynamic Laboratory, Report FDP-TDR-64-108, (1964).
- [18] Manual de usuario de *WHAMS-3D, An Explicit 3D Finite Element Program*.
- [19] N.Hallet, *Large Deflection Impulsive Loading of Plates*, Tesis de Doctorado, City University, Londres, 1987.
- [20] C.G.García Garino, *Un modelo numérico para el análisis de sólidos elasto plásticos sometidos a grandes deformaciones*, Tesis de doctorado, Universidad Politécnica de Cataluña, 1993.
- [21] Z.H.Zhong, *Finite Element Procedures for Contact Impact Problems*, Oxford University Press, Oxford, G.B., 1993.
- [22] G.Shi y S.N.Atluri, "Elasto-Plastic Large Deformation Analysis of Space-Frames: A Plastic-Hinge and Stress-Based Explicit Derivation of Tangent Stiffness." *Int. J. Num. Methods in Engng.* **26**,(1988),589-615.