

Vigas de sección variable con carga móvil concentrada constante

Roberto H. Gutiérrez

Instituto de Mecánica Aplicada (CONICET)
Grupo Análisis de Sistemas Mecánicos
Facultad Regional Bahía Blanca
Universidad Tecnológica Nacional
Gorriti 43
8000 Bahía Blanca, Argentina
Fax: 54-291-455 53 11
e-mail:slamalfa@criba.edu.ar

Resumen

En el presente estudio, basado en la teoría clásica de vigas, se trata el cálculo aproximado de las deflexiones de vigas solicitadas por una carga concentrada independiente del tiempo desplazándose con velocidad constante, teniendo en cuenta su efecto inercial y en distintas condiciones de vínculo.

BEAMS OF NON UNIFORM CROSS SECTION WITH MOVING CONSTANT POINT MASS

Summary

The present study deals with the approximate determination of the dynamic response of elastic beams traversed by a concentrated load with displaces at constant speed. The inertia effect of the load is taken into account. Classical beam theory is used and several combinations of boundary conditions are considered.

INTRODUCCIÓN

Sobre el comportamiento dinámico de vigas bajo la acción de cargas móviles se han realizado numerosos estudios, siendo algunos de los más recientes las referencias¹⁻⁵. No obstante, aparentemente es escasa la información disponible para el caso de vigas de sección variable. En el presente estudio se considera sección rectangular de base fija y una determinada forma de altura variable que comprende en particular el caso de sección uniforme. Para vigas de sección variable se emplea el método de Galerkin-Kantorovich. Relacionado con este trabajo, en la referencia⁵ se consideran condiciones elásticas de vínculo. Por otra parte, en la referencia⁶ se incluye una amplia bibliografía sobre el tema.

PLANTEAMIENTO Y RESOLUCIÓN APROXIMADA DEL PROBLEMA

El sistema mecánico considerado se muestra en la Figura 1. La variación de la altura de la sección transversal se supone de la forma

$$h(\bar{x}) = \begin{cases} h_0 \left(-\alpha \frac{\bar{x}}{L} + 1 \right), & 0 \leq \bar{x} \leq L_1, \alpha \geq 0 \\ h_0 \left(-\alpha \frac{L_1}{L} + 1 \right), & L_1 \leq \bar{x} \leq L_2, L_2 = L - L_1 \\ h_0 \left(\alpha \frac{\bar{x} - L_2}{L} - \alpha \frac{L_1}{L} + 1 \right), & L_2 \leq \bar{x} \leq L \end{cases} \quad (1)$$

Llamando

$$\begin{aligned} h(\bar{x}) &= h_0 f(\bar{x}) \\ A(\bar{x}) &= b_0 h_0 f(\bar{x}) = A_0 f(\bar{x}) \\ I(\bar{x}) &= \frac{b_0 h_0^3 f^3(\bar{x})}{12} = I_0 f^3(\bar{x}) \end{aligned}$$

e indicando δ la delta de Dirac y despreciando el amortiguamiento de la viga, la ecuación diferencial del movimiento es

$$E \frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2} (I(\bar{x}) w_{\bar{x}^2}(\bar{x}, t)) + \rho A(\bar{x}) w_{t^2}(\bar{x}, t) + M \delta(\bar{x} - \bar{\xi}) w_{t^2}(\bar{\xi}, t) = P \delta(\bar{x} - \bar{\xi}) \quad (2)$$

sujeta a las condiciones de contorno correspondientes a las de vínculo, que supondremos SA-SA (viga simplemente apoyada), EM-SA o EM-EM (viga empotrada) y las condiciones iniciales

$$w(\bar{x}, 0) = w_t(\bar{x}, 0) = 0$$

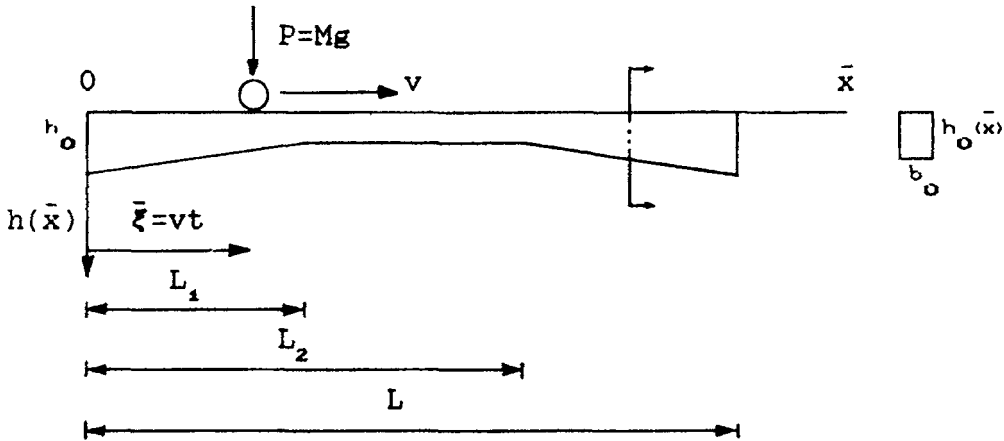


Figura 1. Sistema mecánico en estudio

Llamando T al tiempo que emplea la carga en recorrer totalmente la viga, efectuemos el cambio de variables

$$\bar{x} = Lx, \quad t = T\tau$$

Indicando

$$\lambda_1 = \frac{L_1}{L}, \quad \lambda_2 \frac{L - L_1}{L} = 1 - \lambda_1$$

de la (1) resulta

$$f(x) = \begin{cases} -\alpha x + 1, & 0 \leq x \leq \lambda_1 \\ -\alpha \lambda_1 + 1, & \lambda_1 \leq x \leq \lambda_2 \\ \alpha x - \alpha + 1, & \lambda_2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Por otra parte, es $\bar{\xi} = L\xi$ con $\bar{\xi} = vt \Rightarrow \xi = \tau$, con lo cual

$$\delta(\bar{x} - \bar{\xi}) = \delta(L(x - \xi)) = \frac{1}{L}\delta(x - \tau)$$

Además llamemos

$$\beta_1 = \frac{\rho A_0 L^4}{EI_0}, \quad \beta_2 = \frac{L^3}{EI_0}, \quad m = \frac{M}{M_{v_0}}$$

siendo M_{v_0} la masa de la viga de altura constante h_0 , entonces la (2) queda

$$\begin{aligned} f^3(x)w_{x^4}(x, \tau) + 6f^2(x)f'(x)w_{x^3}(x, \tau) + 3[2f(x)f'^2(x) + f^2(x)f''(x)]w_{x^2}(x, \tau) + \\ + \frac{\beta_1}{T^2}f(x)w_{\tau^2}(x, \tau) + \frac{m\beta_1}{T^2}\delta(x - \tau)w_{\tau^2}(\tau, \tau) = \beta_2 P\delta(x - \tau) \end{aligned} \quad (3)$$

La deflexión estática máxima de la viga de sección uniforme de altura h_0 con la carga aplicada en el punto medio es

$$w_e = \frac{PL^3}{\zeta EI_0}$$

en la cual ζ es una constante que depende de las condiciones de vínculo. Tal deflexión se produce en el punto de aplicación de la carga si la viga está simplemente apoyada o empotrada, o en

$$\bar{x} = L(1 - 1/\sqrt{5})$$

si las condiciones son EM-SA y $\zeta = 48$ para SA-SA, $\zeta = 192$ para EM-EM y $\zeta = 48\sqrt{5}$ para EM-SA.

Llamando

$$u(x, \tau) = \frac{w(x, \tau)}{w_e}$$

y dividiendo miembro a miembro por w_e en la (3), se obtiene la ecuación diferencial del movimiento en las deflexiones relativas

$$\begin{aligned} f^3(x)u_{x^4}(x, \tau) + 6f^2(x)f'(x)u_{x^3}(x, \tau) + 3[2f(x)f'^2(x) + f^2(x)f''(x)]u_{x^2}(x, \tau) + \\ + \frac{\beta_1}{T^2}f(x)u_{\tau^2}(x, \tau) + \frac{m\beta_1}{T^2}\delta(x - \tau)u_{\tau^2}(\tau, \tau) = \zeta\delta(x - \tau) \end{aligned} \quad (4)$$

1. Sea $\alpha = 0$, es decir la sección transversal es uniforme. La (4) queda

$$u_{x^4}(x, \tau) + \frac{\beta_1}{T^2}u_{\tau^2}(x, \tau) + \frac{m\beta_1}{T^2}\delta(x - \tau)u_{\tau^2}(\tau, \tau) = \zeta\delta(x - \tau)$$

Como es sabido, la solución se propone en la forma

$$u(x, \tau) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(x) \psi_j(\tau) \quad (5)$$

en la cual las $\varphi_n(x)$ son los modos normales de vibración y las funciones $\psi_n(\tau)$ se determinan con

$$\frac{1}{T^2} \ddot{\psi}_n(\tau) + \frac{m}{\eta_n T^2} \varphi_n(\tau) \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(\tau) \ddot{\psi}_j(\tau) + \omega_n^2 \psi_n(\tau) = k_n \varphi_n(\tau) \quad (6)$$

con las condiciones iniciales $\psi_n(0) = \dot{\psi}_n(0) = 0$, siendo las ω_n las frecuencias circulares naturales y

$$\eta_n = \int_0^1 \varphi_n^2(x) dx, \quad k_n = \frac{\zeta}{\beta_1 \eta_n}$$

2. Sea $\alpha > 0$. Puede obtenerse una solución aproximada del problema empleando el método de Galerkin-Kantorovich. Adoptando la función aproximante

$$u_a = \varphi(x) \psi(\tau)$$

en la cual se elige

$$\varphi(x) = x^4 + \alpha_3 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x$$

con los coeficientes α_i calculados de modo que se satisfagan las condiciones de contorno que correspondan y procediendo de acuerdo con el método para la determinación de $\psi(\tau)$, a partir de la (4) se obtiene la ecuación diferencial

$$\frac{\beta_1}{T^2} (J_1 + m \varphi^2(\tau)) \ddot{\psi}(\tau) + J_2 \psi(\tau) = \zeta \varphi(\tau)$$

sujeta a las condiciones iniciales $\psi(0) = \dot{\psi}(0) = 0$, con

$$J_1 = \int_0^1 f \varphi^2 dx$$

$$J_2 = \int_0^1 [f^3 \varphi^{(4)} + 6f^2 f' \varphi''' + 6f f'^2 \varphi''] \varphi dx$$

RESULTADOS NUMÉRICOS

En los cálculos efectuados para diversos casos empleando la serie (5) se tomaron los dos primeros términos y el sistema de dos ecuaciones diferenciales resultantes de la (6) se resolvió numéricamente utilizando un método de Runge-Kutta de cuarto orden. En la referencia¹ se tomaron tres términos de la solución exacta para el cálculo de las deflexiones $w(0,5;t)$ suponiendo viga simplemente apoyada y los datos $E = 2,07 \times 10^{11}$ N/m², $I_0 = 1,04 \times 10^{-6}$ m⁴, $M = 70$ kg, $\rho A_0 = 7,04$ kg/m, $L = 10$ m, $P = 686,7$ N y $T = 3$ s. En la Figura 2 se comparan valores de estas deflexiones con los obtenidos en las mismas condiciones en el presente trabajo. Como se comenta en la referencia¹, se observa que el aumento de dos a tres términos de la solución exacta no produce diferencias significativas. La máxima deflexión que se observa es menor que 7,5 cm, lo cual no llega al 1 % de la longitud de la viga, valor admisible para la teoría basada en la hipótesis de pequeñas deflexiones.

Para otras situaciones consideradas en el presente estudio, para los parámetros β_1 y m se han supuesto los valores $\beta_1 = 0,15$ y $0,45$, $m = 0,45$ y $0,80$. En cuanto a la variación de la sección transversal se han considerado $\lambda_1 = 0,25$, $\alpha = 0,050$ y 1 .

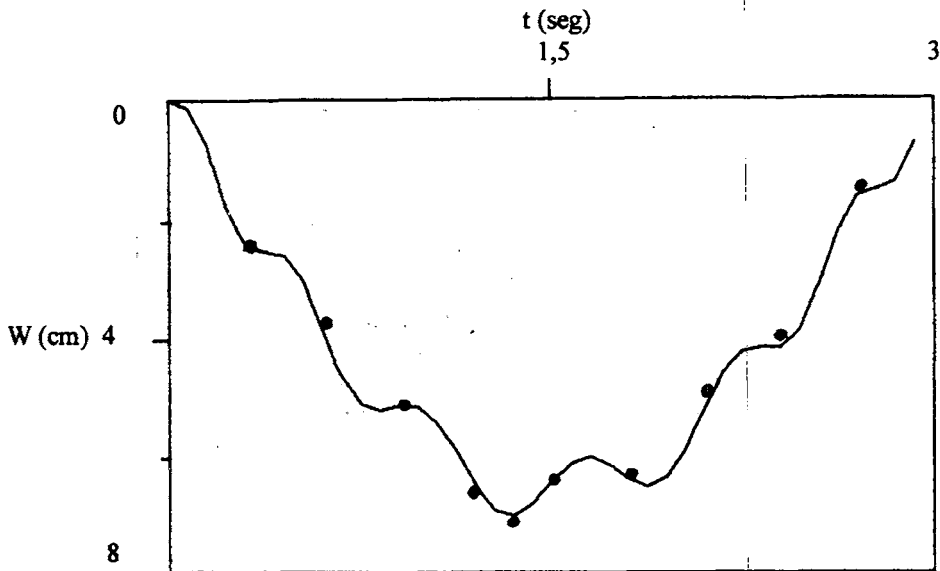


Figura 2. Deflexiones en el punto $x = 0,50$; viga SA-SA. (—)-presente estudio; (●)-ref.¹

Las Figuras 3, 4, y 5 muestran deflexiones relativas en función del tiempo en el punto medio de la viga para las condiciones de vínculo SA-SA y EM-EM y en el punto $x = 1 - \sqrt{5}$ para EM-SA. En las Figuras 6 y 7 se ha graficado la variación de la máxima deflexión relativa en el punto medio de la viga, supuesta SA-SA, en función del tiempo T de recorrido de la carga. Llamando "tiempo crítico" T_c al valor de T para el cual se produce el máximo de estas deflexiones, en los dos casos se observa que en el rango considerado de β_1 y m , la variación del parámetro m no influye significativamente en el valor de T_c , pero para m fijo, el cambio de β_1 varía sensiblemente el valor del tiempo crítico.

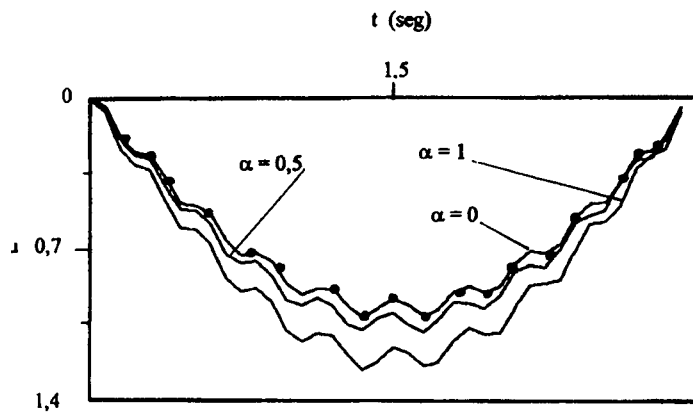


Figura 3. Deflexiones relativas en el punto $x = 0,50$; viga SA-SA; $\beta_1 = 0,15$; $m = 0,40$; $\lambda_1 = 0,25$; $T = 3$ s. (· ·)-Galerkin-Kantorovich; (•)-solución exacta

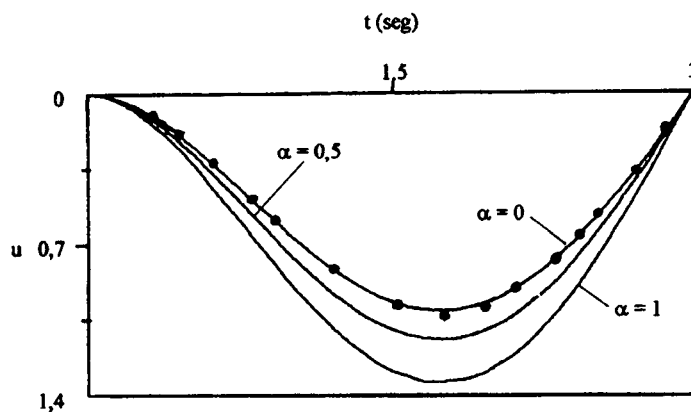


Figura 4. Deflexiones relativas en el punto $x = 1 - 1/\sqrt{5}$; viga EM-SA; $\beta_1 = 0,15$; $m = 0,40$; $\lambda_1 = 0,25$; $T = 3$ s. (· ·)-Galerkin-Kantorovich; (•)-solución exacta

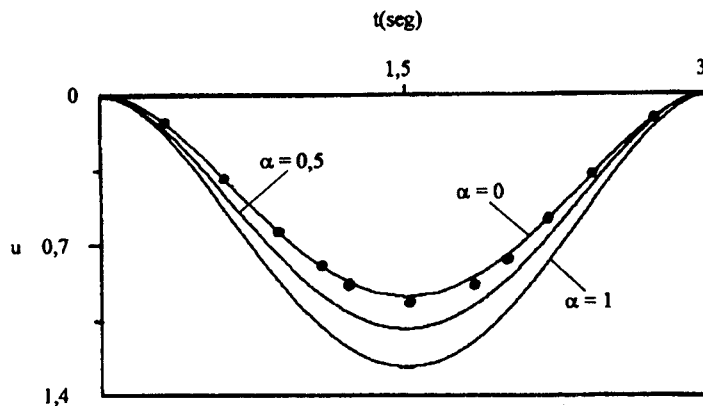


Figura 5. Deflexiones relativas en el punto $x = 0,50$; viga EM-EM; $\beta_1 = 0,15$; $m = 0,40$; $\lambda_1 = 0,25$; $T = 3$ s. (· ·)-Galerkin-Kantorovich; (•)-solución exacta

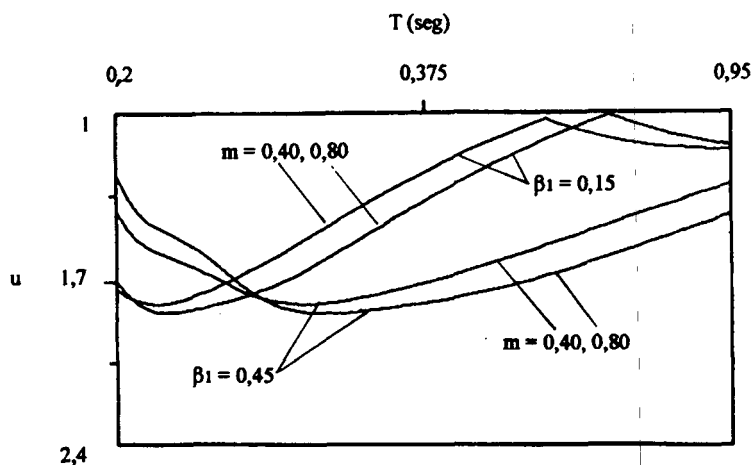


Figura 6. Deflexiones relativas máximas en el punto $x = 0,50$ en función de T ; viga SA-SA; sección uniforme; solución exacta

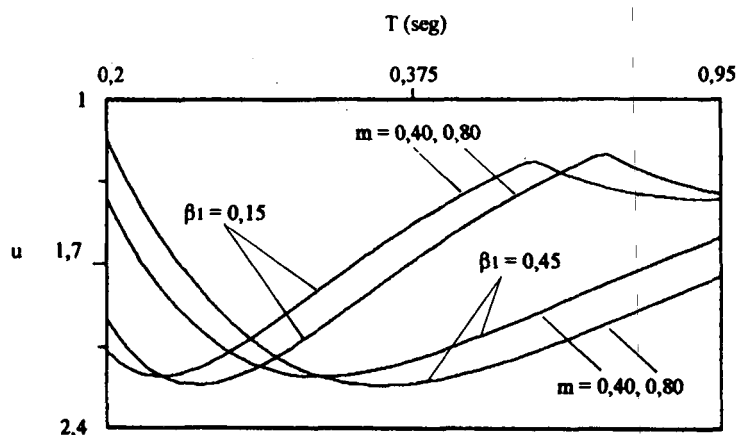


Figura 7. Deflexiones relativas máximas en el punto $x = 0,50$ en función de T ; viga SA-SA; $\lambda_1 = 0,25$; $\alpha = 1$

AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo ha sido auspiciado por el CONICET (Pia 1996-1997). El autor expresa su reconocimiento al Dr. P.A.A. Laura por su valioso apoyo.

REFERENCIAS

- 1 E. Esmailzadeh y M. Gorashi, "Vibration analysis of beam traversed by uniform partially distributed moving masses", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 184, 1, pp. 9-17, (1995).
- 2 H.P. Lee, "Dynamic response of a beam with a moving mass", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 191, 2, pp. 289-294, (1996).

- 3 G. Michaltsos, D. Sophianopoulos y A. Kounadis, "The effect of a moving mass and other parameters on the dynamic response of a simply supported beam", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. **191**, 3, pp. 357-362, (1996).
- 4 H. Zibdeh y R. Rackwitz, "Moving loads on beams with general boundary conditions", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. **195**, 1, pp. 85-102, (1996).
- 5 R.H. Gutiérrez y P.A.A. Laura, "Transverse vibrations of beams traversed by point masses: a general approximate solution", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. **195**, 2, pp. 353-358, (1996).
- 6 L. Fryba, "*Vibration of solids and structures under moving loads*", Noordhoff International, (1972).