

# TRANSFORMADA DE HILBERT, DESCOMPOSICIÓN MODAL EMPÍRICA Y SUS APLICACIONES EN EL ANÁLISIS DE VIBRACIONES LIBRES<sup>1</sup>

Ricardo I. Ramírez-Castro<sup>2</sup> y Luis A. Montejo<sup>3</sup>

**Resumen:** Este artículo presenta una introducción a la transformada de Hilbert y la descomposición modal empírica. Se enfatiza en la implementación de estas técnicas en el análisis de vibraciones libres, específicamente en la determinación de frecuencias naturales y amortiguamiento. Se exploran los retos que presenta su aplicación práctica, como la presencia de ruido en la señal original y los efectos de borde. Se concluye que estas técnicas muestran un gran potencial en aplicaciones que involucren el análisis de vibraciones tal como sistemas de monitoreo de salud estructural. Sin embargo, hay varios inconvenientes que todavía necesitan ser resueltos y deben emprenderse futuras investigaciones en este tema.

**Palabras claves:** amortiguamiento, frecuencia instantánea, identificación de sistemas, procesamiento de señales, transformada de Hilbert-Huang.

## HILBERT TRANSFORM, EMPIRICAL MODE DECOMPOSITION AND ITS APPLICATIONS TO FREE VIBRATION ANALYSIS

**Abstract:** This paper presents an introduction to the Hilbert transform and the empirical mode decomposition. Emphasis is given to the application of these techniques in the analysis of free vibrations, specifically the determination of natural frequencies and damping. Current challenges on their practical application, like the effect of noise and end effects, are explored. It is concluded that such techniques show a great potential for applications dealing with the analysis of vibration data like structural health monitoring systems. However, a number of issues still need to be addressed and further research in this area is warranted.

**Keywords:** Hilbert-Huang transform, instant frequency, damping, signal processing, system identification.

### INTRODUCCIÓN

El contenido de frecuencias de una señal es comúnmente examinado pasando la señal del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia a través de la transforma de Fourier. La transformada continua de Fourier de una señal  $x(t)$  se define como:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-i\omega t} dt \quad (1)$$

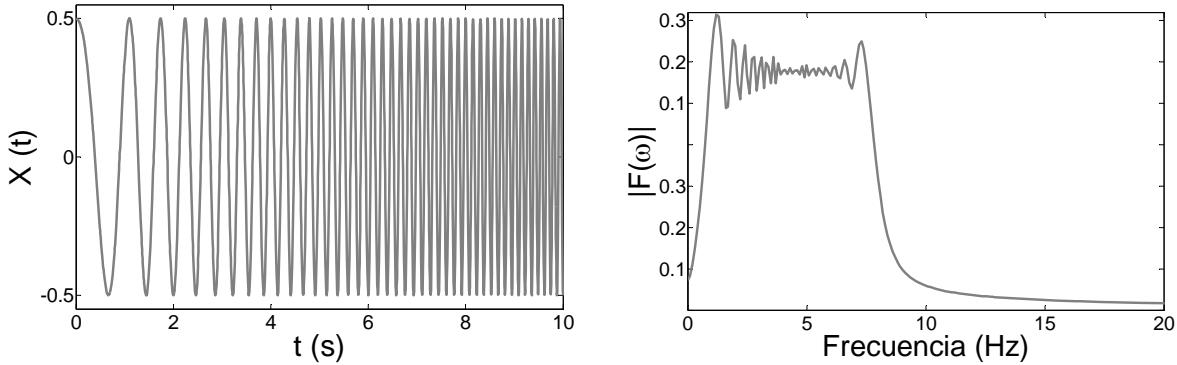
Los coeficientes de Fourier  $F(\omega)$  pueden ser considerados como una función compleja que mide el grado de similaridad entre la señal siendo analizada  $x(t)$  y las funciones sinusoidales complejas [ $e^{-i\omega t} = \cos(\omega t) - i\sin(\omega t)$ ]. Para cada frecuencia analizada ( $\omega$ ) se tendrá entonces un coeficiente de Fourier  $F(\omega)$ . Los resultados de la transformada de Fourier generalmente se presentan como una gráfica de los valores absolutos de los coeficientes versus sus respectivas frecuencias, esta grafica se conoce como el espectro de Fourier. La Figura 1(a) muestra una señal sinusoidal de amplitud constante donde la frecuencia crece linealmente en el tiempo desde 0.5 Hz hasta 8 Hz (señal “chirp”). La Figura 1(b) muestra el espectro de Fourier de esta señal, se puede apreciar que el contenido de frecuencias de la señal es exitosamente capturado en el espectro de Fourier. Sin embargo la distribución en el tiempo del contenido de frecuencias no se puede determinar. Este constituye uno de los mayores inconvenientes del análisis de Fourier: cuando se pasa al dominio de la frecuencia, la información del tiempo se pierde. Si la señal siendo analizada no tiene muchos cambios en

<sup>1</sup>Artículo recibido el 11de agosto de 2011 y aceptado para publicación el 13 de octubre de 2011.

<sup>2</sup>Asistente de investigación, Departamento de Ingeniería Mecánica, Universidad de Puerto Rico, Recinto Universitario de Mayagüez, Mayagüez, PR 00681-9000.

<sup>3</sup>Catedrático Auxiliar, Departamento de Ingeniería General, Universidad de Puerto Rico, Recinto Universitario de Mayagüez, Mayagüez, PR 00681-9000. E-mail: luis.montejo@upr.edu.

amplitud y contenido de frecuencias en el tiempo (es decir es lineal y estacionaria) este inconveniente no es muy grave. No obstante, un gran número de las señales de interés científico e ingenieril presentan características no lineales y no estacionarias cuyo estudio apropiado puede generar una gran cantidad de información útil sobre el sistema siendo analizado. Para analizar este tipo de señales es necesario realizar un análisis en ambos dominios, el tiempo y la frecuencia, simultáneamente.



**Figura 1:** a) Señal “chirp” con incremento lineal de frecuencia desde 0.5 Hz hasta 8 Hz; b) análisis de la señal a través del espectro de Fourier.

Existen varios métodos para pasar una señal del dominio del tiempo al dominio tiempo-frecuencia (o tiempo-escala), entre ellos tenemos: la transformada corta de Fourier, la distribución de Wigner-Ville, la transformada Wavelet, etc. No obstante, quizás la forma más simple de analizar los cambios de frecuencia y amplitud de una señal en el tiempo es usando la transformada de Hilbert (HT). Aunque esta transformada tiene el inconveniente de que solo puede ser utilizada en señales monocomponentes (es decir señales con un solo tono de frecuencia en un instante de tiempo), la HT ha tomado auge en los últimos años debido al desarrollo del método conocido como descomposición modal empírica (Huang et al., 1998). Este método permite descomponer una señal en monocomponentes facilitando así el posterior análisis de cada componente de manera independiente. Este artículo presenta cómo la transformada de Hilbert y la descomposición modal empírica se usan actualmente para el análisis de vibraciones y explora sus limitaciones con respecto a la contaminación por ruido y los efectos de borde.

## LA TRANSFORMADA DE HILBERT

La transformada de Hilbert (HT) de una función real \$x(t)\$ se define como (Hahn, 1996):

$$H[x(t)] = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau \quad (2)$$

Es decir, la HT es la convolución entre la función a ser estudiada con el inverso del tiempo y por tanto enfatiza en las propiedades locales de la función. La HT se utiliza principalmente para construir la señal analítica \$z(t)\$ (Gabor, 1946):

$$z(t) = x(t) + iy(t) = x(t) + iH[x(t)] \quad (3)$$

La señal analítica es una señal compleja cuyo espectro de frecuencias es nulo para frecuencias negativas, y cuya parte real es igual a la señal original. La ecuación (3) se puede reescribir como:

$$z(t) = a(t)e^{i\theta(t)} \quad (4)$$

donde:

$$a(t) = \sqrt{x^2 + y^2} \quad y \quad \theta(t) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad (5)$$

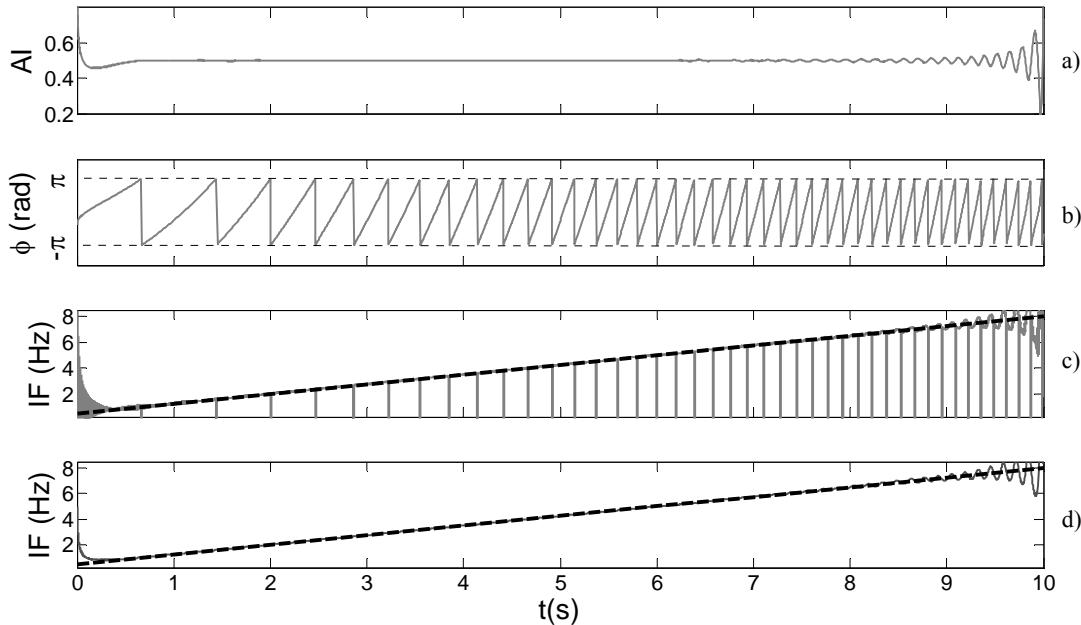
Es decir, la señal analítica permite separar una señal en sus componentes de amplitud \$a(t)\$ y fase instantáneas \$\theta(t)\$. Partiendo de la ecuación (4), Ville (1948) propuso el concepto de frecuencia instantánea (IF) como la derivada en el tiempo de la fase:

$$IF(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \theta(t) \quad (6)$$

La Figura 2 presenta el resultado del análisis usando la HT de la señal previamente analizada usando el espectro de Fourier (Figura 1). La Figura 2-a) muestra la amplitud instantánea; se puede apreciar que la amplitud que se obtiene es la envolvente de la señal en el tiempo. La Figura 2-b) muestra los resultados obtenidos para la fase instantánea. Las discontinuidades que se observan son debidas al uso de la función “arctan” (ecuación (5)), la cual siempre va a presentar saltos entre  $\pi$  y  $-\pi$ . Si la frecuencia instantánea es calculada directamente usando diferenciación numérica de los valores de fase instantánea, los resultados obtenidos van a exhibir discontinuidades en los mismos instantes donde la fase instantánea presenta discontinuidades, tal como se muestra en la Figura 2-c). Se debe notar en esta figura que, aparte de las discontinuidades, la evolución de las frecuencias en el tiempo es identificada satisfactoriamente. Para resolver el problema de las discontinuidades en la fase existen diferentes técnicas. Posiblemente la más obvia es “desenrollar” la fase (es decir sumar  $2\pi$  a la fase cada vez que se completa un ciclo para suavizar las discontinuidades) antes de tomar la derivada. Otra opción es calcular las fases de las diferencias en lugar de las diferencias de las fases (Feldman, 2011):

$$IF_n = \frac{1}{2\pi} \arctan \left( z_n \operatorname{conj} \left( z_{n+1} \right) \right) \quad (7)$$

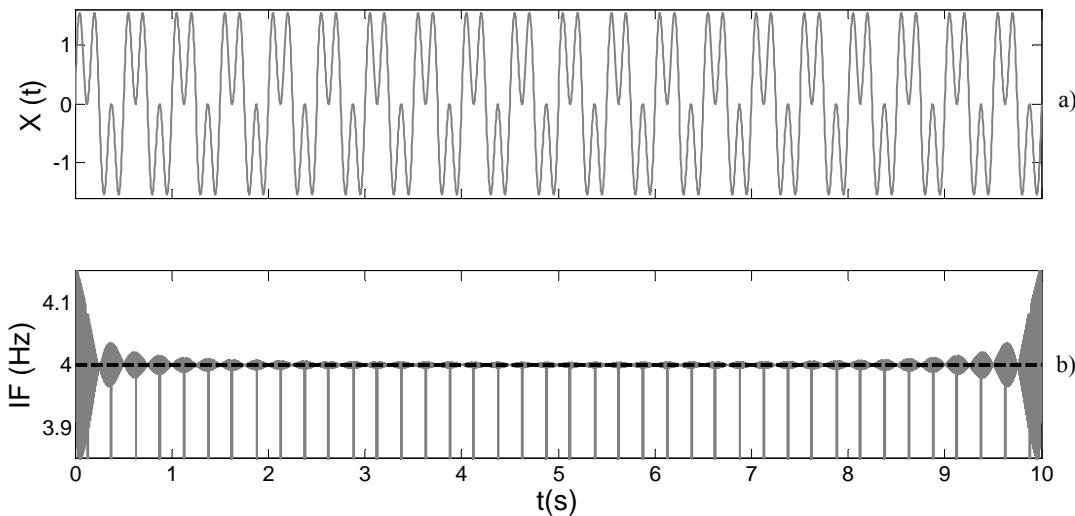
Las frecuencias instantáneas que se muestran en la Figura 2-d) fueron obtenidas usando la ecuación (7). Se puede apreciar que, sin necesidad de previamente desenrollar la fase, la variación de las frecuencias en el tiempo es identificado satisfactoriamente y sin discontinuidades.



**Figura 2:** Análisis de la señal a través de la transformada de Hilbert: a) amplitud instantánea; b) fase instantánea; c) frecuencia instantánea derivando la fase sin desenrollar (ecuación (6)); y d) frecuencia instantánea usando la ecuación (7). La línea negra entrecortada en c) y d) denota la variación teórica de la frecuencia.

La determinación de frecuencias instantáneas usando la señal analítica obtenida a partir de la transformada de Hilbert solo arrojará resultados satisfactorios si la señal es monocomponente, es decir que para cualquier instante de tiempo solo una frecuencia está presente en la señal. Cuando la señal presenta varias frecuencias ocurriendo simultáneamente, el resultado obtenido para la frecuencia instantánea será un solo valor (promedio) por instante de tiempo. La Figura 3-a) muestra una señal generada a partir de la suma de dos sinusoides de amplitud constante y frecuencias de 2 Hz y 6 Hz. Si la frecuencia instantánea de esta señal es analizada usando el procedimiento previamente descrito, el resultado que se obtiene es una frecuencia de 4 Hz como se muestra en la Figura 3-b). Para aplicar exitosamente la HT a señales con múltiples tonos, la señal original debe ser pre-procesada para descomponerla en monocomponentes, por ejemplo a

través del uso de filtros, descomposición modal empírica (Huang, 1998), descomposición vibracional Hilbert (Feldman, 2006) o la transformada wavelet “synchrosqueezed” (Daubuchies et al., 2011).



**Figura 3:** a) Sinusoidal compuesto por frecuencias de 2 y 6 Hz; b) Frecuencia instantánea usando la transformada de Hilbert.

## DESCOMPOSICIÓN MODAL EMPÍRICA

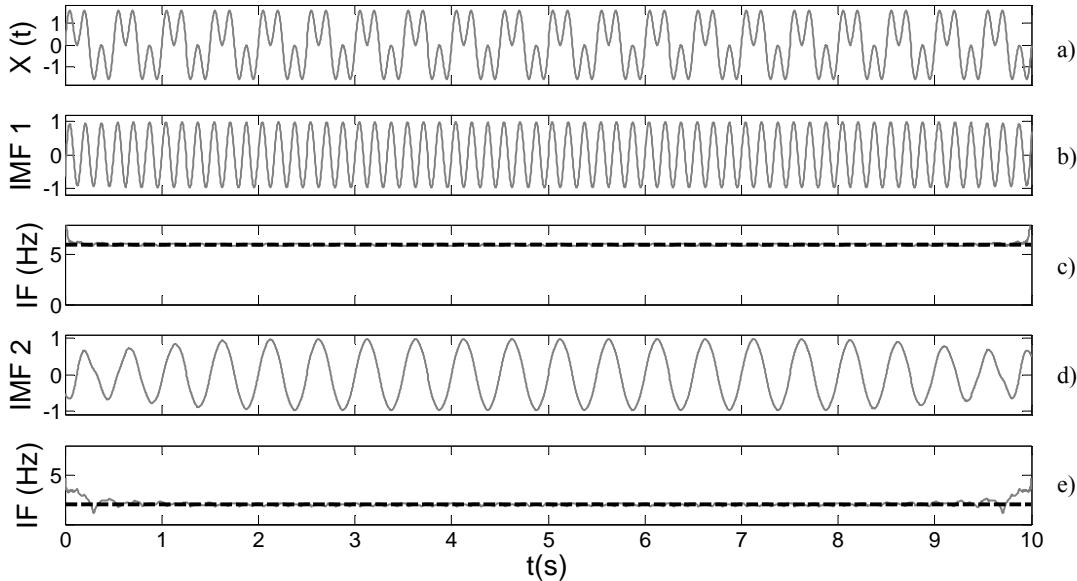
La descomposición modal empírica (“Empirical Mode Decomposition”, EMD) es una metodología iterativa y adaptativa desarrollada a finales de los 90 (Huang et al. 1998) para el análisis de procesos no lineales y no estacionarios. Se dice que es adaptativa porque, a diferencia de otras técnicas como Wavelets y Fourier, no requiere de una función base a priori para el análisis (como las Wavelet madres y los sinusoides de Fourier). La EMD trabaja bajo la premisa de que cualquier señal está compuesta de simples modos intrínsecos de oscilación. Cada modo puede ser lineal o no lineal, estacionario o no estacionario, y en cada instante de tiempo pueden coexistir varios modos de oscilación. El objetivo de la EMD es descomponer la señal original en sus modos intrínsecos modales (“Intrinsic Mode Functions”, IMF) a través de un proceso iterativo de “tamizado” (“sifting”). Los IMF finales deben cumplir con las siguientes características para poder aplicar efectivamente la HT a cada uno de ellos:

- c1. El número de extremos (máximos y mínimos) y el número de cruces por cero no deben diferir por más de uno.
- c2. En cualquier instante el promedio entre la envolvente de los puntos máximos y la envolvente de los puntos mínimos debe aproximarse a cero.

El procedimiento iterativo de “tamizado” propuesto por Huang para obtener los IMF es el siguiente:

- a1. Identificar los puntos extremos de la función  $x$  (máximos y mínimos)
- a2. Interpolar entre los puntos máximos usando una “spline” cúbica para obtener una envolvente  $e_{max}$ . Igual con los puntos mínimos para obtener  $e_{min}$ . Las envolventes deben cubrir toda la señal.
- a3. Calcular el promedio de las envolventes:  $m = (e_{max} + e_{min})/2$
- a4. Calcular  $h = x - m$ ,  $h$  es el candidato a ser IMF. Los pasos 1 a 4 se deben iterar con  $h$  como la nueva función hasta que se cumplan las dos condiciones antes descritas para los IMFs y cualquier condición adicional.
- a5. Una vez se han cumplido las condiciones,  $h$  pasa a ser el primer IMF.
- a6. Calcular el residuo:  $r = x - \sum IMF$ ,  $r$  se convierte en la nueva función y se repiten los pasos para hallar el siguiente IMF.
- a7. El procedimiento se repite hasta que el residuo se pueda considerar insignificante o constituya una función monotónica (sin máximos o mínimos).

Al final la señal queda descompuesta en sus IMFs y un residuo, es decir se puede reconstruir como  $x = \sum IMF + r$ . Después de descomponer la señal, la HT se usa para analizar las frecuencias y amplitudes instantáneas de cada IMF. A todo este proceso de descomponer la señal usando EMD y después aplicar la HT a cada uno de los IMFs se le conoce como la transformada de Hilbert-Huang (HHT). El resultado de aplicar la HHT a la señal compuesta de sinusoides de frecuencias 2 Hz y 6 Hz se muestra en la Figura 4 en donde los IMFs analizados fueron obtenidos mediante un proceso de 50 iteraciones. Se puede apreciar que en el primer IMF quedó capturado el modo de oscilación con la frecuencia más alta (6 Hz) y en el segundo IMF quedó el modo de 2 Hz. Debido a la naturaleza de procedimiento de tamizado, las frecuencias altas siempre se verán reflejadas en los primeros IMFs.



**Figura 4:** a) Sinusoidal compuesto por frecuencias de 2 y 6 Hz; b) IMF 1; c) IF correspondiente al primer IMF, d) IMF 2; e) IF correspondiente al segundo IMF.

Como se puede apreciar el método es definido por un algoritmo. Esto constituye un gran inconveniente para la HHT, ya que a diferencia de otros métodos para el análisis de procesos no lineales como la transformada Wavelet, este método carece de una sólida base matemática. Al estar definido por un algoritmo iterativo los resultados finales pueden variar dependiendo de cómo se tratan las distintas variables involucradas. Dos de los puntos más críticos son cómo definir las condiciones de borde para construir las envolventes en el punto a2 del algoritmo y qué condición especificar para detener el proceso de “tamizado” de un IMF en el punto a4 del algoritmo.

#### Efecto de las condiciones de borde y criterios de parada (número de iteraciones)

En el punto a2 del algoritmo para procesar la EMD se especifica que las envolventes máximas y mínimas deben cubrir la totalidad de la señal, lo cual no es obvio de hacer, ya que por su posición el primer y el último punto de la señal no se pueden definir como máximo o mínimos. La pregunta es entonces ¿cómo “extender” la envolvente para que cubra toda la señal? Dos procedimientos distintos son comúnmente usados. Uno consiste en forzar tanto el punto inicial como el punto final a ser ambos máximos y mínimos, es decir que tanto el punto inicial como el punto final van a ser parte tanto de la envolvente máxima como de la envolvente mínima. La segunda alternativa consiste en adicionar puntos extremos a ambos lados de la señal usando simetría especular. Esta última alternativa por lo general genera mejores resultados.

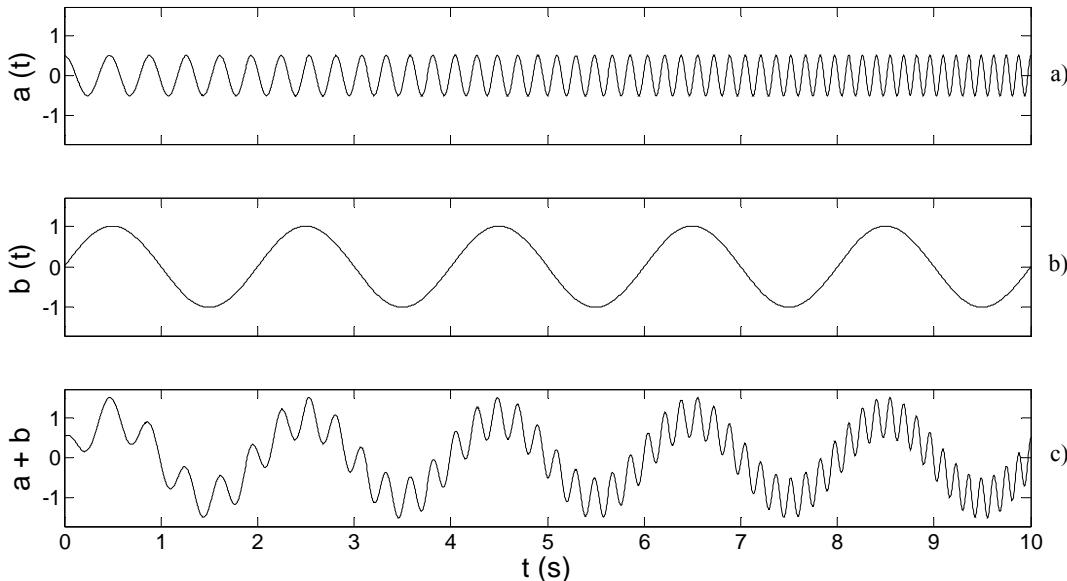
Otro punto crítico es decidir cuándo dejar de iterar en el proceso de formación de un IMF (punto a4 en el algoritmo). Si bien la primera condición (c1) que debe cumplir un IMF es bastante clara y fácil de cuantificar, la segunda condición (c2) puede dar lugar a diversas interpretaciones: ¿qué tan cercano a cero debe ser el promedio de las envolventes? La comparación debiera hacerse en relación a la razón entre la amplitud del promedio de las envolventes y la amplitud del IMF en cuestión. Sin embargo, imponer un valor muy bajo podría provocar un número excesivo de iteraciones que a su vez podría generar sobre-descomposición y contaminar otros IMFs. Teniendo en cuenta esto, Huang et al. (1999; 2003) propusieron contabilizar el número de extremos y el número de cruces por cero en cada iteración y parar de iterar una vez estos números se mantengan constantes durante  $S$  iteraciones. Los mismos autores a través de un estudio numérico

sugirieron que un valor de  $S$  entre 4 y 8 era adecuado. Un segundo criterio ampliamente utilizado es el propuesto por Rilling et al. (2003). En este criterio se plantean dos límites, uno para controlar el valor del promedio global de las envolventes y otro para controlar las variaciones locales.

La señal que se muestra en la Figura 5-c) fue generada con el objetivo de explorar el efecto de las condiciones de borde y el número de iteraciones en el resultado de la EMD. Esta señal es la suma de un sinusoidal de frecuencia 0.5 Hz (Figura 5-b) y un “chirp” con frecuencias entre 2 Hz y 8 Hz (Figura 5-a). El proceso iterativo de la EMD para esta señal es mostrado en las Figuras 6 y 7.

La Figura 6 fue generada para mostrar las envolventes de la señal requeridas para el proceso iterativo de “tamizado” representadas por líneas grises entrecortadas y la Figura 7-a) muestra el primer IMF antes de comenzar la segunda iteración. La Figura 7-b) muestra el promedio de las envolventes que se substrae de la señal iterativa y la 7-c), el primer IMF luego de haber culminado el proceso de la segunda iteración. Finalmente, la Figura 7-d) muestra el residuo que será utilizado para continuar la siguiente iteración.

Los resultados de aplicar la EMD con varias combinaciones de  $S$  y condiciones de borde se muestran en la Figura 8; las líneas negras continuas representan el resultado de la EMD y las líneas grises entrecortadas representan el objetivo. Las Figuras 8-a) y 8-b) fueron generadas con condiciones de borde forzadas; sin embargo para la Figura 8-a) se utilizó  $S=6$  y para la Figura 8-b),  $S=50$ . Las Figuras 8-c) y 8-d) fueron generadas usando simetría especular para la condiciones de borde; para la Figura 8-c) se utilizó  $S=6$  y para la Figura 8-d),  $S=50$ . En general, los mejores resultados se obtienen cuando se usa simetría especular para las condiciones de borde. Se puede apreciar también que un valor elevado de  $S$  no necesariamente garantiza mejores resultados. Por el contrario, bajo ciertas circunstancias demasiadas iteraciones pueden llegar a degenerar el IMF, como se puede apreciar al pasar de  $S=6$  a  $S=50$  en las Figuras 8-a) y 8-b), respectivamente.



**Figura 5: a) Señal “chirp”; b) Sinusoidal de frecuencia constante; c) Señal resultante [(a)+(b)]**

## ANÁLISIS DE VIBRACIONES

### Sistemas de un grado de libertad

Cuando se pretende analizar la respuesta dinámica libre de un sistema de un solo grado de libertad se puede aplicar la HT directamente sin necesidad de previamente procesar la señal usando EMD porque su respuesta libre es monótonica.

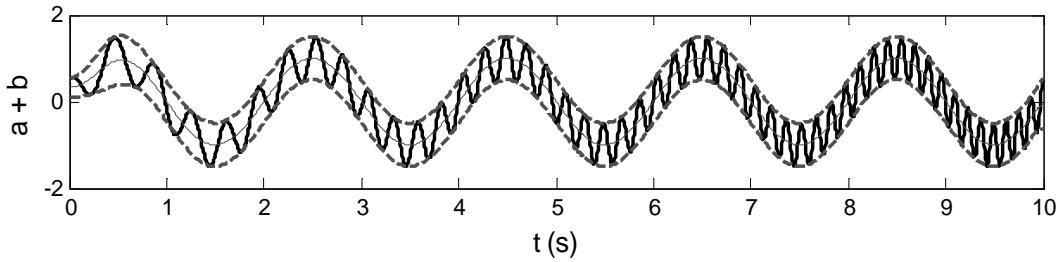
La Figura 9-a) muestra la respuesta libre de un sistema de un grado de libertad con coeficiente de amortiguamiento de 5% y frecuencia natural de vibración 1 Hz. Analíticamente la respuesta de este sistema se puede expresar como:

$$D = Ae^{-\zeta\omega_n t} \cos(\omega_d t - \alpha) \quad (7)$$

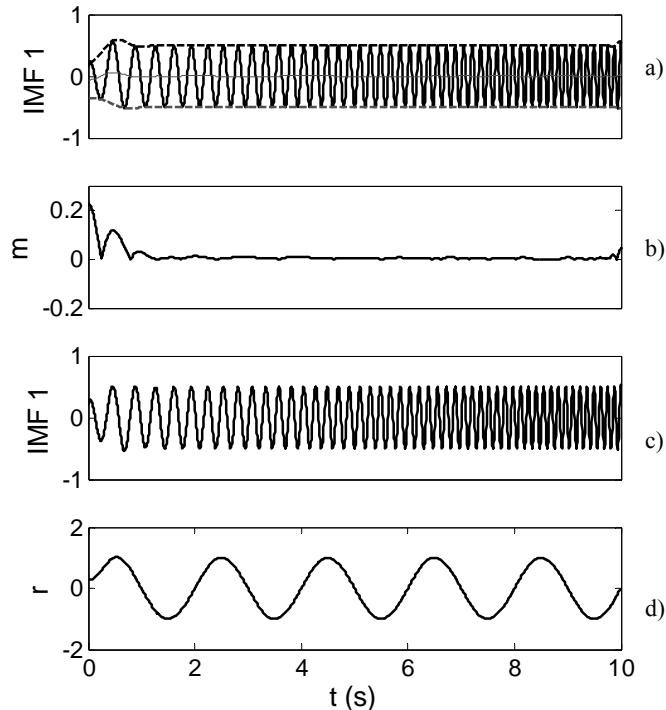
donde  $\omega_n$  es la frecuencia natural de vibración,  $\omega_d$  es la frecuencia amortiguada y  $\zeta$  el coeficiente de amortiguamiento. Por lo tanto, la frecuencia que se obtiene a partir de un análisis de la señal usando HT es la frecuencia amortiguada del sistema (Figura 9(b)). Como la amplitud instantánea (Figura 9(c)) es la amplitud envolvente de la respuesta ( $Ae^{-\zeta\omega_n t}$ ), si se linealiza tomando logaritmo natural (Figura 7-d)), la pendiente de la recta resultante será igual al producto entre la frecuencia natural y el coeficiente de amortiguamiento ( $\zeta\omega_n$ ). La frecuencia natural de vibración y el coeficiente de amortiguamiento pueden ser calculados entonces como:

$$\zeta = \sqrt{\frac{(\zeta\omega_n)^2}{\omega_d^2 + (\zeta\omega_n)^2}} \quad (8)$$

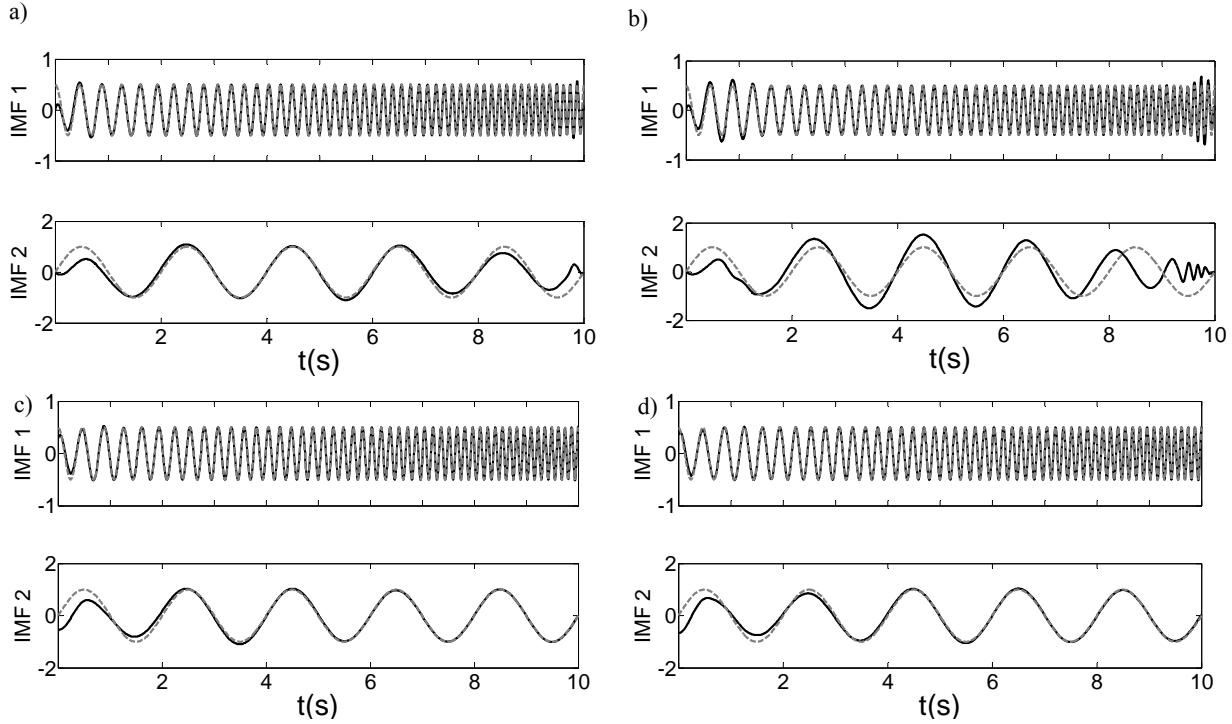
$$\omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (9)$$



**Figura 6:** Señal resultante [(a) + (b)] con sus envolventes.



**Figura 7:** a) Primer IMF antes de la segunda iteración; b) promedio (m) de las envolventes; c) IMF luego de realizar la segunda iteración; y d) residuo resultante de la iteración.



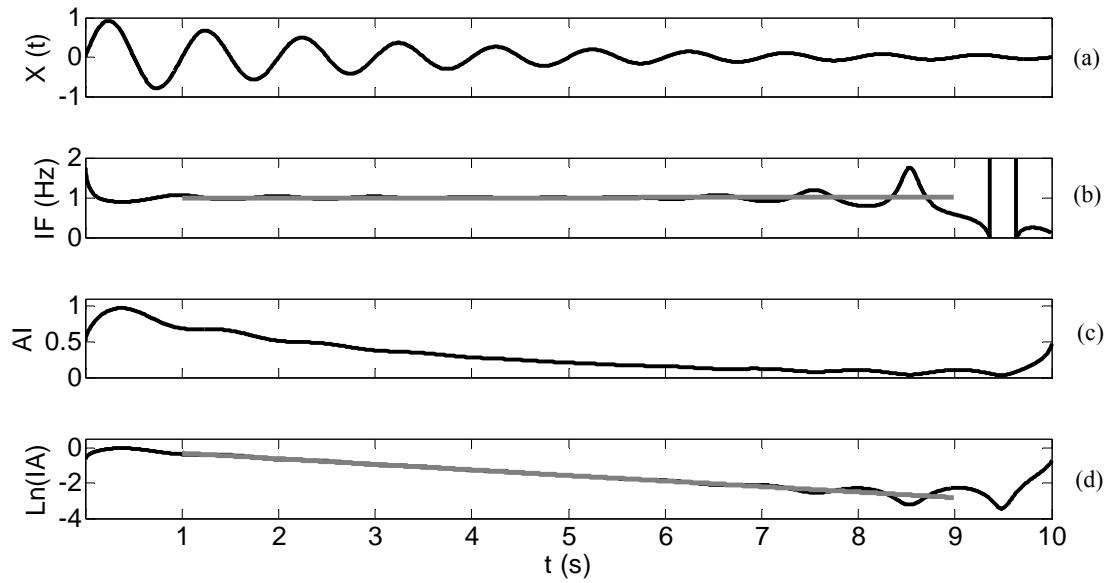
**Figura 8: Resultados de la EMD para: a)  $S = 6$  / condiciones de borde forzadas; b)  $S = 50$  / condiciones de borde forzadas; c)  $S = 6$  / condiciones de borde con simetría especular; d)  $S = 50$  / condiciones de borde con simetría especular.**

El método de los mínimos cuadrados fue utilizado para ajustar una línea recta (líneas grises en las Figuras 9) a los valores de frecuencia y amplitud instantánea. En la Figura 9 se puede apreciar que aparecen algunas irregularidades cerca de los tiempos iniciales y finales en las frecuencias y amplitudes instantáneas debido a los errores de borde. Para reducir este efecto el primer y el último segundo de respuesta fueron descartados a la hora de calcular los parámetros buscados. Una segunda opción consiste en añadir valores en los extremos usando simetría especular (como se realizó en la EMD), los resultados obtenidos usando esta metodología se muestran en la Figura 10. Los resultados obtenidos por ambos métodos (Figuras 9 y 10) están todos dentro del 1% de los valores teóricos.

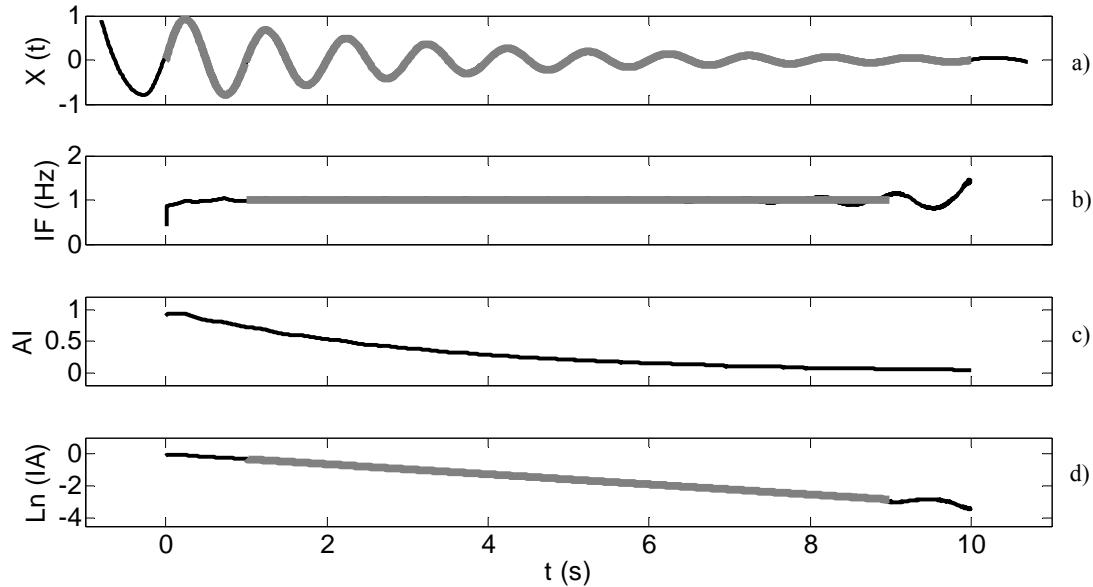
#### Sistemas de varios grados de libertad y el efecto de ruido en la señal

Cuando el sistema a ser analizado presenta varios grados de libertad, la respuesta debe ser procesada usando la EMD con el fin de separar la contribución de cada modo, después la HT puede ser aplicada a cada IMF para identificar la frecuencia y el amortiguamiento de cada modo. La Figura 11-a) muestra la respuesta libre de un sistema de dos grados de libertad con frecuencias naturales de 1 Hz y 2 Hz, y razón de amortiguamiento 5% en ambos modos. La línea negra muestra la respuesta ideal sin ruido y la línea gris representa la respuesta con ruido añadido con una relación señal ruido (SNR) de 57 dB (ruido gaussiano al 5%). Las Figuras 11-b) a 11-e) muestran los resultados obtenidos aplicando la HHT a la respuesta del sistema sin ruido. Las Figuras 11-b) y 11-c) muestran el primer y el segundo IMF respectivamente, las Figuras 11-d) y 11-e) muestran las frecuencias instantáneas y el logaritmo de las amplitudes instantáneas respectivamente. Un valor de  $S=6$  y condiciones de borde de simetría fueron usados para la EMD. Los parámetros identificados se resumen en la Tabla 1, se aprecia que los valores obtenidos para la frecuencia y el amortiguamiento son casi idénticos a los teóricos.

Uno de los mayores retos en cualquier método de análisis de señales es lidiar con la presencia de ruido en la señal original. Las Figuras 12 presentan el resultado de aplicar la EMD a la señal con 5% de ruido gaussiano. La Figura 12-a) muestra el resultado con  $S=6$  y la Figura 12-b) muestra el resultado con  $S=200$ . En la Figura 12-a) se puede apreciar que los primeros 3 IMFs contienen solamente ruido. El IMF 4 contiene parte del modo de frecuencia 2 Hz, sin embargo poco después de 6 segundos el modo parece desaparecer y continuar en el IMF 5. El mismo fenómeno sucede con el modo de frecuencia 1 Hz; los primeros 6 segundos parecen ser capturados en el IMF 5 y los últimos 4 segundos en el IMF 6. Este fenómeno se conoce como mezcla de modos y es común que suceda en señales contaminadas con ruido. Si utilizamos un criterio más estricto ( $S=200$ ) se puede apreciar que ya no obtenemos 3 sino 5 IMFs de ruido (Figura 12-b)) y que ahora aproximadamente los primeros 8 segundos de los modos son capturados antes de que ocurra mezcla de modos. Las frecuencias y amplitudes instantáneas correspondientes a los IMFs obtenidos con  $S=200$  se presentan en la Figura 13 y los parámetros calculados se resumen en la Tabla 1.



**Figura 9:** a) Respuesta libre de un sistema de un grado de libertad; b) frecuencia instantánea; c) amplitud instantánea; y d) logaritmo natural de la amplitud instantánea.

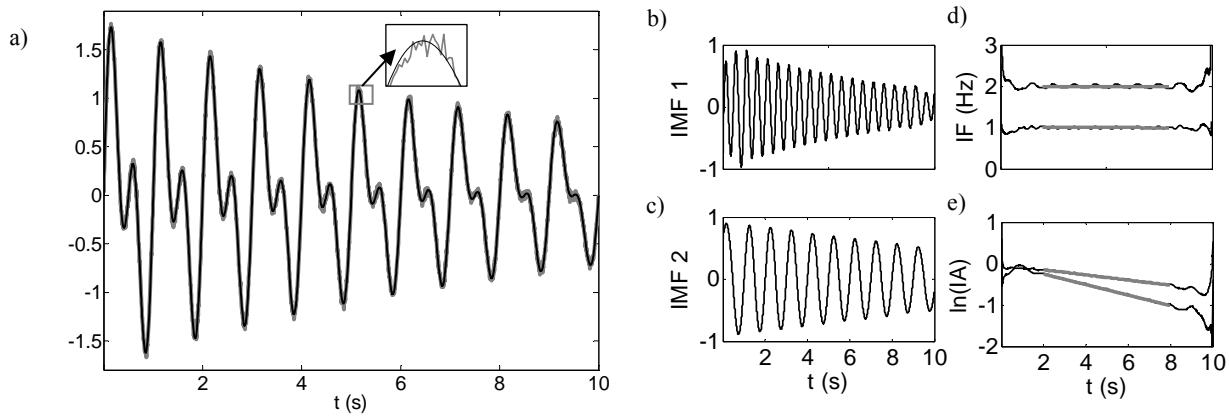


**Figura 10:** Igual que la Figura 7, pero han sido añadidos valores al comienzo y al final de la señal usando simetría especular para aminorar los efectos de borde.

Se puede ver que, aunque no tan precisos como los obtenidos para la señal sin ruido, los parámetros calculados son aceptables. Se debe además notar que la SNR reportada (57 dB) es un valor promedio para toda la señal, sin embargo, como la amplitud de la señal decrece en el tiempo y la amplitud del ruido se mantiene constante, la SNR también debe disminuir en el tiempo. La Figura 14 muestra como la SNR disminuye en el tiempo, la línea horizontal entrecortada corresponde al valor promedio reportado. Si se asume que el desempeño de la EMD fue satisfactorio durante los primeros 8 segundos, podemos decir entonces que, para este caso en específico, el nivel de ruido crítico corresponde a un SNR de ~52 dB.

**Tabla 1: Frecuencias naturales y coeficientes de amortiguamiento estimados para un sistema de 2 grados de libertad.**

	Modo 1		Modo 2	
	$\omega_n$	Z	$\omega_n$	$\zeta$
Teórico	2 Hz	1 %	1 Hz	1%
Sin ruido / S=6	1.9982	1.01 %	1.0021	0.99 %
Con ruido / S=200	2.0312	1.09 %	0.9679	1.84 %



**Figura 11:** a) Respuesta libre de un sistema de dos grados de libertad con frecuencias naturales de 1 Hz y 2 Hz, y razón de amortiguamiento 5% en ambos modos; b) IMF 1; c) IMF 2; d) frecuencias instantáneas; y e) logaritmo de las amplitudes instantáneas.

## CONCLUSIONES

Este artículo presentó una introducción a la transformada de Hilbert, la Descomposición Modal Empírica, y sus aplicaciones al análisis de vibraciones. Se concluye que el uso conjunto de estas técnicas (metodología que se conoce como la transformada de Hilbert-Huang) tiene un gran potencial en aplicaciones que involucren el análisis de vibraciones, ya que permite la identificación de no solo las frecuencias naturales de vibración sino también sus respectivos coeficientes de amortiguamiento. Esta última característica puede ser muy útil para implementar sistemas de monitoreo de salud estructural donde las propiedades dinámicas de la estructura son comparadas con sus propiedades iniciales para determinar la ocurrencia de daño (Montejo, 2011), más aún si se tiene en cuenta que esta metodología puede ser programada para que opere en tiempo “casi” real (Rilling, 2003).

Probablemente el mayor reto que afronta la HHT y más específicamente la EMD, es el estar definida por un algoritmo iterativo y carecer de una formulación matemática formal. Al estar definida por un algoritmo iterativo, los resultados finales van a depender de la forma en la cual el algoritmo fue implementado y la definición de las variables y estructuras de control. El método es especialmente sensible cuando la señal está contaminada por ruido. En general, la HHT es una técnica que todavía está en desarrollo y que ha tenido un gran auge en los últimos años, al punto de tener su propia revista arbitrada (“Advances in Adaptive Data Analysis”) y tres conferencias internacionales (<http://ldaa.fio.org.cn/>) dedicados exclusivamente a este tema. Uno de los algoritmos ampliamente utilizados para aplicarla, propuesto por Rilling, Flandrin y Gonçalves, está disponible en el portal de Internet (<http://perso.ens-lyon.fr/patrick.flandrin/emd.html>). Para utilizar el mismo es necesario que el programa de cómputo utilizado contenga herramientas para analizar distribuciones tiempo-frecuencia las cuales para MATLAB y GNU Octave, pueden descargarse desde (<http://tftb.nongnu.org/>).

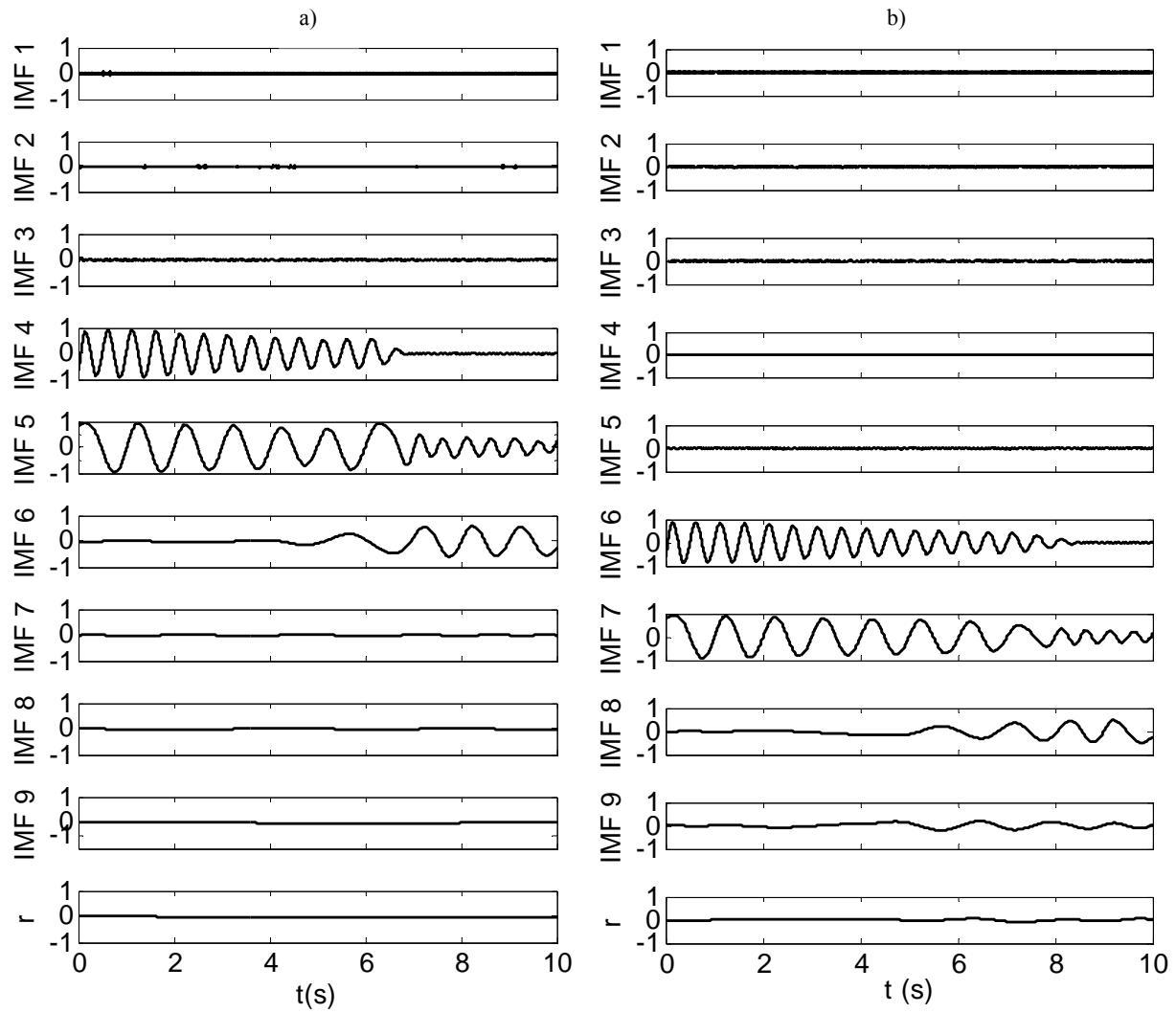


Figura 12: EMD para la señal con ruido (SNR 57dB); a)  $S = 6$ ; b)  $S = 200$ .

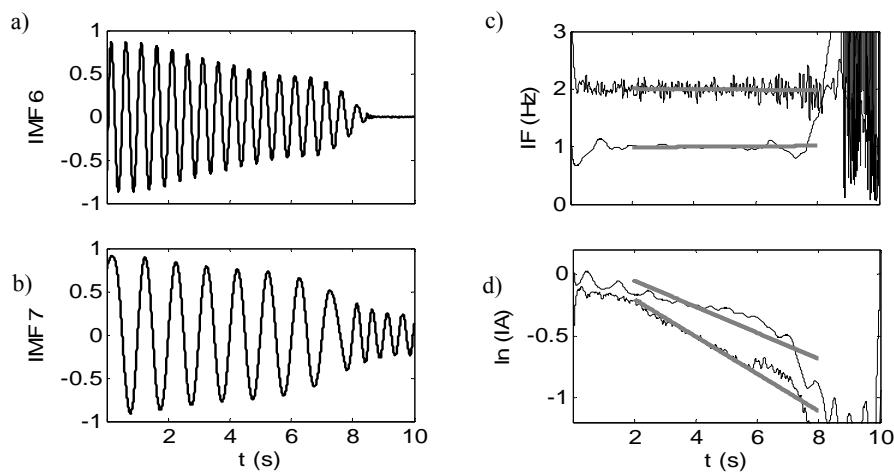
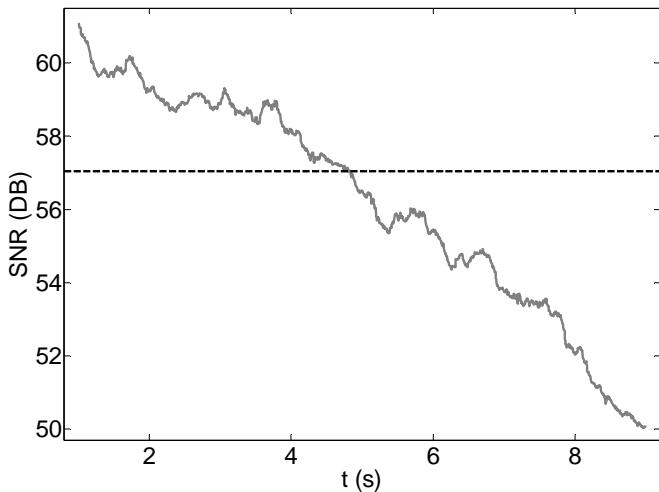


Figura 13: a) Análisis de los IMF 6; b) Análisis de los IMF 7; c) frecuencias instantáneas; y d) logaritmo de las amplitudes instantáneas.



**Figura 14: Razón señal-ruido en decibeles con respecto al tiempo.**

## AGRADECIMIENTOS

Esta investigación es patrocinada por la National Science Foundation, Grant No. CMMI-1121146. Los autores agradecen este patrocinio.

## REFERENCIAS

- Daubuchies, I., Lu, J. y Wu, H.T. (2011). "Synchrosqueezed wavelet transforms: An empirical mode decomposition-like tool", *Applied and Computational Harmonic Analysis*, Vol. 30, pp. 243-261.
- Feldman, M. (2006). "Time varying vibration decomposition and analysis based on the Hilbert transform", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 295, pp. 518-530.
- Feldman, M. (2011). "Hilbert transform in vibration analysis", *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 25, pp. 735-802.
- Gabor, D. (1946). "Theory of communication", *Proceedings of the IEEE*, Vol. 93, Nro. III, pp. 429-457.
- Hahn, S. L. (1996). *Hilbert Transforms in Signal Processing*, Artech House (print-on-demand).
- Huang, N. E., Shen, Z., Long, S. R., Wu, M. C., Shih, H. H., Zheng, Q., Yen, N. C., Tung, C. C., y Liu, H. H. (1998). "The empirical mode decomposition and the Hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis", *Philosophical Transactions of the Royal Society*, Vol. A 454, pp. 903-995.
- Huang, N. E., Wu, M. C., Long, S. R., Shen, S. P., Qu, W., Gloersen, P. y Fan, K. L. (2003). "A confidence limit for the empirical mode decomposition and Hilbert spectral analysis", *Proceedings of the Royal Society of London*, Vol. 459, pp. 2317-2345.
- Huang, N.E. (2005). "Introduction to the Hilbert Huang transform and its related mathematical problems", en: *Hilbert Huang Transform and Its Applications*, N.E. Huang and S. Shen, Editors, World Scientific Publishing Company, pp. 1-26.
- Huang, N.E., Shen, Z. y Long, S.R. (1999). "A new view of nonlinear water waves: the Hilbert spectrum", *Annual Review of Fluid Mechanics*, Vol. 31, pp. 417-57.
- Montejo, L.A. (2011). "Signal processing based damage detection in structures subjected to random excitations", *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 40, Nro. 6, pp. 745-762.
- Rilling, G., Flandrin, P. y Gonçalvès, P. (2003). "On empirical mode decomposition and its algorithms", *IEEE-EURASIP Workshop on Nonlinear Signal and Image Processing NSIP-03*, Grado, Italia.
- Ville, J. (1948). "Theorie et application de la notion de signal analytical", *Cables et Transmissions*, Vol. 2a, Nro. 1, pp. 61-74.