Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАРОДНОГО ХОЗЯЙСТВА
И ГОСУДАРСТВЕННОЙ СЛУЖБЫ ПРИ ПРЕЗИДЕНТЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ»

А. Скроботов

«Тестирование на наличие взрывных пузырей: обзор»

(препринт)

Москва 2020

Работа сделана в рамках научно-исследовательской работы, выполненной в соответствии с Государственным заданием РАНХиГС при Президенте Российской Федерации на 2020 год

Аннотация

В данной работе приводится обзор методов тестирования взрывных пузырей во временных рядах. Рассматриваются различные проблемы, связанные с включением константы в регрессию, проблема начальных значений и проблема возможной нестационарной волатильности в динамике временного ряда. Также обсуждаются методы датировки взрывных пузырей.

Ключевые слова: единичные корни, взрывной пузырь, нестационарная влатильность, датировка, бутстрап, объединение отвержений, взрывной процесс.

JEL: C12, C22.

Abstract

This paper provides an overview of methods of testing for explosive bubbles in time series. Various issues associated with the inclusion of constants in regression, the problem of initial condition and the problem of possible non-stationary volatility in the dynamics of a time series are considered. Methods for dating the explosive bubbles are also discussed.

Key words: unit root, exlosive bubble, non-stationary volatility, date-stamping, bootstrap, union of rejection, explosive behaviour.

JEL: C12, C22.

1 Введение

Пузыри, если они происходят, должны показывать взрывное поведение цен (см. [1]). Статистически это означает, что данное свойство можно аппроксимировать взрывным авторегрессионным поведением, например, процессом

$$y_t = \mu + \delta y_{t-1} + \varepsilon_t, \tag{1}$$

где в некоторых подпериодах данных $\delta > 1$.

Идея рациональных может быть описана, используя теорию текущей стоимости, где фундаментальная цена актива равна сумме текущих дисконтированных значений ожидаемой будущей последовательности дивидендов. Из условия отсутствие арбитража следует, что

$$P_t = \frac{1}{1+R} E_t(P_{t+1} + D_{t+1}), \quad (2)$$

где P_t – реальная цена акции в момент времени t, D_t – реальные дивиденды, полученные от владения активом между $t-1$ и t, R – норма дисконтирования ($R > 0$, без потери общности, R не зависит от времени), можно получить, что

$$p_t = p_t^f + b_t, \quad (3)$$

(в лог-линейной аппроксимации, см. [2]), где

$$p_t^f = \frac{\kappa-\gamma}{1-\rho} + (1-\rho)\sum_{i=0}^{\infty} \rho^i E_t d_{t+1+i}, \quad (4)$$

$$b_t = \lim_{t\to\infty} \rho^i E_t p_{t+i},$$

$$E_t(b_{t+1}) = \frac{1}{\rho} b_t = (1 + \exp(\overline{d-p}))b_t, \quad (5)$$

с $p_t = \log(P_t)$, $d_t = \log(D_t)$, $\gamma = \log(1+R)$, $\rho = 1/(1+\exp(\overline{d-p}))$, где $(\overline{d-p})$ – среднее отношения логарифма дивиденда и цены, $\kappa = -\log(\rho) - (1-\rho)\log(1/\rho - 1)$.

В уравнении (3) цена определяется двумя слагаемыми, p_t^f, фундаментальной стоимостью акции (определяемой ожидаемыми дивидендами), и b_t, компонентой рационального пузыря. При $\exp(\overline{d-p}) > 0$ рациональный пузырь b_t является субмартингалом и взрывным в ожидании. Из уравнения (5) следует, что

$$b_t = \frac{1}{\rho} b_{t-1} + \varepsilon_{b,t} = (1+g)b_{t-1} + \varepsilon_{b,t}, \quad (6)$$

где $E_{t-1}(\varepsilon_{b,t}) = 0$, $g = \frac{1}{\rho} - 1 = \exp(\overline{d-p}) > 0$ – скорость роста натурального логарифма пузыря, $\varepsilon_{b,t}$ – мартингал-разность.

Если пузыря нет, то есть когда $b_t = 0$, из (3) следует, что p_t полностью определяется

p_t^f, и, следовательно, d_t. Тогда из (4) можно получить, что

$$d_t - p_t = -\frac{\kappa-\gamma}{1-\rho} - \sum_{i=0}^{\infty} \rho^i E_t(\Delta d_{t+1+i}). \qquad (7)$$

Если p_t и d_t оба интегрированные процессы, тогда из (7) следует, что они коинтегрированы с коинтегрирующим вектором $(1,-1)$. Однако при наличии пузыря из (6) следует наличие взрывного поведения у b_t, поэтому взрывное поведение будет и у p_t вне зависимости от поведения d_t. В этом случае Δp_t юудет также взрывным процессом, который не может быть стационарным. В [3] было предложено несколько подходов для исследования наличие пузыря, которые заключаются в том, чтобы тестировать на стационарность Δp_t или тестировать наличие коинтеграции между p_t и d_t для определения наличия пузыря (поскольку при взрывном процессе эти ряды не могут быть коинтегрированы). В [4], Section 2.2, было также показано, что взрывной характер является достаточным свидетельством пузыря.

Однако в [3] было показано, что невозможность отрицательного рационального пузыря в ценах предполагает теоретически, что пузырь никогда не начинается снова, если он уже когда-либо лопнул (то есть, цена упала до нуля). Эванс в работе [5] рассмотрел возможность периодически лопающихся пузырей (Periodically Collapsing Bubbles) и показал, что тесты [3] имею низкую мощность, чтобы выявить эти пузыри, поскольку периодически лопающиеся пузыри могут вести себя как $I(1)$ процесс, или даже как $I(0)$, предполагая, что вероятность лопнуть у пузыря не являестя незначительной. Также возможна такая ситуация, что оба ряда p_t и d_t могут быть взрывными, и тогда их линейная комбинация может быть стационарной (некоторый аналог коинтеграции). Тогда, только если d_t не взрывной, нахождение взрывного поведения у p_t может быть достаточным свидетельством наличия пузыря, так как взрывное поведение может возникать только через присутствие b_t.

Другой известный факт состоит в том, что взрывной характер временного ряда наблюдается только временно на небольшой части выборки, поэтому часто сложно обнаружить взрывной процесс на всей выборке, так как ряд может вести себя как $I(1)$ или $I(0)$ процесс (из-за того, что коллапс пузыря воспроизводит эффект возвращения к среднему).

2 Тестирование временного ряда на наличие пузырей

В [1] (далее PWY) предлагают рекурсивные тесты, которые могут выявлять сильное свидетельство взрывного характера поведения ряда p_t. Эти тесты заключаются в следующем. Пусть мы оцениваем авторегрессию

$$y_t = \mu + \delta y_{t-1} + \sum_{j=1}^{k} \phi_j \Delta y_{t-j} + \varepsilon_t. \tag{8}$$

Затем мы тестируем нулевую гипотезу $H_0: \delta = 0$ против правосторонней альтернативы $H_1: \delta > 0$, строя последовательность ADF-статистик для коэффициента δ, используя некоторое заданное подмножество от всей выборки данных для первого члена последовательности и увеличивая эту подвыборку на единицу с каждым последующим членом (то есть применяем форвардный ркурсивный тест, forward recursive test). Более конкретно, первая регрессия включает в себя $\tau_0 = \lfloor Tr_0 \rfloor$ наблюдений для некоторой доли r_0 от всей выборки, где $\lfloor \ \rfloor$ обозначает целую часть аргумента. Последовательность рекурсивных ADF-статистик строится, используя увеличивающуюся длину выборки размера $\tau = \lfloor Tr \rfloor$ для всех $r \in [r_0, 1]$, где соответствующие ADF-статистики записываются как:

$$ADF_r^t = \left(\frac{\sum_{j=1}^{\tau} e_{j-1}^2}{\hat{\sigma}_\tau^2} \right)^{1/2} \left(\hat{\delta}_\tau(\tau) - 1 \right), \tag{9}$$

где $\hat{\delta}_\tau(\tau)$ – OLS-оценка коэффициента δ на основе первых $\tau = \ Tr$ наблюдений, $\hat{\sigma}_\tau^2$ – соответствующая оценка дисперсии σ^2, и e_t – OLS остатки от регрессии (8)[1].

При нулевой гипотезе мы имеем:

$$ADF_r^t \Rightarrow \frac{\int_0^r \widetilde{W} dW}{\left(\int_0^r \widetilde{W}^2 \right)^{1/2}}, \tag{10}$$

где W – стандартное Броуновское движение, а $\widetilde{W} = W - \frac{1}{r} \int_0^1 W$.

Авторы предлагают следующую супремум статистику:

$$\sup_{r \in [r_0, 1]} ADF_r^t \Rightarrow \sup_{r \in [r_0, 1]} \frac{\int_0^r \widetilde{W} dW}{\left(\int_0^r \widetilde{W}^2 \right)^{1/2}}, \tag{11}$$

---

[1] Заметим, что статистика ADF_1 будет обычной статистикой Дики-Фуллера на всей выборке.

использование которой даёт возможность тестировать гипотезу единичного корня против взрывной альтернативы[2].

В работе [6] (далее PSY) анализируется и сравнивается предельную теорию этого теста при различных гипотезах и спецификациях модели. Вопрос заключается в том, добавлять ли константу и/или тренда в модель для построения ADF-теста? Например, PWY использовали модель (8), в то время как [3] добавляли ещё и тренд в эту регрессию. Также возможны разные спецификации нулевой гипотезы. Например, PWY использовали

$$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t, \tag{12}$$

в то время как [3] использовали

$$y_t = \tilde{\mu} + y_{t-1} + \varepsilon_t, \tag{13}$$

так что y_t имеет детерминированный тренд в поведении, если $\tilde{\mu} \neq 0$. PSY рассмотрели связывающую эти две модели спецификацию, которая допускает локальную к нулю константу:

$$y_t = \tilde{\mu} T^{-\eta} + y_{t-1} + \varepsilon_t,\ \eta \geq 0. \tag{14}$$

Здесь y_t имеет детерминированный снос в форме $\tilde{\mu} t / T^{\eta}$, величина которого зависит от размера выборки и параметра локализации η. При устремлении этого параметра к нулю или бесконечности мы получаем два критических случая, указанных выше.

Записывая модель (14) в виде

$$y_t = \frac{\tilde{\mu} t}{T^{\eta}} + \sum_{j=1}^{t} \varepsilon_j + y_0, \tag{15}$$

можно понять, что снос мал по отношению к стохастическому тренду при $\eta > 1/2$ и равен или сильнее стохастического тренда при $\eta \leq 1/2$. Только в последнем случае параметр η может быть состоятельно оценен (см. Appendix B в [6]][3]), поскольку компонента сноса

---

[2] Заметим, что распределение тестовых статистик то же самое для всех $r \in (0,1]$, то есть совпадает с обычным ADF-распределением.

[3] Состоятельными оценками параметра η_T являются оценки $\hat{\eta}_T = -\log|\hat{\mu}_T| / \log T$ и $\tilde{\eta}_T =$

доминируется стохастическим трендом. В таких случаях оценки η обычно сходятся к 1/2, соответствуя порядку стохастического тренда. Спецификация (14) также допускает интерпретацию данных в терминах случайных циклов около тренда. При $0 \leq \eta < 0.5$ детерминированный снос комбинируется со случайным блужданием, связанным с единичным корнем в системе. Это может служить объяснением того, что в противном случае может рассматриваться как пузырь в данных, являющийся фактически случайным циклом инерционных шоков около детерминированного тренда.

С другой стороны, при альтернативной гипотезе добавление константы и/или тренда не представляется разумным, поскольку происходит доминирование детерминированной компоненты, которое имеет эмпирически нереалистичную взрывную форму.

PSY получают предельные распределения ADF-теста при нулевой гипотезе[4]. Оно различно при $\eta > 0.5$, $\eta < 0.5$ и $\eta = 0.5$. Симуляции на конечных выборках показывают, что при $\eta > 0.5$ различия между асимптотическим и на конечных выборках распределениях среди различных η незначительно. В то же время при $\eta = 0.5$ различия могут очень отличаться из-за присутствия доминирующего тренда в данных, и они уменьшаются только при уменьшении η до нуля.

Асимптотическая теория, необходимая для анализа взрывных процессов при альтернативной гипотезе, была недавно разработана в [7,8]. Авторы рассмотрели умеренно взрывной процесс (mildly explosive process):

$$y_t = \delta_T y_{t-1} + \varepsilon_t,\ \delta_T = 1 + \frac{c}{k_T},\ c > 0, \tag{16}$$

который начинается в некоторой точке $y_0 = o_p(\sqrt{k_T})$, независимой от $\{\varepsilon_t, t \geq 1\}$, где $\{k_T\}_{T\geq 1}$ – последовательность, стремящаяся к бесконечности так, что $k_T = o(T)$ при $t \to \infty$. Модель (16) не включает константу, чтобы исключить наличие детерминированно взрывной компоненты в y_t.

Последовательность авторегрессионного параметра $\delta_T = 1 + \frac{c}{k_T} > 1$ локального происхождения, то есть $\delta_T \to 1$ при $n \to \infty$, но для любого конечного T она включает

$-\log|\tilde{\mu}_T|/\log T$, где $\hat{\mu}_T = \sum_{t=1}^{T} t y_t / \sum_{t=1}^{T} t^2$ и $\tilde{\mu}_T = \sum_{t=1}^{T} \tilde{t} y_t / \sum_{t=1}^{T} \tilde{t}^2$, $\tilde{t} = t - T^{-1} \sum_{s=1}^{T} s$ – состоятельные оценки $\mu_T = \tilde{\mu} T^{-\eta}$.

[4] Заметим, что оно отлично от полученного в (11) из-за учёта локального параметра сноса.

умеренные отклонения от единичного корня, то есть отклонения, большие, чем обычные $O(n^{-1})$, часто используемые в контексте локальных единичных корней. Можно рассмотреть особый случай, когда $k_T = T^{\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$. Когда $\alpha \to 1$, мы получаем корень, локальный к единице, в то время как при $\alpha \to 0$, мы получаем стационарный или взрывной процесс. При некоторых условия регулярности Филлипс и Магдалинос получили, что:

$$\frac{k_T(\delta_T)^T}{2c}(\hat{\delta}_T - \delta_T) \Rightarrow C, \tag{17}$$

где C – стандартное распределение Коши[5]. Это позволяет построить доверительный интервал для δ_n вида

$$\left(\hat{\delta}_T \pm \frac{(\hat{\delta}_T)^2-1}{(\hat{\delta}_T)^n} C_\alpha\right), \tag{18}$$

где C_α – двухстороннее α-перцентиль стандартного распределения Коши[6].

В работе [11] было рассмотрено $\delta_{m,n} = 1 + \frac{cm}{T} > 1$ и был получен тот же самый результат, если $T \to \infty$ при $m \to \infty$.

В работе [12] обобщаются результаты [7], допуская детерминированную компоненту μ_T в (16) с $\mu_T\sqrt{k_T} \to \nu \in [0,\infty)$ (небольшой снос) или $\mu_T\sqrt{k_T} \to \infty$ (большой снос). При i.i.d. ошибках ε_t t-статистика для δ_T при нулевой гипотезе об умеренно взрывном процессе асимптотически имеет стандартное нормальное распределение вне зависимости от величины сноса. [7] При слабо зависимых ошибках t-статистика, основанная на HAC, также имеет стандартный нормальный предел. Однако t-статистика, основанная на HAR имеет распределение Стьюдента вне зависимости от величины сноса. Наконец, в [12] предлагается построение доверительного интервала для δ_T на основе обращения t-статистики: если t-тест не в состоянии отвергнуть нулевую гипотезу о значении δ_T, оно должно быть включено в доверительный интервал.

Один из наиболее разумных механизмов (рассмотренных в [14]), покрывающих и

---

[5] Заметим, что при стандартной асимптотике предельное распределение Коши будет получаться только в случае гауссовских ошибок, см. [9,10].

[6] Соответствующие значения равны $C_{0.10} = 6.315$, $C_{0.05} = 12.7$ и $C_{0.01} = 63.65674$.

[7] См. также [13] с теорией фиксированного значения $\delta_T = \delta > 1$.

появление пузыря, и коллапс, включает реинициализацию процесса после коллапса, включая переходную динамику. Следующий процесс специфицирует новое начальное значение, или реинициализацию процесса, когда взрывное поведение заканчивается, и начальное значение нового периода с единичным корнем отличается от конечного значения взрывного периода:

$$y_t = y_{t-1}\mathbb{I}(t < \tau_e) + \delta_T y_{t-1}\mathbb{I}(\tau_e \le t \le \tau_e) + \left(\sum_{k=\tau_f+1}^{t} \varepsilon_k + y_{\tau_f}^*\right)\mathbb{I}(t > \tau_f) + \varepsilon\mathbb{I}(t \le \tau_e), \tag{19}$$

$$\delta_T = 1 + \frac{c}{T^\alpha},\ c > 0,\ \alpha \in (0,1), \tag{20}$$

где $\mathbb{I}(\cdot)$ – индикатор-функция. В момент реинициализации τ_f процесс “прыгает” на другой уровень $y_{\tau_f}^*$, котоырй может быть выражен как $y_{\tau_f}^* = y_{\tau_f} + y^*$ с $y^* = O_p(1)$. Предполагается, что $y_0 = O_p(1)$.

PSY предложили модифицированный механизм локально взрывного процесса. Так как мгновенный коллапс может быть нереалистичным, можно ввести некоторую переходную динамику после начала коллапса. Соответствующий DGP можно записать как

$$y_t = \begin{cases} u_1 + y_{t-1} + \sigma_1\varepsilon_t, & t \in [1, T_e) \cup (T_c, T] \\ \varphi_T y_{t-1} + \sigma_2\varepsilon_t, & t \in [T_e, T_f] \\ \gamma_T y_{t-1} + \sigma_3\varepsilon_t, & t \in (T_f, T_c] \end{cases}, \tag{21}$$

где T_c обозначает конец периода коллапса пузыря, $\varphi_T = 1 + c_1/T^{-\alpha}$, $\gamma_T = 1 - c_2/T^{-\beta}$, $c_1, c_2 > 0$ и $\alpha, \beta \in [0,1)$. Формулировки AR коэффициентов соответствуют умеренным отклонениям от единицы в смысле [7], коэффициент φ_T в сторону взрывного поведения, а коэффициент γ_T в сторону стационарного.

Предельное распределение супремум теста было также анализировано авторами, в том числе и в зависимости от r_0, первоначальной доли выборки в супремум тесте. При любом η предельное распределение $\sup_{r\in[r_0,1]} ADF_r^t$ статистики смещается вправо при уменьшении r_0. Также критические значения чувствительны к r_0, что необходимо иметь в виду в эмпирических работах. Сравнение распределения на конечных выборках с асимптотическим аналогично случаю обычного ADF теста, то есть при $\eta > 0.5$ различия между ними незначительно, в отличие от случая $\eta < 0.5$. Вследствие всего вышесказанного, поскольку η является неизвестным параметром для исследователя, при проверке реальных данных на наличие взрывного характера необходимо сравнивать тестовую статистику с различными критическими значениями для различных η, а также для $\eta < 0.5$ использовать критические значения для конечных выборок.

Поведение на конечных выборках для различных спецификаций DGP показывает, что размер теста $\sup_{r\in[r_0,1]} ADF_r^t$ близок к номинальному, когда $\eta > 0.5$ и $\eta = 0$. В тоже время происходят сильные консервативные искажения размера при $0 < \eta < 0.5$. Также мощность уменьшается при уменьшении η до нуля. Мощность очевидно увеличивается при увеличении длины взрывного процесса, а также при увеличении доли местоположения возникновения взрывного процесса.

В работах [6,15] рассматривается обобщение модели (14) при $\eta > 0.5$. Пусть выборка в регрессии (8) начинается с момента времени $\lfloor Tr_1 \rfloor$ и заканчивается на моменте $\lfloor Tr_2 \rfloor$, и пусть величина окна $r_\omega = r_2 - r_1$. Обозначим соответствующий тест, построенный по данной выборке как $ADF_{r_1}^{r_2}$. Тогда обобщённый супремум ADF тест (generalised sup ADF, GSADF) строится как

$$GSADF(r_0) = \sup_{r_2\in[r_0,1], r_1\in[0,r_2-r_0]} ADF_{r_1}^{r_2}, \qquad (22)$$

то есть при каждом фиксированном r_2 считается ADF-статистика по всем r_1, начиная с 0 и заканчивая $r_2 - r_0$. Критические значения для GSADF-статистики больше, чем для SADF, котоаря является частным случаем при $r_1 = 0$ и $r_2 = r_\omega \in [r_0, 1]$. Авторы также показывают преимущество теста GSADF на конечных выборках перед тестом SADF.

Есть несколько подходов, относящихся к тестам SADF и GSADF. В работе [16] было предложено рассмотреть супремум рекурсивных тестов Чоу на основе следующей регрессии:

$$\Delta\tilde{y}_t = \phi_{HB}\mathbb{I}(t > \lfloor rT \rfloor)\tilde{y}_{t-1} + e_t, \qquad (23)$$

где y является предварительно центрированным временным рядом, $\tilde{y}_t = y_t - \bar{y}$.[8]. Тогда тест [16] определяется как

---

8 Лагированные значения тестовой статистики C_r, определяются как t-отношения для ϕ_{HB}

$$HB = \sup_{r \in [0,1-r_0]} . \tag{24}$$

Эта статистика фактически являестя супремумом последовательности обратных рекурсивных статистик. В работе [17] было получено локальное к единичному корню асимптотическое распределение теста HB, также как и теста SADF. Было получено, что тест HB превосходит SADF, если взрывной режим находится в конце выборки и не заканчивается. В [17] было предложено использовать так называемую стратегию объединения отвержений, чтобы использовать преимущества обоих тестов. Эта стратегия основана на отвержении хотя бы одного из тестов и может быть записана как

$$\text{Отвергать } H_0, \text{если } \left\{SADF > \psi_\xi q_\xi^{SADF} \text{ или } HB > \psi_\xi q_\xi^{HB}\right\}, \tag{25}$$

где q_ξ^{SADF} и q_ξ^{HB} критические значения на уровне значимости ξ, а ψ_ξ является масштабирующей константой, чтобы гарантировать корректный (асимптотический) размер композитной процедуры.

В работе [18] был обобщен ковариантный (covariate) ADF (CADF) тест на единичный корень, предложенный в [19], для тестирования взрывного пузыря и увеличения мощности. В данном подходе модель порождается как

$$y_t = \mu + u_t, \tag{26}$$

$$\Delta u_t = \delta_t u_{t-1} + \varepsilon_t, \tag{27}$$

$$\Phi(L)\varepsilon_t = b(L)'\Delta x_t + v_t, \tag{28}$$

где Δx_t является m-вектором стационарных ковариат, а $\Phi(L)$ и $\beta(L)$ являются некоторыми операторами запаздывания. Основная идея - добавить опережающие и запаздывающие значения стационарных ковариат в регрессию (8) как

$$y_t = \mu + \delta y_{t-1} + \sum_{j=1}^{k} \phi_j \Delta y_{t-j} + + \sum_{j=-k_1}^{k_2} \beta_j \Delta x_{t-j} + \varepsilon_t \tag{29}$$

и вычислить статистику $CADF_r$, которая есть просто t-отношение для проверки $\delta = 0$ по наблюдениям $t = k+1, \dots, \tau$ с $\tau = \lfloor rT \rfloor$. Итоговая тестовая статистика SCADF из работы [18] определяется как

$$SCADF(r_0) := \sup_{r \in [r_0, 1]} CADF_r. \tag{30}$$

Предельное распределение $CADF_r$ представляет собой выпуклую смесь стандартного нормального распределения и распределения Дики-Фуллера с мешающим параметром ρ^2 (определяет веса и измеряет относительный вклад ковариаты Δx_t на ошибки ε). Оценка для ρ^2 задается как $\hat{\rho}^2 = \hat{\sigma}_{\varepsilon\nu}^2 / (\hat{\sigma}_{\varepsilon}^2 \hat{\sigma}_{\nu}^2)$, где $\sigma_{\varepsilon\nu}^2$, σ_{ε}^2, и σ_{ν}^2 соответственно ковариация между ε и ν, дисперсия для ε и дисперсия для ν. Все они оцениваются, исопльзуя подход HAC.

В [18] предлагается бутстраповский алгоритм аналогично [20] для получения критических значений для теста $SCADF$ и чтобы исключить оценивание параметра ρ^2 в каждой подвыборке.

В работе [21] рассматривалась GLS версия теста PWY (SADF). Ранее в [22] исследовались OLS и GLS правосторонние тесты на единичный корень, и было обнаружено, что, в отличие от левосторонних тестов, GLS-тест обладает более высокой мощностью, когда величина начального значения временного ряда большая.[9] GLS-тест исходит из следующей вспомогательной регрессии

$$\Delta \tilde{u}_t = \delta \tilde{u}_{t-1} + \varepsilon_t, \tag{31}$$

где $\tilde{u}_{\tau,t} = y_t - z_t' \tilde{\theta}$, $\tilde{\theta}$ является OLS-оценкой от (квази) GLS регрессии $y_{\bar{c}} = (y_1, y_2 - \bar{\rho} y_1, \dots, y_\tau - \bar{\rho} y_{\tau T-1})'$ на $z_{\bar{c}} = (z_1, z_2 - \bar{\rho} z_1, \dots, z_\tau - \bar{\rho} z_{\tau T-1})'$, где $\bar{\rho} = 1 + \bar{c}/T$ and $z_t = 1$ or $z_t = (1, t)'$ является детерминированной компонентой.[10] Пусть $ADF - GLS_r$ является простым t-отношением из регрессии (31) для $t = 1, \dots, \tau = \lfloor rT \rfloor$. Тогда супремум GLS-теста, предложенный в [21], имеет обычный вид:

[9] Начальное значение временного ряда есть отклонение первого наблюдения от детерминированной компоненты процесса.

[10] Следуя [22], рекомендуются $\bar{c} = 1.6$ в случае константы $\bar{c} = 2.4$ в случае тренда.

$$SADF-GLS(r_0):=\sup_{r\in[r_0,1]} ADF-GLS_r. \tag{32}$$

Этот тест имеет более высокую локальную асимптотическую мощность, чем обычный тест SADF, когда взрывной период велик по сравнению с полным объемом выборки (большая доля выборки, для которой данные следуют за взрывным процессом). Более того, тест на основе GLS становится лучше, если величина начального значения увеличивается. Начальное условие не влияет на ранжирование двух типов тестов.

В [21] также предлагается стратегия объединения отвержений, основанная на двух тестах, $SADF-GLS(r_0)$ и $SADF(r_0)$ для обоих случаев, с или без тренда.

3 Обобщения тестов на пузыри при наличии изменяющейся во времени волатильности в данных

Поскольку на асимптотические выводы влияет изменяющаяся во времени волатильность, как мы отметили во введении, в литературе были предложены различные методы для получения корректных выводов. В работе [23] предлагается использовать алгоритм дикого бутстрапа для получения корректных статистических выводов. Хотя в [23] предлагается использовать их алгоритм только для SADF теста, их методологию можно легко применить и для GSDF теста и методологии датировки пузыря в случае нескольких пузырей, как в [6]. Алгоритм, предложенный в [23], можно записать следующим образом.

Алгоритм 1 (Бутстраповский тест)

1. Сгенерировать вектор бутстраповских инноваций как $e_t^*=w_t\Delta y_t$ для $t=2,\dots,T$, инициализированный в $e_1^*=0$, где $\{w_t\}_2^T$ есть последовательность IID N(0,1) случайных величин.
2. Построить бутстраповскую выборку данных на основе рекурсии $\Delta y_t^*=e_t^*$ для $t=2,\dots,T$, инициализованной в $y_0^*=0$.
3. Используя бутстраповскую выборку, $\{y_t^*\}$, вычислить бутстраповскую статистику $GSADF$ и BSADF, также как и последовательность бутстраповских статистик $BSADF_{r_2}$ для $r_2\in[r_0,1]$, обозначаемых как $GSADF^*$ и $BSADF_{r_2}^*$ в точности, как дял оригинальных данных для фиксированной глубины запаздываний $k=0$.

4. Бутстраповские p-значения тогда определяются как: $P^*_{GSADF,T} := G^*_{GSADF,T}(GSADF)$, где $G^*_{GSADF,T}(\cdot)$ обозначает условную (относительно оригинальным данным) функцию распределения (cdf) от $GSADF^*$; $P^*_{BSADF_{r_2},T} := G^*_{BSADF_{r_2},T}(BSADF_{r_2})$, где $G^*_{BSADF_{r_2},T}(\cdot)$ обозначает условную (относительно оригинальным данным) функцию распределения (cdf) от $BSADF^*_{r_2}$. На практике функции распределения неизвестны, но их можно аппроксимировать обычным способом при помощи численных симуляций.

Этот алгоритм допускает очень общую форму дисперсии инноваций. Хотя в [23] предполагается, что эта дисперсия нестохастическая, ограниченная и отображает счетное число скачков, подход авторов все еще верен для предположений, сделанных в [24]. Обратим внимание, что в этом алгоритме на шаге 3 мы устанавливаем $k = 0$, поскольку схема дикого бутстрапа аннулирует любую слабую зависимость, представленную в Δy_t на шаге 1. Однако в [25] была предложена реализация шага 2 и 3 на основе решетчатого бутстрапа, аналогично [26], улучшающая свойства размера.

В работе [27] был предложен взвешенный модификация теста PWY, основанная на взвешенном методе наименьших квадратов. Преобразуем модель как

$$\frac{\Delta x_t}{\sigma_t} = \rho_t \frac{x_{t-1}}{\sigma_t} + \varepsilon_t,\ t = 2, \dots, T. \tag{33}$$

Эта регрессия недоступна, поскольку мы не наблюдаем функцию дисперсии σ_t. Если σ_t была бы известна, мы могли бы построить тест, основанный на супремуме, как PWY:

$$SBZ(r_0) = \sup_{r \in [r_0, 1]} BZ_r, \tag{34}$$

где BZ_r вычисляется на основе регрессии (33) по подвыборке $\{y_1, \dots, y_{[rT]}\}$

$$BZ_r = \frac{\sum_{t=1}^{[rT]} \Delta\tilde{y}_t \tilde{y}_{t-1}/\sigma_t^2}{\left(\sum_{t=1}^{[rT]} \tilde{y}_{t-1}^2/\sigma_t^2\right)^{1/2}}. \tag{35}$$

Здесь $\tilde{y}_t = y_t - y_1$, чтобы гарантировать инвариантность относительно ненулевого среднего. Предельное распределение при нулевой гипотезе и локальной альтернативе зависит от $\sigma(r)$.

Чтобы сделать тест доступным, в [27] используется непараметрическую ядерную оценку σ_t:

$$\hat{\sigma}_t^2 = \frac{\sum_{i=2}^{T} K_h\left(\frac{i-t}{T}\right)(\Delta y_i)^2}{\sum_{i=2}^{T} K_h\left(\frac{i-t}{T}\right)}, \tag{36}$$

где $K_h(s) = K(s/h)/h$, и $K(cdot)$ является ядерной функцией с парамтром ширины окна h.

В [27] предлагает использовать тестовую стратегию объединения отвержений, поскольку ни один из тестов, SBZ и SADF, не лучше другого среди всех спецификаций (и SBZ показывает немонотонную мощность в некоторых случаях). Эта стратегия имеет вид

$$\text{Отвергать } H_0, \text{если } \{\text{SADF} > \psi_\xi \mathrm{q}_\xi^{\text{SADF}} \text{или SBZ} > \psi_\xi \mathrm{q}_\xi^{\text{SBZ}}\}, \tag{37}$$

или

$$\text{Отвергать } H_0, \text{если } U = \max\left(\text{SADF}, \frac{\mathrm{q}_\xi^{\text{SADF}}}{\mathrm{q}_\xi^{\text{SBZ}}}\text{SBZ}\right) > \mathrm{q}_\xi^{\text{U}} \tag{38}$$

где ψ_ξ является масштабирующей константой, чтобы гарантировать корректный (асимптотический) размер композитной процедуры, $q_\xi^U = \psi_\xi \times q_\xi^{SADF}$ является критическим значением для теста U.

Поскольку предельное распределение SADF и SBZ тестов все еще зависит от функции волатильности, в [27] используется процедура дикого бутстрапа из [23], чтобы гарантировать контроль размера. Для этого q_ξ^{SBZ} и q_ξ^{SADF} заменяются на свои бутстраповские аналоги, и, кроме этого, q_ξ^U заменяется на свой бутстраповский аналог.

В [28] предлагается другой подход, который контролирует размер при изменяющейся во времени волатильности. Этот метод основан на накопленных знаках $C_t = \sum_{i=2}^{t} sign(\Delta y_t)$, $t = 2, \dots, T$. Основанный на супремуме знаковый тест определяется как

$$sGSADF(r_0) = \sup_{r_2 \in [r_0, 1], r_1 \in [0, r_2 - r_0]} sADF_{r_1}^{r_2}. \tag{39}$$

где $sADF_{r_1}^{r_2}$ является t-отношением в регрессии

$$\Delta C_t = \hat{\rho}(r_1, r_2) C_{t-1} + e_t \tag{40}$$

по выборке с $[r_1 T]$ до $[r_2 T]$. То есть

$$sADF_{r_1}^{r_2} = \frac{\hat{\rho}(r_1, r_2)}{\sqrt{(\hat{s}^2(r_1, r_2))/\sum_{t=[Tr_1]}^{[Tr_2} C_{t-1}^2}} \tag{41}$$

где $\hat{s}^2(r_1, r_2) = ([Tr_2] - [Tr_1] - 1)^{-1} \sum_{t=[Tr_1]+1}^{[Tr_2]} e_t^2$. Поскольку $sign(\Delta y_t) = sign(z_t)$ при нулевой гипотезе, тест будет точно инвариантным к функции волатильности σ_t. Также тест sGSADF является точно инвариантным к константе в DGP. Если мы допускаем слабую зависимость ошибок, мы должны просто заменить $sign(\Delta y_t)$ на $sign(\Delta y_t - \sum_{j=1}^{k} \hat{\phi}_j(t) \Delta y_{t-j})$, где $\hat{\phi}_j(t)$ получаются на основе следующей рекурсивной регрессии

$$\Delta y_i = \hat{\alpha}(t) + \hat{\rho}_t y_{i-1} + \sum_{j=1}^{k} \hat{\phi}_j(t) \Delta y_{i-j}) + e_i \tag{42}$$

для $i = p + 5, \dots, t$.

Частным случаем $sGSADF$ теста будет $sSADF$ с ограничениями $r_1 = 0$. Симуляции в [28] демонстрируют, что стандартные тесты $GSADF$ и $SADF$ являются более мощными, чем тесты $sGSADF$ и $sSADF$ соответственно для больших отклонений от нулевой гипотезы. Также $sGSADF$ являестя более мощным, чем $sSADF$ по сравнению со стандартными тестами $GSADF$ и $SADF$.

В [28] также была предложена стратегия объединения отвержений с применением дикого бутстрапа на основе тестов $GSADF$ и $sGSADF$ точно также, как и в [27]. Чтобы решить проблему асимметричных ошибок, в [28] заменяется $sign(\Delta y_t)$ на свою рекурсивную усредненную версию как $sign(\Delta y_t) - (t-1)^{-1} \sum_{t=2}^{t} sign(\Delta y_t)$. Соответствующим образом изменяется и бутстраповский алгоритм.

В [29] модифицируется алгоритм дикого бутстрапа [23], чтобы допустить асимметрия распределения временного ряда. Автор заменяет w_t в шаге 1 на $w_t = u_t/\sqrt{2} + (v_t^2 - 1)/2$, где $u_t \sim N(0,1)$ и $v_t \sim N(0,1)$, так что $E(w_t) = 0$, $E(w_t^2) = 1$ и $E(w_t^3) = 1$. В [29] также используется решетчатая схема бутстрапа в шаге 2.

3 Датировка взрывных процессов

Тест $\sup ADF$, рассмотренный в предыдущем разделе, не в состоянии определить дату появления (r_e) и коллапса (r_f) пузыря. Для определения этих двух дат PWY предлагают следующие их оценки:

$$\hat{r}_e = \inf_{s \geq r_0}\{s: ADF_s^t > cv_{\beta_n}^{adf}(s)\},\ \hat{r}_f = \inf_{s \geq r_e}\{s: ADF_s^t < cv_{\beta_n}^{adf}(s)\}, \tag{43}$$

где $cv_{\beta_n}^{adf}(s)$ – правостороннее критическое значение ADF_s^t, соответствующее уровню значимости β_n. То есть мы рекурсивно тестируем нулевую гипотезу до тех пор, пока она не будет отвергнута, получая момент возникновения пузыря. После этого мы продолжаем рекурсивно тестировать нулевую гипотезу до тех пор, пока она будет отвергаться, получая дату коллапса. В [14] предлагается начинать поиск даты коллапса через некоторый период после даты возникновения пузыря, то есть

$$\hat{r}_f = \inf_{s \geq r_e + \frac{\log(T)}{T}}\{s: ADF_s^t < cv_{\beta_n}^{adf}(s)\}. \tag{44}$$

Это гарантирует, что продолжительность пузыря является значимой, то есть эпизод более малого порядка, чем $O(\log(T))$, не рассматривается как значимый в алгоритме датировки для τ_f.

В своих эмпирических исследованиях PWY также использовали нахождение оценок дат появления и коллапса пузыря, используя регрессию скользящего окна (rolling regression), где каждая регрессия основана на подвыборке фиксированного размера, меньшего порядка, чем T. Используя этот метод, они получили ту же самую оценку даты появления пузыря, но более раннюю дату коллапса.

В [14] рассматривалась асимптотическая теория для оценок дат появления и коллапса умеренно взрывного периода в контексте работ [7,8]. Они определили, что при нулевой гипотезе о том, что нет эпизода с взрывным поведением (то есть, $c = 0$ и $\delta_T = 1$ в модели (6)), и также предполагая, что $cv_{\beta_T}^{adf} \to \infty$, вероятность определения возникновения пузыря равно нулю при $T \to \infty$, то есть $Pr(\hat{r}_e \in [r_0, 1]) \to 0$.

При альтенативной гипотезе (об умеренно взрывном процессе в модели (6)) оценка $\hat{r}_e$ является состоятельной оценкой r_e, предполагая, что $1/cv_{\beta_T}^{adf} + cv_{\beta_T}^{adf}/T^{1-\alpha/2} \to 0$. Идея состоятельности оценки даты возникновения взрывного процесса заключается в том, что когда данные из взрывного периода включены в оценивание авторегрессионного коэффициента, эти наблюдения доминируют те, которые были в процессе с единичным корнем. Разница в сигнале между двумя периодами тогда даёт информацию и объясняет, почему тестовая процедура состоятельно оценивает датировку (авторы показывают, что статистика ADF_τ^t расходится к ∞).

Для практического применения предлагается использовать последовательность критических значений согласно некоторому произвольному разложению, такому как $cv_{\beta_T}^{adf} = \frac{2}{3}\text{loglog}^2 T$ (подробности см. в Theorem 3.2 в [14]). Это гарантирует, что критическое значение стремится к бесконечности (ошибка I рода асимптотически незначительна) с меньшей скоростью, чем $T^{1-\alpha/2}$.

Рассматривая оценку $\hat{r}_f$, аналогично нулевой гипотезе отсутствия взрывного поведения $Pr(\hat{r}_f \in [r_0, 1]) \to 0$. При альтернативной гипотезе и при условии на критические значения оценка $\hat{r}_f$ также является состоятельной оценкой r_f. В этом случае оценка $\hat{\delta}_T(\tau) \to_p 1$ при $\tau > \tau_f$, но предельное распределение этой оценки имеет асимптотическое смещение вниз второго порядка (то есть оценка смещена в сторону стационарности). Это смещение объясняется тем, что данные при оценивании включают как взрывной эпизод, так и эпизод после коллапса, показывая поведение, похожее на возвращение к среднему. Статистика ADF_τ^t в этом случае расходится к $-\infty$.

Кроме ADF_τ^t-статистики, авторами была также рассмотрена статистика коэффициента δ, то есть $ADF_\tau^\delta = \tau(\hat{\delta}_\tau(\tau) - 1)$ и исследованы её асимптотические свойства. Эти свойства аналогичны ADF_τ^t, за исключением, что последняя расходится к $-\infty$ при $\tau > \tau_f$ с более высокой скоростью (при $\alpha > 1/3$). Разница объясняется тем, что стандартная ошибка также чувствительна к коллапсу умеренно взрывного процесса. Поэтому в некоторых случаях ADF_τ^t может лучше оценивать датировку колапса, чем ADF_τ^δ. Это подтверждается симуляциями на конечных выборках. С другой стороны, оценки даты возникновения взрывного процесса похожи для обоих тестов.

Для улучшения мощности рассмотренной процедуры в [4] было предложено выбирать начальное условие (ранее фиксировалось на первом наблюдении) для инициализации рекурсивной процедуры, используя информационный критерий Шварца (BIC). Если в DGP невзрывной режим переходит во взрывной, наиболее мощным тестом будет тот, в котором рекурсивные статистики вычислены, используя данные из взрывного режима (поскольку не учитываются наблюдения, где DGP является процессом с единичным корнем). Процедура, предложенная в [4], заключается в следующем.

Пусть оценка даты возникновения пузыря $\hat{\tau}_e$ идентифицирована рекурсивной процедурой (43), используя первые τ наблюдений. Пусть $n_{\min}$ – число наблюдений в выборке $\{y_{\tau_e-n_{\min}+1},\dots,y_{\tau_e}\}$. Эта выборка может быть построена, беря некоторый процент от всей выборки до момента времени τ_e (например, 10%). Далее сравнивается значение BIC двух конкурирующих моделей: модель с единичным корнем и авторегрессионная модель. Значение BIC для первой модели записывается как

$$BIC_{UR}=\log\left(\frac{\sum_{t=\tau_e-n_{\min}-n_k}^{\tau_e}(\Delta y_t-\bar{y})^2}{n_k+n_min}\right)+\frac{\log(n_k+n_{\min})}{n_k+n_{\min}}, \tag{45}$$

в то время как для второй как

$$BIC_{AR}=\log\left(\frac{\sum_{t=\tau_e-n_{\min}-n_k}^{\tau_e}(y_t-\hat{\mu}-\hat{\delta}y_{t-1})^2}{n_k+n_{\min}}\right)+\frac{2\log(n_k+n_{\min})}{n_k+n_{\min}}, \tag{46}$$

где $\bar{y}=(n_k+n_{\min})^{-1}\sum_{\tau_e-n_{\min}-n_k}^{\tau_e}y_t$, $\hat{\mu}$ и $\hat{\delta}$ – OLS-оценки в регрессии $y_t=\mu+\delta y_{t-1}+\varepsilon_t$, оба значения BIC построены для выборки $\{y_{\tau_e-n_{\min}-n_k+1},\dots,y_{\tau_e}\}$. Если значение BIC для модели с единичным корнем больше и точечная оценка $\delta>1$, мы переобозначаем начальное условие $\tau_e-n_{\min}$, то есть добавляем одно наблюдение в начале выборки. Далее повторяем до тех пор, пока значение BIC для модели с единичным корнем не будет меньше. В этом случае применяется процедура PWY с начальным условием, обозначаемым как $\hat{\tau}_0$, и результирующая оценка возникновения взрывного процесса обозначается как $\hat{\tau}_e(\hat{\tau}_0)$. Далее производится поиск даты коллапса согласно (44). Если выборка в итоге становится $\{y_1,\dots,y_{\tau_e}\}$, и значение BIC для модели с единичным корнем всё ещё больше, чем для авторегрессионной модели, мы устанавливаем начальное значение в точке $t=1$, так что процедура повторяет PWY и результирующая оценка возникновения пузыря $\hat{\tau}_e(\hat{\tau}_0)$ совпадает с $\hat{\tau}_e$. В общем случае, как ожидается, $\hat{\tau}_e(\hat{\tau}_0)\le\hat{\tau}_e$.

Альтернативная процедура нахождения датировки возникновения пузыря и его коллапса была рассмотрена в [15] (далее PSY), где, в отличие от (43) и (44), оценки дат r_e и r_f строятся следующим образом:

$$\hat{r}_e = \inf_{r_2 \in [r_0, 1]} \{r_2 : BSADF_{r_2}(r_0) > scv_{\beta_T}^{adf}(r_2)\}, \tag{47}$$

$$\hat{r}_f = \inf_{r_2 \in [\hat{r}_e + \delta \frac{\log(T)}{T}, 1]} \{r_2 : BSADF_{r_2}(r_0) < scv_{\beta_T}^{adf}(r_2)\}, \tag{48}$$

где $BSADF_{r_2}(r_0)$ – обратная супремум ADF-статистика (backward sup ADF), вычисляемая как

$$BSADF_{r_2}(r_0) = \sup_{r_1 \in [0, r_2 - r_0]} ADF_{r_1}^{r_2}. \tag{49}$$

Авторы расширили процедуру на случай более чем одного пузыря. Она заключается в том, чтобы получать оценки дат r_e и r_f для второго пузыря, нужно воспроизвести процедуру, начиная с выборки после оценки коллапса первого пузыря. Более конкретно, для двух пузырей

$$\hat{r}_{1e} = \inf_{r_2 \in [r_0, 1]} \{r_2 : BSADF_{r_2}(r_0) > scv_{\beta_T}^{adf}(r_2)\}, \tag{50}$$

$$\hat{r}_{1f} = \inf_{r_2 \in [\hat{r}_{1e} + \delta \frac{\log(T)}{T}, 1]} \{r_2 : BSADF_{r_2}(r_0) < scv_{\beta_T}^{adf}(r_2)\}, \tag{51}$$

$$\hat{r}_{2e} = \inf_{r_2 \in [\hat{r}_{1f}, 1]} \{r_2 : BSADF_{r_2}(r_0) > scv_{\beta_T}^{adf}(r_2)\}, \tag{52}$$

$$\hat{r}_{2f} = \inf_{r_2 \in [\hat{r}_{2e} + \delta \frac{\log(T)}{T}, 1]} \{r_2 : BSADF_{r_2}(r_0) < scv_{\beta_T}^{adf}(r_2)\}. \tag{53}$$

PSY доказывают состоятельность оценок всех дат, предполагая, что продолжительность первого пузыря длиннее, чем для второго, то есть $\tau_{1f} - \tau_{1e} > \tau_{2f} - \tau_{2e}$, а также, что $1/scv_{\beta_T}^{adf}(r_2) + scv_{\beta_T}^{adf}(r_2)/T^{1/2} \to 0$. Если использовать аналогичную процедуру не для статистик BSADF, просто для ADF, то в этом случае оценки дат возникновения и коллапса для второго пузыря будут несостоятельными. В этом случае возможна модификация, в которой инфимум статистики для получения $\hat{r}_{2e}$ считается не по $r_2 \in [\hat{r}_{1f}, 1]$, а по $r_2 \in [\hat{r}_{1f} + \xi_t, 1]$, где $\xi_t = \log(T)/T$ или $T^{-\delta}$ для некоторого $\delta \in (0,1)$.

В [30] предлагается HAR (fixed-b) подход для корректной датировки взрывного пузыря при наличии длинной памяти ошибок.

Если на данные может оказывать влияние нестационарная волатильность, в [31] предлагается модификация алгоритма дикого бутстрапа из работы [23]. Поскольку процедура датировки последовательная, в [31] также обращается внимание на проблему множественного тестирования. Композитная бутстраповская процедура заключается в следующем.

Алгоритм 2 (Композитная бутстраповская процедура)

1. Оценивается регрессия (8),ю накладывая ограничение $\delta = 0$, и вычисляются остатки e_t.
2. Для выборки $[Tr_0] + \tau_b - 1$ (τ_b являестя числом наблюдений в окне, на основе которого контролируется размер теста) порождается бутсраповская выборка на основе следующей рекурсии:

$$\Delta y_t^* = \sum_{j=1}^{k} \hat{\phi}_j \Delta y_{t-j}^* + e_t^* \tag{54}$$

   инициализированная в $y_i^* = y_i$ с $i = 1, \dots, j+1$, $\hat{\phi}_j$ – OLS оценки, полученные в подобранной регрессии из шага 1. Бутстраповские инновации порождаются как $e_t^* = w_t e_t$, где $\{w_t\}$ является последовательностью IID N(0,1) случайных величин.
3. Используя бутстраповскую выборку $\{y_t^*\}$ вычислить последовательность тестовых статистик PSY $\{BSADF_t^*(r_0)\}_{t=[Tr_0]}^{[Tr_0]+\tau_b-1}$ и максимальное значение по этой последовательности как $M_t^* = \max_{t \in [[Tr_0],[Tr_0]+\tau_b-1]} BSADF_t^*(r_0)$.
4. Бутстраповское критическое значение процедуры PSY получается на основе рапсределения M_t^*.

В [31] в их эмпирическом разделе использовалось значение $\tau_b = 24$ для месячных данных, что означает, что эмпирический размер контролируется по двухлетнему периоду. В [31] также был разработан пакет *psymonitor* на языке R, чтобы применить предложенный бутстраповский алгоритм.

В [28] был рассмотрен их знаковый тест (39) для определения дат взрывного пузыря. Рекурсивная реализация знакового теста, как PSY, может дать состоятельную оценку даты возникновения (при умеренно взрывной величине пузыря), но дату коллапса нельзя оценить состоятельно. Вместо этого в [28] предлагается максимизировать статистику на основе знаков по всем возможным датам пузыря, как

$$\{\hat{r}_e, \hat{r}_f\} = \arg\max_{r_1 \in [0, 1-r_0], r_2 \in [r_1+r_0, 1]} sADF_{r_1}^{r_2}. \tag{55}$$

Оказывается, что $\hat{r}_f$ является состоятельной оценкой для r_f, но $\hat{r}_e$ нет. ЧТобы получить состоятельную оценку дат возникновения и коллапса пузыря, в [28] испопльзуется модифицированная версия уравнения (40) с заменой $\hat{s}^2(r_1, r_2))$ на $\tilde{s}^2(r_1, r_2))^{\varepsilon}$, где

$$\tilde{s}^2(r_1, r_2) = \frac{[r_2 T]\hat{s}^2(0, r_2) - [r_1 T]\hat{s}^2(0, r_1)}{[r_2 T] - [r_1 T] - 1}$$

с $\varepsilon = 0.01$. Состоятельность очевидно требует, чтобы $r_2 - r_1 \geq r_0$.

В [32] исследуется робастность теста PSY и теста, основанного на знаках, при наличии эффекта рычага (через TGARCH модель). Авторы продемонстрировали на основе симуляций Монте-Карло, что процедура PSY дает более точные оценки дат пузыря, в то время как эта процедура часто определяет несуществующие пузыри.

В [33] предлагается другой альтернативный подход, основанный на минимизации суммы квадратов остатков. Авторы рассмотрели более общий процесс порождения данных, как PSY (см. (21)):

$$y_t = \mu + u_t, \tag{56}$$

$$u_t = \begin{cases} u_{t-1} + \varepsilon_t, & t = 2, \dots, \lfloor \tau_{1,0} T \rfloor, \\ (1 + \delta_{1,T}) u_{t-1} + \varepsilon_t, & t = \lfloor \tau_{1,0} T \rfloor + 1, \dots, \lfloor \tau_{2,0} T \rfloor, \\ (1 - \delta_{2,T}) u_{t-1} + \varepsilon_t, & t = \lfloor \tau_{2,0} T \rfloor + 1, \dots, \lfloor \tau_{3,0} T \rfloor, \\ u_{t-1} + \varepsilon_t, & t = \lfloor \tau_{3,0} T \rfloor + 1, \dots, T, \end{cases} \tag{57}$$

Этот DGP подразумевают процесс с единичным корнем до момента времени $\lfloor \tau_{1,0} T \rfloor$, затем следует взрывной процесс до момента времени $\lfloor \tau_{2,0}T \rfloor$. После момента времени $\lfloor \tau_{2,0}T \rfloor$ может быть стационарный режим коллапса (который интерпретируется как возвращение к нормальному рыночному поведению) до момента $\lfloor \tau_{3,0}T \rfloor$После режима коллапса ряд следует процессу единичного корня до конца выборки. Есть несколько особых случаев. Если $\lfloor \tau_{2,0}T \rfloor = \lfloor \tau_{3,0}T \rfloor$, взрывной режим мгновенно переходит в режим единичного корня. Если, кроме того, $\tau_{2,0} = 1$, взрывной режим не прекращается и продолжается до конца выборки. Если $\tau_{3,0} = 1$, режим коллапса не прекращается и продолжается до конца выборки. Собственно, в [33] было предложено выбирать модель пузыря в зависимости от ограничений: $\tau_{2,0} = 1$ (Модель 1), $\tau_{2,0} = \tau_{3,0}$ (Модель 2) или $\tau_{3,0} = 1$ (Модель 2). Модель 4 не ограничена. Для Модели 4 мы можем оценить соответствующую регрессию вида

$$\Delta y_t = \mu_1 D_t(\tau_1, \tau_2) + \hat{\mu}_2 D_t(\tau_2, \tau_3) + \delta_1 D_t(\tau_1, \tau_2) y_{t-1} + \delta_2 D_t(\tau_2, \tau_3) y_{t-1} + e_t, \tag{58}$$

где $D_t(a, b) = \mathbb{I}(\lfloor aT \rfloor < t \leq \lfloor bT \rfloor)$. Модель 3 соответствует ограничению $\tau_3 = 0$, модель 2 соответствует ограничениям $\mu_2 = \beta_2 = 0$, а модель 2соответствует ограничениям $\mu_2 = \beta_2 = 0$ и $\tau_2 = 0$.

Пусть $SSR_j(\cdot) = \sum_{t=2}^{T} \hat{e}_t$ является суммой квадратов остатков для модели j с ограничениями $y_{[\tau_2 T]} > y_{[\tau_2 T]}$ и $y_{[\tau_2 T]} > y_{[\tau_3 T]}$.[11] Тогда даты $[\tau_1 T]$, $[\tau_2 T]$ и $[\tau_3 T]$ можно оценить на основе минимизации соответствующей SSR по всем возможным вараинтам дат. При условии корректной модели и при фиксированных величинах δ_1 и δ_2, даты пузыря можно состоятельно оценить. Если модель неизвестна, в [33] предлагается выбирать ее на основе сравнения BIC вида $BIC = T\log[T^{-1}SSR(\cdot)] + k\log(T)$, где $k = 2 + 1$ для модели 1, $k = 2 + 2$ для модели 2, $k = 4 + 2$ для модели 3 и $k = 4 + 3$ для модели 4. Подход минимизации BIC всегда выбирает истинную модель асимптотически и часто превосходит процедуру PSY для датировки пузыря на конечных выборках. Следует отметить, что подход BIC должен выполняться только после обнаружения пузыря (например, с помощью теста GSADF).

Подход [33] трудно реализовать для случая нескольких пузырей, потому что количество потенциальных моделей, которые следует рассматривать, растет экспоненциально с

[11] Эти ограничения гарантируют, что взрывной режим будет восходящим, а режим коллапса - нисходящим.

увеличением количества режимов пузырей. В [34] были объединены подход PSY и [33], и была предложена двухэтапная процедура. На первом шаге применяется процедура PSY для получения предварительных дат пузырей. На втором шаге вся выборка разделяется на основе предварительных дат (так, чтобы подвыборка начиналась с середины между окончанием предыдущего взрывного режима и началом текущего взрывного режима и заканчивалась в середине между окончанием текущего взрывного режима и началом следующего взрывного режима), и подход на основе BIC применяется для каждой из частей разделенной выборки. В [34] было продемонстрировано с помощью моделирования Монте-Карло, что их двухшаговые методы более точны по сравнению с процедурой PSY, которая часто оценивает даты возникновения пузырей позже, чем они возникают в действительности.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Phillips P., Wu Y., Yu J. Explosive Behavior in the 1990s Nasdaq: When Did Exuberance Escalate Asset Values? // International Economic Review. — 2011. — Vol. 52. — P. 201–226.

2. Campbell J. Y., Shiller R. Dividend-Price Ratio and Expectations of Future Dividends and Discount Factors, // Review of Financial Studies. — 1989. — Vol. 1. — P. 195–228.

3. Diba B., Grossman H. Explosive Rational Bubbles in Stock Prices // American Economic Review. — 1988. — Vol. 78. — P. 520?530.

4. Phillips P., Yu J. Dating the Timeline of Financial Bubbles during the Subprime Crisis // Quantitative Economics. — 2011. — Vol. 2. — P. 455–491.

5. Evans G. Pitfalls in Testing for Explosive Bubbles in Asset Prices // American Economic Review. — 1991. — Vol. 81. — P. 922–930.

6. Phillips P., Shi S., Yu J. Specification Sensitivity in Right-Tailed Unit Root Testing for Explosive Behavior. — 2012. — Unpublished manuscript.

7. Phillips P., Magdalinos T. Limit Theory for Moderate Deviations from a Unit Root // Journal of Econometrics. — 2007. — Vol. 136. — P. 115–130.

8. Phillips P., Magdalinos T. Limit theory for moderate deviations from unity under weak dependence / Ed. by G. D. A. Phillips, E. Tzavalis. — Cambridge University Press, Cambridge, 2007. — Vol. in The Refinement of Econometric Estimation and Test Procedures: Finite Sample and Asymptotic Analysis. — P. 123–162.

9. Anderson T. On asymptotic distributions of estimates of parameters of stochastic difference

equations // Annals of Mathematical Statistics. — 1959. — Vol. 30. — P. 676–687.

10. White J. The limiting distribution of the serial correlation coefficient in the explosive case // Annals of Mathematical Statistics. — 1958. — Vol. 29. — P. 1188–1197.

11. Phillips P., Magdalinos T., Giraitis L. Smoothing local-to-moderate unit root theory // Journal of Econometrics. — 2010. — Vol. 158, no. 2. — P. 274–279.

12. Guo G., Sun Y., Wang S. Testing for moderate explosiveness // The Econometrics Journal. — 2019. — Vol. 22, no. 1. — P. 73–95.

13. Wang X., Yu J. Limit theory for an explosive autoregressive process // Economics Letters. — 2015. — Vol. 126. — P. 176–180.

14. Phillips P., Yu J. Limit Theory for Dating the Origination and Collapse of Mildly Explosive Periods in Time Series Data. — 2009. — Unpublished manuscript.

15. Phillips P., Shi S., Yu J. Testing for Multiple Bubbles: Historical Episodes of Exuberance and Collapse in the S&P 500 // International Economic Review. — 2015. — Vol. 56. — P. 1079–1134.

16. Homm U., Breitung J. Testing for speculative bubbles in stock markets: a comparison of alternative methods // Journal of Financial Econometrics. — 2012. — Vol. 10, no. 1. — P. 198–231.

17. Harvey D. I., Leybourne S. J., Sollis R. Recursive right-tailed unit root tests for an explosive asset price bubble // Journal of Financial Econometrics. — 2015. — Vol. 13, no. 1. — P. 166–187.

18. Korkos I., Astill S., Kellard N., Taylor A.M.R. Bootstrap unit root testing for explosive behaviour using covariates — 2019. — Unpublished manuscript.

19. Hansen B. Rethinking the univariate approach to unit root testing: Using covariates to increase power // Econometric Theory. — 1995. — P. 1148–1171.

20. Chang Y., Sickles R., Song W. Bootstrapping unit root tests with covariates // Econometric Reviews. — 2017. — Vol. 36, no. 1-3. — P. 136–155.

21. Whitehouse E. Explosive asset price bubble detection with unknown bubble length and initial condition // Oxford Bulletin of Economics and Statistics. — 2019. — Vol. 81, no. 1. — P. 20–41.

22. Harvey D., Leybourne S. Asymptotic behaviour of tests for a unit root against an explosive alternative // Economics Letters. — 2014. — Vol. 122, no. 1. — P. 64–68.

23. Harvey D.I, Leybourne S.J., Sollis R., Taylor A.M.R. Tests for explosive financial bubbles in the presence of non-stationary volatility // Journal of Empirical Finance. — 2016. — Vol. 38. —

P. 548–574.

24. Cavaliere G., Taylor A. M. R. Heteroskedastic time series with a unit root // Econometric Theory. — 2009. — Vol. 25. — P. 1228–1276.

25. Pedersen T., Sch¨utte E. Testing for explosive bubbles in the presence of autocorrelated innovations // Journal of Empirical Finance. — 2020. — Vol. 58. — P. 207–225.

26. Chang Y., Park J. Y. A sieve bootstrap for the test of a unit root // Journal of Time Series Analysis. — 2003. — Vol. 24, no. 4. — P. 379–400.

27. Harvey D., Leybourne S., Zu Y. Testing explosive bubbles with time-varying volatility // Econometric Reviews. — 2018.

28. Harvey D., Leybourne S., Zu Y. Sign-based unit root tests for explosive financial bubbles in the presence of deterministically time-varying volatility // Econometric Theory. — 2020. — Vol. 36,no. 1. — P. 122–169.

29. Hafner C. Testing for bubbles in cryptocurrencies with time-varying volatility // Journal of Financial Econometrics. — 2020. — Vol. 18, no. 2. — P. 233–249.

30. Lui Y. L. Testing for rational bubbles under strongly dependent errors. — 2019.

31. Phillips P., Shi S. Real time monitoring of asset markets: Bubbles and crises // Handbook of Statistics. — Elsevier, 2020. — Vol. 42. — P. 61–80.

32. Monschang V., Wilfling B. Sup-adf-style bubble-detection methods under test // Empirical Economics. — 2020. — P. 1–28.

33. Harvey D., Leybourne S., Sollis R. Improving the accuracy of asset price bubble start and end date estimators // Journal of Empirical Finance. — 2017. — Vol. 40. — P. 121–138.

34. Harvey D., Leybourne S., Whitehouse E. Date-stamping multiple bubble regimes // Journal of Empirical Finance. — 2020. — Vol. 58. — P. 226–246.