

Desarrollo de modelos constitutivos avanzados para el análisis del comportamiento no lineal de materiales de construcción (Sedurec)

M. Cervera

Desarrollo de modelos constitutivos avanzados para el análisis del comportamiento no lineal de materiales de construcción (Sedurec)

M. Cervera

Publicación CIMNE N^o-316, 2008

Desarrollo de modelos constitutivos avanzados para análisis del comportamiento no lineal de materiales de construcción

M. Cervera

Publicación CIMNE N°-316, 2008

DESARROLLO DE MODELOS CONSTITUTIVOS AVANZADOS PARA ANÁLISIS DEL COMPORTAMIENTO NO LINEAL DE MATERIALES DE CONSTRUCCIÓN

Miguel Cervera

*Centro Internacional de Métodos
Numéricos en Ingeniería (CIMNE)
Universidad Politécnica de Cataluña
Campus Norte UPC, 08034 Barcelona, España
Email: miguel.cervera@upc.edu
web page: <http://www.cimne.upc.edu>*

Resumen. En este informe se describen algunos de los desarrollos recientes en modelos constitutivos avanzados para el comportamiento no lineal de materiales de construcción. El trabajo se centra especialmente en los modelos de simulación numérica del fenómeno de fisuración en hormigón estructural y otros geomateriales tales como la mampostería y la obra de fábrica. En la primera parte del informe se describen los enfoques principales para la simulación numérica de la fisuración a tracción en estructuras de hormigón: el de *fisura discreta* y el de *fisura distribuida*, para centrarse en el segundo. Dentro de éste, el informe describe en detalle un modelo escalar de daño continuo desarrollado en CIMNE. Este modelo de daño se basa en la partición del tensor de tensiones para poder capturar el comportamiento unilateral del hormigón al pasar de tracción a compresión y viceversa. El modelo propuesto adopta un formalismo basado en las deformaciones totales, lo cual aumenta su eficiencia algorítmica y lo hace especialmente apto para aplicaciones sísmicas y problemas de gran tamaño, tal como se muestra en las aplicaciones presentadas. En la última parte del informe se trata el tema de la localización de deformaciones y de daño y de la simulación numérica del colapso estructural. En esta parte se combina el modelo de daño distribuido presentado anteriormente con un algoritmo de rastreo de fisuras. La mejoría de las capacidades del modelo se hace patente en las aplicaciones mostradas y, especialmente, en el estudio de un arco semicircular de obra de fábrica con carga asimétrica, cuyos resultados son mucho más realistas que los que se obtienen con el modelo de daño distribuido en su forma original. El informe concluye con algunas observaciones sobre la utilidad de los modelos constitutivos avanzados y su aplicación por parte de los usuarios finales de programas comerciales o de propósito específico.

Palabras clave: modelos constitutivos, hormigón, fisuración, daño continuo, localización, análisis sísmico, colapso estructural.

1. INTRODUCCIÓN

La causa principal de colapso estructural es la propagación de fisuras. En geomateriales como el hormigón la fisuración se debe preferentemente a la deformación por tracción, y los códigos de diseño tratan este tema de forma prioritaria. La fisuración por tracción tiene también suma importancia en el comportamiento de materiales clásicos de construcción, como la mampostería, y en los materiales más avanzados, como los compuestos.

Se sabe desde antiguo que todas las estructuras tienen un cierto grado de fisuración. Ésta puede deberse a defectos en la micro-estructura de los materiales básicos, ser causada por un diseño o por procedimientos de construcción inadecuados, o aparecer durante la vida útil de la construcción. En cualquier caso, el desarrollo de procedimientos fiables para la evaluación de la estabilidad de las fisuras existentes ha sido y es un objetivo prioritario en Análisis de Estructuras. Este objetivo se centra particularmente en el estudio de la fisuración del hormigón estructural.

Los enfoques principales para la simulación numérica de la fisuración a tracción en estructuras de hormigón son el de *fisura discreta* y el de *fisura distribuida*.

Las primeras aplicaciones del método de los elementos finitos al estudio estructural del hormigón en la década de 1960 utilizaron el enfoque de *fisura discreta* (Clough, 1962; Ngo y Scordelis, 1967; Nilson, 1968). Las principales dificultades a resolver eran cómo insertar una fisura en una malla de elementos finitos y el establecimiento de criterios para su propagación.

Como primera solución la fisura se simulaba separando nodos que inicialmente ocupaban la misma posición (Figura 1a). Obviamente, esta técnica depende ampliamente de la malla utilizada, ya que las fisuras sólo pueden formarse siguiendo un camino de nodo a nodo a través de los bordes de los elementos. Además, el método implica la variación de la topología de la malla durante el cálculo, aumentando considerablemente el costo computacional. Esta técnica fue mejorada luego introduciendo elementos nuevos de manera que sus bordes se ubicaran a lo largo de la fisura (Figura 1b). Esto consigue reducir (sin eliminarla) la dependencia de la malla, pero es necesario efectuar frecuentes remallados para obtener una correcta simulación de la propagación de la fisura.

Para definir el momento en que una fisura debe propagarse, se utilizaba inicialmente el criterio de tensión a tracción máxima. Sin embargo, rápidamente se reconoció que los campos de tensiones y deformaciones alrededor de la punta de la fisura son singulares, lo que hace que el criterio de tracción máxima no sea confiable. Así, se empezaron a utilizar criterios basados en la energía, a partir de la teoría de la Mecánica de Fractura. Además se desarrollaron elementos finitos especiales, al ponerse de manifiesto que los elementos estándar no son apropiados para simular esos estados de tensión-deformación singulares (Tong y Pian, 1973; Owen y Fawkes, 1983).

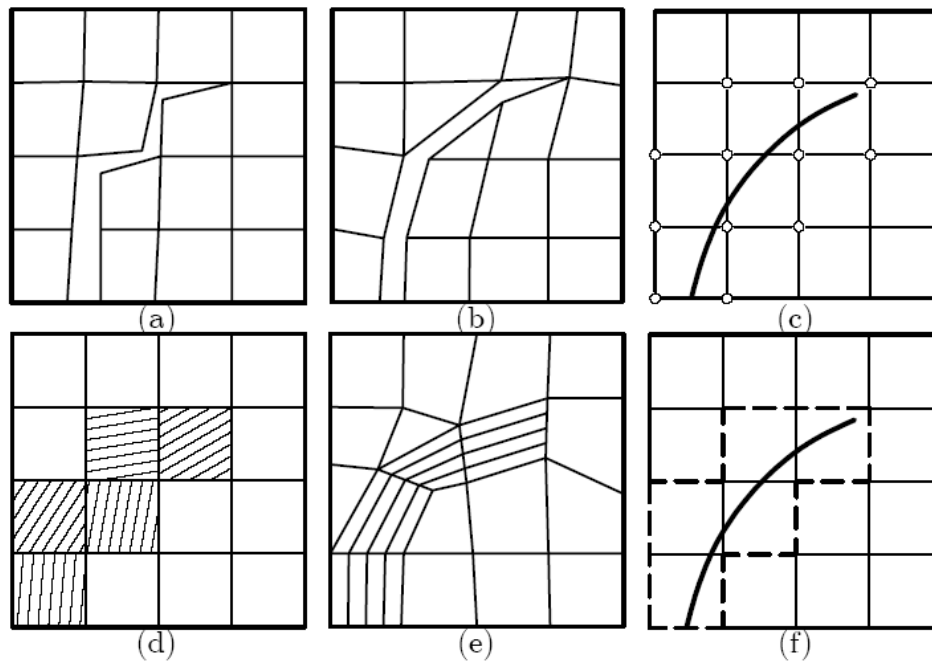


Figura 1 Diversos procedimientos de simulación de la fisuración: enfoque discreto y distribuido.

Recientemente, Belytschko et al. (Belytschko et al., 1998, Belytschko y Black, 1999; Mões et al., 1999; Sukumar et al., 2000) han propuesto el llamado método de los *elementos finitos extendido* (también conocido como X-FEM) que soluciona muchas de las desventajas del enfoque de la fisura discreta mencionadas arriba. Este método plantea la propagación de la fisura en la malla de elementos finitos (sin remallado) añadiendo grados de libertad adicionales en aquellos nodos pertenecientes a los elementos a través de los cuales pasa la fisura (Figura 1c, donde se resaltan los nodos “enriquecidos”). Estos grados de libertad representan el salto en los desplazamientos en la dirección perpendicular a la propagación de la fisura, y el campo singular que se desarrolla en la punta de la fisura.

Como alternativa, el enfoque de *fisura distribuida* tiene sus orígenes en la mecánica computacional de medios continuos. Esto implica que los criterios tanto de propagación como de dirección de fisura están básicamente planteados en términos de tensiones y deformaciones. Los modelos de fisura distribuida suponen que el material dañado se mantiene continuo, por lo que no es necesario hacer cambios en la malla de elementos finitos durante el cálculo (Figura 1d). La degradación del material se simula cambiando sus propiedades mecánicas (rigidez y resistencia) en función de la evolución del estado tenso-deformacional.

La aproximación de fisura distribuida ha sido ampliamente utilizada desde que Rashid (1968) la aplicara al hormigón por primera vez. De hecho, actualmente se encuentra implementada en muchos códigos de elementos finitos comerciales con muy pocos cambios respecto a la versión original. La implementación es relativamente simple, pues basta con añadir una subrutina de un nuevo modelo constitutivo en cualquier código no lineal de elementos finitos.

Uno de los primeros inconvenientes que encontraron los investigadores al tratar de aplicar esta formulación es que si el daño distribuido ocurre en una franja de un elemento finito de ancho, la disipación de energía es proporcional al tamaño de dicho elemento. Así, si se refina la malla hasta tamaños infinitesimales, desaparece la disipación de energía, lo cual es físicamente inadmisibles. Este problema fue solventado por Bazant y Oh (1983), quienes propusieron el *modelo de banda de fisura*. En dicho modelo, el ablandamiento del material se relaciona con la energía de fractura del material y además, con el tamaño del elemento finito a través del cual pasa la fisura.

Sin embargo, otro problema se hizo patente posteriormente: las soluciones del enfoque de fisura distribuida presentan también dependencia de la orientación de la malla. Hay que destacar que los resultados son perfectos cuando la malla está orientada de manera “apropiada” para la evolución de la fisura, pero obviamente sigue siendo necesario eliminar esta dependencia de alguna manera. De hecho, se ha sugerido el remallado como solución parcial de este problema, Figura 1e (Zienkiewicz et al. 1995a, 1995b).

Actualmente, el llamado enfoque de las *discontinuidades fuertes* plantea un nexo de unión entre los enfoques discreto y distribuido (ver Simo et al., 1993; Oliver, 1995; Oliver et al., 1999; Oliver et al., 2004; Oliver y Huespe, 2004). Este enfoque plantea una nueva formulación para elementos finitos con “discontinuidades embebidas” que dependen de las condiciones estáticas y cinemáticas supuestas. En este caso, la interpolación estándar de elementos finitos es enriquecida con un término que representa el salto en los desplazamientos (ver Figura 1f, donde se resaltan los elementos enriquecidos). Es importante destacar que esta formulación necesita el uso de algoritmos de rastreo para establecer el camino que seguirá la fisura y enriquecer así los elementos que se encuentren en dicho camino. Esto, junto al control explícito de la disipación de energía en la formación de la fisura, representa un vínculo con la tradición establecida de la mecánica de fractura.

Un modelo computacional de daño basado en el enfoque de fisura distribuida debe estar compuesto por los siguientes tres ingredientes:

1. Un modelo continuo que defina las variables y las ecuaciones del problema de valores de contorno a resolver.
2. Un modelo constitutivo para las partes intactas y dañadas del dominio.
3. Un proceso de discretización espacial y temporal que transforme las ecuaciones diferenciales continuas en ecuaciones algebraicas discretas.

Estos aspectos son independientes entre sí, cada uno con sus bases bien establecidas, para asegurar una solución correcta.

En este trabajo daremos por bien definido el ítem 1) en el marco clásico de la mecánica no lineal de sólidos deformables. En la Sección 2 trataremos el ítem 2) y en la Sección 3 trataremos de algunos aspectos específicos relacionados con el ítem 3).

2. MODELO DE DAÑO d^+/d

En la actualidad existe un gran número de modelos constitutivos para el hormigón estructural, basados en la teorías de la hipo e hiperelasticidad, plasticidad, fractura, plasticidad-fractura y mecánica del daño continuo. (Pimentel, 2004).

La mecánica del daño continuo, basada en la termodinámica de procesos irreversibles proporciona un marco general y muy potente para la derivación de modelos consistentes de comportamiento material aplicables en campos muy diversos de la ingeniería. Aunque introducidos originalmente para resolver problemas de fluencia (Kachanov, 1958), hoy en día, los modelos de daño cubren un amplio abanico de aplicaciones que van desde los metales, materiales cerámicos, roca y hormigón (Krajcinovic y Fonseca, 1981; Krajcinovic, 1983; Resende y Martin, 1984; Lemaitre, 1984, 1985a y 1985b; Kachanov, 1986; Chaboche, 1988a y 1988b; Lubliner et al. 1989; Mazars y Pijaudier-Cabot, 1989; Mazars, 1991; Carol et al., 1994). Entre las razones para su amplia aceptación se pueden mencionar la versatilidad inherente de su planteamiento y su consistencia termodinámica.

Se presenta a continuación el modelo de daño d^+/d , desarrollado y utilizado en CIMNE en los últimos años (Faria y Oliver, 1993, Faria, 1994, Cervera et al., 1995, Cervera et al., 1996, Faria et al., 1998 y 2004). El modelo, basado en un formalismo en deformaciones totales, tiene en cuenta las siguientes características observadas en el comportamiento del hormigón: (i) las envolventes diferentes en los espacios de deformación y tensión observadas bajo estados de tracción y compresión, (ii) la recuperación de rigidez que se produce cuando la sollicitación pasa de tracción a compresión o viceversa, (iii) el aumento de resistencia a compresión que se produce bajo estado bi- y tri-axiales de tensión, comparados con los valores obtenidos en ensayos uniaxiales y (iv) las deformaciones inelásticas observadas en la descarga.

La simulación adecuada del diferente comportamiento mostrado por el hormigón en tracción y en compresión es una característica esencial cuando se estudian sollicitaciones cíclicas. Esta peculiaridad del comportamiento del hormigón es consecuencia de las muy diferentes resistencias del material a tracción y a compresión, la primera de ellas asociada a una importante fragilidad, responsable de la fisuración. Bajo cargas cíclicas, la fisuración a tracción suele ser la primera evidencia de comportamiento no lineal del material y, consiguientemente, se advierten cambios importantes en la rigidez al pasar de tracción a compresión y viceversa. Para tener en cuenta este efecto unilateral, el modelo constitutivo debe distinguir los estados de tracción de los de compresión. A tal efecto, el modelo presentado introduce una partición que considera separadamente las contribuciones de tracción y compresión en la definición de la energía libre de Helmholtz. Se introducen dos variables escalares de daño independientes, cada una de ellas asociada a los diferentes mecanismos de degradación bajo tracción y compresión. Las capacidades del modelo incluyen las deformaciones irreversibles que se producen en la descarga, simuladas a través de una versión simple de la plasticidad generalizada.

Al final de esta Sección se incluyen algunos ejemplos de validación del modelo, a través de la comparación de los resultados obtenidos en diversas aplicaciones estructurales con las respuestas obtenidas en diversos experimentos.

2.1. Tensor de tensiones efectivas

Se define el tensor de segundo orden de tensiones efectivas en la forma:

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}_0 : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (1)$$

donde \mathbf{D}_0 denota el tensor constitutivo isótropo elástico lineal, de cuarto orden, y $\boldsymbol{\varepsilon}$ es el tensor de deformaciones, de segundo orden. El tensor de tensiones efectivas definido en la Ec. (1) coincide con la definición de un tensor elástico y tiene una relevancia física considerable ya que, en un material dañado, es el que corresponde a las tensiones que actúan sobre la sección ‘neta’.

Para tener en cuenta el efecto unilateral del hormigón, se considera una partición del tensor de tensiones efectivas $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ en sus componentes de tracción y compresión, $\bar{\boldsymbol{\sigma}}^+$ y $\bar{\boldsymbol{\sigma}}^-$, de la forma (Faria et al., 1998)

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}^+ = \sum_i \langle \bar{\sigma}_i \rangle \mathbf{p}_i \otimes \mathbf{p}_i \quad (2a)$$

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}^- = \bar{\boldsymbol{\sigma}} - \bar{\boldsymbol{\sigma}}^+ \quad (2b)$$

donde $\bar{\sigma}_i$ se refiere al la tensión principal i -ésima del tensor $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ y \mathbf{p}_i denota el versor de la dirección principal asociada. Los paréntesis de Macaulay $\langle \cdot \rangle$ representan la función rampa. En lo que sigue, los índices (+) y (-), representan las componentes de tracción y compresión, respectivamente.

2.2. Potencial de energía libre

Consideremos un potencial de energía libre de la forma (Faria et al., 1998):

$$\psi(\boldsymbol{\varepsilon}, d^+, d^-) = (1 - d^+) \psi_0^+(\boldsymbol{\varepsilon}) + (1 - d^-) \psi_0^-(\boldsymbol{\varepsilon}) \quad (3)$$

donde ψ_0^+ y ψ_0^- son las energías libres elásticas, definidas como

$$\psi_0^+(\boldsymbol{\varepsilon}) = 1/2 \bar{\boldsymbol{\sigma}}^+ : \mathbf{D}_0^{-1} : \bar{\boldsymbol{\sigma}}^+ = 1/2 \bar{\boldsymbol{\sigma}}^+ : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (4a)$$

$$\psi_0^-(\boldsymbol{\varepsilon}) = 1/2 \bar{\boldsymbol{\sigma}}^- : \mathbf{D}_0^{-1} : \bar{\boldsymbol{\sigma}}^- = 1/2 \bar{\boldsymbol{\sigma}}^- : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (4b)$$

Las variables internas del modelo son las variables escalares de daño d^+ y d^- , que corresponden a la densidad superficial de defectos del material. Estos índices varían desde ‘cero’ para el material virgen hasta ‘uno’ para el material completamente degradado. El tensor de deformación $\boldsymbol{\varepsilon}$ es la variable libre del modelo.

Se puede demostrar que

$$\psi_0^+ \geq 0 \quad \psi_0^- \geq 0 \quad (5)$$

y, teniendo en cuenta que

$$0 \leq (d^+, d^-) \leq 1 \quad (6)$$

es fácil de comprobar que:

$$\psi = (1 - d^+) \psi_0^+ + (1 - d^-) \psi_0^- \geq 0 \quad (7)$$

2.3. Ecuación constitutiva y disipación

Puesto que durante un proceso de carga la disipación de energía debe ser positiva, la desigualdad de Clausius-Duhem debe satisfacerse, esto es:

$$\dot{\gamma} = -\dot{\psi} + \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \geq 0 \quad (8)$$

De la Ec. (3) se tiene que

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \psi_0^+ \dot{d}^+ - \psi_0^- \dot{d}^- \quad (9)$$

y, por tanto, la Ec. (8) se puede escribir como

$$\dot{\gamma} = \left(\boldsymbol{\sigma} - \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \psi_0^+ \dot{d}^+ + \psi_0^- \dot{d}^- \geq 0 \quad (10)$$

Puesto que $\boldsymbol{\varepsilon}$ es una variable libre, para que la ecuación de la disipación mantenga su generalidad es necesario que

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \quad (11)$$

Debido a la definición de la Ec. (3), la Ec. (11) se expresa como

$$\boldsymbol{\sigma} = (1-d^+) \frac{\partial \Psi_0^+}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} + (1-d^-) \frac{\partial \Psi_0^-}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \quad (12)$$

Por otro lado, a partir de las Ecs. (4), se puede demostrar (Faria et al., 1998) que

$$\frac{\partial \Psi_0^+}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \bar{\boldsymbol{\sigma}}^+ \quad \frac{\partial \Psi_0^-}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \bar{\boldsymbol{\sigma}}^- \quad (13)$$

Sustituyendo esto en la Ec. (12) se obtiene la forma final de la ecuación constitutiva:

$$\boldsymbol{\sigma} = (1-d^+) \bar{\boldsymbol{\sigma}}^+ + (1-d^-) \bar{\boldsymbol{\sigma}}^- \quad (14)$$

Debido a la positividad de ψ_0^+ y ψ_0^- , se puede inferir de la Ec. (10) que para que la disipación sea positiva basta con asegurar que

$$\dot{d}^\pm \geq 0 \quad (15)$$

Estas desigualdades exigen que los índices de daño sean variables monótonamente crecientes.

2.4. Dominio elástico. Criterios de daño

Análogamente al concepto de ‘deformación equivalente’ postulado en Simo y Ju (1987), definimos a continuación el concepto de ‘tensión equivalente’, una norma escalar que permite identificar las situaciones de ‘carga’, ‘descarga’ o ‘recarga’. Definimos dos normas diferentes para las situaciones de tracción y compresión, τ_σ^+ y τ_σ^- , respectivamente, de la forma

$$\tau_\sigma^+ = \sqrt{\boldsymbol{\sigma}^+ : \boldsymbol{\Lambda}^+ : \boldsymbol{\sigma}^+} \quad \tau_\sigma^- = \sqrt{\boldsymbol{\sigma}^- : \boldsymbol{\Lambda}^- : \boldsymbol{\sigma}^-} \quad (16)$$

donde Λ^\pm son tensores métricos adimensionales de cuarto orden que definen la forma de las superficies de daño. Estas normas pueden ser diferentes, pero ambas deben ser isótropas y definidas positivas, hecho que se consigue adoptando para los tensores Λ^\pm una definición del tipo

$$\Lambda^\pm = (1 + \gamma^\pm) \mathbf{I} - \gamma^\pm \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \quad (17)$$

donde \mathbf{I} y $\mathbf{1}$ son tensores identidad de rango cuatro y rango dos. Los parámetros $\gamma^\pm \in [0, 1[$ se introducen para reproducir los cocientes de resistencia equibiaxial/uniaxial típicos del hormigón.

Utilizando las normas definidas en la E. (15), se introducen los siguientes criterios de daño g^\pm

$$g^+(\boldsymbol{\sigma}^+, q^+) = \tau_{\boldsymbol{\sigma}}^+ - q^+ \leq 0 \quad (18a)$$

$$g^-(\boldsymbol{\sigma}^-, q^-) = \tau_{\boldsymbol{\sigma}}^- - q^- \leq 0 \quad (18b)$$

donde q^\pm son los valores umbral que controlan el tamaño de las superficies de daño. Los valores iniciales de estas variables son $q_0^\pm = f_0^\pm$, los valores de las resistencias a tracción y compresión que determinan los límites del dominio elástico inicial.

La Figura 2 reproduce el dominio elástico inicial en una situación 2D de tensión plana: en tracción pura se obtiene un criterio tipo Rankine redondeado tomando $\gamma^+ = 0.0$, mientras que en compresión pura se obtiene un coeficiente realista de relación resistencia equibiaxial/uniaxial de 1.15 tomando $\gamma^+ = 0.622$. La coincidencia del modelo con los resultados experimentales de Kupfer et al. (1969) es remarcablemente buena.

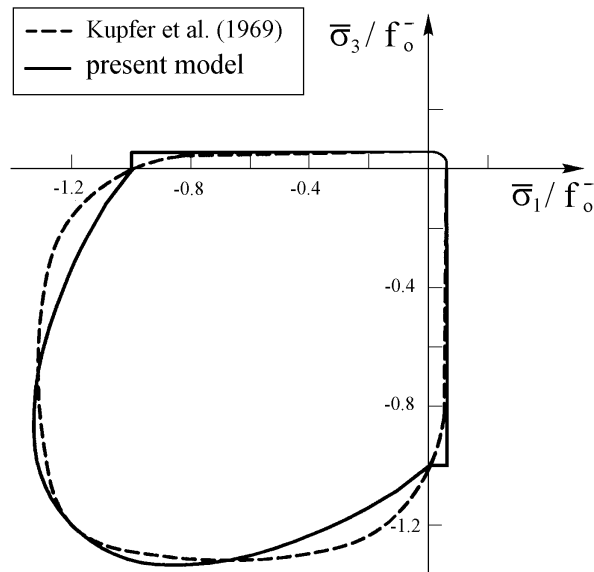


Figura 2. Superficies iniciales de daño en situación 2D

2. 5. Evolución de las variables de daño

Supongamos que las variables de daño se definen de la forma

$$d^\pm(r^\pm) = 1 - \frac{q^\pm(r^\pm)}{r^\pm} \quad (19)$$

donde las variables umbral q^\pm son función de otras variables internas r^\pm , que a su vez obedecen la ley de evolución

$$\dot{r}^\pm = \lambda^\pm \quad (20)$$

donde $\lambda^\pm \geq 0$ son multiplicadores que participan en las condiciones de Kuhn-Tucker.

Nótese que ahora los criterios de daño de las Ecs. (17) se pueden expresar como

$$\bar{g}^\pm(\bar{\tau}^\pm, r^\pm) = \bar{\tau}^\pm - r^\pm \leq 0 \quad (21)$$

donde

$$\bar{\tau}^\pm = \sqrt{\bar{\sigma}^\pm : \Lambda^\pm : \bar{\sigma}^\pm} \quad (22)$$

Las relaciones de Kuhn-Tucker se pueden referir a este formato, en la forma

$$\bar{g}^\pm \leq 0 \quad \lambda^\pm \geq 0 \quad \lambda^\pm \bar{g}^\pm = 0 \quad (23)$$

La condición de persistencia es

$$\lambda^\pm \dot{\bar{g}}^\pm = 0 \quad (24)$$

y, en consecuencia, para condiciones de carga se tiene

$$\dot{\bar{g}}^\pm = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\bar{\tau}}^\pm = \dot{r}^\pm \geq 0 \quad (25)$$

De ahí, se puede escribir, en forma explícita, que

$$r_t^\pm = \max \left\{ r_0^\pm, \max_{s \in [0, t]} (\bar{\tau}^\pm)_s \right\} \quad (26)$$

donde r_0^\pm son los valores iniciales que determinan los límites del dominio elástico.

Como $d^\pm|_{t=0} = 0$, se tiene

$$r_0^\pm = q_0^\pm = f_0^\pm \quad (27)$$

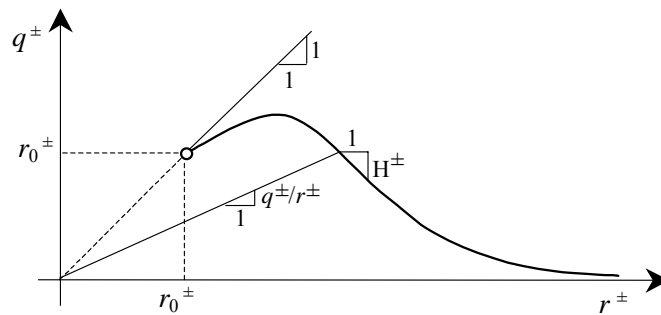


Figura 3. Condiciones de endurecimiento/ablandamiento

En la Ec. (26) resulta claro que es muy sencillo actualizar las variables internas r^\pm . A partir de ellas se calculan las variables de daño usando las Ecs. (19). Para ello basta seleccionar de forma apropiada las funciones $q^\pm(r^\pm)$. En este modelo adoptamos las funciones siguientes:

$$q^+(r^+) = r_0^+ e^{A(1-r^+/r_0^+)} \quad \text{si } r^+ \geq r_0^+ \quad (28a)$$

$$q^-(r^-) = r_0^- (1-B) + r^- B e^{C(1-r^-/r_0^-)} \quad \text{si } r^- \geq r_0^- \quad (28b)$$

En un ensayo uniaxial de tracción, la expresión (28a) define una rama de ablandamiento que es asintótica al eje de deformación. Para satisfacer los requisitos de objetividad respecto al tamaño de los elementos de la discretización espacial, el área bajo la curva tensión deformación debe relacionarse con la energía de fractura del material y la longitud característica de la discretización (Oliver et al., 1990). En consecuencia, el parámetro A de la Ec. (28a) se calcula como (Oliver, 1989)

$$A = \left(\frac{G E}{l (f_0^+)^2} - \frac{1}{2} \right)^{-1} \geq 0 \quad (29)$$

donde f_0^+ denota la resistencia a tracción y E es el módulo de Young.

La expresión (28b) permite reproducir el endurecimiento del hormigón en compresión, así como el ablandamiento que caracteriza el comportamiento post-pico. Para ello se requiere la determinación de los parámetros B y C , lo cual puede hacerse imponiendo que la curva pase por dos puntos seleccionados de los resultados del correspondiente ensayo uniaxial a compresión.

2.6. Deformaciones inelásticas

El modelo propuesto necesita algunas modificaciones para ser capaz de tener en cuenta las deformaciones inelásticas que se observan en la descarga. En lo sucesivo, consideraremos la siguiente descomposición aditiva del tensor de deformaciones $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^i$, donde $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ y $\boldsymbol{\varepsilon}^i$ son los tensores de deformación elástica e inelástica, respectivamente.

2.6.1. Ley de evolución

Suponiendo que los incrementos de deformación inelástica $\boldsymbol{\varepsilon}^i$ se producen en la misma dirección que la deformación elástica, se propone la ley de evolución

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^i = \dot{b} \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (30)$$

donde

$$\dot{b} = \beta E H(\dot{d}^-) \frac{\langle \bar{\boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle}{\bar{\boldsymbol{\sigma}} : \bar{\boldsymbol{\sigma}}} \geq 0 \quad (31)$$

es un escalar no negativo, $\beta \geq 0$ es un parámetro del material que controla la intensidad de las deformaciones inelásticas y $H(\dot{d}^-)$ es la función de Heaviside aplicada al daño en compresión.

Este formato para la evolución de las deformaciones inelásticas se sitúa dentro de la Teoría de la Plasticidad Generalizada (Zienkiewicz y Taylor, 1991).

2.6.2. Energía libre y disipación

Con la inclusión de las deformaciones inelásticas, el tensor de deformaciones efectivas se redefine en función de las deformaciones elásticas, en la forma

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{D}_0 : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^i) \quad (32)$$

Las energías libres elásticas de las Ecs. (4) se redefinen análogamente

$$\psi_0^+(\boldsymbol{\varepsilon}^e) = 1/2 \bar{\boldsymbol{\sigma}}^+ : \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad \psi_0^-(\boldsymbol{\varepsilon}^e) = 1/2 \bar{\boldsymbol{\sigma}}^- : \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (33)$$

Y el potencial de energía libre de la Ec. (3) se reemplaza por

$$\psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^i, d^+, d^-) = (1-d^+) \psi_0^+(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^i) + (1-d^-) \psi_0^-(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^i) \geq 0 \quad (34)$$

Con estas definiciones, y tal como se demuestra en Faria (1994), la ecuación constitutiva de la Ec. (14) queda inalterada

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} = (1-d^+) \frac{\partial \psi_0^+}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} + (1-d^-) \frac{\partial \psi_0^-}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} \quad (35)$$

y

$$\frac{\partial \psi_0^+}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} = \bar{\boldsymbol{\sigma}}^+ \quad \frac{\partial \psi_0^-}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} = \bar{\boldsymbol{\sigma}}^- \quad (36)$$

En cuanto a la disipación, la introducción de las deformaciones inelásticas como nueva variable interna obliga a sumar el siguiente término a la expresión de la disipación en la Ec. (10):

$$-\frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^i} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^i = 2 \dot{b} \psi \quad (37)$$

Puesto que $\psi \geq 0$ esta contribución será no negativo si $\dot{b} \geq 0$, un requisito que el formato de la Ec. (31) satisface por construcción.

2.6.3. Integración de las tensiones

Derivando la Ec. (32) respecto al tiempo, y utilizando las Ecs. (30)-(31), se tiene:

$$\dot{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} = \mathbf{D}_0 : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \beta E H(\dot{d}^-) \langle \bar{\boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle \frac{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}{\bar{\boldsymbol{\sigma}} : \bar{\boldsymbol{\sigma}}} \quad (38)$$

Adoptando un algoritmo de discretización temporal de Euler hacia atrás, y denotando como $(\cdot)_n$ y $(\cdot)_{n+1}$ las magnitudes correspondientes a pasos de tiempo consecutivos, y siendo $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ el correspondiente incremento del tensor de deformaciones $\boldsymbol{\varepsilon}$, se tiene

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} = \bar{\boldsymbol{\sigma}}_n + \mathbf{D}_0 : \Delta\boldsymbol{\varepsilon} - \beta E H(\dot{d}_{n+1}^-) \frac{\langle \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} : \Delta\boldsymbol{\varepsilon} \rangle}{\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} : \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}} \quad (39)$$

Definiendo

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^{trial} = \bar{\boldsymbol{\sigma}}_n + \mathbf{D}_0 : \Delta\boldsymbol{\varepsilon} \quad (40)$$

Es posible reescribir la Ec. (39) en la forma

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} = \alpha \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^{trial} \quad (41)$$

donde

$$\alpha = 1 - \beta E H(\dot{d}_{n+1}^-) \frac{\langle \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^{trial} : \Delta\boldsymbol{\varepsilon} \rangle}{\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^{trial} : \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^{trial}} \quad (42)$$

Puesto que $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ y $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^{trial}$ son explícitos en función de las deformaciones del paso $n+1$, el tensor de tensiones efectivas resulta ser básicamente explícito también, aunque deba ser corregido con el algoritmo de ‘retorno radial’ de las Ecs. (41)-(42): el tensor $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^{trial}$ es un predictor, y el tensor final de tensiones efectivas se obtiene aplicando a éste el factor de escala α . La discontinuidad 0/1 de la Ec. (42) debida a la función de Heaviside precisa un máximo de dos iteraciones y, por consiguiente, está garantizada una alta eficiencia computacional con este formato de evolución de las deformaciones inelásticas.

2.7. Comportamiento cíclico en ensayo uniaxial

La Figura 4 muestra el comportamiento del modelo constitutivo en un ensayo cíclico tracción-compresión. La capacidad del modelo para representar el ablandamiento en tracción resulta evidente, así como la transición del endurecimiento al ablandamiento en compresión. Durante el régimen de tracción las deformaciones irreversibles no evolucionan, pero sí lo hacen cuando la deformación aumenta en compresión. La recuperación de la rigidez al pasar de tracción a compresión también se observa claramente, un efecto unilateral conseguido gracias a las dos variables de daño usadas por el modelo.

2.8. Algoritmo de integración

Debido a que el modelo propuesto está gobernado por las deformaciones totales $\boldsymbol{\varepsilon}$, y que éstas son conocidas en cada paso de tiempo para un esquema estándar de elementos finitos, el algoritmo de integración de las tensiones es bastante simple, tal como se muestra en la Tabla 1.

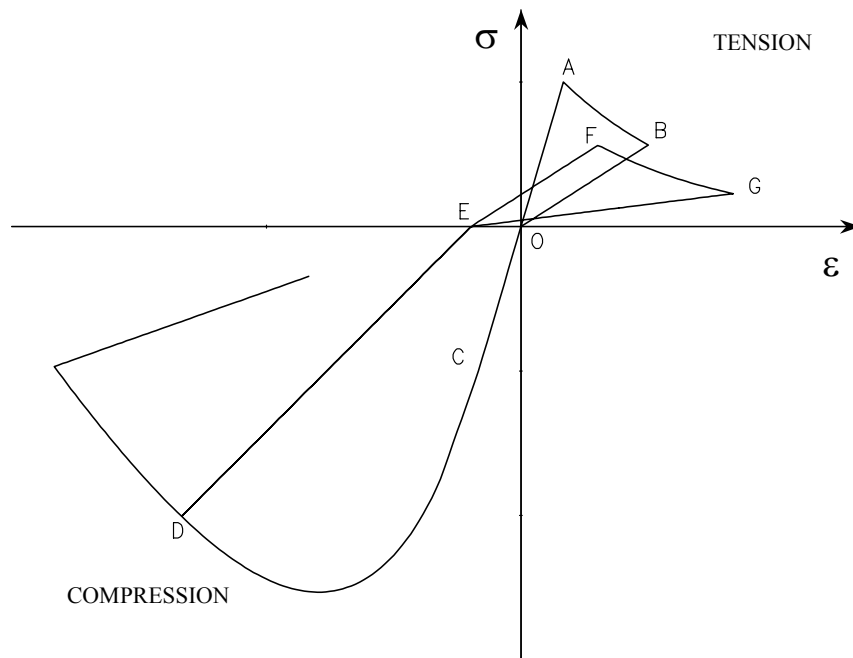


Figura 4. Comportamiento cíclico en ensayo uniaxial

Inicialización $n=0$:

- (i) Hacer $r_n^+ = r_0^+$, $r_n^- = r_0^-$, $d_n^+ = 0$ y $d_n^- = 0$.

Paso $n+1$:

- (ii) Evaluar ϵ_{n+1} y $\Delta\epsilon$. Calcular $\bar{\sigma}_{n+1}$.
- (iii) Dividir $\bar{\sigma}_{n+1}$ en $\bar{\sigma}_{n+1}^+$ y $\bar{\sigma}_{n+1}^-$.
- (iv) Calcular $\bar{\tau}_{n+1}^+$ y $\bar{\tau}_{n+1}^-$.
- (v) Si $\bar{\tau}_{n+1}^\pm > r_n^\pm$, actualizar los umbrales: $r_{n+1}^\pm = \max \{ r_n^\pm, \bar{\tau}_{n+1}^\pm \}$.
 Actualizar las variables de daño $d_{n+1}^\pm = 1 - q^\pm(r_{n+1}^\pm)/r_{n+1}^\pm$.
- (vi) Calcular las tensiones

$$\sigma_{n+1} = (1 - d_{n+1}^+) \bar{\sigma}_{n+1}^+ + (1 - d_{n+1}^-) \bar{\sigma}_{n+1}^- \quad \text{SALIR.}$$

Tabla 1. Algoritmo de integración de las tensiones

2.9. Tensor constitutivo tangente

El tensor constitutivo tangente es aquél que satisface la relación

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}_{tan} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (43)$$

En Faria (1994) se obtiene que para el modelo propuesto este tensor tiene la expresión:

$$\mathbf{D}_{tan} = \left\{ \left((1-d^+) \mathbf{I} - \frac{h^+}{\bar{\tau}^+} (\bar{\boldsymbol{\sigma}}^+ \otimes \bar{\boldsymbol{\sigma}}^+) : \boldsymbol{\Lambda}^+ \right) : \mathbf{P} + \right. \\ \left. + \left((1-d^-) \mathbf{I} - \frac{h^-}{\bar{\tau}^-} (\bar{\boldsymbol{\sigma}}^- \otimes \bar{\boldsymbol{\sigma}}^-) : \boldsymbol{\Lambda}^- \right) : (\mathbf{I} - \mathbf{P}) \right\} : \mathbf{D}^i \quad (44)$$

con

$$h^\pm = -\frac{1}{r^\pm} H^\pm + \frac{q^\pm}{(r^\pm)^2} \quad (45)$$

y el tensor \mathbf{D}^i definido como:

$$\mathbf{D}^i = \mathbf{D}_0 - \beta E H(d^-) H(\bar{\boldsymbol{\sigma}} : d\boldsymbol{\varepsilon}) \frac{\bar{\boldsymbol{\sigma}} \otimes \bar{\boldsymbol{\sigma}}}{\bar{\boldsymbol{\sigma}} : \bar{\boldsymbol{\sigma}}} \quad (46)$$

En situaciones de descarga en tracción o compresión, debe tomarse $h^+ = 0$ o $h^- = 0$ en (44). Además, durante la descarga en compresión debe hacerse $\mathbf{D}^i = \mathbf{D}_0$.

El operador de proyección \mathbf{P} se define como

$$\dot{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}^+ = \mathbf{P} : \dot{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} = \mathbf{P} : \mathbf{D}^i : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (47a)$$

$$\dot{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}^- = (\mathbf{I} - \mathbf{P}) : \dot{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} = (\mathbf{I} - \mathbf{P}) : \mathbf{D}^i : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (47b)$$

Y puede calcularse como

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^3 H(\bar{\sigma}_i) \mathbf{P}^{ii} \otimes \mathbf{P}^{ii} + 2 \sum_{\substack{ij=1 \\ j>i}}^3 \frac{\langle \bar{\sigma}_i \rangle - \langle \bar{\sigma}_j \rangle}{\bar{\sigma}_i - \bar{\sigma}_j} \mathbf{P}^{ij} \otimes \mathbf{P}^{ij} \quad (48)$$

donde

$$\mathbf{P}^{ij} = \mathbf{P}^{ji} = \frac{1}{2} (\mathbf{p}_i \otimes \mathbf{p}_j + \mathbf{p}_j \otimes \mathbf{p}_i) = \text{symm}(\mathbf{p}_i \otimes \mathbf{p}_j) \quad (49)$$

Este operador tangente es no simétrico en condiciones generales.

La Figura 5 ilustra el comportamiento del algoritmo de Newton-Raphson cuando se usa el tensor tangente aquí definido. Los detalles de la simulación numérica en cuestión pueden consultarse en Faria (1994), pero no son relevantes a los efectos presentes. La Figura 5a muestra una típica curva no lineal carga-desplazamiento y sirve para poner de manifiesto como una estrategia que utiliza la matriz inicial elástica en las iteraciones de equilibrio es incapaz de completar el análisis. Por otro lado, la convergencia cuadrática

que se consigue con el tensor tangente reduce drásticamente el número de iteraciones necesarias por incremento de carga, tal como se muestra en la Figura 5b.

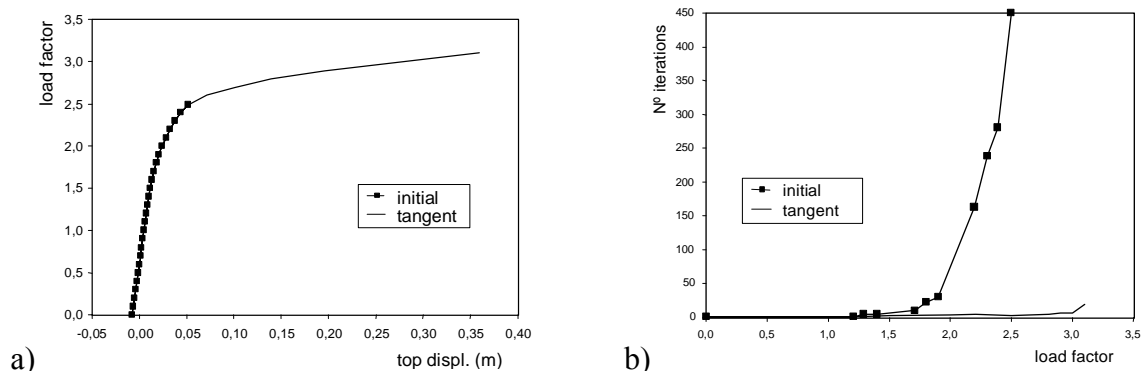


Figura 5. Rendimiento del tensor tangente en un análisis no lineal.

2.10. Aplicaciones

2.10.1. Comportamiento sísmico de una pared de hormigón armado

En esta Sección se presenta la simulación numérica, utilizando el modelo de daño presentado anteriormente, del comportamiento sísmico de una pared de hormigón armado de seis pisos de altura ensayada en una mesa vibrante. Aunque se sometió a la pared a tres terremotos sucesivos de intensidades crecientes con aceleraciones pico de 0.24g, 0.40g y 0.71g, sólo se presentan los resultados obtenidos para el sismo de 0.71g por razones de brevedad. Los detalles completos de los ensayos experimentales y de la simulación numérica se pueden encontrar en Faria et al. (1999). La Figura 6 reproduce este acelerograma, mientras que la Figura 7 muestra la malla adoptada para el hormigón, formada por elementos finitos de 8 nodos en tensión plana (espesor de 6 cm), así como las barras de armado, simuladas mediante elementos de barra de 2 nodos.

Tal como se muestra en la Figura 8, se definen dos curvas uniaxiales para el hormigón según el grado de confinamiento de éste por parte del armado. Así se distinguen entre el hormigón situado en la zona armada del situado fuera de ésta. Esta distinción sería innecesaria en una simulación 3D, pero al adoptar la hipótesis de tensión plana, el aumento de la ductilidad debido al confinamiento debe tenerse en cuenta.

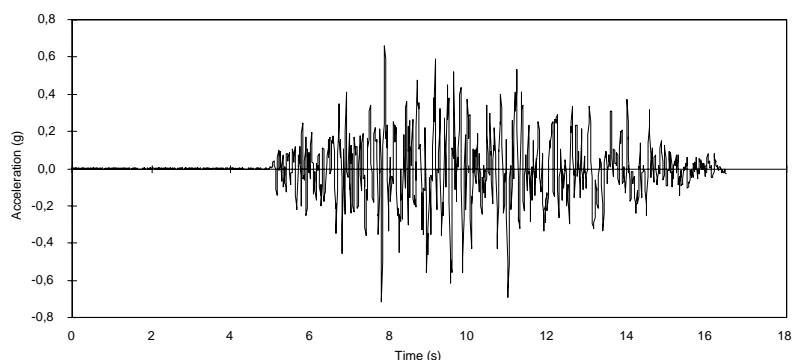


Figura 6. Acelerograma de 0.71g.

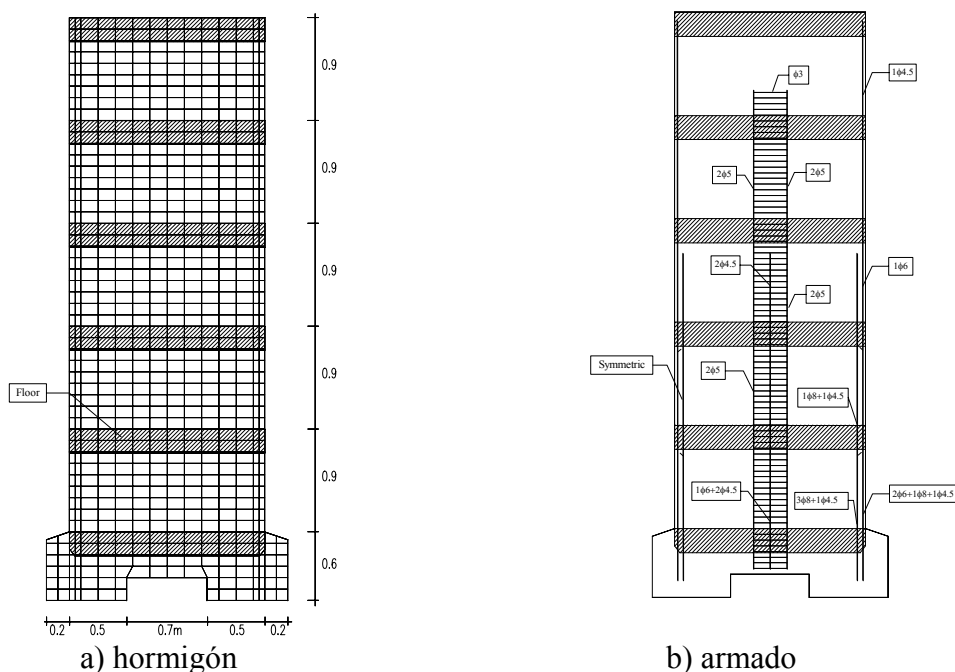


Figura 7. Malla de elementos finitos y detalle del armado.

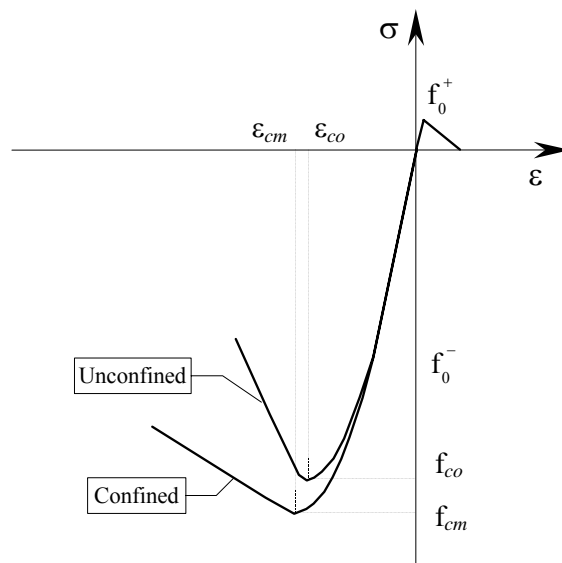


Figura 8. Curvas uniaxiales para el hormigón confinado y no confinado.

Para cuantificar este efecto, se define el grado de confinamiento k como (Guedes, 1997)

$$k = 1 + \frac{A_{sw} l_w f_{syt}}{b_c h_c s f_{co}} \quad (50)$$

donde A_{sw} es el área de las barras, l_w su perímetro, s su separación y f_{syt} su tensión de fluencia; $b_c \times h_c$ es el área de hormigón confinado.

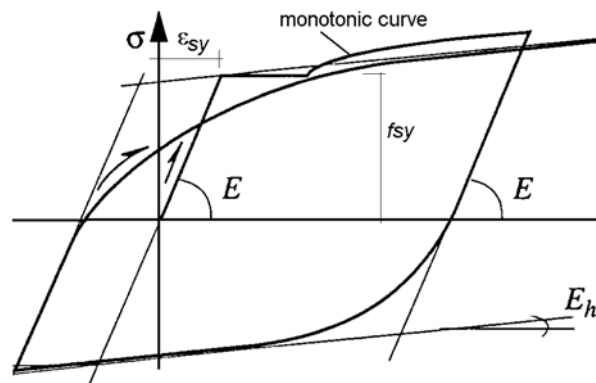


Figura 9. Comportamiento cíclico del acero de armado.

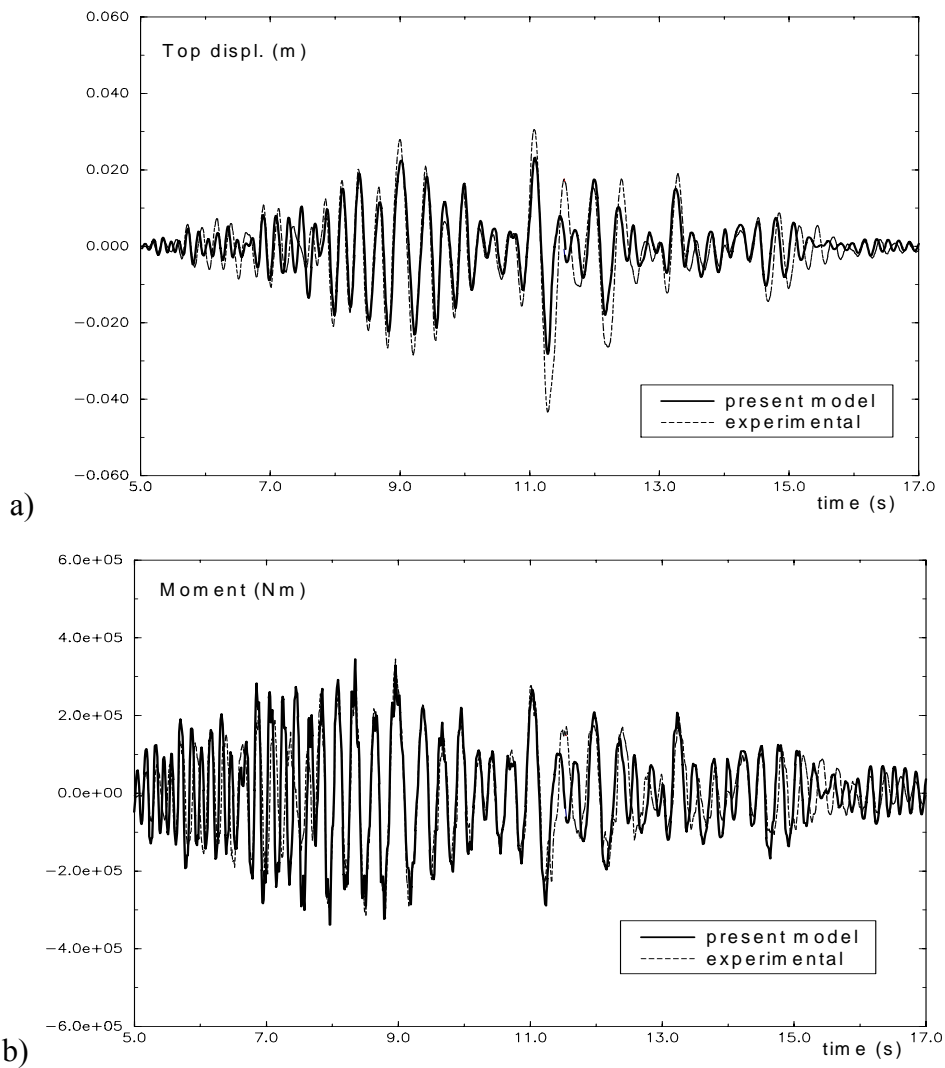


Figura 10. Resultados para el sismo de 0.71g.

Llamando f_{co} y ε_{co} a la resistencia a compresión y correspondiente deformación del hormigón no confinado, se modifican las correspondientes propiedades del hormigón confinado en la forma:

$$f_{cm} = k f_{co} \qquad \varepsilon_{cm} = k^2 \varepsilon_{co} \qquad (51)$$

En Faria et al. (1999) se dan detalles sobre las materiales propiedades adoptadas para el hormigón.

El comportamiento no lineal del acero de armado se simula mediante la formulación explícita de Giuffré-Menegotto-Pinto (Menegotto y Pinto, 1973), que es capaz de reproducir adecuadamente la disipación asociada a los ciclos de carga, tal como se muestra en la Figura 9. En Faria et al. (1999) se dan detalles sobre las materiales propiedades adoptadas para el acero.

En la Figura 10 se comparan los resultados numéricos obtenidos con el modelo propuesto con los resultados experimentales: en la Figura 10a se muestra la evolución del desplazamiento horizontal relativo en lo alto de la pared, mientras que en la Figura 10b se muestra la evolución del momento flector en la base de la pared. La concordancia entre los valores numéricos y los experimentales es notable, tanto en cuanto a las amplitudes, las frecuencias y las fases, particularmente, teniendo en cuenta que estos resultados corresponden a la aplicación del tercer sismo consecutivo. Los desplazamientos máximos calculados son algo menores que los medidos, pero esto puede deberse a ciertos fenómenos no tenidos en cuenta en el modelo numérico, tales como la pérdida de adherencia de las barras de armado durante los sismos.

2.10.2. Comportamiento cíclico de una pila de puente de hormigón armado

La siguiente aplicación consiste en la simulación numérica del ensayo experimental de un elemento estructural bajo condiciones cíclicas. En concreto, se trata del ensayo cuasi-estático de la pila de un puente construida a escala reducida. La Figura 11 muestra detalles de la geometría de la pila, que tiene una altura de 8.4 m y una sección transversal rectangular hueca de $0.8 \times 1.6 \text{ m}^2$. Tal como se muestra en la Figura 11b, el armado longitudinal está formado por barras $28\phi 14$, $12\phi 12$ y $40\phi 8$, mientras que el armado transversal lo forman barras $\phi 5$ con un espaciado de 0.06 m. En Guedes (1997) se da información adicional sobre el ensayo y la simulación numérica.

Primero se aplica una fuerza vertical axial de 1700 kN en la cabeza de la pila para simular la carga muerta transmitida por el tablero. A continuación, se prescribe un desplazamiento horizontal cíclico en la parte superior de la pila, en la dirección del eje principal mayor de inercia de la sección. Debido a la simetría de la geometría y de la carga, se pueden suponer condiciones de tensión plana en los elementos de la malla. La cimentación se supone infinitamente rígida.

Respecto a las propiedades de los materiales utilizadas en la simulación numérica, y de forma análoga a la aplicación anterior, se definen dos curvas uniaxiales para el hormigón según el grado de confinamiento de éste por parte del armado. En Guedes (1997) se da información adicional sobre los valores empleados en ambas zonas de la pila.

La Figura 12 reproduce los diagramas fuerza-desplazamiento (en la parte superior de la pila) experimentales superpuestos a los calculados numéricamente. Es evidente que se obtiene un acuerdo notable entre ambos a lo largo de todo el ensayo. Por tanto, es evidente que el modelo de daño con dos variables escalares para tracción/compresión es capaz de representar los fenómenos principales que se producen bajo carga cíclica y que son responsables del continuo cambio observado en la rigidez de la estructura: la fisuración del hormigón, el cierre de fisuras (responsable del efecto de ‘pinching’) y la no linealidad en compresión.

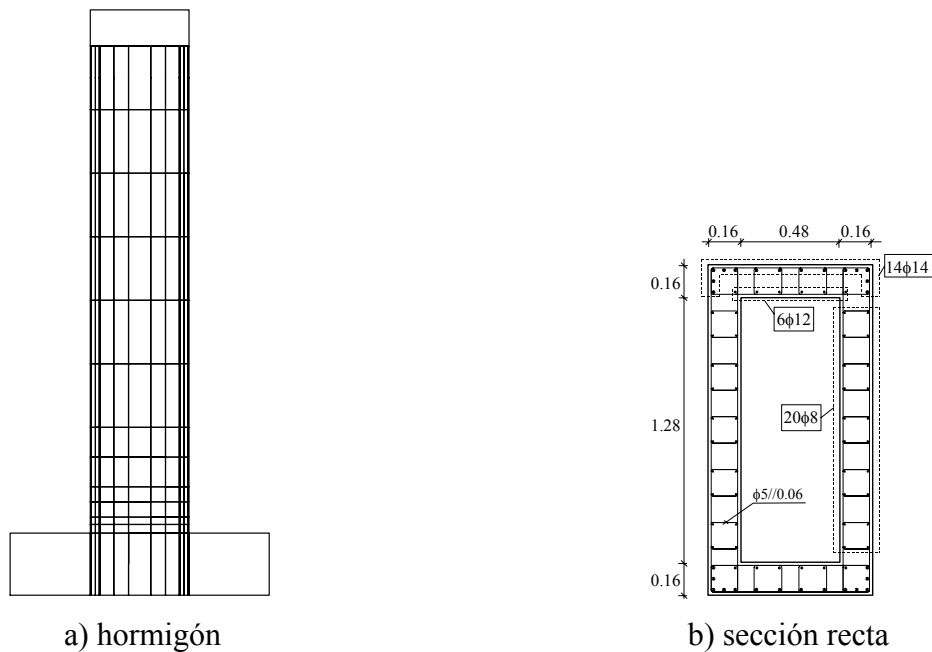


Figura 11. Pila de Puente de hormigón armado.

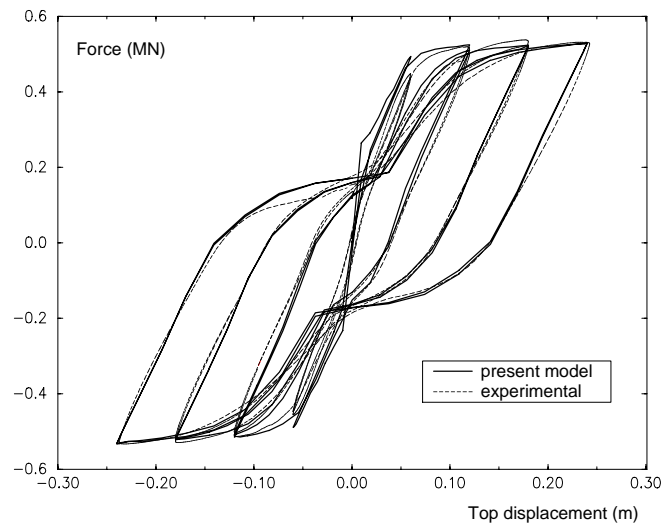


Figura 12. Diagrama fuerza-desplazamiento.

3. MODELO DE DAÑO LOCALIZADO

3. 1. Motivación y antecedentes

Desde principios de los años 90 se reconoce abiertamente que las soluciones de elementos finitos basadas en la aproximación de la fisura distribuida sufren de una dependencia tan fuerte de la orientación de la malla que el hecho no puede ser ignorado. También se sabe que si la discretización espacial se diseña de manera que exista una trayectoria “apropiada” para la propagación de las fisuras que se van formando las soluciones obtenidas son satisfactorias.

En los últimos 15 años, una parte significativa del esfuerzo de investigación en Mecánica Computacional de Sólidos se ha dedicado a este problema. Para proponer y utilizar un modelo computacional de fisuración se necesitan tres ingredientes: (i) un modelo continuo que defina las variables y las ecuaciones del problema de contorno continuo que se quiere resolver, (ii) un modelo constitutivo para las partes del dominio fisuradas y no fisuradas, y (iii) un procedimiento de discretización espacial que convierta las ecuaciones diferenciales continuas en ecuaciones algebraicas discretas. Si el modelo computacional discreto resultante tiene un defecto, su origen se debe buscar en uno de los citados tres eslabones de la cadena. El bien hecho establecido que las mallas “bien alineadas” producen buenos resultados sugiere con fuerza que el defecto principal está en el procedimiento de discretización espacial.

Sin embargo, esta evidencia no es ampliamente reconocida y las soluciones propuestas en los últimos años buscan modificar bien el modelo continuo bien los modelos constitutivos. En la década pasada se han propuesto diversas estrategias que repasamos brevemente a continuación:

Métodos de gradiente

Una de las propuestas para resolver el problema de la localización con formulaciones continuas consiste en definir modelos que incluyan, o bien el gradiente de la deformación, o el gradiente de las variables internas en la formulación del modelo constitutivo.

Entre los trabajos que utilizan el gradiente de las variables inelásticas está el de De Borst y Mühlhaus (1992). Allí se plantea una función umbral de fluencia que depende del laplaciano de las variables de estado inelásticas (deformaciones plásticas), además de depender de las variables inelásticas en sí. Allí, los autores proponen una metodología que consiste en definir tanto las ecuaciones de equilibrio como las ecuaciones que gobiernan la evolución de las variables de estado inelásticas en una forma débil. Esto trae como consecuencia que, en el caso de plasticidad, la condición de consistencia resulte en una ecuación diferencial, en lugar de una ecuación algebraica como ocurre en la formulación convencional. Así, es necesario también su discretización espacial para resolverla. En Pamin (1994) se detallan las principales limitaciones de este método. Entre otras cosas, es necesario que los elementos finitos empleados cumplan ciertas características para poder alcanzar la solución. Por ejemplo, la interpolación de los desplazamientos debe ser cuadrática, mientras que la

interpolación de la variable plástica debe ser cúbica. Por otro lado, es imposible usar elementos triangulares. También se debe tener un mínimo de puntos de integración para evitar modos de energía nula en los campos de desplazamientos y de la variable plástica.

Otros trabajos donde se emplean criterios similares son el de Schreyer y Chen (1986), Peerlings et al. (1998), De Borst (2001).

Modelos no locales

De manera general, los modelos no locales consisten en la sustitución de una de las variables independientes por su equivalente no local, obtenida a partir de un promedio ponderado sobre el espacio adyacente al punto en consideración (Jirásek, 1998). La elección de esta variable es hasta cierto punto arbitraria, mientras cumpla algunos requisitos básicos. Así, existen modelos que toman como variable no local las deformaciones; otras toman la variable interna de daño o la energía disipada, etc.

Por ejemplo, en el trabajo de Bazant y Pijaudier-Cabot (1988) se evalúa una deformación no local equivalente, en cada punto de integración, como un promedio ponderado de los puntos materiales que se encuentren dentro de cierto radio. Un método inicialmente propuesto por Hall y Hayhurst (1991) consiste en superponer una cuadrícula sobre la malla, que permanece constante aunque cambie la forma y ubicación de los elementos finitos a lo largo de la malla. Luego, durante el cálculo, se promedian las deformaciones calculadas en los puntos de integración contenidos dentro de cada zona delimitada por la cuadrícula. Esto crea un campo de daño discontinuo en las líneas que definen la cuadrícula, al contrario que en el método anterior, donde las deformaciones son continuas en todo el dominio. En ambos métodos se utiliza el concepto de longitud característica: el primero en el radio que define al círculo para promediar las deformaciones, y el segundo en la separación de las líneas que conforman la cuadrícula. Otros trabajos donde se contempla el uso de modelos no locales son el de De Vree et al. (1995), Comi et al. (2002), etc.

Una de las principales limitaciones de los modelos no locales es su incapacidad de representar el proceso de degradación completo hasta la falla completa (Jirásek, 1998), permitiendo la existencia de tensiones remanentes. Además, la no localidad hace que exista interacción entre dos elementos finitos no adyacentes. Esto dificulta la programación de estos métodos y encarece enormemente su uso.

Modelos de Cosserat y micropolares

Otro de los métodos empleados para evitar la dependencia patológica de los resultados respecto a la discretización consiste en una regularización mediante la adición de grados de libertad rotacionales. Esto se corresponde con la teoría del continuo de Cosserat, que añade, aparte del módulo de Young, un módulo de flexión como característica del material. En vista de que la relación entre estos dos módulos tiene dimensiones de longitud, es equivalente a la introducción de la longitud característica, típica de los modelos no locales de gradiente.

Estos modelos también se llaman micropolares, y han sido aplicados en regímenes elastoplásticos por De Borst (1991). Sin embargo, esta formulación posee una limitación importante, y es que no puede simular de manera realista materiales dependientes de la presión, como el hormigón, suelos o roca, siendo incapaz de modelar casos incompresibles. Además, el método encarece el costo computacional al añadir grados de libertad adicionales a nivel global (De Borst et al., 1993).

Regularización viscosa

Todas las teorías expuestas hasta ahora son independientes de la velocidad de carga. Sin embargo, algunos autores emplean una regularización viscosa para tratar el problema de localización, principalmente en análisis dinámicos. En Needleman (1988) se obtienen buenos resultados, tanto bajo cargas estáticas como dinámicas, en un problema de corte puro. En De Borst et al. (1993) se emplea este método, aunque sin resultados representativos, pues se concluye que es necesario utilizar unos parámetros materiales de difícil obtención a través de ensayos experimentales. En Dubé et al. (1996), se aplica esta regularización al análisis de propagación de ondas, obteniéndose también resultados independientes de la discretización efectuada. Wang et al. (1997) han aplicado modelos de viscoplasticidad al estudio de los efectos de la discretización en los resultados, comprobando que la adición de los efectos viscosos contribuye positivamente a resultados numéricamente objetivos.

Obviamente, el efecto regularizador desaparece a velocidades de aplicación de carga bajas, por lo que su utilización se limita a materiales en régimen no lineal viscoso.

Se puede decir que todos estos métodos modifican el problema continuo estándar para introducir una longitud interna que actúe como *limitador de la localización*. Por un lado, esto previene en la práctica el desarrollo de discontinuidades de deformación o de desplazamiento. Por otro lado, si bien estas estrategias se han demostrado eficaces en cierto grado, también plantean nuevas dificultades teóricas y computacionales, sin respuesta en la actualidad. Sólo para mencionar una dificultad seria, los modelos no locales no predicen valores máximos de la tensión y, por lo tanto, la propagación de la fisura, en el extremo de una fisura existente, sino a una distancia finita por delante de dicho extremo (Simone, 2003); esto es poco realista desde el punto de vista físico.

En otro contexto, se muestra en Cervera et al. (2003a y 2003b) que es factible obtener soluciones objetivas, convergentes con el refinamiento de la malla, y que muestran líneas de deslizamiento con un alto grado de localización de deformaciones usando elementos estándar y modelos locales de plasticidad y de daño de tipo J2. La clave para obtener estas soluciones es utilizar (i) un formato mixto de las ecuaciones de balance y (ii) una técnica de estabilización para los campos de interpolación de las variables primarias (desplazamientos y presión).

Puede concluirse, por tanto, que las dificultades encontradas en la simulación de problemas de propagación de fisuras no están necesariamente relacionadas ni con el formato de las ecuaciones estándar del problema continuo ni con la definición local de las leyes constitutivas con ablandamiento.

3. 2. Algoritmos de rastreo

De acuerdo con lo comentado en los párrafos precedentes, el problema de creación y propagación de fisuras (bajo el enfoque de fisura distribuida) sigue básicamente un procedimiento que consiste en dos pasos. En cada incremento de carga, y para una distribución dada del daño en el sólido, el primero de estos pasos consiste en resolver el problema mecánico para calcular el campo de tensiones. Luego, el siguiente paso es la actualización de la distribución del daño. Esta actualización implica dos operaciones diferentes: (a) actualizar el índice de daño en aquellos elementos ya dañados y (b) decidir cuáles elementos intactos dañarán en el incremento de carga actual.

El paso (a) es trivial, ya que el índice de daño es una función directa de la historia de deformaciones. Sin embargo, el paso (b), relacionado con la dirección de propagación, requiere un estudio más detallado.

En la formulación clásica de los modelos de daño distribuido se supone implícitamente que el criterio para definir el inicio de una fisura (el cual está expresado en términos de tensiones/deformaciones) debe también definir automáticamente la dirección de propagación. Esta suposición es ciertamente válida en el problema continuo, donde la evaluación de las tensiones y deformaciones, así como de sus direcciones, son correctas. Sin embargo, en el problema discreto, los campos de tensiones y deformaciones en las cercanías de la punta de la fisura distan mucho de ser exactos (Cervera et al., 2003a). De hecho, la punta de la fisura es un punto singular, y el error local cometido en la evaluación en los gradientes de desplazamientos (deformaciones) en la solución discreta es no acotado. Como consecuencia, la utilización del criterio de umbral de daño para definir la dirección de la propagación origina una dependencia de la orientación de la malla, lo cual es inaceptable.

Este error debido a la discretización espacial en las cercanías de la punta de la fisura es la mayor dificultad que hay que superar en el problema de la propagación de fisuras a tracción (Cervera y Chiumenti, 2006^a y 2006^b).

Por tanto, la evaluación de la dirección de propagación se debe considerar como un problema diferenciado, obviamente acoplado con la ecuación de equilibrio interno. En este caso, es necesario implementar una técnica o *algoritmo de rastreo*, que permita trazar un camino entre los elementos finitos para delimitar las zonas donde se formarán o propagarán las fisuras en cada incremento de carga.

Para que un algoritmo de rastreo se pueda utilizar con éxito en problemas de propagación de fisuras debe cumplir dos requisitos: (1) debe estar ligado de forma consistente al criterio de fisuración del modelo constitutivo, ya que éste es el mecanismo establecido de fisuración a nivel continuo, y (2) no debe ser totalmente dependiente de los valores locales de los campos discretos de tensión/deformación, ya que estos pueden estar evaluados con un porcentaje de error sustancial.

Con respecto al primer requisito, para un criterio de Rankine, basado en el valor de la tensión principal máxima de tracción, es consistente suponer que la propagación de la

fisura se produce en el plano ortogonal al primer vector propio de la tensión. Con respecto al segundo requisito, son factibles varias posibilidades, y por lo menos se han propuesto y se han aplicado con éxito dos.

La primera consiste en aplicar un procedimiento de recuperación y alisado de la tensión (o deformación) para mejorar los campos de la tensión (o deformación) calculados en la vecindad del extremo de la fisura. Esto se hace fácilmente aplicando las diversas técnicas existentes de alisado (Grassl y Jirásek, 2004), desde hacer un simple promedio entre los valores de elementos adyacentes hasta introducir una interpolación más refinada para estos campos.

La segunda posibilidad, más fundamental, consiste en considerar la evaluación de la dirección de la propagación como problema un separado, ligado obviamente al de solucionar la ecuación de equilibrio. Este procedimiento fue propuesto en Oliver y Hueste (2004) en el marco de las discontinuidades fuertes, y se ha utilizado ya en aplicaciones en 2D y 3D (Oliver et al., 2004).

En los ejemplos de aplicación que siguen se usa esta segunda estrategia en el contexto de elementos finitos estándar. Los detalles sobre la puesta en práctica de esta técnica se describen en Cervera y Chiumenti (2006a y 2006b) y en Clemente (2006).

3. 3. Aplicaciones

3.3.1. Tracción pura

La geometría consiste en una placa rectangular de 200 mm x 400 mm con un agujero central de radio 10 mm, sometida a desplazamientos opuestos aplicados en sus partes superior e inferior (Clemente, 2006). Las hipótesis empleadas son las de deformación plana, con un espesor unitario. Se modela solamente la mitad de la placa, aprovechando el eje de simetría vertical del problema. Se utilizan dos mallas de elementos finitos triangulares de tres nodos, una con 3.818 elementos de tamaño promedio 5 mm (2.023 nodos) y otra de 14.844 elementos de tamaño promedio igual a 2.5 mm (7.648 nodos).

El problema fue analizado con el modelo de daño distribuido y con el modelo de daño localizado. Se utilizó un módulo de Young de 30 GPa y un coeficiente de Poisson de 0.2. La resistencia a tracción es de 2 MPa, y se tomó un valor de energía de fractura igual a 100 J/m².

La figura muestra la deformada (desplazamientos amplificados 100 veces) y las zonas dañadas en ambas mallas, con los dos modelos de daño. Independientemente de la malla utilizada, con el modelo de daño distribuido la distribución del daño tiende a seguir la orientación de los elementos finitos, en una dirección de aproximadamente 30° respecto a la horizontal. Este comportamiento es claramente dependiente de la orientación de la malla, y justifica por tanto la incorporación de una modificación para evitar que suceda.

Con el modelo de daño localizado se obtiene una fisura perfectamente horizontal, que no depende de la orientación ni del tamaño de la malla. Además, el daño localiza en una sola franja de elementos finitos, al contrario del otro caso, donde existe una dispersión significativa.

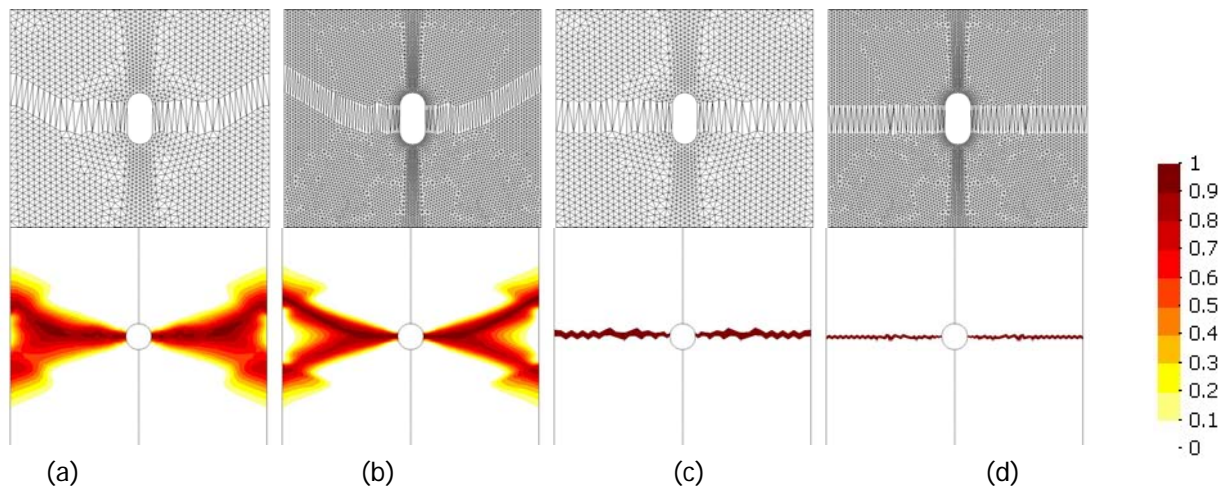


Figura 13. Deformada (x100) y daño a tracción (a) Malla gruesa MDD (b) Malla fina MDD (c) Malla gruesa MDL (d) Malla fina MDL. *MDD: modelo de daño distribuido. MDL: modelo de daño localizado.*

A pesar de que la fisura localizada obtenida en la malla gruesa tiene el doble de espesor que la fisura de la malla fina, la energía de fractura liberada es la misma. Esto se demuestra en la gráfica de la 14, donde las curvas de reacción vertical vs. desplazamiento impuesto en los dos casos prácticamente coinciden.

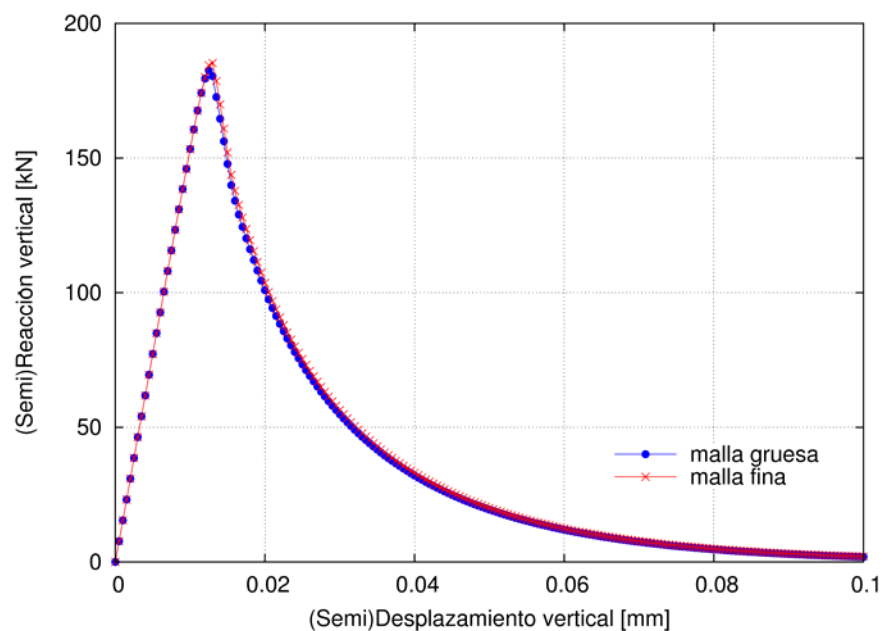


Figura 14. Reacción vs. Desplazamientos para ambas mallas. Modelo de daño localizado.

3.3.2. Flexión en modo mixto

Se simulan dos ensayos experimentales pertenecientes a una campaña realizada por Gálvez et al. (1998), consistentes en unas probetas de hormigón que se han sometido a estados de flexión en modo mixto hasta la rotura (Clemente, 2006).

La geometría, dimensiones y condiciones de contorno se muestran en la Figura 15. En el caso 1 se supone una rigidez nula del apoyo ubicado en la parte superior izquierda ($K=0$, viga de tres puntos). En el caso 2 se toma una rigidez infinita ($K=\infty$, viga de cuatro puntos). La carga P se simula con control de desplazamiento vertical.

El análisis se realiza con el modelo de daño localizado, con las siguientes características materiales: módulo de Young 38 GPa, coeficiente de Poisson 0.2, resistencia a tracción 3.0 MPa y energía de fractura 69 J/m².

El análisis se hace bajo un estado plano de deformaciones, con un espesor de 50 mm. La malla empleada en los cálculos consta de 13.443 elementos triangulares lineales y 7.028 nodos. Los elementos pertenecientes a la zona donde ocurrirá el daño tienen un tamaño promedio de 2.5 mm.

En la Figura 16 se muestran las deformaciones de ambas probetas al momento del colapso. En los dos casos estudiados se consigue una localización del daño y, por consiguiente, de los desplazamientos y las deformaciones que se corresponde con las condiciones de contorno aplicadas. Al ser éstas diferentes, se obtienen diferentes trayectorias de fisuración, ambas independientes de la orientación de la malla de elementos finitos, que es idéntica en ambos casos.

En la Figura 17 se comparan las trayectorias de fisura simuladas con el modelo de daño localizado con los gráficos presentados en Gálvez et al. (1998), apreciándose una coincidencia bastante exacta.

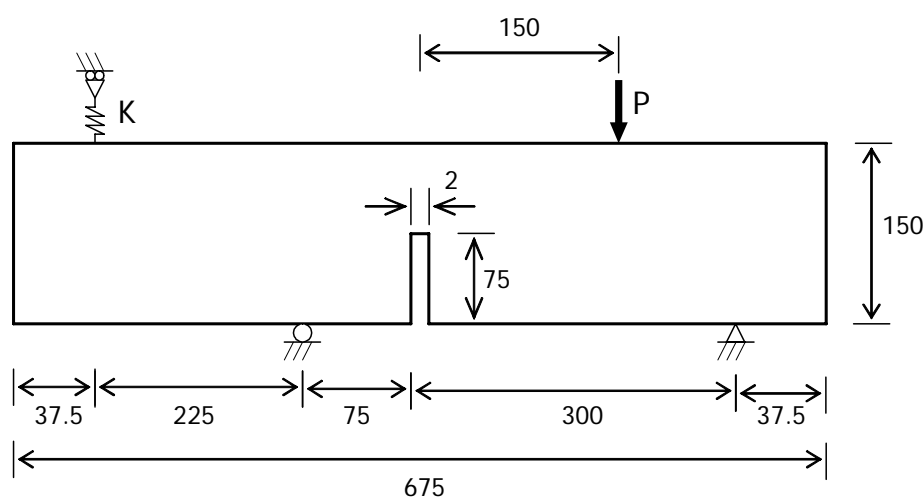


Figura 15. Dimensiones [mm] y condiciones de contorno.

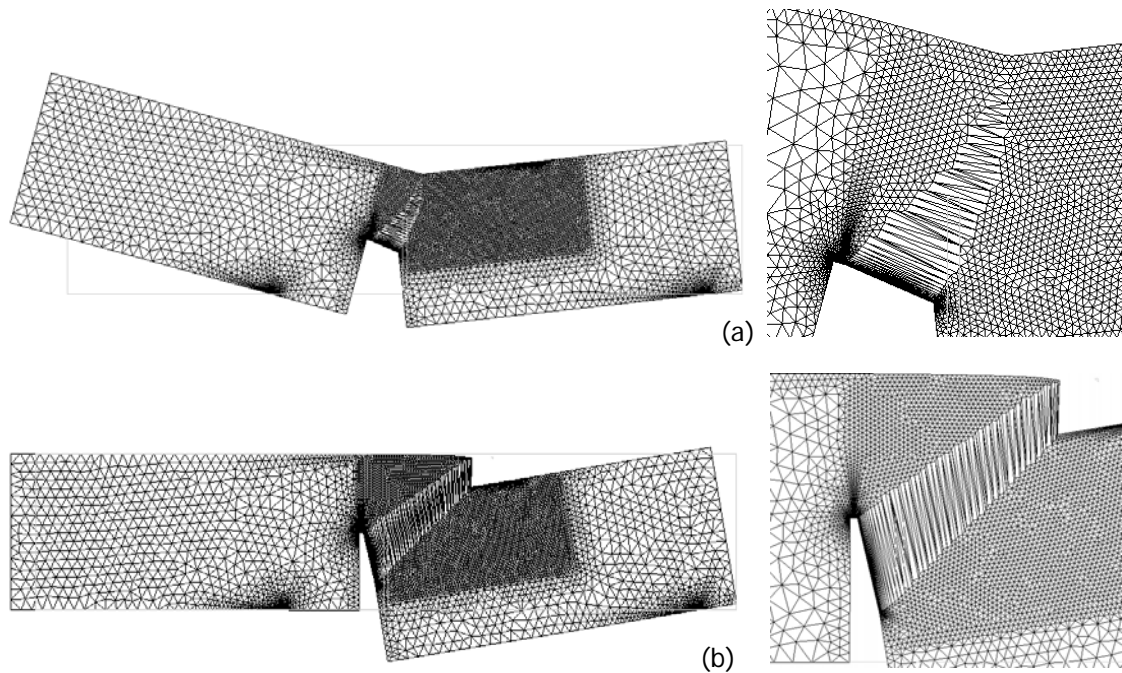


Figura 16. (a) Deformada (x100) de la probeta tipo 1 en el colapso y detalle (b) Deformada (x300) de la probeta tipo 2 en el colapso y detalle

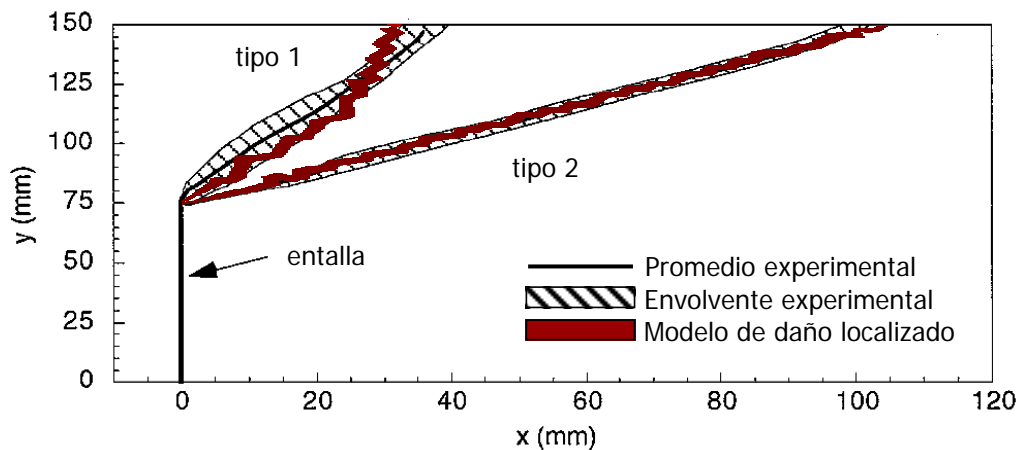


Figura 17. Comparación de las trayectorias de fisura para las probetas tipo 1 y tipo 2

En la Figura 18 se presentan la curva carga vs. abertura de la entalla (CMOD por sus siglas en inglés) junto con las envolventes experimentales de ambas probetas. En el caso 1 la curva presenta una tendencia muy similar a los resultados experimentales, con algo menos de ductilidad hacia el final del cálculo. Los resultados de la probeta tipo 2 son un poco menos rígidos en la rama de carga, si bien la carga pico concuerda perfectamente con el valor experimental. La descarga presenta una buena tendencia, si bien al alcanzar un valor de CMOD igual a 0.11 mm aproximadamente, la sección colapsa completamente.

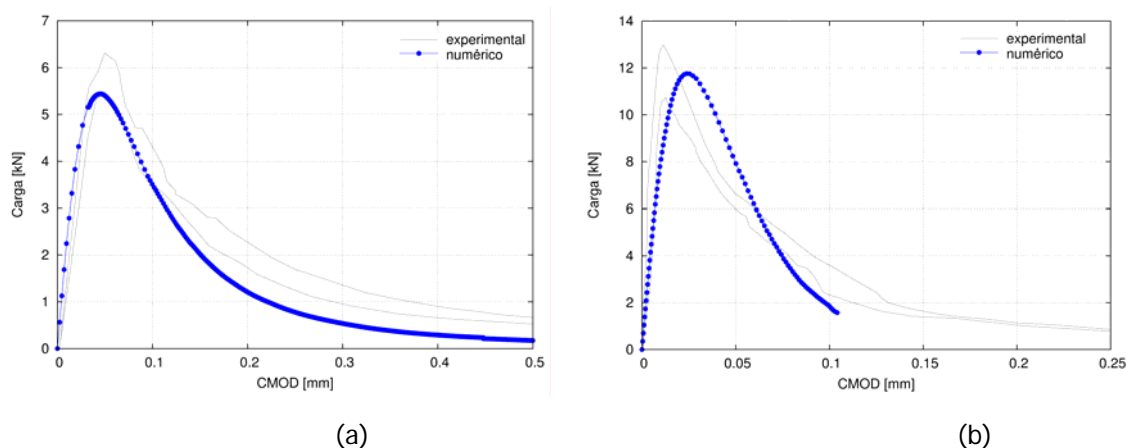


Figura 18. Carga vs. abertura de la entalla (CMOD) para (a) probeta tipo 1 (b) probeta tipo 2

3.3.3. Arco semicircular con carga asimétrica

El arco semicircular tiene 5 m de radio y 1 m de espesor, con una carga puntual asimétrica y ambos apoyos completamente empotrados, tal como se muestra en la Figura 19a. Las características del material son: peso específico 2.100 kg/m^3 , módulo de Young 5 GPa y coeficiente de Poisson 0.2, valores posibles para un edificio histórico de obra de fábrica. Los parámetros para caracterizar el comportamiento no lineal son resistencia a tracción 0.2 MPa y energía de fractura 10 J/m^2 . Ambos valores corresponden aproximadamente a la décima parte de los parámetros típicos del hormigón. Todos los análisis se efectúan bajo las hipótesis de deformación plana, con un espesor unitario (Clemente, 2006).

El análisis por el método de los elementos finitos está dividido en dos intervalos. En el primero se analiza la estructura bajo peso propio, y en el segundo se aplica la carga puntual P (ver Figura 19a), tanto por control de cargas como por control de desplazamientos verticales (con la componente horizontal libre) hasta el colapso. Esta acción se aplica de manera incremental, con pasos de 3 kN para el caso de control de cargas, y de 0.05 mm para el caso de control de desplazamientos.

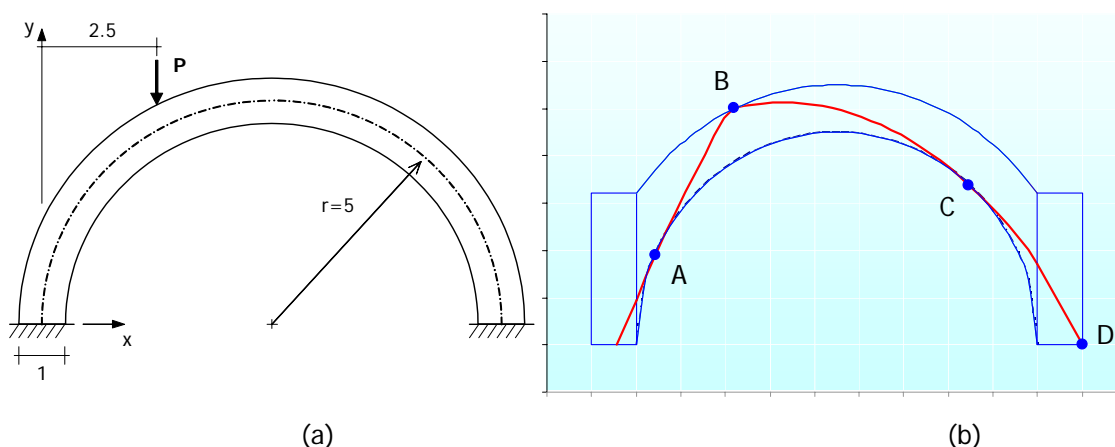


Figura 19. (a) Geometría y dimensiones [m] del arco semicircular (b) Rótulas y línea de empujes obtenidas con el Método de Análisis Límite

La malla de elementos finitos está compuesta por 11.324 elementos triangulares de tres nodos, con un total de 5.989 nodos. La malla es considerablemente fina, con un valor promedio de tamaño de elemento de unos 5 cm.

El arco se estudia mediante el método del análisis límite para obtener un valor de referencia de carga última y la ubicación de las cuatro rótulas que causan el colapso. Luego se estudia empleando el modelo de daño distribuido y el modelo de daño localizado, y se comparan los resultados obtenidos.

Análisis límite

Previamente al análisis numérico de la estructura se realizó un cálculo a través del método de análisis límite, para disponer de un valor de referencia de la carga última y una caracterización del mecanismo de colapso. La carga última obtenida tiene un valor de aproximadamente 150 kN. Las cuatro rótulas que se forman se denotan de la A a la D, según la Figura 9b.

Modelo de daño distribuido

En la Figura 20 se muestra la curva de carga (o reacción) vs. desplazamiento vertical en el punto de aplicación de P, para los casos con control de cargas y con control de desplazamientos. De esta figura destaca que la carga última es de aproximadamente 150 kN (punto 4 en la figura), coincidiendo con el valor obtenido mediante el análisis límite.

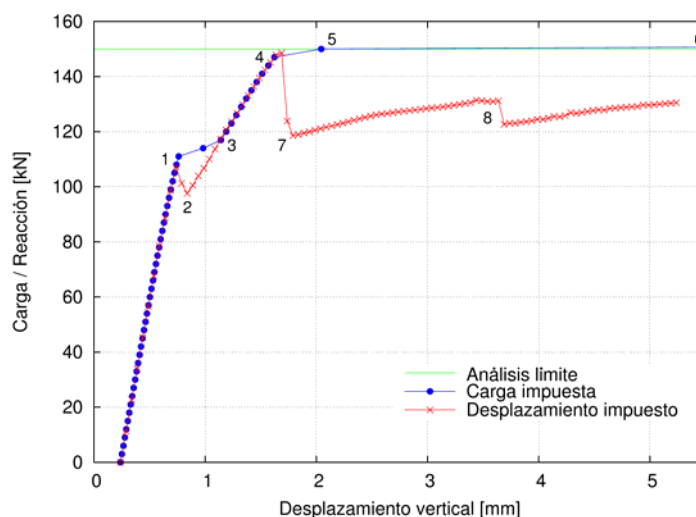


Figura 20. Curvas carga (o reacción) vs. desplazamiento vertical en el punto de aplicación de P (modelo de daño distribuido)

La figura 1 muestra la distribución del daño en diversas fases del cálculo en los puntos donde se espera la formación de rótulas, así como el mecanismo de colapso. Desde prácticamente el inicio de la aplicación de la carga los elementos ubicados en las zonas de máxima tracción comienzan a experimentar daño. Sin embargo, la respuesta de la estructura es lineal hasta que se alcanza una carga de unos 110 kN (punto 1 en la Figura 20). En este punto ocurre un incremento de la zona dañada de manera repentina, llegando al punto 3 en dos incrementos de carga. A partir del estado de carga 3 ocurre

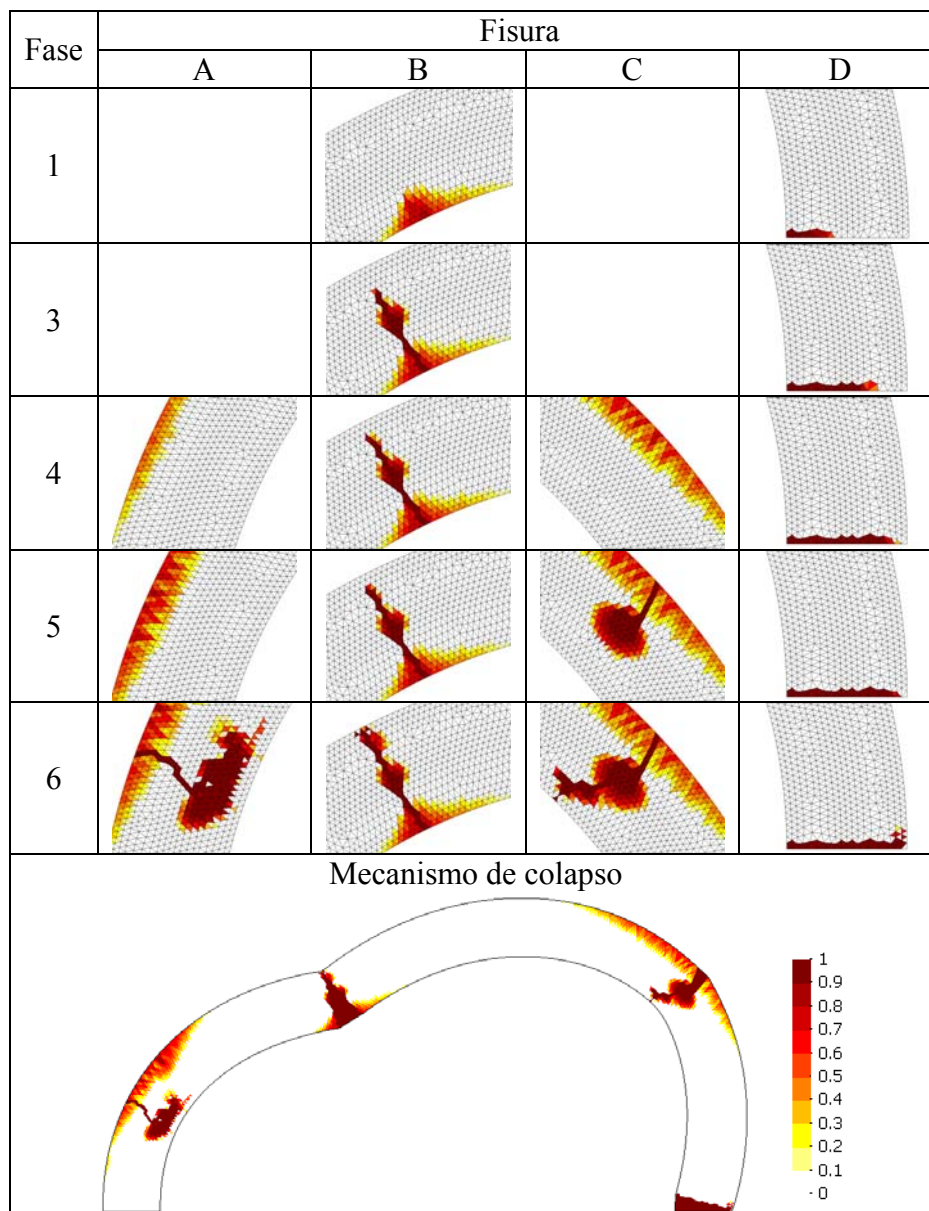


Figura 21. Daño en cada fisura en las diferentes fases indicadas en la figura y mecanismo de colapso de la estructura (control de cargas)

una evolución paulatina del daño, hasta alcanzar el punto 4. En este punto las fisuras existentes (B y D) han seguido evolucionando radialmente, mientras que en las zonas A y C existe cierto daño distribuido, pero sin indicios de la formación de rótulas.

Luego, en los dos pasos de carga siguientes (puntos 5 y 6) se desarrollan de manera brusca las fisuras C y A, respectivamente. La fisura C presenta cierta tendencia a una dirección radial, pero hacia el eje de la sección el daño se dispersa formando una especie de bulbo. La fisura A experimenta un fenómeno similar, con la formación de una fisura más o menos localizada, que se dispersa al acercarse al eje de la sección. En el paso 6 se observa que en las otras tres rótulas la sección ha dañado completamente, lo que provoca el colapso global del arco.

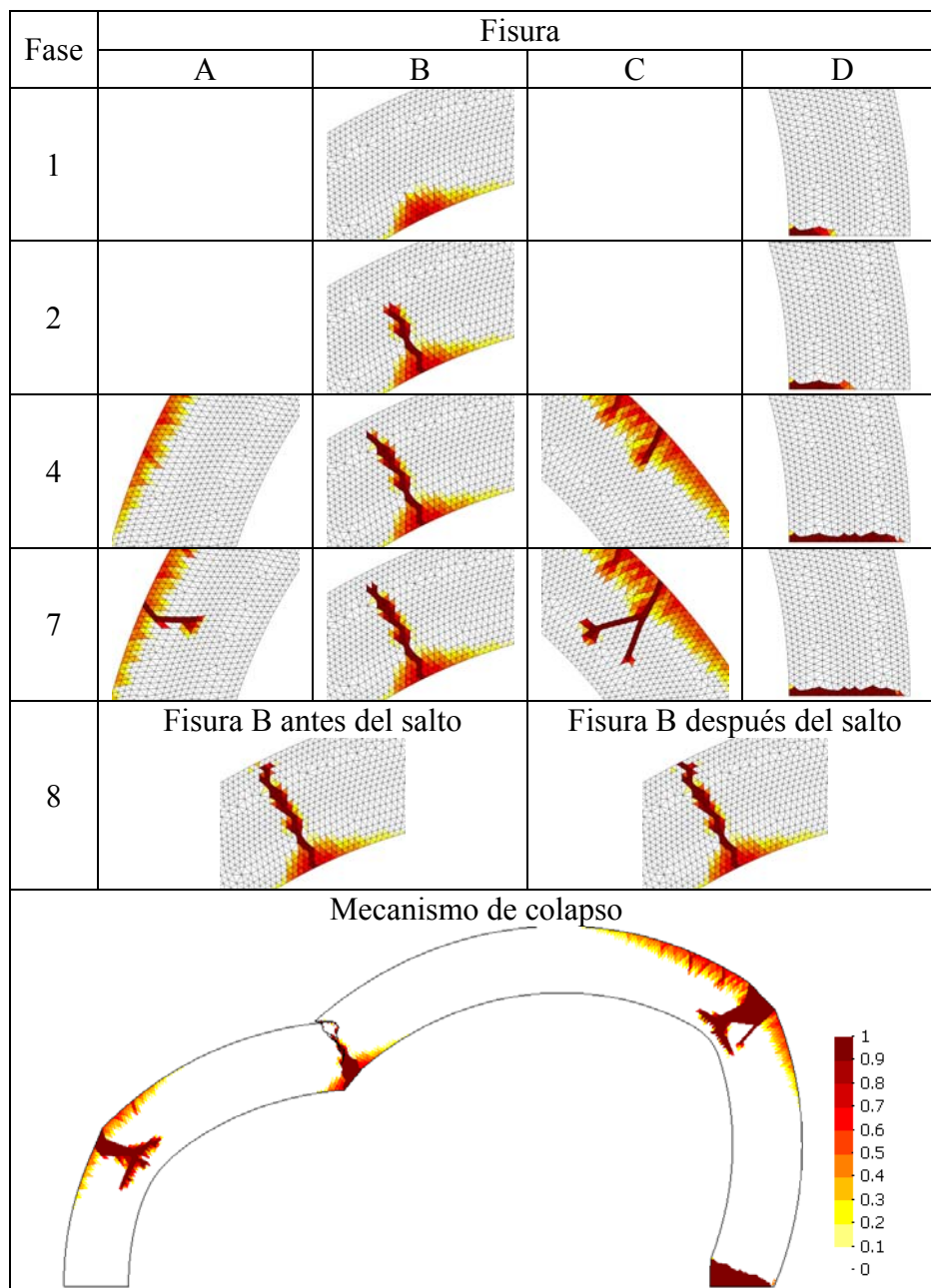


Figura 22. Daño en cada fisura en las diferentes fases indicadas en la figura y mecanismo de colapso de la estructura (control de desplazamientos)

Respecto al análisis con control de desplazamientos, el daño se comienza a formar a niveles muy bajos de carga y la respuesta de la estructura es prácticamente lineal hasta alcanzar una carga de 110 kN. En ese paso se observa daño leve en los puntos B y D, de manera muy similar al caso con control de cargas. El control por desplazamientos permite detectar la descarga que ocurre posteriormente (puntos 1 a 2 en la Figura 20) durante el desarrollo de las fisuras B y D. Estas fisuras presentan una tendencia radial.

Entre los estados de carga 2 y 4 de la 20el daño evoluciona hasta alcanzar la siguiente distribución: las fisuras B y D son radiales, y la primera de ellas presenta menos dispersión que su equivalente del análisis con carga impuesta. La solución, pues, depende del camino seguido para llegar a ella. Luego ocurre otra descarga (hasta el punto 7), esta vez debida a la creación repentina de las fisuras A y C. Tal como se muestra en la Figura 22, la propagación de ambas fisuras sigue la orientación de los elementos finitos en la malla, en lugar de hacerlo de forma radial.

A partir de este punto el problema evoluciona con una pequeña rigidez remanente, debida a algunos elementos que aún permanecen sin dañar ubicados en zonas comprimidas de la estructura. Sin embargo, después de incrementar aún más el desplazamiento impuesto, el daño sigue evolucionando y se produce otra descarga (punto 8). Este salto en particular ocurre al terminarse de formar la rótula B, tal como se muestra en la Figura 22, donde se muestran los estadios antes y después del salto en la respuesta.

También en la Figura 22 se muestra el mecanismo de colapso de la estructura. Obviamente, en este caso la formación del mecanismo no es completa, por el mismo criterio de imposición de desplazamientos que impide que la estructura se desplome. En la figura se aprecia cómo al momento del colapso las fisuras A y C han evolucionado en la dirección normal a la sección, sin que ello afecte apenas a la rigidez de la respuesta general de la estructura.

Modelo de daño localizado

La Figura 23 muestra las curvas carga (o reacción) vs. desplazamiento de los dos casos estudiados. El modelo con control de desplazamientos es capaz de capturar la descarga que ocurre tras la formación de las primeras fisuras (puntos 2 a 3, Figura 23). A partir del punto 4, la respuesta de ambos modelos es similar, así como el mecanismo de colapso que se forma. Las cuatro fisuras presentan direcciones aproximadamente radiales, tal como se muestra en la Figura 24.

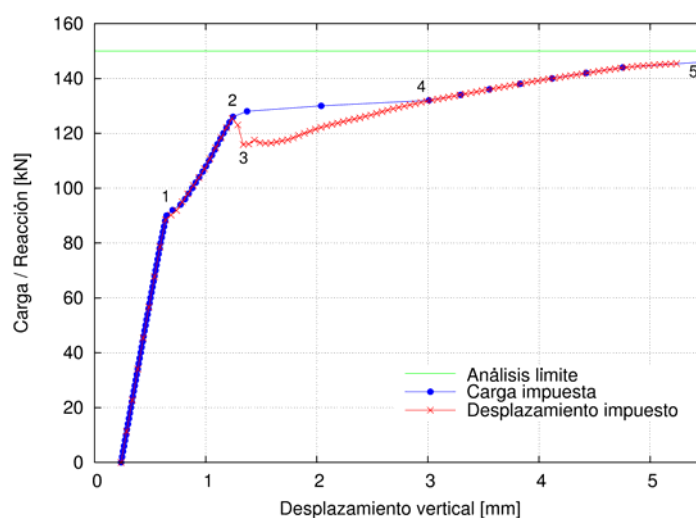


Figura 23. Curvas carga (o reacción) vs. desplazamiento vertical en el punto de aplicación de P (modelo de daño localizado)

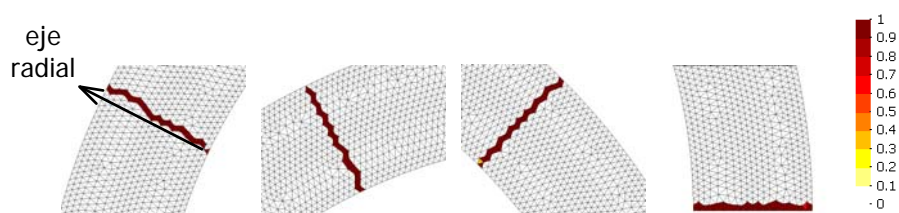


Figura 24. Daño en el estado de carga de colapso (carga impuesta y desplazamientos impuestos). Detalle de rótulas A, B, C y D.

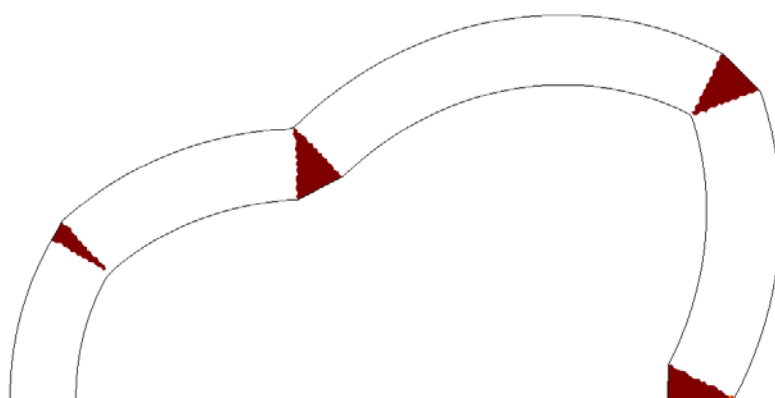


Figura 25. Mecanismo de colapso (carga impuesta y desplazamientos impuestos)

Rótula	Análisis límite	Modelo de daño localizado	
		Control de cargas	C. de desplazamientos
A	0.95	0.94	0.92
B	2.50	2.60	2.60
C	7.95	8.15	8.15
D	10.50	10.50	10.50

Tabla 1. Coordenada horizontal [m] de las rótulas en el mecanismo de colapso

La ubicación de las fisuras, según el sistema de referencia mostrado en la Figura 19, se compara con los resultados obtenidos del análisis límite en la tabla 1. Allí se observa que en ambos casos estudiados con el modelo de daño localizado se forman las rótulas con una diferencia máxima de 2 cm, excepto la rótula C, donde la coordenada difiere unos 20 cm. Esta diferencia puede deberse al hecho de que el material tiene comportamiento elástico a compresión en los elementos ubicados hacia el final de la fisura.

4. CONCLUSIÓN

De los diferentes trabajos integrados en el presente informe se pueden deducir las siguientes conclusiones sobre el estado actual de desarrollo de modelos constitutivos avanzados para el análisis no lineal del hormigón estructural y de construcción:

1. Los modelos constitutivos no lineales para estructuras de hormigón y, en particular, los modelos de daño continuo como versión más moderna de los clásicos modelos de fisuración, se hallan en un estado de madurez y robustez.

Son útiles para:

- Predecir el comportamiento estructural, tanto en servicio como en colapso.
- Interpretar correctamente las medidas obtenidas en las campañas de monitorización.
- Ayudar a tomar decisiones racionales durante la etapa de diseño.
- Ayudar a optimizar decisiones durante la etapa de construcción.
- Realizar “ensayos virtuales” a bajo coste, de forma complementaria a los ensayos de laboratorio o “in situ”.

2. Sin embargo, el uso de estos modelos todavía exige una gran experiencia por parte de los usuarios, puesto que:

- La selección del modelo y de los parámetros de éste pueden tener una gran influencia en los resultados del análisis. Los usuarios deben ser consciente de esto.
- La sofisticación del modelo puede producir un falso sentimiento de rigor y exactitud.

3. En los programas comerciales y en muchos programas académicos, la implementación de los modelos constitutivos es, a menudo, poco transparente y los manuales no son totalmente claros. Esto:

- dificulta el uso fiable de tales modelos por parte de los usuarios finales y
- aumenta la tentación de desarrollar programas y modelos “caseros” que, por su parte, tienen otras deficiencias tales como la falta de robustez o eficiencia.

Esto aumenta la distancia entre los desarrolladores de los modelos y los usuarios industriales.

De todo ello se deduce la conveniencia, si no la necesidad, de un esfuerzo continuado en el desarrollo y validación modelos constitutivos avanzados para los materiales de construcción, así como en la transmisión eficaz de estos modelos a sus usuarios finales.

AGRADECIMIENTOS

El autor de este informe agradece la colaboración prestada por el profesor R. Faria, de la Faculdade de Engenharia de la Universidade de Porto para la elaboración del mismo.

REFERENCIAS

- BAŽANT, Z.P. y OH, B.H. (1983) Crack band theory for fracture of concrete. *Materials and Structures*, 16, 155-177.
- BAŽANT, Z.P. y PIAUDIER-CABOT, G. (1988) Nonlocal continuum damage, localization instability and convergence. *J. Appl. Mech.* 55, pp. 287-293.
- BELYTSCHKO, T. y BLACK, T. (1999) Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng.* 45(5), pp. 601-620.
- BELYTSCHKO, T.; FISH, J. y ENGELMANN, B.E. (1998) A finite element with embedded localization zones. *Comput. Meths. Appl. Mech. Eng.* 70, pp. 59-89.
- CAROL, I., RIZZI, E. y WILLAM, K. (1994). ‘A unified description of elastic degradation and damage based on a loading surface’, *Int. J. Solids and Structures* 31, 2835-2865.
- CERVERA, M., OLIVER, J., y FARIA, R. (1995). Seismic evaluation of concrete dams via continuum damage models. *Earth. Engng. Struc. Dyn.*, 24, 1225-124.
- CERVERA, M., OLIVER, J., y MANZOLI, O. (1996). A rate-dependent isotropic damage model for the seismic evaluation of concrete dams. *Earth. Engng. Struc. Dyn.*, 25, 987—1010.
- CERVERA, M. (2003) Viscoelasticity and rate-dependent continuum damage models. Monografía CIMNE, M79. Centre Internacional de Mètodes Numèrics en l’Enginyeria, Barcelona, España. Julio 2003.
- CERVERA, M. y CHIUMENTI, M. (2006a) Mesh objective tensile cracking via local continuum damage model and a crack tracking technique. *Comput. Meths. Appl. Mech. Eng.* 196, pp. 304-320.
- CERVERA, M. y CHIUMENTI, M. (2006b) Smearred crack approach: back to the original track. *Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech.* 30, pp. 1173-1199.
- CERVERA, M.; CHIUMENTI, M. y AGELET DE SARACÍBAR, C. (2003a). Softening, localization and stabilization: capture of discontinuous solutions in J2 plasticity. *Int. J. for Num. and Anal. Meth. in Geomechanics*, 28, 373-393.
- CERVERA, M.; CHIUMENTI, M. y AGELET DE SARACÍBAR, C. (2003b). Shear band localization via local J2 continuum damage mechanics. *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng.*, 193, 849-880.
- CHABOCHE, J. (1988a). ‘Continuum damage mechanics. Part I: general concepts’, *ASME J. Appl. Mech.* 55, 59-64.

CHABOCHE, J. (1988b). 'Continuum damage mechanics. Part II: damage growth, crack initiation, and crack growth', ASME J. Appl. Mech. 55, 65-72).

CLEMENTE, R. (2006) Análisis estructural de edificios históricos mediante modelos localizados de fisuración. *Tesis doctoral*. Universidad Politécnica de Cataluña, Barcelona, España.

CLOUGH, R.W. (1962) The stress distribution of Norfolk Dam. Structures and Materials Research. Department of Civil Engineering, Series 100, 19, University of California, Berkeley, California, EE.UU.

COMI, C.; MARIANI, S. y PEREGO, U. (2002) From localized damage to discrete cohesive crack propagation in nonlocal continua. En Fifth World Congress on Computational Mechanics, WCCM V. Editado por H.A. Mang, F.G. Rammerstorfer y J. Eberhardsteiner. Vienna, Austria.

DE BORST, R. (1991) Simulation of strain localization: a reappraisal of the Cosserat continuum. Eng. Comp. 8, pp. 317-332.

DE BORST, R. (2001) Some recent issues in computational failure mechanics. Int. J. Num. Meth. Eng. 52, pp. 63-95.

DE BORST, R. y MÜHLHAUS, H.B. (1992) Gradient-dependent plasticity: Formulation and algorithmic aspects. Int. J. Num. Meth. Eng. 35, pp. 521-539.

DE BORST, R., SLUYS, L.J.; MÜHLHAUS, H.B. y PAMIN, J. (1993). Fundamental issues in finite element analysis of localization of deformation. Eng. Comp. 10 pp. 99-122.

DE VREE, J.H.P., BREKELMANS, W.A.M. y VAN GILS, M.A.J. (1995). Comparison of nonlocal approaches in continuum damage mechanics. Comp. & Struct. 55, pp. 581-588.

DUBÉ, J.-F., PIJAUDIER-CABOT, G. y LA BORDERIE, C. (1996). Rate dependent damage model for concrete in dynamics. J. of Eng. Mech. ASCE. 122, pp.939-947.

FARIA, R. y OLIVER, J., (1993). A Rate Dependent Plastic-Damage Constitutive Model for Large Scale Computations in Concrete Structures, CIMNE Monograph 17, Barcelona, Spain.

FARIA, R. (1994). Seismic Behaviour of Concrete Dams Evaluated via a Continuum Damage Model, PhD Thesis, Porto University, Portugal (in Portuguese).

FARIA, R., OLIVER, J., y CERVERA, M. (1998). A strain-based plastic viscous damage model for massive concrete structures. Int. J. Solids and Structures, 35(14):1533—1558.

FARIA, R., VILA POUCA, N. y DELGADO, R. (1999). 'Seismic behaviour of a R/C wall: numerical simulation and experimental validation', Proc. IV Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería (CD-ROM), Sevilla.

FARIA, R., OLIVER, J., y CERVERA, M. (2004). Modeling Material Failure in Concrete Structures under Cyclic Actions. *J. of Structural Engineering*, ASCE, 130, 1997-2005.

GÁLVEZ, J.C., ELICES, M., GUINEA, G.V. y PLANAS, J. (1998) Mixed mode fracture of concrete under proportional and nonproportional loading. *International Journal of Fracture*, 94, pp. 267-284.

GRASSL, P. and JIRÁSEK, M. (2004). On mesh bias of local damage models for concrete: In *Fracture Mechanics of Concrete Structures, Proceedings of 5th Int. Conference on Fracture Mechanics of Concrete and Concrete Structures, FraMCoS-5*, V. C. Li et al. (eds.), Vail, Colorado, U.S.A.

GUEDES, J. (1997). Seismic Behaviour of Reinforced Concrete Bridges. Modelling, Numerical Analysis and Experimental Assessment, PhD Thesis, Porto University, Portugal.

HALL, F.R. y HAYHURST, D.R. (1991) Modelling of grain size effects in creep crack growth using a nonlocal continuum damage approach. *Proc. R. Soc. Lond. A* 433, pp. 405-421.

JIRÁSEK, M. (1998) Nonlocal models for damage and fracture: comparison of approaches. *Int. J. Num. Meth. in Eng.* 52, pp. 63-95.

JIRÁSEK, M. (2000) Comparative study on finite elements with embedded discontinuities. *Comp. Meth. App. Mech. Eng.* 188, pp. 307-330.

JIRÁSEK, M. (2002) Objective modelling of strain localization. *Revue Française de Génie Civil*. 6, pp. 1119-1132.

JIRÁSEK, M. y PATZÁK B. (2001). Models for quasibrittle failure: theoretical and computational aspects. En *European Conference on Computational Mechanics, ECCM-2001*. Cracovia, Polonia.

KACHANOV, L. (1958). 'Time of rupture process under creep conditions', *Izvestia Akademii Nauk, Otd Tech Nauk* 8, 26-31.

KACHANOV, L. (1986). *Introduction to Continuum Damage Mechanics*, Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht.

KRAJCINOVIC, D. y Fonseka, G. (1981). 'The continuum damage theory of brittle materials. Part 1: general theory', *ASME J. Appl. Mech.* 48, 809-815.

KRAJCINOVIC, D. (1983). 'Constitutive equations for damaging materials', *ASME J. Appl. Mech.* 50, 355-360.

KUPFER, H., HILSDORF, H. y RUSCH, H. (1969). 'Behaviour of concrete under biaxial stresses', J. Am. Conc. Inst. 66, No.8, 656-666.

LEMAITRE, J. (1984). 'How to use damage mechanics', Nucl. Engng. Des. 80, 233-245.

LEMAITRE, J. (1985a). 'Coupled elasto-plasticity and damage constitutive equations', Comp. Meth. Appl. Mech. Engng. 51, 31-49.

LEMAITRE, J. (1985b). 'A continuous damage mechanics model for ductile fracture', ASME J. Engng. Materials Tech. 107, 83-89.

LUBLINER, J., OLIVER, J. , OLLER, S. y OÑATE, E. (1989). 'A plastic-damage model for concrete', Int. J. Solids Structures 25, No.3, 299-326.

MAZARS, J. (1991). 'Damage models for concrete and their usefulness for seismic loadings', Exper. and Num. Meth. in Earth. Eng., J. Donea and P.M. Jones (eds.), Brussels and Luxembourg, 199-221.

MAZARS, J. y PIJAUDIER-CABOT, G. (1989). 'Continuum damage theory. Application to concrete', ASCE J. Engng. Mech. 115, No.2, 345-365.

MENEGOTTO, M. y PINTO, P. (1973). 'Method of analysis for cyclically loaded reinforced concrete plane frames including changes in geometry and non-elastic behaviour of elements under combined normal force and bending', IABSE Symp. Resist. Ultimate Deform. of Struct. Acted on by Well-Defined Repeated Loads, Final Report, Lisbon.

MÖES, N., DOLBOW, J. y BELYSCHO, T. (1999) A finite element method for crack growth without remeshing. Int. J. Num. Meths. in Eng. 46, pp. 131-150.

NEEDLEMAN, A., (1987). Material rate dependence and mesh sensitivity in localization problems. Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng., 67, 68-75.

NGO, D. y SCORDELIS, A.C. (1967) Finite elements analysis of reinforced concrete beams. ACI Journal, 64 (14), pp. 152-163.

NILSON, A.H. (1968) Nonlinear analysis of reinforced concrete by the finite element method. ACI Journal, 65(9), pp. 757-776.

OLIVER, J. (1989) A consistent characteristic length for smeared cracking models. Int. J. Num. Meth. Eng. 28, pp. 461-474.

OLIVER, J., CERVERA, M., OLLER, S. y LUBLINER, J.(1990). 'Isotropic damage models and smeared crack analysis of concrete', Proc. 2nd Int. Conf. Comp. Aided Analysis Design Conc. Structures, Zell am See, 945-957.

OLIVER, J. (1995) Continuum modelling of strong discontinuities in solid mechanics using damage models. Computational Mechanics, 17, pp. 277-296.

OLIVER, J., CERVERA, M. y MANZOLI, O. (1999). Strong discontinuities and continuum plasticity models: the strong discontinuity approach. *Int. J. of Plasticity*, 15, 319-351.

OLIVER, J. y HUESPE (2004) Continuum approach to material failure in strong discontinuity settings. *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng.* 193, 3195-3220.

OLIVER, J.; HUESPE, A.E., SAMANIEGO, E. y CHAVES, E.W.V. (2004) Continuum approach to the numerical simulation of material failure in concrete. *Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech.* 28, pp. 609-632.

OWEN, D.R.J. y FAWKES, A.J. (1983) *Engineering Fracture Mechanics*. Pineridge Press, Swansea.

PAMIN, J. (1994) Gradient-dependent plasticity in numerical simulation of localization phenomena. *Tesis Doctoral*. Delft University of Technology. Delft, Holanda.

PEERLINGS, R.H.J.; DE BORST, R.; BREKELMANS, W.A.M. y GEERS, M.G.D. (1998) Gradient-enhanced damage modelling of concrete fracture. *Mechanics of Cohesive-frictional Materials*. 3, pp. 323-342.

PIMENTEL, M.J.S. (2004). Modelação e análise de estruturas laminares de betao: possibilidades e desafios, *Disertación*, Faculdade de Engenharia, Universidade do Porto (en portugués).

RASHID, Y. (1968) Analysis of prestressed concrete pressure vessels. *Nuclear Engineering and Design*, 7, pp. 334-344.

RESENDE, L. y MARTIN, J. (1984). 'A progressive damage 'continuum' model for granular materials', *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.* 42, 1-18.

SCHEREYER, H. y CHEN, Z. (1986). One dimensional softening with localization. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 53, 791-797.

SIMO, J.C. y JU, J. (1987). 'Strain- and stress-based continuum damage models. I: Formulation', *Int. J. Solids Structures* 23, No.7, 821-840.

SIMO, J.C. y OLIVER, J. (1994) A new approach to the analysis and simulation of strain softening in solids. En *Fracture and Damage in Quasibrittle Structures*, editado por Z.P. Bažant et al. Londres, pp. 25-39.

SIMO, J.C.; OLIVER, J. y ARMERO, F. (1993) An analysis of strong discontinuities induced by strain-softening in rate-independent inelastic solids. *Computational Mechanics*, 12, pp. 49-61.

SIMONE, A.. (2003). *Continuous-Discontinuous Modelling of Failure*. Ph. D. Thesis, TU Delft, The Netherlands.

SUKUMAR, N.; MÖES, N; MORAN, B. y BELYSCHO, T. (2000) Extended finite element method for three-dimensional crack modelling. *Int. J. Num. Meths. in Eng.* 48, 1549-1570.

TONG, P. y PIAN, T.H.H. (1973) On the convergence of the finite element method for problems with singularity. *Int. J. Solids Struct.* 9, pp. 313-321.

WANG, W.M.; SLUYS, L.J. y DE BORST, R. (1997) Viscoplasticity for instabilities due to strain softening and strain-rate softening. *Int. J. for Num. Meth. in Eng.* 40, pp. 3839-3864.

ZIENKIEWICZ, O.C. y TAYLOR, R.L. (1991). *The Finite Element Method*, 4th edn, McGraw-Hill, London, 1991.

ZIENKIEWICZ, O.C.; HUANG, M. y PASTOR, M. (1995a) Softening, localization and adaptative remeshing: capture of discontinuous solutions. *Comp. Mech.* 17, pp. 98-106.

ZIENKIEWICZ, O.C.; HUANG, M. y PASTOR, M. (1995b) Localization problems in plasticity using finite elements with adaptive remeshing. *Int. J. Num. Meth. in Geomech.* 19, pp. 127-148.