

UN NUEVO METODO PARA LA OPTIMIZACION DE DIMENSIONES DE ESTRUCTURAS MODELIZADAS POR ELEMENTOS FINITOS

J.M. AGUINAGALDE

y
M. NO

*LABEIN
Apdo. 1234
Bilbao*

RESUMEN

Este artículo presenta un nuevo método de optimización, perteneciente a la familia de métodos basados en el criterio de optimalidad, aplicable a estructuras modelizadas por el método de los elementos finitos. Los elementos considerados tienen superpuesto, en el caso más general, los efectos membrana y placa (tipo Mindlin). Se imponen al diseño restricciones de comportamiento (desplazamiento y/o tensión) y frontera (límite inferior y/o superior al valor de las variables de diseño) analizando el tratamiento de aquellas que son pasivas en el óptimo. Las expresiones propias del método contienen derivadas de primero y segundo orden cuyo cálculo se detalla. Al final del artículo se incluyen ejemplos de aplicación del método desarrollado empleando estructuras de elementos con efecto membrana y/o placa (tipo Mindlin) imponiendo, en todos ellos, restricciones de desplazamiento y tensión.

SUMMARY

In this work, a new optimization method, belonging to the family of methods based on the optimality criteria, which can be applied to modelized structures by the finite elements method is presented. The elements considered have, in the most general case, the membrane and plate (Mindlin type) effects superimposed. Behaviour (displacement and/or tension) and boundary (inferior and/or superior limit to the design variables value) constraints are imposed analysing those which are passive in the optimum. The mathematical expressions of the method containing first and second order derivatives calculation is detailed. At the end of the work, application examples of the developed method, using structures with membrane and/or plate (Mindlin type) elements, and imposing displacement and tension constraints are included.

Recibido: Febrero 1987

INTRODUCCION. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Las técnicas de optimización estructural persiguen la obtención de soluciones óptimas al diseño de estructuras para cada aplicación concreta. Las variables cuyos valores, una vez fijados, determinan el diseño se denominan variables de diseño, X_i , y es la obtención de sus valores óptimos, X_i^* , el fin último perseguido². En este trabajo, al igual que en la mayor parte de los estudios de optimización estructural¹, la función objetivo, función a minimizar, es el peso de la estructura, W , siendo

$$W = \sum_{i=1}^n \rho_i A_i X_i \quad (1)$$

El diseño final debe cumplir una serie de condiciones, restricciones de comportamiento, que determinan el subespacio de diseño. Estas restricciones abarcan, en este estudio, tanto a las restricciones de desplazamiento, GD_k ($k = 1, 2, \dots, md$), sobre cualquier grado de libertad como a las restricciones de tensión, GT_k ($k = 1, 2, \dots, mt$), sobre cualquier elemento. El conjunto de todas estas restricciones GD_k y GT_k , se designará en adelante, para facilitar la nomenclatura, como G_k ($k = 1, 2, \dots, m$ siendo $m = md + mt$), es decir,

$$\begin{aligned} G_k &= GD_k & k &= 1, 2, \dots, md, \\ G_k &= GT_{k-md} & k &= md + 1, md + 2, \dots, m. \end{aligned} \quad (2)$$

En la práctica existen también limitaciones constructivas que impiden a las variables de diseño tomar cualquier valor. Surgen así las restricciones frontera, GFI_k y GFS_k , consistentes en la imposición de valores extremos, inferior XIk y superior XSk , que limitan los valores de las variables de diseño.

Por tanto, considerando todas las restricciones introducidas, el problema queda planteado de la siguiente manera:

$$\text{Minimizar} \quad W, \quad (3)$$

$$\text{imponiendo} \quad G_k \geq 0 \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad (4)$$

$$GFI_k \geq 0 \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (5)$$

$$GFS_k \geq 0 \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (6)$$

Expresión de las restricciones

La restricción sobre el desplazamiento según el grado de libertad k , u_k , viene dada por

$$GD_k = 1 - \frac{u_k}{u_k^*} \quad k = 1, 2, \dots, md. \quad (7)$$

Esta formulación permite el tratamiento unificado del límite superior del desplazamiento (caso en que $u_k^* > 0$) y del límite inferior (caso en que $u_k^* < 0$).

La restricción impuesta a la tensión sobre el elemento k , σ_k , viene dada por

$$GT_k = \sigma_k^{*2} - \sigma_k^2 \quad k = 1, 2, \dots, mt. \quad (8)$$

En esta expresión, σ_k^* y σ_k son las tensiones equivalentes, máxima y calculada respectivamente, correspondientes al elemento k .

Las restricciones frontera se construyen a partir de la relación existente entre cada variable de diseño, X_i , y sus dos límites XI_i y XS_i . Esta relación,

$$XI_i \leq X_i \leq XS_i \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (9)$$

dando lugar a las expresiones

$$GFI_i = X_i - XI_i \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (10)$$

$$GFS_i = XS_i - X_i \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (11)$$

SOLUCION AL PROBLEMA

Un diseño solución al problema planteado, expresiones (3) a (6), deberá satisfacer las denominadas condiciones de Kuhn-Tucker o condiciones de óptimo³. Dichas condiciones originan un sistema de ecuaciones cuya resolución se aborda en este apartado.

El método utilizado, al igual que otros métodos de la misma familia (método de las ecuaciones lineales^{4,5}, etc.) es iterativo y su forma de proceder sigue las siguientes etapas:

- 1) Se parte de un diseño inicial.
- 2) El actual diseño es modificado por el método dando lugar a otro que se ajuste más a la solución del sistema de ecuaciones planteado, expresiones (3) a (6).
- 3) Se aplica un criterio de convergencia de forma que se detiene el proceso cuando la mejora conseguida entre dos soluciones consecutivas (medida como la magnitud de la disminución relativa en peso) es menor que una dada y en caso contrario se vuelve al paso 2).

Restricciones de comportamiento y frontera activas.

Todas aquellas restricciones, ya sean de comportamiento o frontera, que se satisfacen en el óptimo exactamente (es decir, su valor se anula) son denominadas restricciones activas en el óptimo. El resto de las restricciones, pasivas en el óptimo, se cumplen en diseño final con cierta holgura. Estas últimas restricciones no tienen ninguna influencia, es decir, si son eliminadas en el planteamiento del problema,

expresiones (3)–(6), la solución obtenida no se ve afectada. Por tanto, es posible replantear el problema considerando únicamente las restricciones activas, es decir

$$\text{Minimizar} \quad W, \quad (12)$$

$$\text{imponiendo} \quad G_k \geq 0 \quad k = 1, 2, \dots, ma, \quad (13)$$

$$GFI_k \geq 0 \quad k = 1, 2, \dots, nia, \quad (14)$$

$$GFS_k \geq 0 \quad k = 1, 2, \dots, nsa. \quad (15)$$

El conjunto de todas las restricciones de comportamiento activas en el óptimo, G_k con $k = 1, 2, \dots, ma$ (en donde $ma = mda + mta$) incluye a las restricciones activas de desplazamiento y tensión en la misma forma dada en la expresión (2) para el conjunto de todas las restricciones.

El planteamiento del problema según las expresiones (12) a (15) requiere el conocimiento previo de las restricciones activas en el óptimo. En la práctica, dado que dicho conocimiento no es posible, se aplican algoritmos que estimen estas restricciones. La forma de proceder consiste en establecer, en cada etapa, los conjuntos que agrupan, por un lado, a las restricciones de comportamiento activas y, por otro a las variables de diseño involucradas en las restricciones frontera pasivas. Ambos conjuntos van siendo continuamente actualizados hasta que, en las proximidades del diseño final, llegan a coincidir con las restricciones de comportamiento activas en el óptimo y con las variables de diseño correspondientes a las restricciones frontera pasivas en el óptimo, respectivamente. En apartados posteriores se explican los algoritmos implementados para la formación y puesta al día de estos dos conjuntos.

Condiciones de óptimo para restricciones activas

Las condiciones de óptimo, condiciones de Kuhn-Tucker³, correspondientes al problema planteado en las expresiones (12)–(15) se obtienen a partir de la función Lagrangiana L ,

$$L = W - \sum_{j=1}^{ma} \lambda_j G_j - \sum_{j=1}^{nia} \lambda I_j GFI_j - \sum_{j=1}^{nsa} \lambda S_j GFS_j \quad (16)$$

y vienen dadas por las expresiones

$$\rho_i A_i - \sum_{j=1}^{ma} \lambda_j G_{j,i} - \sum_{j=1}^{nia} \lambda I_j GFI_{j,i} - \sum_{j=1}^{nsa} \lambda S_j GFS_{j,i} = 0 \quad (17)$$

$$i = 1, 2, \dots, n, \quad (17)$$

$$G_k = 0 \quad \lambda_k > 0 \quad k = 1, 2, \dots, ma, \quad (18)$$

$$GFI_k = 0 \quad \lambda I_k > 0 \quad k = 1, 2, \dots, nia, \quad (19)$$

$$GFS_k = 0 \quad \lambda S_k > 0 \quad k = 1, 2, \dots, nsa. \quad (20)$$

Variables activas y pasivas

Aquellas variables de diseño cuya restricción de sección inferior (o superior), GFI_k (o GFS_k), sea activa en el óptimo se denominan variables pasivas. Son variables activas todas las demás.

Puesto que las restricciones activas en el óptimo se cumplen exactamente en el diseño final, las variables pasivas estarán fijadas, en dicho diseño, en el límite correspondiente a su restricción frontera activa. Dichas variables constituyen, por tanto, constantes del problema. Parece posible, en consecuencia, plantear el problema considerando como variables de diseño únicamente las variables activas, estando fijadas las demás en su valor óptimo. De este modo el problema quedaría simplificado al poder prescindir en su planteamiento de las expresiones correspondientes a las restricciones frontera, (19) y (20), y disminuir el rango de valores del índice i de la expresión (17) al valor na .

Como ya ha sido puesto de manifiesto anteriormente, no es posible conocer, a priori, las variables activas en el óptimo. En la práctica se estima el conjunto de estas variables en cada etapa, procediendo en la forma descrita anteriormente. El algoritmo implementado con tal fin será descrito en un apartado posterior.

Condiciones de óptimo únicamente para variables activas

La consideración de las variables activas y pasivas se lleva a cabo eliminando del problema todas aquellas variables que sean pasivas en el óptimo. Es razonable que sea así pues solamente las variables activas son las auténticas variables de diseño. Esta forma de proceder requiere un nuevo planteamiento de las condiciones de óptimo ya que las expresiones (17) a (20) han sido planteadas para todas las variables.

A continuación se analiza el comportamiento de las expresiones (17), (19) y (20) dependiendo de que la variable de diseño X_t sea pasiva o activa en el óptimo. Pueden darse los siguientes casos:

1) Si $X_t^* = XS_t$:

- a) GFI_t es restricción pasiva en el óptimo y no figurará por tanto en las expresiones (17) y (19) de las condiciones de óptimo.
- b) GFS_t es restricción activa en el óptimo (X_t es variable pasiva) y cumple, expresión (11), que:

$$GFS_{t,i} = - \delta_{ti} \quad (21)$$

Por tanto, (17) y (20) se transforman, para la variable de diseño t , en

$$\rho_t A_t - \sum_{j=1}^{ma} \lambda_j G_{j,t} + \lambda S_t = 0 \quad (22)$$

$$GFS_t = 0 \quad \lambda S_t > 0 \quad (23)$$

2) Si $X_t^* = XI_t$:

- a) GFS_t es restricción pasiva en el óptimo y no figurará por tanto en las expresiones (17) y (19) de las condiciones de óptimo.
- b) GFI_t es restricción activa en el óptimo (X_t es variable pasiva) y cumple, expresión (10) que:

$$GFI_{t,i} = \delta_{ti} \quad (24)$$

De forma análoga al caso anterior, (17) y (19) se transforman, para la variable de diseño t , en

$$\rho_t A_t - \sum_{j=1}^{ma} \lambda_j G_{j,t} - \lambda I_t = 0 \quad (25)$$

$$GFI_t = 0 \quad \lambda I_t > 0 \quad (26)$$

3) Si $XI_t < X_t^* < XS_t$ las dos restricciones frontera, GFI_t y GFS_t , son pasivas en el óptimo (X_t es activa) y ninguna de ellas figurará en (17), (19) y (20). Por tanto dichas expresiones quedan reducidas, para la variable de diseño t , a

$$\rho_t A_t - \sum_{j=1}^{ma} \lambda_j G_{j,t} = 0 \quad (27)$$

Los puntos 1) y 2) del anterior razonamiento permiten desarrollar una estrategia, expuesta más adelante, de selección de variables pasivas en el óptimo. Sin embargo en el punto 3) se obtiene una relación, deducida de las condiciones de óptimo, válida solo para las variables activas. Dicha relación, junto con la expresión (18), constituirá, por tanto, las condiciones de óptimo buscadas,

$$\rho_i A_i - \sum_{j=1}^{ma} \lambda_j G_{j,i} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, na, \quad (28)$$

$$G_k = 0 \quad k = 1, 2, \dots, ma, \quad (29)$$

$$\lambda_k > 0 \quad k = 1, 2, \dots, ma. \quad (30)$$

Estas condiciones se derivan directamente de la expresión Lagrangiana, LC , construida considerando únicamente las restricciones de comportamiento activas en el óptimo y tomando como variables de diseño únicamente aquellas que sean activas en el óptimo. La expresión de LC , empleada en adelante para simplificar la nomenclatura, viene dada por

$$LC = \dot{W} - \sum_{j=1}^{ma} \lambda_j G_j \quad (31)$$

Comportamiento del parámetro R_i

Los valores del parámetro R_i , definido por la expresión

$$R_i = \frac{1}{A_i \rho_i} \sum_{j=1}^{ma} \lambda_j G_{j,i} \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (32)$$

tienen la propiedad de proporcionar información directa acerca del estado en que se encuentra la variable de diseño i , X_i . Es decir, detectan si el valor actual de dicha variable es menor (o mayor) que su valor en el diseño final o bien si se trata de una variable activa o pasiva en el óptimo.

Esta información es posible gracias a las siguientes propiedades:

- 1) El parámetro R_i cumple, para la variable de diseño X_i , las relaciones

$$R_i < 1 \text{ si } X_i > X_i^* \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (33)$$

$$R_i > 1 \text{ si } X_i < X_i^* \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (34)$$

Esta propiedad ha sido ampliamente explotada en las conocidas relaciones de recurrencia para las variables de diseño empleadas en otros métodos Optimality Criteria tales como el método de las ecuaciones lineales^{4,5}, método de Newton-Raphson^{4,5}, etc..

- 2) A partir del desarrollo del apartado anterior, se deduce de forma inmediata que, dependiendo de que la variable de diseño X_i sea pasiva o activa en el óptimo, R_i^* toma los siguientes valores:

- a) $R_i^* > 1$ si X_i es pasiva en el óptimo y $X_i^* = X S_i$.
- b) $R_i^* < 1$ si X_i es pasiva en el óptimo y $X_i^* = X I_i$.
- c) $R_i^* = 1$ si X_i es activa en el óptimo.

Todas estas propiedades del parámetro R_i no son directamente necesarias para el desarrollo del método NWRAG pero serán empleadas en la elaboración del algoritmo de obtención de las variables de diseño activas detallado luego.

Método Newton-Raphson-global (NWRAG).

El fin perseguido es la resolución del sistema de ecuaciones, dado en las expresiones (28)–(29), correspondiente a las condiciones de óptimo. La mayoría de los métodos Optimality Criteria (método de las ecuaciones lineales^{4,5}, método de Newton-Raphson^{4,5}, etc.) resuelven el sistema de ecuaciones (28) utilizando valores de los

multiplicadores de Lagrange obtenidos, de forma independiente, a partir de la expresión (29). El método NWRAG aborda la resolución del sistema (28)–(29) de forma directa, de ahí su calificativo de global. Dicha resolución se lleva a cabo mediante el método de Newton-Raphson de resolución de sistemas de ecuaciones no lineales.

El sistema de ecuaciones

$$f_i(y) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, M, \quad (35)$$

$$y = \{y_j\} \quad i = 1, 2, \dots, M, \quad (36)$$

es resuelto por el método de Newton-Raphson por aproximaciones sucesivas mediante el empleo de la expresión recurrente

$$f_i(y) + \sum_{j=1}^N \frac{\partial f_i}{\partial y_j} \Delta y_j = 0 \quad i = 1, 2, \dots, M. \quad (37)$$

Identificando los términos que figuran en las expresiones (35) y (36) con los correspondientes al sistema de ecuaciones que se trata de resolver, (28) y (29), se obtienen las relaciones

$$M = na + ma, \quad (38)$$

$$N = na + ma, \quad (39)$$

$$y = \{X_1, X_2, \dots, X_{na}, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{ma}\}^T, \quad (40)$$

$$f_i(y) = LC_{,i} \quad i = 1, 2, \dots, na, \quad (41)$$

$$f_i(y) = G_{i-na} \quad i = na + 1, na + 2, \dots, na + ma. \quad (42)$$

La inclusión en (37) de los resultados dados en (38)–(42) conduce a la expresión recurrente

$$LC_{,i} + \sum_{j=1}^{na} \frac{\partial LC_{,i}}{\partial X_j} \Delta X_j + \sum_{j=1}^{ma} \frac{\partial LC_{,i}}{\partial \lambda_j} \Delta \lambda_j = 0 \quad i = 1, 2, \dots, na, \quad (43)$$

$$G_i + \sum_{j=1}^{na} \frac{\partial G_i}{\partial X_j} \Delta X_j + \sum_{j=1}^{ma} \frac{\partial G_i}{\partial \lambda_j} \Delta \lambda_j = 0 \quad i = 1, 2, \dots, ma. \quad (44)$$

Teniendo en cuenta (31), el sistema de ecuaciones (43)–(44) se reduce a

$$\sum_{j=1}^{na} \left(\sum_{k=1}^{ma} \lambda_k G_{k,ij} \right) \Delta X_j + \sum_{j=1}^{ma} G_{j,i} \Delta \lambda_j = LC_i \quad i = 1, 2, \dots, na, \quad (45)$$

$$\sum_{j=1}^{na} G_{i,j} \Delta X_j = -G_i \quad i = 1, 2, \dots, ma. \quad (46)$$

Estas expresiones resuelven el sistema de ecuaciones planteado en (28)–(29) en forma recurrente, es decir, partiendo de unos valores de las variables de diseño, X_i , y de los multiplicadores de las restricciones activas, λ_j , calculan una mejor aproximación de estos valores a los correspondientes al diseño óptimo.

El sistema de ecuaciones (45)–(46) puede ser generalizado introduciendo un parámetro ϕ que controle la magnitud de la variación experimentada por las variables del problema (variables de diseño y multiplicadores) en cada etapa del proceso de diseño (de forma similar al método Newton-Raphson^{4,5}). Se obtiene así la expresión definitiva del método NWRAG:

$$\sum_{j=1}^{na} \left(\sum_{k=1}^{ma} \lambda_k G_{k,ij} \right) \Delta X_j + \sum_{j=1}^{ma} G_{j,i} \Delta \lambda_j = \phi LC_i \quad i = 1, 2, \dots, na, \quad (47)$$

$$\sum_{j=1}^{na} G_{i,j} \Delta X_j = -\phi G_i \quad i = 1, 2, \dots, ma. \quad (48)$$

El sistema lineal de ecuaciones resultantes tiene las siguientes particularidades

- 1) La matriz de coeficientes del sistema es simétrica.
- 2) Es necesario proporcionar un valor inicial a los multiplicadores de las restricciones activas. En las aplicaciones dicho valor inicial se ha estimado mediante la aplicación del método de las ecuaciones lineales^{4,5}.

ANALISIS DE SENSIBILIDAD

El cálculo de todas aquellas derivadas que se precisen de la función objetivo y de las restricciones existentes recibe el nombre de análisis de sensibilidad. En la expresión del método, ecuaciones (45)–(48), se observa la necesidad de conocer las primeras y segundas derivadas de todas las restricciones activas.

Teniendo en cuenta las limitaciones de espacio y que el cálculo de estas derivadas no es relevante para el desarrollo del método presentado, se remite al lector a la referencia⁷ donde aparecen recogidos, para una gran variedad de elementos, las derivadas citadas.

PARTICULARIDADES DE LA IMPLEMENTACION DEL METODO NWRAG

A lo largo de los dos primeros apartados se ha abordado el planteamiento del problema y su resolución mediante el método NWRAG. Las expresiones desarrolladas son generales y no detallan la manera de llevar a cabo operaciones necesarias para la implementación del método. En este apartado se pretende subsanar esta deficiencia desarrollando los algoritmos para la:

- 1) Estimación de la tabla de restricciones de comportamiento pasivas y puesta al día de esta tabla a lo largo del proceso de diseño.
- 2) Estimación del conjunto de variables de diseño activas y puesta al día de dicho conjunto a lo largo del proceso de optimización.

Algoritmo de elección de restricciones de comportamiento activas

Dada una etapa cualquiera del proceso de diseño, será considerada activa, en principio, cualquier restricción que resulte violada en dicha etapa. De esta manera se obtiene el conjunto de restricciones activas requerido para la aplicación de las expresiones (45)–(48).

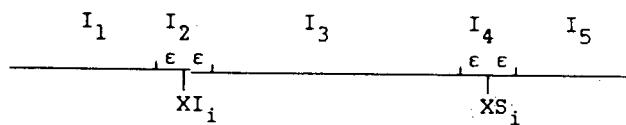
Puede darse el caso de una restricción que, aún habiendo sido violada (correspondiendo por tanto, según el criterio anterior, a una restricción activa en la etapa en curso), no es realmente activa en el óptimo. Mantener en la tabla de activas a este tipo de restricciones fuerza al método a tender a soluciones falsas (no óptimas) y es deseable, por tanto, su eliminación. Se comprueba que los valores de los multiplicadores obtenidos para este tipo de restricciones resultan negativos⁴. Esta propiedad permite la elaboración de un criterio de eliminación de dichas restricciones (aquellas que, resultando activas en la etapa en curso, no lo son en el óptimo).

En la implementación efectuada del método NWRAG se elimina de la tabla de restricciones activas toda restricción cuyo multiplicador resulte negativo un determinado número de etapas. Esta medida se mantiene durante una etapa permitiendo a dicha restricción pasar a formar parte de dicha tabla en la etapa siguiente.

Algoritmo de elección de variables de diseño activas

Dado que las expresiones deducidas para el método NWRAG consideran únicamente las variables de diseño activas en el óptimo, es necesario elaborar un criterio que permita la estimación de dichas variables. Las expresiones obtenidas anteriormente permiten, de forma intuitiva y casi inmediata, la deducción de dicho criterio.

Sea la recta real donde se representan los posibles valores de la variable X_i ,



El algoritmo actua de la siguiente manera:

- 1) Si X_i pertenece a I_1 toma el valor XI_i y pasa a ser pasiva.
- 2) Si X_i pertenece a I_2 pueden darse dos casos:
 - a) $R_i < 1$. En este caso X_i toma el valor XI_i y pasa a ser pasiva.
 - b) $R_i > 1$. En este caso X_i es considerada activa.
- 3) Si X_i pertenece a I_3 es considerada activa.
- 4) Si X_i pertenece a I_4 pueden darse dos casos:
 - a) $R_i < 1$. En este caso X_i es considerada activa.
 - b) $R_i > 1$. En este caso X_i toma el valor Xs_i y pasa a ser pasiva.
- 5) Si X_i pertenece a I_5 toma el valor Xs_i y pasa a ser pasiva.

El procedimiento descrito es coherente con las propiedades de R_i dadas en las expresiones (33)-(34), ya que si la variable X_i ronda el límite inferior (o superior) y R_i es < 1 (> 1) es lógico que sea considerada pasiva y tome el valor XI_i (Xs_i) ya que su tendencia para la siguiente etapa será seguir disminuyendo (o aumentando) dado el valor de R_i .

Cuando una variable pasa a ser pasiva, su valor queda fijado. Unicamente las variables activas tienen la posibilidad de variar el diseño actual y constituyen el conjunto de auténticas variables de diseño. En cada etapa del proceso de diseño es posible actualizar la lista de variables activas mediante el procedimiento descrito.

EJEMPLOS

Como muestra del correcto funcionamiento del método NWrag, desarrollado en este artículo, se presentan en este apartado ejemplos consistentes en la obtención del diseño óptimo de tres estructuras que serán denominadas membrana placa, placa plana y estructura espacial.

A continuación se enumeran las características y parámetros que son comunes a todos los casos resueltos:

- 1) Las unidades empleadas para expresar los valores de todas las magnitudes son kilogramos (kgrs.), para los esfuerzos, y milímetros (mm.), para las longitudes.
- 2) El material considerado es un acero de módulo de Young 21000 kgrs./mm.², módulo de Poisson 0.3 y densidad 0.00000784 kgrs./mm.³. La tensión admisible varía en los distintos ejemplos.
- 3) En lo relativo al problema de optimización planteado, en todos los ejemplos
 - se parte de un diseño inicial infradimensionado (existen inicialmente restricciones violadas),

- las restricciones de sección imponen valor positivo a las variables de diseño,
 - la tolerancia, ε , empleada en las restricciones de frontera es 0,
 - se maneja una tolerancia para las restricciones de comportamiento de valor 0.01 y
 - el criterio de convergencia detiene el proceso cuando la variación relativa en peso en dos etapas consecutivas es menor o igual que 0.0001 dando lugar, además, a un diseño admisible.
- 4) El algoritmo utilizado en la resolución de todos los casos se caracteriza por
- dar al parámetro ϕ el valor 1 (las expresiones empleadas son, por tanto, las ecuaciones (45)–(46)),
 - calcular el valor inicial de los multiplicadores mediante el método de las ecuaciones lineales dando al parámetro r el valor 2,
 - actualizar los valores de las variables de diseño utilizando la relación de recurrencia lineal^{4,5} (también para $r = 2$) cuando el método NWrag no es aplicable y
 - no admitir valores negativos de los multiplicadores ni una sola etapa.

En los apartados siguientes se describen los ejemplos resueltos.

Membrana plana

En la Figura 1 se representa la membrana plana y los elementos (todos tipo membrana) resultado de su modelización por el Método de los Elementos Finitos, MEF. Se consideran tres elementos de diseño, e_1 , e_2 y e_3 (Figura 1), formados por las tres filas horizontales, de cuatro elementos cada una que componen la estructura.

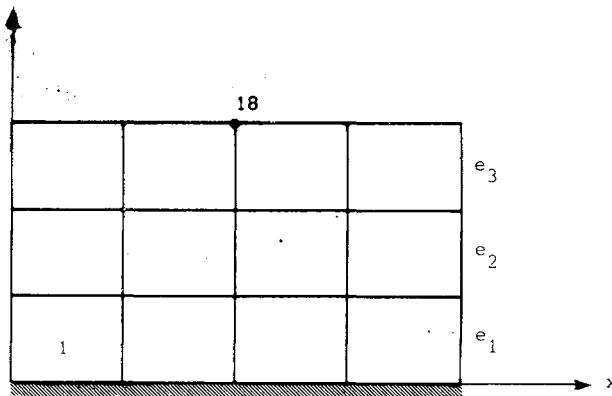


Figura 1. Membrana plana

La longitud de la base (empotrada) es de 800 mm. siendo la altura 450 mm.. Todos los elementos tienen las mismas dimensiones. El valor inicial de todas las variables de diseño (espesor inicial de los elementos de diseño) es 2 mm.

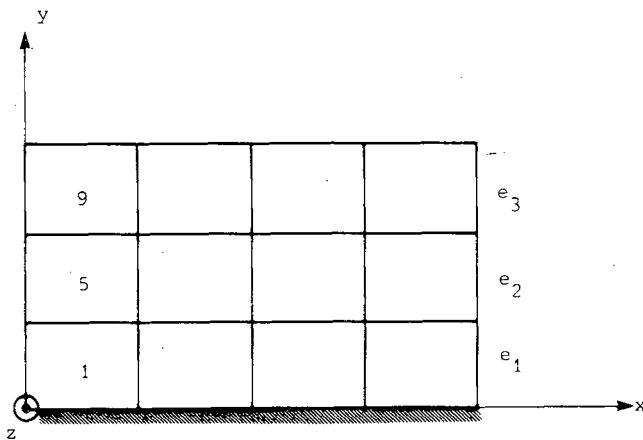


Figura 2. Placa plana

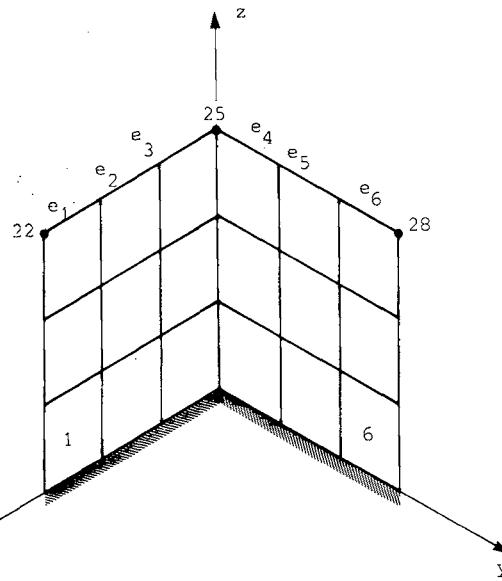


Figura 3. Estructura espacial

La hipótesis de carga la constituye una carga lineal uniforme aplicada en la arista superior en el sentido negativo del eje Y y de valor 50 kgrs./mm..

Se imponen a la estructura una restricción de desplazamiento en el grado de libertad, gdl., 18-Y (Figura 1) de valor límite 0.2 mm. y otra de tensión, en el elemento 1 (Figura 1), de valor 9 kgrs./mm.².

Los resultados obtenidos se muestran en las Figuras 4 a 7.

Placa plana

La Figura 2 muestra la placa plana y los elementos (placa tipo Mindlin) resultado de su modelización por el MEF. Se consideran, de forma idéntica al caso anterior, tres

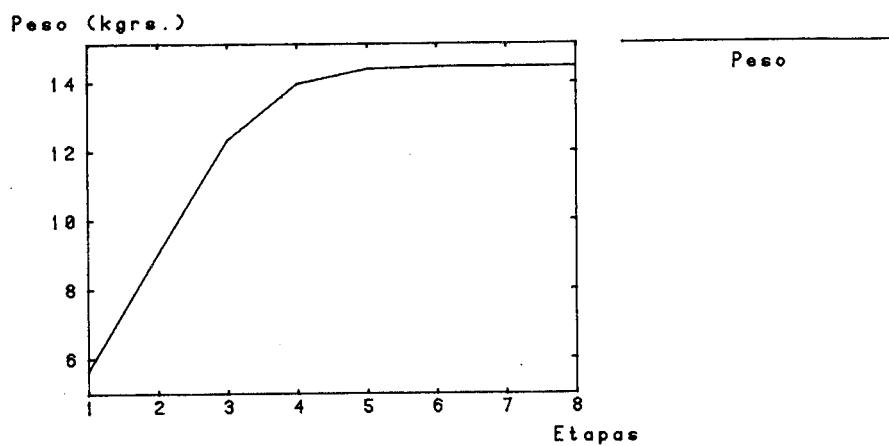


Figura 4. Evolución del peso en la membrana plana

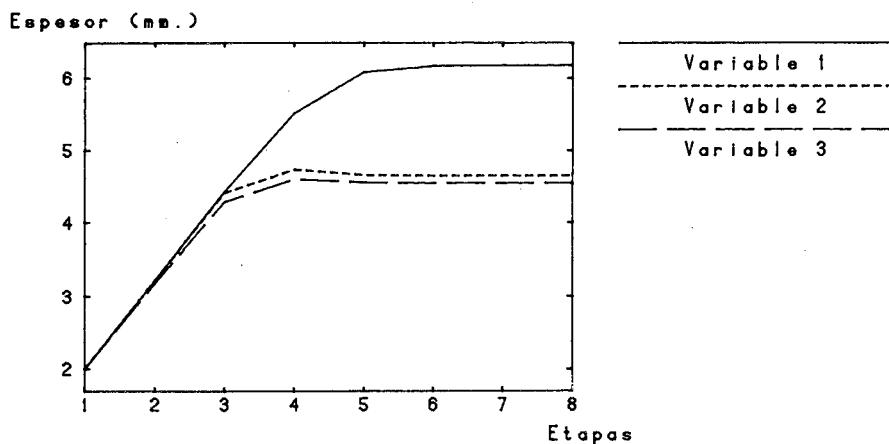


Figura 5. Evolución de los espesores en la membrana plana

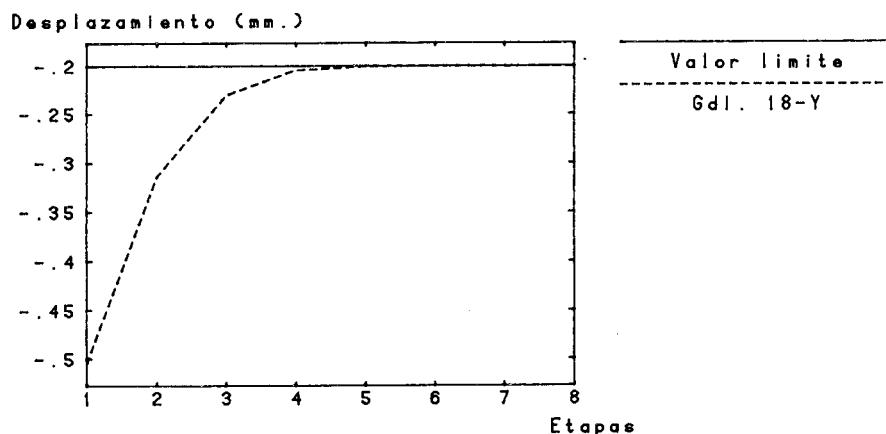


Figura 6. Desplazamiento restringido en la membrana plana

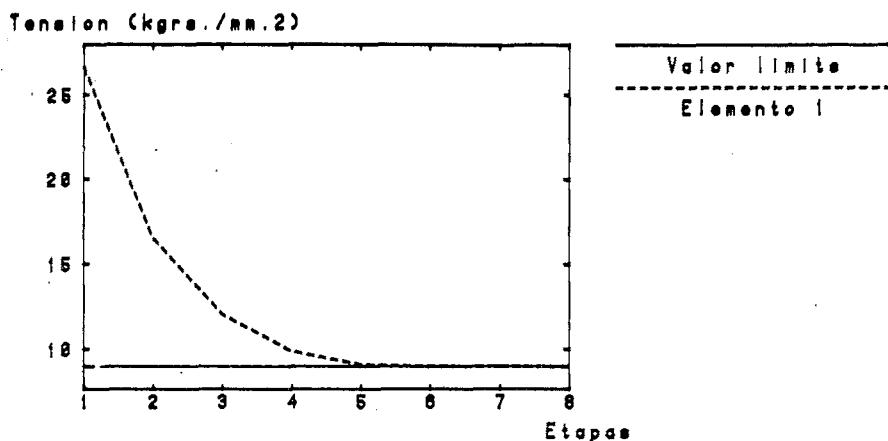


Figura 7. Tensión restringida en la membrana plana

elementos de diseño, e_1 , e_2 y e_3 (Figura 2), formados por las tres hileras horizontales, de cuatro elementos cada una, que componen la estructura.

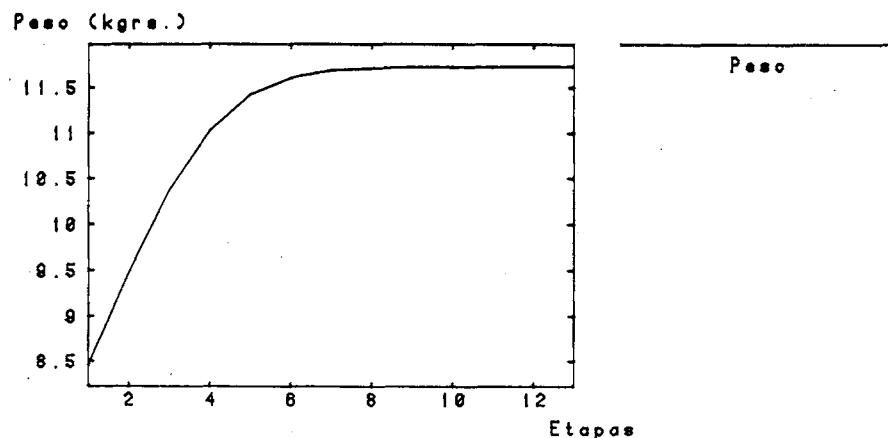


Figura 8. Evolución del peso en la placa plana

La base (empotrada) mide 800 mm. y el voladizo 450 mm.. Las dimensiones de todos los elementos son las mismas. El valor inicial de la variable de diseño 1 (espesor inicial de e_1) es 4 mm., el correspondiente a la variable 2 es 3 mm. y 2 mm. para la variable 3.

La hipótesis de carga consiste en una carga lineal uniforme aplicada en el extremo del voladizo en el sentido negativo del eje Z y de valor 0.15 kgrs./mm..

Se imponen a la estructura tres restricciones de tensión de valor 10 kgrs./mm.² a los elementos 1, 5 y 9 (Figura 2).

Las Figuras 8, 9 y 10 muestran los resultados obtenidos.

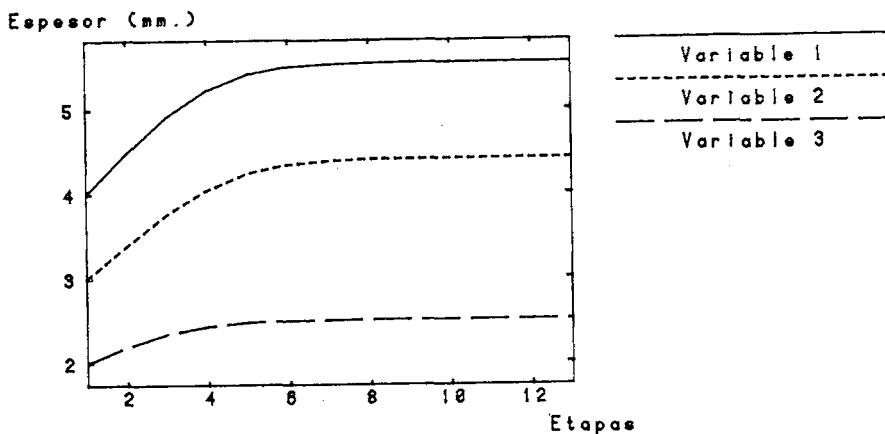


Figura 9. Evolución de los espesores en la placa plana

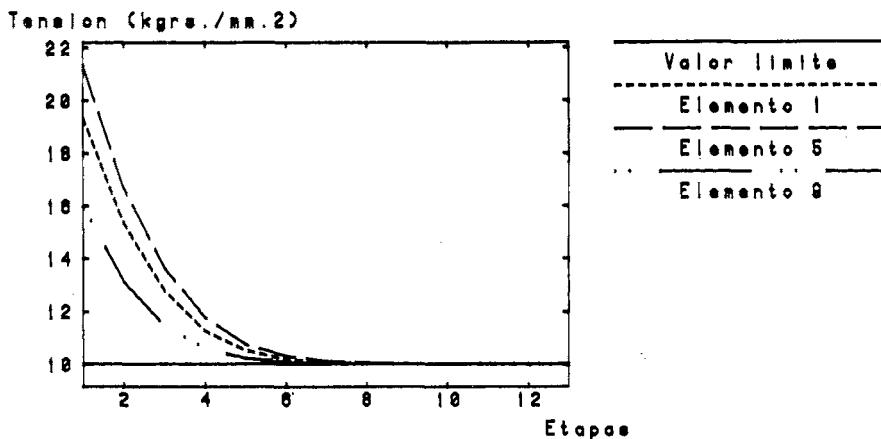


Figura 10. Tensiones restringidas en la placa plana

Estructura espacial

En la Figura 3 se muestra la estructura espacial y los elementos (con efectos membrana y placa Mindlin superpuestos) resultado de su modelización por el MEF. Se consideran seis elementos de diseño, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 y e_6 (Figura 3), formados por las seis hiladas verticales, de tres elementos cada una, que componen la estructura. Los lados de la base (empotrados) miden 300 mm. y la altura es 450 mm.. Todos los elementos tienen las mismas dimensiones. El espesor inicial de los elementos de diseño e_1 y e_6 es de 5 mm. y 3 mm. para los e_2, e_3, e_4 y e_5 .

La hipótesis de carga está formada por dos cargas puntuales, una de -2000 kgrs. en el gdl. 22-X y otra de -1600 kgrs. en el gdl. 28-Y.

El diseño final ha de satisfacer dos restricciones de desplazamiento y dos de tensión. Los desplazamientos de los grados de libertad 25-X y 25-Y (Figura 3) no deben sobrepasar el valor 0.3 y la tensión de los elementos 1 y 6 (Figura 3) está limitada al valor 8 kgrs./mm².

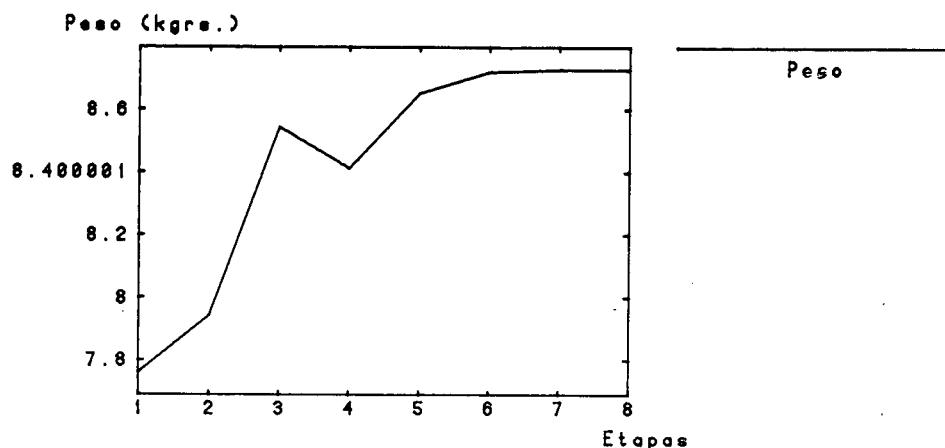


Figura 11. Evolución del peso en la estructura espacial

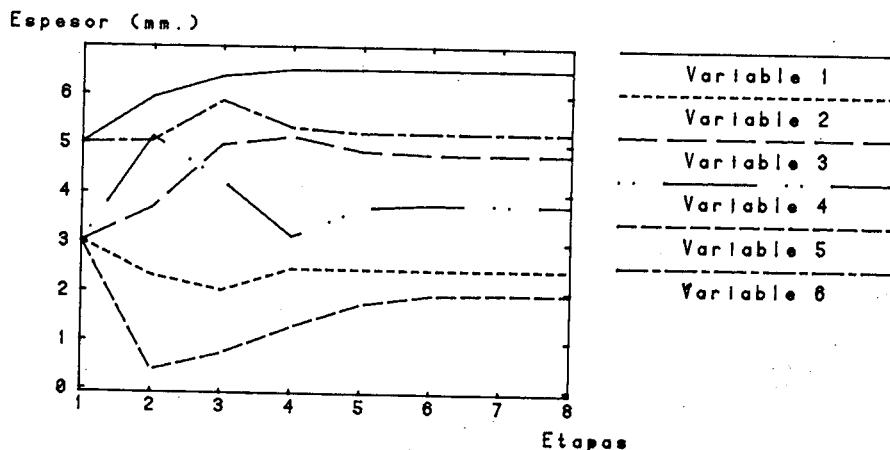


Figura 12. Evolución de los espesores en la estructura espacial

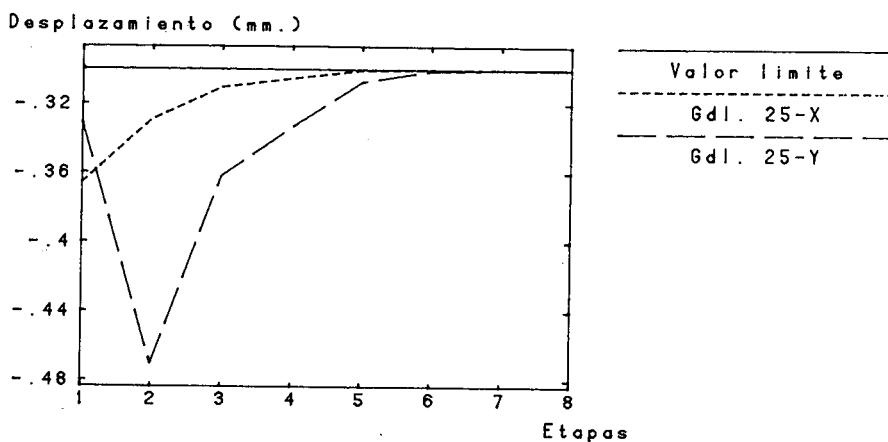


Figura 13. Desplazamientos restringidos en la estructura espacial

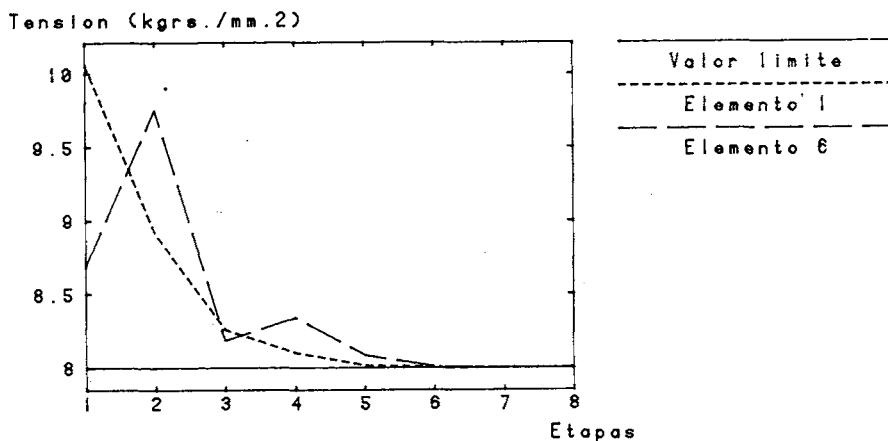


Figura 14. Tensiones restringidas en la estructura espacial

En las Figuras 11 a 14 se muestran los resultados obtenidos.

CONCLUSIONES

En este artículo se ha presentado un nuevo método de optimización dimensional de estructuras. El método se basa en aplicar la metodología de Newton-Raphson de resolución de sistemas de ecuaciones no lineales a las condiciones de Kuhn-Tucker; es, por tanto, un método de optimalidad, principalmente cuando se aplica a estructuras con elementos de flexión (6). Por otra parte, la implementación del método, junto con un algoritmo eficiente de variables activas y pasivas, ha demostrado ser lo suficientemente robusta y eficaz como para considerar que el método presentado en este artículo puede ser de utilidad en programas de diseño automático.

APENDICE

Conceptos manejados

- Característica de un elemento : Magnitud cuyo valor define completamente su geometría. Puede tratarse de un espesor (caso de elementos planos), de una sección (caso de elementos lineales), etc..
- Elemento : Porción más elemental de la estructura producto de su modelización mediante el MEF.
- Elemento de diseño : Conjunto de elementos con la misma característica.
- Espacio de diseño : Espacio de dimensión n cuyos puntos representan todos los posibles diseños, es decir, todas las posibles colecciones de valores de las variables de diseño.
- MEF : Método de los Elementos Finitos.
- NWRAG : Método Newton-Raphson-Global. Nuevo método de optimización presentado en este trabajo.

- Subespacio de diseño : Subespacio del espacio de diseño cuyos puntos representan todos los diseños admisibles.
- Variable de diseño : Valor de la característica de un elemento de diseño.

Magnitudes escalares

A_i	constante correspondiente al elemento de diseño i que multiplicada por su variable de diseño, X_i , proporciona el volumen de dicho elemento.
G_k	valor de la restricción de comportamiento k . En G_k se incluyen los valores GD_k y GT_k .
GD_k	valor de la restricción de desplazamiento k .
GFI_k	valor de la restricción frontera inferior k .
GFS_k	valor de la restricción frontera superior k .
GT_k	valor de la restricción de tensión k .
L	Lagrangiana, expresión (16), considerando todas las restricciones activas.
LC	Lagrangiana, expresión (31), correspondiente al problema simplificado (sólo restricciones de comportamiento activas).
m	número total de restricciones de desplazamiento y tensión impuestas. Se cumple que $m = md + mt$.
ma	número total de restricciones activas considerando únicamente las restricciones de comportamiento, es decir, de desplazamiento y tensión. Se cumple que $ma = mda + mta$.
md	número de restricciones de desplazamiento impuestas.
mda	número de restricciones de desplazamiento activas.
mt	número de restricciones de tensión impuestas.
mta	número de restricciones de tensión activas.
n	número de variables de diseño existentes (o número de elementos de diseño).
$n(i)$	número de elementos que forman el elemento de diseño i .
na	número de variables de diseño activas.
ne	número total de elementos ($= \sum_{i=1}^n n(i)$).
nia	número de restricciones frontera inferior activas.
nsa	número de restricciones frontera superior activas.
R_i	valor definido por la expresión (32) correspondiente a X_i .
R_i^*	valor de R_i en el óptimo.
u_k	desplazamiento del grado de libertad k de la estructura.
u_k^*	valor límite impuesto a u_k en el diseño.
W	peso total de la estructura.
X_i	valor tomado por la variable de diseño i .
X_i^*	valor de X_i en el óptimo.
XI_i	límite inferior impuesto a X_i .
XSi_i	límite superior impuesto a X_i .
δ_{ij}	delta de Kronecker de segundo orden. Vale 1 cuando sus dos índices son iguales, se anula en los demás casos.
λ_k	multiplicador correspondiente a la restricción de comportamiento activa k .
λI_k	multiplicador correspondiente a la restricción de frontera inferior activa k .
λS_k	multiplicador correspondiente a la restricción de frontera superior activa k .

- ρ_i densidad del elemento de diseño i .
 σ_k tensión equivalente calculada en el elemento k .
 σ_k^* límite impuesto a σ_k .

Magnitudes vectoriales

- $\{f\}$ cargas nodales correspondientes a una hipótesis de carga dada.
- $\{f_0\}$ cargas nodales correspondientes a las fuerzas no conservativas (esfuerzos aplicados directamente en los nudos).
- $\{\bar{f}_{vi}\}$ cargas nodales equivalentes correspondientes a las fuerzas conservativas (expresadas como fuerzas de volumen) actuantes sobre los elementos del elemento de diseño i para $X_i = 1$.
- $\{u\}$ desplazamientos de la estructura.
- $\{\sigma_k\}$ vector tensión correspondiente al elemento k .

Magnitudes matriciales

- $[B_k]$ matriz de cálculo de tensiones en el elemento k .
- $[B_k^M]$ componente de $[B_k]$ correspondiente al efecto membrana del elemento k .
- $[B_k^P]$ componente de $[B_k]$ correspondiente al efecto placa del elemento k .
- $[K]$ matriz de rigidez general de la estructura.
- $[K_i]$ matriz de rigidez del elemento de diseño i .
- $[\bar{K}_i^A]$ componente proporcional a X_i (para $X_i = 1$) de la matriz de rigidez $[K_i]$.
- $[\bar{K}_i^B]$ componente proporcional a X_i^3 (para $X_i = 1$) de la matriz de rigidez $[K_i]$.
- $[KE_{i(k)}]$ matriz de rigidez del elemento k del elemento de diseño i .
- $[\bar{KE}_{i(k)}^A]$ componente proporcional a X_i (siendo $X_i = 1$) de la matriz de rigidez $[KE_{i(k)}]$ (expresión 54).
- $[\bar{KE}_{i(k)}^B]$ componente proporcional a X_i^3 (siendo $X_i = 1$) de la matriz de rigidez $[KE_{i(k)}]$ (expresión 55) al efecto membrana del elemento k del elemento de diseño i para $X_i = 1$.
- $[\bar{KE}_{i(k)}^{P(\sigma)}]$ componente de la matriz $[KE_{i(k)}]$ correspondiente a la componente de flexión del efecto placa del elemento k del elemento de diseño i para $X_i = 1$.
- $[\bar{KE}_{i(k)}^{P(\tau)}]$ componente de la matriz $[KE_{i(k)}]$ correspondiente a la componente del esfuerzo cortante del efecto placa del elemento k del elemento de diseño i para $X_i = 1$.
- $[U^k]$ matriz que, postmultiplicada por el vector de desplazamientos $\{u\}$, extrae los valores correspondientes a los grados de libertad del elemento k .
- $[V]$ matriz de cálculo de la tensión equivalente (expresión (70) y (78)).

Convenios manejados

Todas aquellas magnitudes dependientes de una determinada variable de diseño que se desean expresar cuando el valor de dicha variable es la unidad se representarán con un guion en la parte superior. Sirvan de ejemplo las definiciones dadas a $[\bar{KE}_{i(k)}^{P(\sigma)}]$, $\{\bar{f}_{vi}\}$, etc..

La derivación respecto de las variables de diseño se expresa mediante el correspondiente subíndice precedido por una coma. Sirvan de ejemplo las expresiones.

$$L_{,i} = \frac{\partial L}{\partial X_i},$$

$$\{\sigma_{k,ij}\} = \frac{\partial^2 \{\sigma_k\}}{\partial X_i \partial X_j},$$

$$[k_{i,j}] = \frac{\partial [K_i]}{\partial X_j},$$

$$[K_{,ii}] = \frac{\partial^2 [K]}{\partial X_i^2}.$$

REFERENCIAS

1. R.H. Gallagher y O.C. Zienkiewicz, "Optimum structural design. Theory and applications", John Wiley & Sons, Great Britain, (1973).
2. B.S. Gottfried y J. Wesman, "Introduction to Optimization theory", Prentice Hall, USA, (1973).
3. E.J. Haug y J.S. Arora, "Applied optimal design", John Wiley & Sons, USA, (1979).
4. N.S. Khot, L. Berke y V.B. Venkayya, "Comparison of optimality criteria algorithms for minimum weight design of structures", *AIAA Journal*, Vol. 17, no. 2, pp. 182-190, (1979).
5. A.J. Morris, "Foundations of structural optimization: an unified approach", Editor A.J. Morris, John Wiley & Sons, (1982).
6. M. Nό y J.M. Aguinagalde, "NWRAG, a new algorithm for structural optimization", *1987 ASME Design Automation Conference*, Boston, USA, (1987).
7. M. Nό, J.A. Tarragó y J.M. Aguinagalde, "The Use of Optimality Criterion Techniques and the Finite Element Method to Design Minimum Weight Structures", *II World Basque Congress*, Bilbao, (1987).