

FORMULACIÓN DEL M.E.C. EN ELASTICIDAD TRIDIMENSIONAL MEDIANTE MACROELEMENTOS Y COLOCACIÓN NO NODAL

J. DOMÍNGUEZ-HERNÁNDEZ
L. GRACIA
y
M. DOBLARÉ

*Departamento de Ingeniería Mecánica
Centro Politécnico Superior, Universidad de Zaragoza
María de Luna 3, 50015, Zaragoza, España*

RESUMEN

Se presenta en este trabajo un nuevo enfoque del Método de los Elementos de Contorno en Elasticidad tridimensional basado en una aproximación global de la geometría en el interior de macroelementos junto con una estrategia de colocación no nodal, que permite obviar el tema de los nodos esquina, elimina la necesidad de evaluación del término libre que ahora es fijo y de valor $0.5 \delta_{ij}$ y simplifica el tratamiento de subregiones con las ventajas que ello supone desde el punto de vista computacional.

SUMMARY

A new approach of the Boundary Element Method in 3D Elasticity, based on a global approximation of the geometry by means of macro-elements is presented in this work. Simultaneously a strategy of non-nodal collocation allows to avoid the corner nodes and the computation of the free term and simplifies the treatment of subregions with a great deal of computational advantages.

INTRODUCCIÓN

El enfoque tradicional del Método de los Elementos de Contorno (M.E.C.) se basa en la formulación directa con discretización en nodos y elementos, que aproxima geometría, desplazamientos y tensiones en función de valores nodales. En el presente trabajo se plantea un nuevo enfoque del M.E.C. en elasticidad tridimensional utilizando una aproximación global de la geometría que permita un aprovechamiento más eficiente de las características distintivas del método.

Recibido: Diciembre 1994

Este nuevo tratamiento permite aproximar geometrías complejas y soluciones de forma satisfactoria y reduce notablemente la definición de geometría necesaria para el estudio del dominio; asimismo facilita la adscripción de funciones de variación de desplazamientos y tensiones (que inicialmente no tienen por qué coincidir con las geométricas) a esta geometría generada. Se ha buscado también que el tratamiento mejore y facilite notablemente la complicada gestión del enfoque tradicional para temas como el análisis de medios heterogéneos subdivididos en subregiones de materiales con distintas características físicas, situaciones especiales como nodos, vértices o esquinas o la definición de condiciones de contorno. Todo ello permite simplificar y robustecer el algoritmo necesario para su implementación en un código de ordenador frente a la elevada casuística y complejidad del enfoque tradicional.

Ha sido necesario caracterizar las funciones de aproximación de desplazamientos y tensiones y su influencia en el tratamiento numérico posterior. Surgen así nuevos problemas que necesitarán ser resueltos: las estrategias de ubicación y elección del número de los puntos de colocación sobre la nueva geometría; la imposibilidad de aplicación de las técnicas tradicionales de determinación de los términos singulares de la matriz de coeficientes, el estudio del condicionamiento del sistema de ecuaciones obtenido, que obligará a la búsqueda de una forma de resolución cuyas características mejor se adapten al nuevo sistema de ecuaciones obtenido.

En los epígrafes siguientes se presenta el nuevo enfoque aludido, en base al cual se ha desarrollado e implementado un programa de ordenador que ha permitido validarlo en base a numerosos ejemplos, algunos de los cuales se presentan en este artículo.

TRATAMIENTO DE LA GEOMETRÍA

En el enfoque tradicional, el contorno se discretiza en una serie de nodos y elementos. En cada elemento los desplazamientos y tensiones se definen en función de sus valores en una serie de puntos nodales. En este nuevo enfoque, los conceptos de nodo y elemento se sustituyen por los de *punto clave*, *línea clave* y *área clave*. Con estos conceptos la forma de discretizar la estructura permite realizar el tratamiento numérico de la ecuación de una forma más fácil y consistente siendo también mucho más sencilla la definición de geometrías complicadas y el trabajo con dominios divididos en distintas subregiones.

La representación geométrica de un punto clave viene dada por su vector de posición respecto al sistema de coordenadas de referencia global elegido. Estos puntos sirven para definir líneas clave y sobre ellos se pueden definir condiciones de contorno en desplazamientos. Las líneas clave son curvas parametrizadas en la forma²

$$x_i = \sum_{j=0}^5 s_{ij} t^j \quad 0 \leq t \leq 1 \quad i = 1, 2, 3 \quad (1)$$

con respecto a un sistema de referencia cartesiano global. Este tipo de representación para las líneas clave tiene la ventaja de que permite definir curvas hasta de quinto grado con un tratamiento sencillo que aproxima razonablemente bien la geometría del

dominio. Sirven para definir áreas clave y sobre ellas se pueden definir condiciones de contorno en desplazamientos.

Un área se define como una superficie parametrizada en la forma

$$x_i = a_{i0} + a_{i1}\eta + a_{i2}\xi + a_{i3}\xi\eta + \sum_{j=1}^4 (a_{i4j}\eta^{j+1} + a_{i(4j+1)}\eta^{j+1}\xi + a_{i(4j+2)}\eta\xi^{j+1} + a_{i(4j+3)}\xi^{j+1}) \quad (2)$$

de forma que el conjunto de ellas define la geometría del dominio. Está definida por tres o cuatro líneas clave, que configuran un área clave de tipo triangular o cuadrilátero respectivamente (Figuras 1 y 2). Sobre ellas se definen las condiciones de contorno en desplazamientos y tensiones.

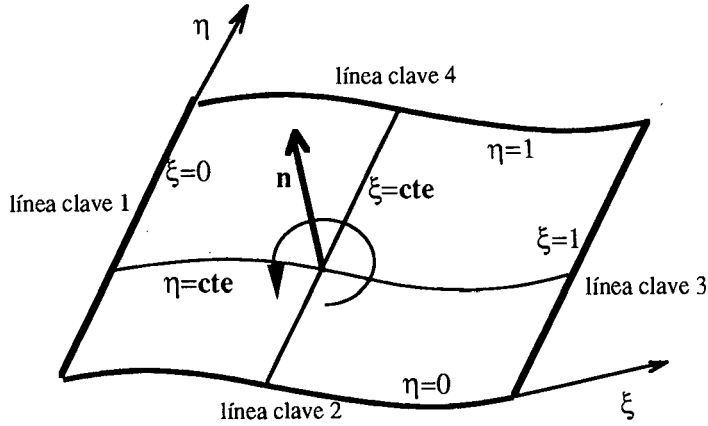


Figura 1. Parametrización de un área clave de tipo cuadrilátero

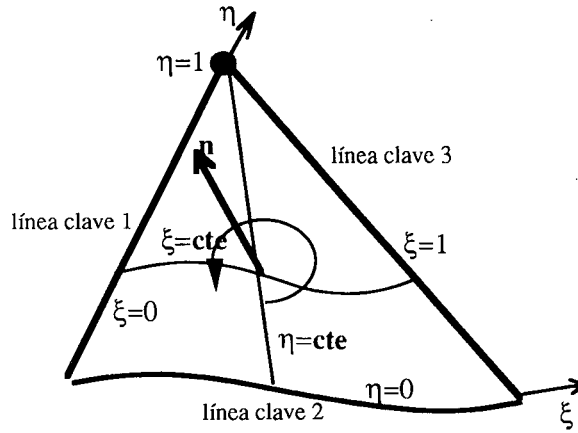


Figura 2. Parametrización de un área clave de tipo triangular

Con esta forma de definición de áreas clave con la ayuda de líneas clave de hasta quinto grado se obtienen muy buenas aproximaciones incluso para geometrías muy complicadas.

APROXIMACIÓN DE LAS INCÓGNITAS

La aproximación de las funciones incógnita del problema (desplazamientos y tensiones) es un punto de especial relevancia dentro del nuevo enfoque del M.E.C., ya que de ella depende el condicionamiento del sistema de ecuaciones algebraico final, que es fundamental a la hora de la resolución. Varias han sido las alternativas estudiadas en el presente trabajo:

a) *Funciones idénticas a las de aproximación geométrica*

Permiten reducir el código a implementar y sistematizar notablemente el tratamiento de las funciones de aproximación, tanto de geometría, como de tensiones y desplazamientos. Por otra parte, permiten implementar con facilidad una versión p del método. De los ejemplos estudiados se deduce que el orden elegido en la aproximación, en este caso dependiente del número de términos escogidos, tiene una gran influencia en el condicionamiento de la matriz de coeficientes, de tal forma que aproximaciones de alto grado (a partir de 16 términos) dan lugar a condicionamientos muy malos en el sistema de ecuaciones, lo que origina problemas de precisión, en algunos casos insoslayables, a la hora de la resolución.

b) *Funciones lagrangianas*

La principal conclusión respecto de las mismas es que son las que dan lugar a un mejor condicionamiento de la matriz de coeficientes. Las familias utilizadas fueron las formadas por polinomios de Lagrange de orden idéntico en las dos direcciones locales y de ellas, las de cuatro, nueve y dieciséis términos³.

c) *Funciones tipo Serendip*

El condicionamiento de la matriz de coeficientes es peor que el correspondiente a la familia de Lagrange y ligeramente mejor que el de la primera considerada.

Un detallado estudio de esta aproximación puede encontrarse en³.

OBTENCIÓN DEL SISTEMA DE ECUACIONES. COLOCACIÓN NO NODAL

Partiendo de la formulación directa del M.E.C.¹ y escribiendo la expresión discretizada para cada área clave, se obtiene un sistema de ecuaciones algebraicas lineales. Tras aplicar las condiciones de contorno conocidas en puntos clave, líneas clave y áreas clave, el sistema de ecuaciones puede ser resuelto para obtener todas las incógnitas y de esta forma se obtiene la solución aproximada al problema de valores del contorno. Partiendo de las aproximaciones sobre cada área clave j expresadas en forma matricial

$$\mathbf{u} = \mathbf{f} \mathbf{b}^j \quad \mathbf{p} = \mathbf{f} \mathbf{c}^j \quad (3)$$

donde $\mathbf{b}^j$ y $\mathbf{c}^j$ son los coeficientes numéricos desconocidos (de dimensión $3 \times N$ para el caso tridimensional) que multiplican a una serie de funciones conocidas $\mathbf{f}$ de aproximación de tensiones y desplazamientos sobre el área clave, $\mathbf{u}$ y $\mathbf{p}$ son los desplazamientos y tensiones en cualquier área clave del contorno Γ_e

$$\mathbf{p} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (4)$$

La matriz $\mathbf{f}$ es una matriz de funciones de dimensiones $3 \times 3N$ siendo N el orden requerido en la aproximación

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 & 0 & 0 & f_2 & 0 & 0 & \dots & f_N & 0 & 0 \\ 0 & f_1 & 0 & 0 & f_2 & 0 & \dots & 0 & f_N & 0 \\ 0 & 0 & f_1 & 0 & 0 & f_2 & \dots & 0 & 0 & f_N \end{bmatrix} = [f_1 \ f_2 \ \dots \ f_N] \quad (5)$$

Con esta notación la ecuación de partida del M.E.C. prescindiendo de las fuerzas de volumen, puede ser reescrita como sigue

$$c^i \mathbf{u}^i + \int_{\Gamma} \mathbf{p}^* \mathbf{u} \, d\Gamma = \int_{\Gamma} \mathbf{u}^* \mathbf{p} \, d\Gamma \quad (6)$$

Si se sustituyen las funciones anteriores en la ecuación (6) y se aproxima el contorno en base a las áreas clave definidas, se obtiene la siguiente ecuación para un punto de colocación i

$$c^i \mathbf{f} \mathbf{b}^i + \sum_{j=1}^{NA} \left\{ \int_{\Gamma_j} \mathbf{p}^* \mathbf{f} \, d\Gamma \right\} \mathbf{b}^j = \sum_{j=1}^{NA} \left\{ \int_{\Gamma_j} \mathbf{u}^* \mathbf{f} \, d\Gamma \right\} \mathbf{c}^j \quad (7)$$

El sumatorio desde $j = 1$ a NA indica la suma extendida a las NA áreas clave o macroelementos sobre el dominio Ω y Γ_j es la superficie del área clave j . $\mathbf{b}^j$ y $\mathbf{c}^j$ son las coordenadas generalizadas en la base de aproximación para el área clave j .

Las integrales en (7) se resuelven de forma numérica recurriendo a técnicas especiales en el caso de integrandos singulares y cuasi-singulares². Pasando a coordenadas de referencia e incluyendo los jacobianos de las transformaciones, la ecuación (7) queda en la forma

$$c^i \mathbf{f} \mathbf{b}^i + \sum_{j=1}^{NA} \left\{ \int_{\Gamma_j} \mathbf{p}^* \mathbf{f} |\mathbf{G}| \, d\xi \, d\eta \right\} \mathbf{b}^j = \sum_{j=1}^{NA} \left\{ \int_{\Gamma_j} \mathbf{u}^* \mathbf{f} |\mathbf{G}| \, d\xi \, d\eta \right\} \mathbf{c}^j \quad (8)$$

Finalmente, incluyendo la cuadratura de integración, se obtiene

$$c^i \mathbf{f} \mathbf{b}^i + \sum_{j=1}^{NA} \left\{ \sum_{k=1}^1 w_k (\mathbf{p}^* \mathbf{f})_k |\mathbf{G}| \right\} \mathbf{b}^j = \sum_{j=1}^{NA} \left\{ \sum_{k=1}^1 w_k (\mathbf{u}^* \mathbf{f})_k |\mathbf{G}| \right\} \mathbf{c}^j \quad (9)$$

donde l es el número de puntos de integración sobre los elementos de la superficie y w_k el peso de esos puntos.

La ecuación (7) o su forma integral numérica (9) corresponde a un punto particular i denominado *punto de colocación* que en el enfoque tradicional coincidía con los nodos de la discretización y que ahora no tiene por qué coincidir con los puntos clave utilizados como ayuda en la definición de líneas clave (de hecho no coinciden). Una vez realizada la integración, se puede escribir como

$$\mathbf{c}^i \mathbf{f} \mathbf{b}^i + \sum_{j=1}^{NA} \hat{\mathbf{H}}^{ij} \mathbf{b}^j = \sum_{j=1}^{NA} \mathbf{G}^{ij} \mathbf{c}^j \quad (10)$$

donde $\mathbf{b}^j$ y $\mathbf{c}^j$ son coeficientes de las funciones de aproximación de los desplazamientos y tensiones en el área clave j . Las matrices de influencia $\mathbf{H}$ y $\mathbf{G}$ (de dimensión 3×3 para tres dimensiones y 2×2 en el caso bidimensional) son las integrales de la expresión (7) o bien expresadas en forma numérica en (9).

La contribución para todos los puntos de colocación i puede ser escrita junta en forma matricial para dar el sistema de ecuaciones global

$$\mathbf{HB} = \mathbf{GC} \quad (11)$$

Los vectores $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ contienen todos los valores de las coordenadas generalizadas de las funciones de aproximación de tensiones y desplazamientos. Existen condiciones de contorno conocidas, lo que equivale a suponer conocidas las coordenadas generalizadas. Estas condiciones pueden ser introducidas en la formulación reordenando las columnas $\mathbf{H}$ y $\mathbf{G}$ pasando todas las incógnitas (coordenadas generalizadas desconocidas) a un vector $\mathbf{x}$ en la parte izquierda. Se obtiene pues un sistema de ecuaciones en la forma

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{F} \quad (12)$$

Resolviendo el sistema anterior, todos los coeficientes generalizados en el contorno estarán completamente determinados y con ello las correspondientes funciones de variación de tensiones y desplazamientos sobre cada macroelemento.

Por área clave, si N es el orden de la aproximación tomada en desplazamientos y tensiones, existen $3 \times N$ constantes generalizadas en desplazamientos y $3 \times N$ en tensiones. Es decir, $6 \times N$ en total, de las que $3 \times N$ serán datos y $3 \times N$ incógnitas. Luego, como (9) se puede aplicar tres veces por punto de colocación, una por cada dirección cartesiana global, se necesitará utilizar N puntos de colocación por área clave con objeto de obtener un número de ecuaciones igual al de incógnitas y con ello una matriz cuadrada. Se plantea entonces el problema de la disposición de N puntos de colocación sobre un área clave determinada. Existen numerosas alternativas, sobre todo si se trata de un número de puntos de colocación que no se pueda distribuir de forma simétrica.

En la Figura 3 se observan tres posibilidades de colocación para el caso de $N = 9$, que no presenta grandes problemas al poder estos ser distribuidos de forma simétrica respecto a $\xi = 0.5$ y $\eta = 0.5$ de acuerdo al sistema de referencia local (ξ, η) con respecto al cual están definidas las aproximaciones de tensiones y desplazamientos. En virtud

de las numerosas pruebas realizadas para los diferentes ejemplos tratados, se puede concluir que lo deseable es:

- que los distintos cuadrados y rectángulos de influencia en que cada punto de colocación divide al área clave, tengan la misma superficie;
- que además los nodos laterales y de las esquinas estén alejados de los extremos del área clave con objeto de asegurar una mejor integración singular.

De las alternativas mostradas en la Figura 3, la mejor por tanto es la c.

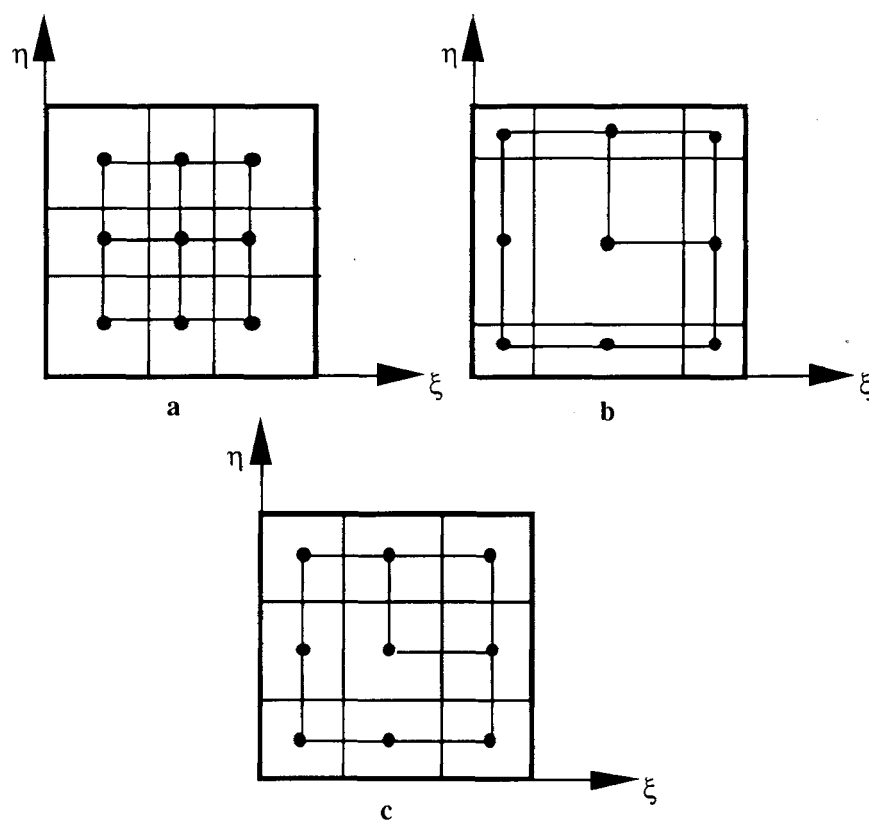


Figura 3. Distintas posibilidades de elección de nueve puntos de colocación

En todo el planteamiento presentado se han considerado aproximaciones independientes para cada área clave; evidentemente ello conduce a una solución en desplazamientos discontinua. Para garantizar la continuidad del campo de desplazamientos, es necesario incorporar al sistema de ecuaciones las condiciones de compatibilidad entre áreas clave. La forma de llevar a cabo esta tarea puede encontrarse en².

En general, siempre se va a disponer de más ecuaciones que incógnitas y la matriz de coeficientes no va a ser cuadrada, por lo que será necesaria alguna técnica especial

de resolución. En este trabajo se ha utilizado un método de gradiente conjugado con preconditionamiento, modificado para matrices rectangulares, que se ha mostrado bastante efectivo.

El tratamiento de subregiones, citado anteriormente como una de las ventajas del nuevo enfoque, es efectivamente más sencillo que el enfoque clásico. Cada una de ellas se trata por separado estableciendo a posteriori las condiciones de interfase. Ahora bien, como los puntos de colocación están en el interior de las áreas clave, desaparece la casuística de nodos esquina donde pueden concurrir varias subregiones².

RESULTADOS

Con objeto de validar el enfoque presentado se ha desarrollado e implementado un programa de ordenador, con el cual se han resuelto numerosos ejemplos, algunos de los cuales se presentan a continuación.

En un primer ejemplo se analiza un cubo homogéneo sometido a tracción en caras opuestas. Las medidas del cubo se muestran en la Figura 4. El cubo se encuentra sometido a una tracción de valor 1000 Nw/m^2 sobre sus dos caras opuestas $x = -3 \text{ m}$ y $x = 3 \text{ m}$. El cubo está formado por un solo material de características: módulo de elasticidad $E = 2.5 \text{ Nw/m}^2$ y un coeficiente de Poisson $\nu = 0.25$.

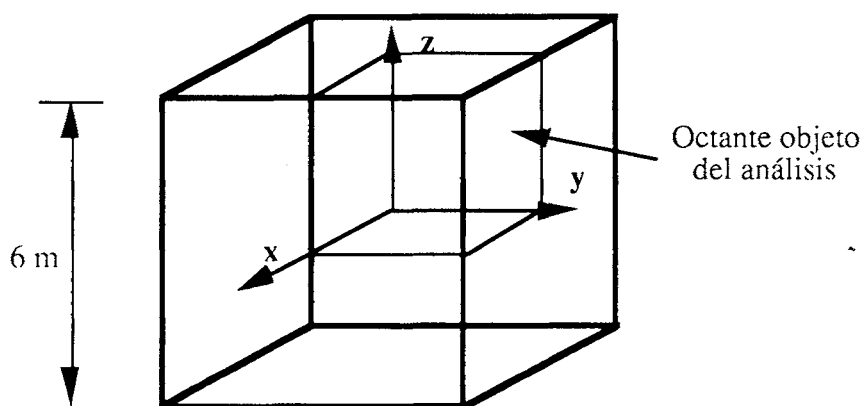


Figura 4. Cubo homogéneo sometido a tracción en caras paralelas

Debido a la simetría respecto a los planos xy , xz , yz se sabe que los desplazamientos de puntos de estos planos respecto a las direcciones perpendiculares a los mismos son nulos, por lo que se puede fácilmente introducir estos datos como condiciones de contorno de un octante de cubo eliminando así la posibilidad de movimiento como sólido rígido del dominio.

La solución teórica es conocida y de tipo bilineal; una aproximación funcional bilineal de cualquier tipo de familia de funciones es suficiente para "cazar" la solución. Se escoge la aproximación lagrangiana por aportar los mejores condicionamientos de

la matriz de coeficientes. En la Figura 5 se muestra, a título de ejemplo, el mapa de desplazamientos en la dirección y . Sobre este ejemplo se realizan diversos estudios sobre la influencia del número de puntos de integración en la precisión de la solución obtenida.

- Error con respecto a la solución teórica conocida al variar el número de puntos de integración normal manteniendo el número de puntos de integración singular fijo:

Nº puntos singular		Nº de puntos Gauss	Error obtenido (%)
tangencial	radial		
250	20	4	0.3039
		9	1.61 e-2
		16	5.02 e-4
		25	1.37 e-5
		36	3.33 e-6

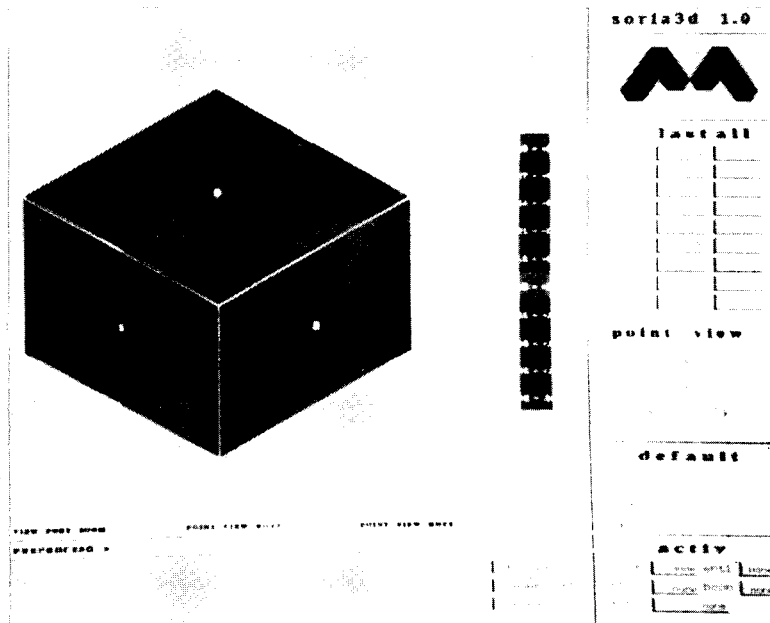


Figura 5. Mapa de desplazamientos u_y sobre la geometría original

Se observa que incluso un número pequeño de puntos de Gauss aporta una buena solución, si bien no hay que olvidar que en el algoritmo se realiza una subdivisión del área clave sobre la que se integra cuando la distancia desde el punto de colocación a la misma es pequeña, por lo que el número efectivo de puntos de Gauss es mayor.

- Error con respecto a la solución teórica conocida al variar el número de puntos de integración singular manteniendo el número de puntos de integración normal fijo:

N° de puntos Gauss	N° puntos singular		Error obtenido (%)
	tangencial	radial	
400	4	2	14.68
	6	3	10.19
	10	3	0.56
	16	4	2.15 e-2
	20	5	2.19 e-3
	30	7	9.66 e-6
	40	8	8.33 e-8

Es necesario tener un número mínimo de puntos de integración singular en dirección tangencial para la obtención de resultados satisfactorios. Con tres o cuatro puntos de integración singular en dirección radial suele ser suficiente. A partir de 10×3 puntos de integración singular los resultados son muy buenos.

- Error con respecto a la solución teórica conocida al variar el número de puntos de integración singular y el número de puntos de integración normal:

N° de puntos Gauss	N° puntos singular		Error obtenido (%)
	tangencial	radial	
4	6	3	10.48
4	8	3	2.58
4	10	3	0.87
9	8	3	2.25
9	10	3	0.55
16	12	3	0.29
16	16	4	2.20 e-2
25	20	5	2.21 e-3
25	20	6	2.21 e-3
25	30	7	2.33 e-5

Una discusión completa de los resultados puede encontrarse en².

El segundo ejemplo corresponde a un paralelepípedo constituido por diferentes materiales. El paralelepípedo está subdividido en dos subregiones con materiales de características diferentes. El primero, de características $E_1 = 5 \text{ Nw/m}^2$ y $\nu_1 = 0.25$ y el segundo, $E_2 = 1.5 \text{ Nw/m}^2$ y $\nu_2 = 0.25$. El valor y situación de las cargas de tracción, las condiciones de contorno y las consideraciones de simetría son idénticas a las del ejemplo anterior. La discretización utilizada para el análisis se muestra en la Figura 7.

El ejemplo es similar al anterior, sólo que con la necesidad de utilizar subregionalización. Los resultados obtenidos muestran el mismo grado de precisión que el primero. En las Figuras 8 y 9 se muestran los mapas de desplazamientos u_x y u_y sobre la geometría original.

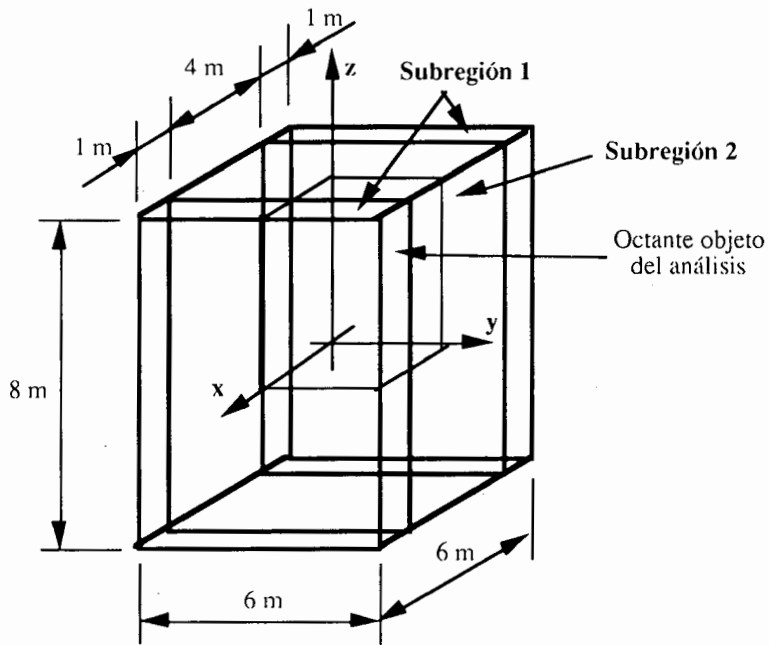


Figura 6. Paralelepípedo heterogéneo sometido a tracción en caras paralelas

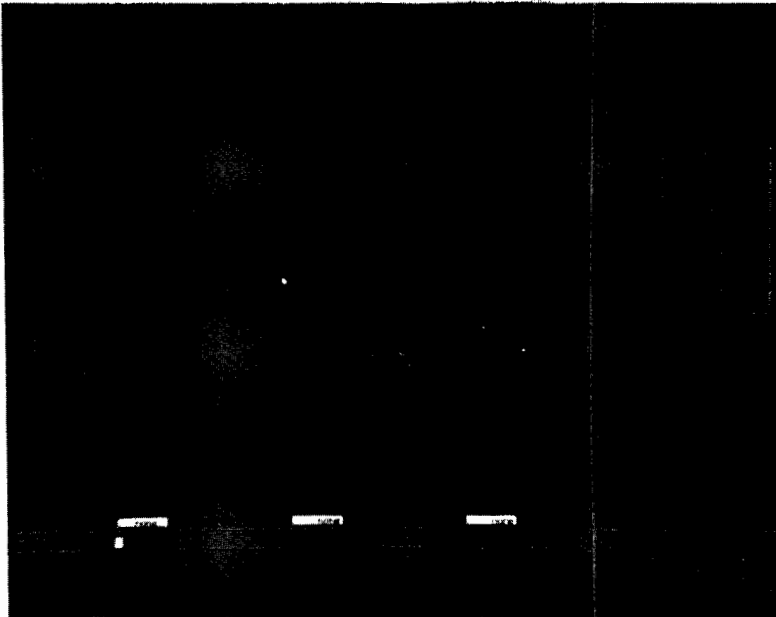


Figura 7. Discretización utilizada para el ejemplo de la Fig. 6

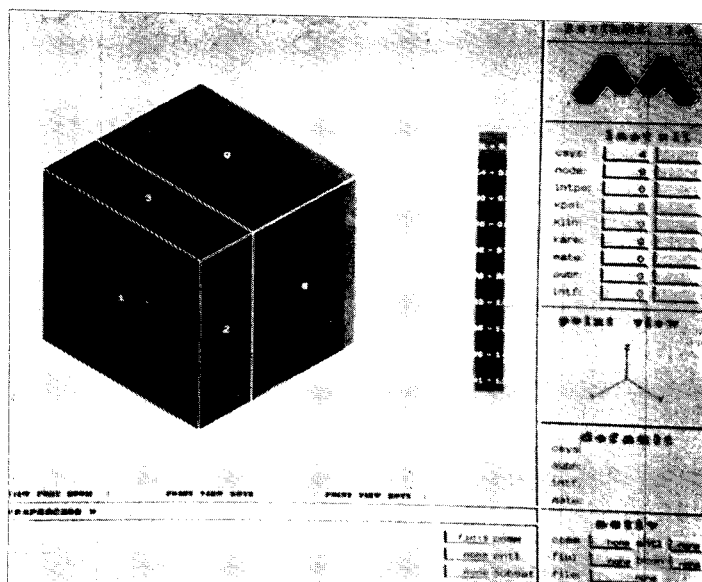


Figura 8. Mapa de desplazamientos u_x sobre la geometría original

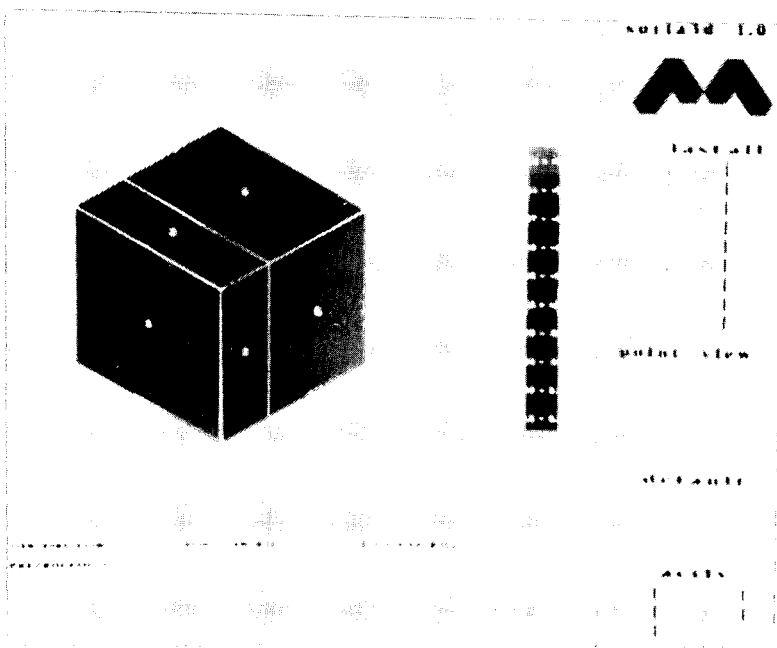


Figura 9. Mapa de desplazamientos u_y sobre la geometría original

El tercer ejemplo consiste en un cilindro de pared gruesa como el mostrado en la Figura 10, sometido a la presión interna de valor 1000 Nw/m^2 . Las dimensiones del cilindro son: radio exterior 110 m y radio interior 30 m.

Debido a la simetría respecto a los planos xz e yz , los desplazamientos perpendiculares a estos planos en los puntos que pertenezcan a ellos deben ser nulos,

por lo que introduciendo también estas condiciones de contorno en desplazamientos, el problema real a resolver es el indicado en la Figura 11. La geometría se define en base al número mínimo de áreas clave (seis). Algunos de los resultados obtenidos se muestran en forma de gráfica en las Figuras 12 y 13.

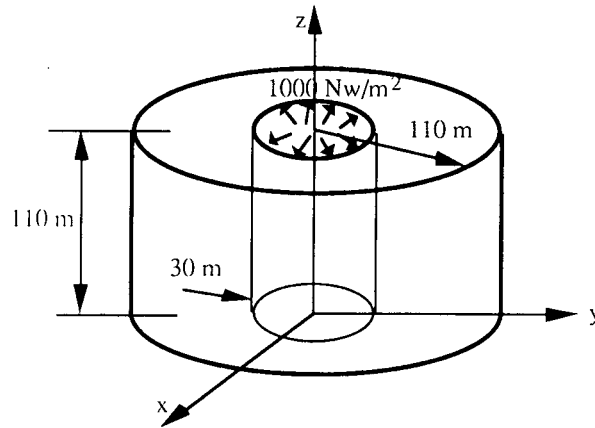


Figura 10. Cilindro sometido a presión interna

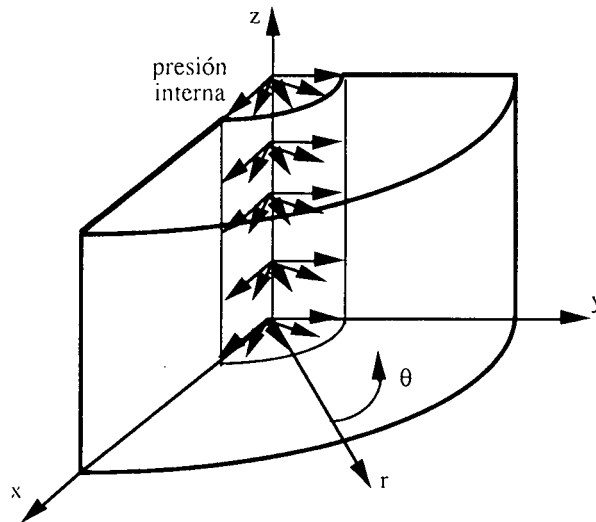


Figura 11. Cuarto de cilindro analizado

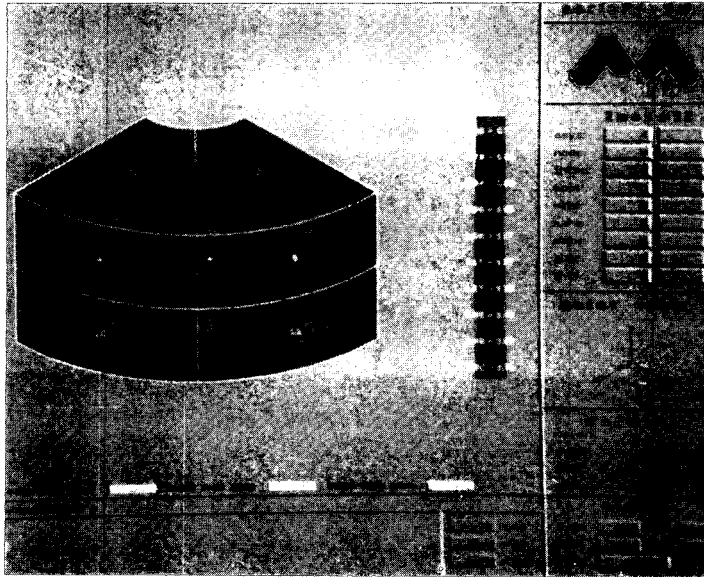


Figura 12. Mapa de desplazamientos u_r sobre la geometría original

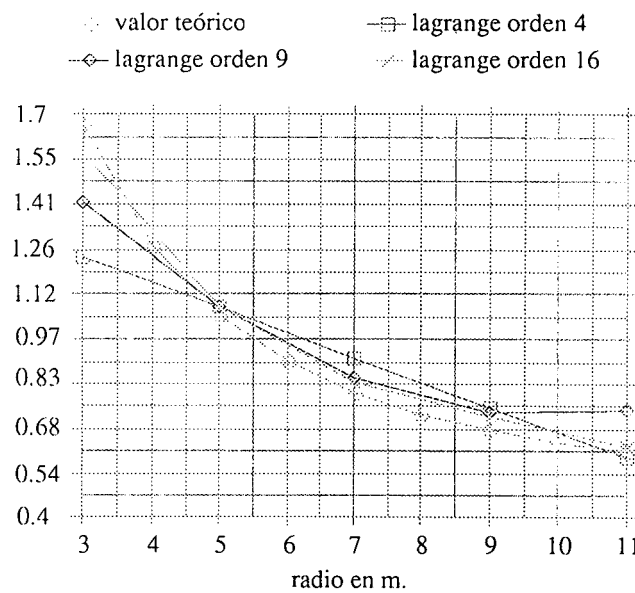


Figura 13. Resultados de desplazamientos u_r a lo largo del radio del cilindro

CONCLUSIONES

Se ha presentado un nuevo enfoque del M.E.C. en elasticidad tridimensional, que presenta sensibles ventajas respecto al enfoque clásico. El enfoque tradicional conlleva una gran cantidad de operaciones de gestión a la hora de incorporar en el análisis dominios con distintas subregiones y situaciones especiales, como es el caso de nodos esquina, que reducen notablemente su eficacia y con ello su operatividad.

Esta forma tradicional de discretizar ha sido cambiada realizándose ahora con la ayuda de puntos, líneas y áreas clave. Con los puntos clave se definen líneas clave de hasta quinto grado, en base a las cuales se definen áreas clave o macroelementos triangulares y cuadriláteros que aproximan muy bien geometrías complicadas.

Sobre estos puntos clave, líneas clave y áreas clave se definen las condiciones de contorno en desplazamientos y tensiones del problema, de tal forma que antes se podía hablar de una aproximación en geometría, desplazamientos y tensiones de carácter nodal, mientras que ahora es global. De cara a la aproximación funcional de tensiones y desplazamientos sobre cada área clave se estudiaron distintos tipos de funciones de aproximación que conducen a diferentes condicionamientos del sistema de ecuaciones. Los puntos de colocación se disponen sobre las áreas clave o macroelementos. El número de ellos depende del número de ecuaciones totales que sean necesarias para la obtención de las coordenadas generalizadas que multiplican a las funciones escogidas y que constituyen las nuevas incógnitas. Lo óptimo en cuanto a ubicación de los puntos de colocación es disponerlos de tal forma que el área de influencia de cada punto clave sea aproximadamente idéntica, con lo que aporta mejores condicionamientos de la matriz de coeficientes, si bien ello no es óbice para que cualquier disposición aporte resultados buenos siendo estos peores cuanto más agrupados estén los puntos de colocación en una zona del área clave. Nada impide, por otra parte, considerar mayor número de puntos de colocación que de incógnitas y sería posible por ejemplo incrementar el número de puntos de colocación en zonas conflictivas.

Con este nuevo enfoque ya no son de aplicación las técnicas tradicionales de determinación de los términos singulares de la matriz de coeficientes, que aparecen cuando se integra desde un punto de colocación sobre el área clave a la que pertenece. Para superar tal inconveniente se ha desarrollado una nueva técnica de integración singular en tres dimensiones, consistente en una transformación no lineal que regulariza el integrando en las proximidades de la singularidad. Esta transformación agrupa los puntos de integración en torno a la singularidad para evaluar mejor las contribuciones mayores de la integral, aproxima el jacobiano de la transformación a cero en puntos próximos al punto singular y lo hace variar de forma suave en el entorno del punto singular⁵.

Se ha utilizado el método del gradiente conjugado con preconditionamiento como método de resolución del sistema de ecuaciones. Este método funciona mejor, cuanto mejor condicionada está la matriz. Para condicionamientos malos el número de iteraciones es muy elevado, lo que desaconseja su uso, a no ser que se disponga de una buena solución inicial. Es por ello que la forma óptima de trabajo es resolver inicialmente el problema para macroelementos discontinuos con eliminación de Gauss, añadir las correspondientes ecuaciones de compatibilidad de desplazamientos en la

matriz y resolver con gradiente conjugado con preconditionamiento.

El estudio de dominios con varias subregiones se reduce a realizar el proceso anteriormente reseñado para cada subregión y al final añadir las condiciones de compatibilidad de desplazamientos y tensiones entre las interfases que definen las distintas subregiones. Se puede concluir a tenor de los resultados obtenidos hasta la fecha, que el enfoque aportado proporciona resultados totalmente satisfactorios.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido subvencionado en parte por la CICYT e IMPIVA a través del Proyecto MIT91-5014-C02-02

REFERENCIAS

1. M. Doblaré, "Computational Aspects of the Boundary Element Method", Chapter 4 en "*Topics in Boundary Element Research*", (ed. C.A. Brebbia), Springer-Verlag, Vol. **3**, pp. 51-131, (1987).
2. J. Domínguez-Hernández, "Un nuevo enfoque en el Método de los Elementos de Contorno. Aplicaciones en Elasticidad Tridimensional", Tesis Doctoral, C.P.S. Ingenieros, Universidad de Zaragoza, (1992).
3. O.C. Zienkiewicz, "*The Finite Element Method in Engineering Science*", McGraw Hill, (1971).
4. W.J. Mansur y W.G. Ferreira, "A Non-Nodal Collocation Procedure in Three-Dimensional Elasticity", en B.E.XIV. Sevilla 1992, Comp. Mech. Pub. and Elsevier Appl. Science, (1992).
5. J. Domínguez, L. Garcia, M. Doblaré, "Evaluación de las integrales singulares del M.F.C. tridimensional mediante transformaciones no lineales", *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, Vol. **11**, No. 1, pp. 61-70, (1995).