

Dimensionamento estrutural de mastros metálicos

Rui C. Barros

Departamento de Engenharia Civil
Faculdade de Engenharia – FEUP
Rua Roberto Frias, Porto 4200-465, Portugal
Tel.: 351-22-508 18 82, Fax:351-22-508 18 35
e-mail: rcb@fe.up.pt

Sumário

Mastros metálicos de inércia variável têm sido utilizados como estruturas de suporte de torres de iluminação e de comunicações, para alturas superiores a 30 metros. Formulam-se as respostas permanentes e não-permanentes dos mastros às pressões devidas ao vento. Para mastros flexíveis é necessário analisar o comportamento dinâmico amortecido do modo fundamental, induzido pelo vento. Também deverão ser considerados os momentos de 2ª ordem, incluindo os designados efeitos $P - \Delta$, na análise da capacidade resistente dos mastros. Esta análise inclui carregamento axial e lateral, distribuições não homogêneas de pesos próprios associadas a inércia variável em altura, e ainda disposições regulamentares relativas a imperfeições iniciais de fabrico. Inclui-se um exemplo de acordo com o EuroCódigo-3, pormenorizando o cálculo da capacidade resistente por considerações de instabilidade à encurvadura.

Palavras chaves:

Dimensionamento, mastros metálicos, estabilidade, aerodinâmica.

STRUCTURAL DESIGN OF METALLIC MASTS

Summary

Tapered steel masts have been used as supporting structures for lighting and communications towers, for heights of around 30 meters and beyond. Steady and non-steady mast responses to wind pressures and loading are formulated. For flexible masts it is required to analyse the damped dynamic behaviour at the fundamental mode, due to wind actions. Also the second order moments, accounting for the so-called $P - \Delta$ effects, should be included in the analysis of the masts carrying capacity, with due consideration on axial and lateral loads, dead weight distribution due to taper and code specifications for initial imperfections. A design example according to EuroCode-3 is included, detailing buckling and stability considerations and the calculation of mast carrying capacity.

Key words:

Design, metallic masts, stability, aerodynamics.

INTRODUÇÃO

Os mastros metálicos em aço, habitualmente de inércia variável, têm sido utilizados frequentemente como estrutura de suporte de torres e antenas de telecomunicação (assegurando infraestruturas necessárias na actual sociedade da comunicação e informação) para além duma utilização mais clássica como torres de iluminação em instalações desportivas. Estas utilizações alcançam frequentemente alturas de 30 ou mais metros. Em mastros muito flexíveis, é necessário estudar o comportamento dinâmico (incluindo amortecimento) no modo fundamental devido à acção do vento, e também é muito importante avaliar as contribuições de segunda ordem devido ao designado efeito $P - \Delta$ (associado ao comportamento e análise de situações de instabilidade estrutural).

Em complemento apresentam-se, através dum exemplo prático, alguns dados técnicos do dimensionamento destas estruturas de acordo com o EuroCódigo 3, para abordagem da instabilidade nos domínios elástico e elásto-plástico.

ACÇÃO DO VENTO SOBRE O MASTRO METÁLICO

Caracterização geral

A utilização de métodos racionais da bibliografia para caracterizar de um modo prático as forças generalizadas do vento sobre os mastros, permite classificar as respostas possíveis dos mastros como quasi-estática e como dinâmica. Em qualquer delas, as forças e os deslocamentos generalizados associados dependem primordialmente do modo e frequência fundamental, e do respectivo amortecimento.

O comportamento quasi-estático dos mastros ocorre segundo a direcção de propagação do vento, e é devido à sobreposição de uma pressão (do vento) estática ou permanente com uma pressão de rajada não-permanente. O comportamento puramente dinâmico dos mastros ocorre na direcção transversal à direcção de propagação do vento, e é devido ao fenómeno aerodinâmico de partilha de vórtices (vortex shedding) à velocidade de vento crítica.

Considere-se a pressão devida ao vento $P_i(t)$ em qualquer ponto ou nó i do mastro metálico, determinada pela formulação de Vickery e Kao,¹ e expressa por

$$P_i(t) = \frac{1}{2}\rho(c_d)_i V_i^2(t) + \rho(c_m)_i e_i \frac{dV_i(t)}{dt} \quad (1)$$

em que ρ é a massa específica volúmica do ar, $V_i(t)$ é a velocidade horizontal do vento no nó i no instante t , e_i é a espessura do mastro no nó i e $(c_d)_i$, $(c_m)_i$ são respectivamente os coeficiente de resistência (ou, drag) e coeficiente de massa adicional, no referido nó i .

Esta expressão é semelhante às acções hidrodinâmicas sobre cilindros e outros objectos ou estruturas marítimas submersas (Barros^{2,3}) em fluidos de massa específica volúmica ρ ; nesta perspectiva os primeiro e segundo termos são respectivamente as pressões associadas às forças de resistência e às forças de inércia.

Nas situações de vento habituais (excepto, por exemplo, no caso de tornados) o segundo termo é desprezável face ao primeiro, e a pressão instantânea $P_i(t)$ em cada nó i é expressa em termos do valor médio de pressão \bar{P}_i e de flutuações temporais de pressão $p_i(t)$ por

$$P_i(t) = \bar{P}_i + p_i(t) \cong \frac{1}{2}\rho(c_d)_i V_i^2(t) = \frac{1}{2}\rho(c_d)_i [\bar{V}_i + v_i(t)]^2 \approx \frac{1}{2}\rho(c_d)_i [\bar{V}_i^2 + 2\bar{V}_i v_i(t)] \quad (2)$$

Nesta expressão, \bar{V}_i e $v_i(t)$ são respectivamente a velocidade média do vento e a flutuação da velocidade do vento relativamente ao seu valor médio; o termo $[v_i(t)]^2$ foi desprezado face à grandeza dos restantes elementos presentes na equação.

Identificando os termos correspondentes, obtém-se

pressão média

$$(\text{permanente ou estática}) \rightarrow \bar{P}_i = \frac{1}{2} \rho (c_d)_i \bar{V}_i^2$$

(3)

flutuação de pressão

$$(\text{instantânea ou dinâmica}) \rightarrow p_i(t) = \frac{1}{2} \rho (c_d)_i 2 \bar{V}_i v_i(t) = 2 \frac{\bar{P}_i}{\bar{V}_i} v_i(t)$$

Mais uma vez estas expressões evidenciam que as pressões devidas ao vento, e as correspondentes respostas das estruturas dos mastros, são uma sobreposição de parcelas permanentes ou estáticas (associadas, por exemplo, a médias temporais horárias da velocidade do vento) com parcelas de flutuações instantâneas ou dinâmicas (associadas a flutuações da velocidade do vento).

A frequência fundamental aproximada ω_1 é calculada pela fórmula de Rayleigh, segundo a qual

$$\omega_1^2 = \frac{\int_0^H EI(x) [\Psi''(x)]^2 dx}{\int_0^H m(x) [\Psi(x)]^2 dx} \quad (4)$$

em que H é a altura do mastro ou torre, $EI(x)$ é a designada rigidez de flexão do mastro de massa por unidade de comprimento $m(x)$ e $\Psi(x)$ é o modo de vibração generalizado do mastro.

A bibliografia indica três valores aproximados para esta frequência fundamental. Para mastros prismáticos (Bolton⁴)

$$\omega_1 (\text{rad/s}) = 2\pi f_1 = 246 \pi \sqrt{\frac{I_{\text{equiv}}(M_p + 0,25M_m)}{H^3}} \quad (5)$$

em que M_p e M_m (em kg) são respectivamente a massa pontual de equipamentos e a massa do mastro e I_{equiv} (m^4) é o momento de inércia da secção do mastro equivalente. Pela norma inglesa BS-4076⁵

$$\omega_1 (\text{rad/s}) = 2\pi f_1 = \frac{1000\pi(3D_b - D_t)}{H^2} \quad (6)$$

em que D_b e D_t (em m) são respectivamente os diâmetros das secções inferior e superior do mastro de secção circular; quaisquer massas ou inércias de rotação pontuais são desprezadas. Alternativamente, a expressão sugerida por Zar e Chu⁶ para mastros ou chaminés encastrados, de secção circular com diâmetro e espessura constantes, é

$$\omega_1 (\text{rad/s}) = 2\pi f_1 = \frac{1760 D}{H^2} \sqrt{\frac{Eg}{2\bar{\omega}_s}} \quad (7)$$

em que E e $\bar{\omega}_s$ são respectivamente o módulo de elasticidade (GPa) da torre e o seu peso específico volúmico (KN/m^3).

Para mastros ou chaminés com fustes de inércia variável de diâmetros e espessuras superiores D_t e t_t e diâmetros e espessuras inferiores D_b e t_b , Zar e Chu⁶ sugerem o uso do diâmetro efectivo $D_e = D_t (t_b/t_t)^{0,27}$ e da altura efectiva H_e expressa por

$$H_e = H \left(\frac{2D_t}{D_t + D_b} \right)^{0,9} \quad (8)$$

para mastros com caímento (ou, variação de inércia) uniforme (Figura 1) e

$$H_e = H \left[\frac{H_s}{H} + \frac{H_b}{H} \left(\frac{2D_t}{D_t + D_b} \right)^2 \right]^{0,9} \quad (9)$$

para mastros de inércia não-uniforme, com ‘saia’ tronco-cónica de altura H_b , com trecho rectilíneo de altura H_s (Figura 1) e com anel ou virola de reforço na transição.

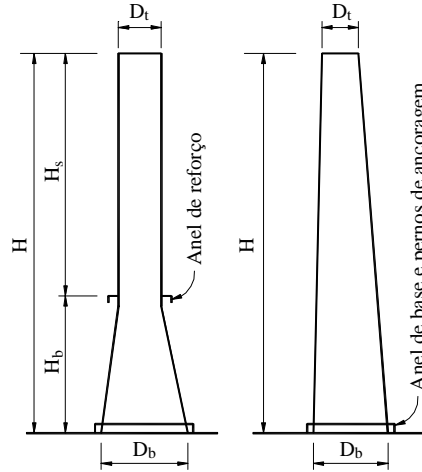


Figura 1. Mastros com dois tipos de inércia variável

O amortecimento do modo fundamental pode ser determinado a partir do decremento logarítmico δ da vibração livre amortecida. Valores típicos do factor de amortecimento crítico viscoso ξ ($\approx \delta/2\pi$) variam de 0,8 % a 2,4 %, isto é valores do intervalo $[0,008; 0,024]$, sendo os valores mais baixos (1 % a 1,5 %) adequados para respostas dos mastros na direcção do vento e os valores mais altos (2 % a 2,4 %) adequados para respostas dos mastros na direcção transversal à direcção de propagação do vento.

Resposta permanente na direcção do vento, devida às pressões médias

Para determinada duração (por exemplo, uma hora) de actuação da velocidade média do vento \bar{V}_0 à altura de referência z_0 , a restante distribuição em altura das velocidades médias \bar{V}_i é designada genericamente de \bar{V}_z e é habitualmente expressa por intermédio de uma lei de potência (a partir de \bar{V}_0 actuante à altura z_0). Com esta distribuição de velocidades médias, calcula-se a correspondente distribuição de pressões aerodinâmicas médias em altura \bar{P}_z para cada nó ou ponto i da estrutura do mastro; designe-se esse vector de pressões aerodinâmicas nodais, apenas por $\bar{\mathbf{P}}$.

Por intermédio de uma matriz apropriada de transformação das pressões $[\mathbf{T}_p(n \times n)]$, sendo n o nº de graus de liberdade do mastro] ou matriz de coeficientes ou áreas de influência, representando a força nodal no nó ou grau de liberdade i do mastro devida à pressão unitária do vento no nó j , é possível determinar o vector das forças aerodinâmicas médias $\bar{\mathbf{R}}_v$. Estas forças nodais permanentes, aplicadas estáticamente, relacionam-se com os deslocamentos nodais médios $\bar{\mathbf{r}}$ pelo equilíbrio matricial

$$\mathbf{K}(\bar{\mathbf{r}})\bar{\mathbf{r}} = \bar{\mathbf{R}}_v = \mathbf{T}_p\bar{\mathbf{P}} \quad (10)$$

sendo $\mathbf{K}(n \times n)$ a matriz de rigidez do mastro, geométricamente não linear nos deslocamentos médios.

Resposta não-permanente na direcção do vento, devida às flutuações de pressão

Em termos exactos, a resposta dinâmica do mastro às flutuações de pressão é determinada resolvendo a equação matricial de equilíbrio dinâmico

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{r}}_f(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{r}}_f(t) + \mathbf{K}\mathbf{r}_f(t) = \mathbf{R}_f(t) = \mathbf{T}_p\{p_i(t)\} \quad (11)$$

em que \mathbf{M} e \mathbf{C} são respectivamente as matrizes de massa e de amortecimento do mastro e $\mathbf{r}_f(t)$ e $\mathbf{R}_f(t)$ são os vectores de deslocamentos e de forças do mastro correspondente às flutuações de pressão $p_i(t)$. A matriz de rigidez do mastro para a análise dinâmica \mathbf{K} é habitualmente considerada como linear, e igual à matriz de rigidez tangente no final do estado de referência correspondente à aplicação das pressões médias durante determinada duração (por exemplo, uma hora).

Como as flutuações da velocidade do vento constituem um processo aleatório estacionário gaussiano, é mais pertinente determinar a resposta espectral estocástica do mastro a determinados espectros de rajada de vento, definidos por Davenport⁷ para cada modo de vibração j por

$$(S_v)_j = 4k_{sd}\bar{V}_0^2 \frac{2\pi}{\omega_j} \frac{\varepsilon}{(2 + \varepsilon^2)^{5/6}} \quad (12)$$

em que $k_{sd} \in ([0,005; 0,085])$ é um coeficiente que traduz a resistência ou atrito superficial do terreno onde o mastro se localiza (dependente da topografia e da rugosidade superficial do terreno) e $\varepsilon = 1200\omega_j/(2\pi\bar{V}_0)$.

Alternativamente a nível de projecto, e por intermédio do factor de amplificação designado coeficiente de rajada c_r , pode-se sobrepor a resposta permanente correspondente à pressão média com uma resposta quasi-estática correspondente às (ou melhor, envolvente das) flutuações de pressão dinâmicas. Este factor de amplificação é um multiplicador das pressões médias devidas ao vento, considerado frequentemente igual a 1,7 para estruturas de períodos fundamentais de 2 a 6 segundos (e aproximadamente igual a 1, isto é não-activo, quando $T_1 < 2$ s). Segundo as recomendações de projecto da APLE⁸, $c_r \approx \beta\delta$ em que β é um factor de resposta (dependente do amortecimento no modo fundamental) e δ é um factor de redução (dependente da altura H), conforme representado na Figura 2.

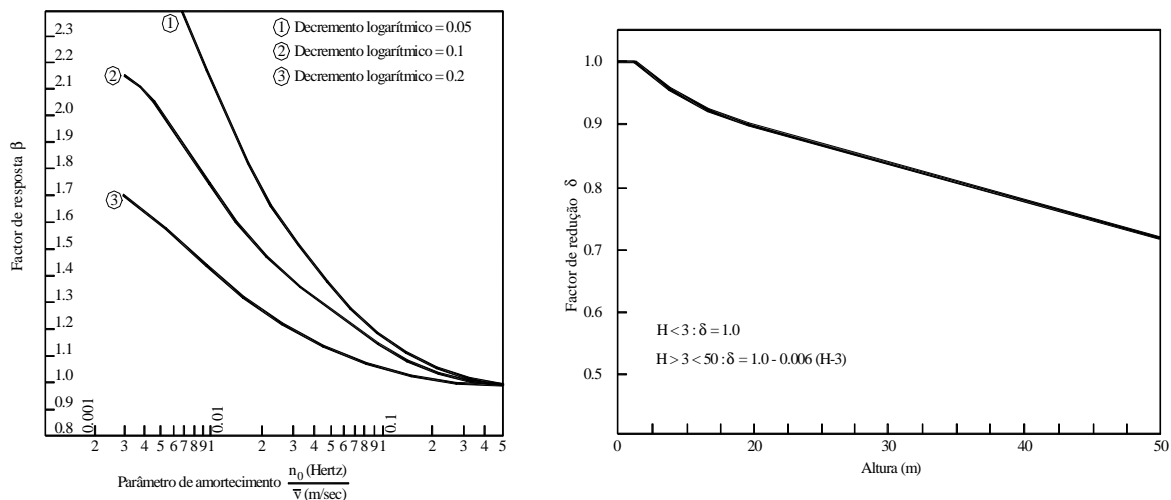


Figura 2. Factor de resposta β e factor de redução δ

Resposta dinâmica na direcção transversal, devido à partilha de vórtices

O movimento de ar em torno duma estrutura, chaminé, mastro, ou qualquer seu elemento constituinte, é caracterizado por determinado esquema de formação e separação da camada limite eólica no seu contorno, dependente do número de Reynolds Re do escoamento. A jusante destas estruturas (ou dos seus elementos) podem-se formar os designados turbilhões de von Kármán, desprendendo-se alternadamente do seu contorno e propagando-se para jusante no escoamento. Este fenómeno, designado de partilha de vórtices ou turbilhões de von Kármán (*vortex shedding*), ocorre para cada estrutura (ou elemento) a determinada velocidade de vento crítica (isto é, para determinado Re_{cr}).

Através dos tempos, tem ocorrido colapso de estruturas, chaminés, mastros (espiados ou não), torres de transmissão e até pontes suspensas (caso da 1ª ponte suspensa de ‘Tacoma Narrows’) devido a oscilações associadas à partilha de vórtices.

Se a frequência de partilha de vórtices em torno do mastro for da ordem de grandeza da frequência fundamental do mastro, poderão ocorrer oscilações em ressonância altamente prejudiciais para a estabilidade de estruturas sensíveis ao vento.

A frequência f_{vortex} desta partilha de vórtices aumenta com a velocidade do escoamento de ar (vento) relativamente à estrutura ou elemento. É expressa em termos duma função adimensional $\phi(Re)$ do número de Reynolds, determinada experimentalmente para cada estrutura ou geometria de secção, por

$$f_{vortex} = \frac{1}{\phi(Re)} \frac{V}{l} \quad (13)$$

em que l é um comprimento ou dimensão característica da estrutura ou elemento. Para mastros de secção circular $\phi(Re)$ assume o valor aproximado (médio) de 5, sendo $l = D$ diâmetro do mastro.

No caso de mastros de inércia variável, as oscilações são mais críticas quando a partilha de vórtices ocorre no terço superior do mastro. Se como critério de dimensionamento do mastro forem permitidas oscilações em ressonância para pequenas velocidades de vento, a velocidade crítica do vento para a qual há partilha de vórtices no terço superior do mastro $V_{cr} = 5Df_1$ é calculada com o maior diâmetro do terço superior (isto é, a 2/3 da altura H).

Alternativamente os mastros podem ser dimensionados para as forças aerodinâmicas que se desenvolvem durante as oscilações de ressonância. De acordo com o regulamento canadiano de dimensionamento ao vento mencionado por Zar e Chu⁶, estas forças podem ser aproximadas por uma força estática equivalente, por unidade de comprimento de altura do mastro, expressas por

$$F_L = \frac{1}{2\xi} c_L D q_{cr} \quad (14)$$

sendo c_L o coeficiente de sustentação de von Kármán ($c_L = 0,2$, para cilindros circulares) e a sobrecarga dinâmica crítica devida ao vento (aplicada como pseudo-estática) é expressa (em Pa) por $q_{cr} = 0,613 (V_{cr})^2$.

A velocidade crítica do vento para vibrações transversais ressonantes, induzidas pela partilha de vórtices, é

$$V_{cr} = \frac{f_1 D}{St} \quad (15)$$

em que St é o n.º de Strouhal, variando com o n.º de Reynolds no regime de escoamentos possíveis e assumindo habitualmente valores de 0,16 a 0,23 (Figura 3).

No cálculo dos momentos flectores na base de mastros uniformes, devidos à partilha de vórtices, a força estática equivalente F_L aplica-se a toda a altura do mastro. No caso de mastros de inércia variável, a zona de actuação da força estática equivalente (correspondente à sobrecarga pseudo-estática) é aquela na qual as variações de diâmetro estão limitadas a

$\pm 5\%$. Anteriores práticas universais de dimensionamento e projecto de mastros metálicos, bem como simulações numéricas com factor de amortecimento crítico $\xi = 1,6\%$, permitem concluir que limitando a velocidade do vento crítico (gerador da partilha de vórtices) a 20% da velocidade média do vento de projecto, as tensões nas bases dos mastros não serão controladas pela resposta do mastro na direcção transversal à direcção de propagação do vento (ie, não serão controladas pela referida partilha de vórtices). Note-se ainda que a influência dos modos de vibração de ordem superior à fundamental ($j \geq 2$) é habitualmente desprezada, porque os deslocamentos fora de fase de diferentes secções reduzem as energias excitadoras da solicitação-vento.

Figura 3. Variação do n° de Strouhal e do coeficiente de resistência de cilindros circulares com o n° de Reynolds

Ovalização das secções, devido à partilha de vórtices

Para além de oscilações transversais por partilha de vórtices, os mastros de secção circular podem também ter vibrações de flexão no plano das secções causando ovalização das referidas secções.

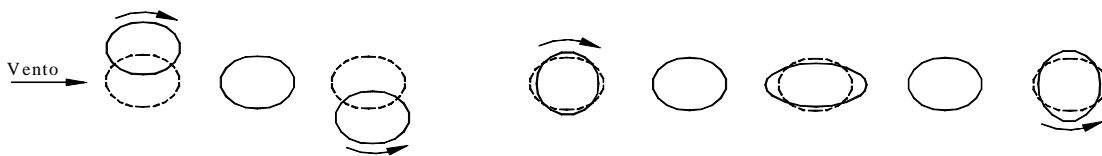


Figura 4. Distorção das secções por ovalização

Configurações habituais de mastros circulares têm raios diâmetro/espessura D/t de 100 a 200. Em mastros e chaminés com D/t mais elevado dever-se-á evitar a distorção das secções por ovalização, quer para pressões permanentes do vento quer para pressões não-permanentes (associadas às flutuações de pressão ou à partilha de vórtices).

A frequência da oscilação fundamental de ovalização de uma casca circular é (Zar e Chu⁶)

$$f_{ov} = 175,4 \frac{t\sqrt{E}}{D^2} \quad (16)$$

em que a espessura t e o diâmetro D são expressos em unidades métricas, e o módulo de elasticidade E do mastro metálico circular é expresso em GPa.

A experiência e observações indicam que a condição de ressonância ocorre, aproximadamente, quando a frequência fundamental de ovalização das secções é o dobro da frequência de partilha de vórtices. Isto é

$$f_{ov} = 2f_{cr} = 2f_1 \implies V_{ov} = \frac{f_{ov}D}{2St} \approx 2,5f_{ov}D = 438,5 \frac{t\sqrt{E}}{D} \quad (17)$$

em que V_{ov} é a velocidade crítica do vento induzindo ovalização fundamental e o n° de Strouhal foi assumido igual ao seu valor médio de 0,2.

A variação superficial das pressões devidas ao vento em mastros, chaminés ou torres cilíndricas circulares (Figura 5) produz momentos flectores circunferenciais, a qualquer nível ou altura do mastro. Os seus valores máximos por unidade de altura do mastro (em Nm/m), nas zonas de sobrepressão e de sucção, são expressos em termos da pressão q do vento à altura considerada (Zar e Chu⁶) por

$$M_{\max} = 0,0785qD^2 \quad (\text{na zona de sobrepressão, com tracções no interior}) \quad (18)$$

$$M_{\max} = 0,0680qD^2 \quad (\text{na zona de sucção, com tracções no interior})$$

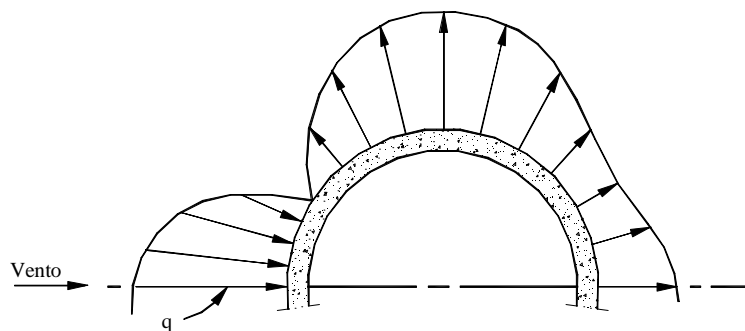


Figura 5. Pressões devidas ao vento em torno de mastros de secção circular

O valor limite recomendado para D/t é da ordem de grandeza de 250. Para valores superiores é necessário utilizar anéis circulares enrijecedores (exteriores ou interiores), evitando a ovalização e resistindo aos carregamentos locais.

ESTABILIDADE DE MASTROS DE INÉRCIA VARIÁVEL

Considerações gerais

O dimensionamento de mastros, chaminés ou colunas metálicas de inércia variável (com secção circular ou rectangular) relativamente aos critérios de resistência, rigidez e estabilidade, deverá considerar os seguintes factores: variação da inércia de secções não-prismáticas (circulares ou rectangulares) diminuindo diâmetro, dimensões ou espessura com a altura; distribuição do carregamento axial do peso próprio do mastro, e a sua influência na determinação da carga crítica de instabilidade; influência dos deslocamentos no momento flector

na base, quantificando o efeito $P-\Delta$; e, instabilidades locais, por exemplo, por encurvadura da casca em flexão (ovalização da secção) associada a grandes valores de D/t (Schilling⁹, Barros¹⁰).

A esta diversidade de considerações também estão associadas várias metodologias de abordagem de dimensionamento, por diversos regulamentos, normas e códigos de projecto. Assim as normas DIN¹¹ alemãs de construção em aço recomendavam o uso de áreas e inércias equivalentes, com as quais se sobreestimava a capacidade resistente da estrutura real. As normas americanas dos AISC¹² e SSRC¹³ recomendam o uso de áreas e inércias mínimas nas colunas equivalentes, de parâmetros de esbelteza efectiva e de factores de comprimento efectivo, com os quais se subestima a capacidade resistente (demasiado conservativo, principalmente no intervalo de esbeltezes intermédias).

O Eurocódigo 3 [EC-3] menciona que o comprimento efectivo de encurvadura para uma análise bifurcacional, da carga crítica elástica de instabilidade, deverá ser definido por análise apropriada (Morel¹⁴); alternativamente, dever-se-ia calcular a coluna ou mastro com imperfeição inicial, estudando a sua capacidade resistente para determinada flecha limite de serviço. Mas, face ao exposto, o EC-3 não é analiticamente conclusivo no tocante a mastros de inércia variável.

Então, a análise elástica da instabilidade de mastros metálicos com adelgaçamento depende do peso-próprio do mastro e portanto da sua distribuição em altura. Para a sua caracterização poder-se-á utilizar um modelo de cálculo automático da carga limite e modo de instabilidade (Barros¹⁵), por discretização do mastro em elementos rectilíneos finitos. Alternativamente a nível de projecto poder-se-ão seguir directivas regulamentares de inclusão de cargas axiais equivalentes, de acordo com as normas australianas AS-1250 (Lay¹⁶), com recomendações da ASCE¹⁷ e Veitch,¹⁸ sintetizadas na Figura 6 e equações (19) e (20).

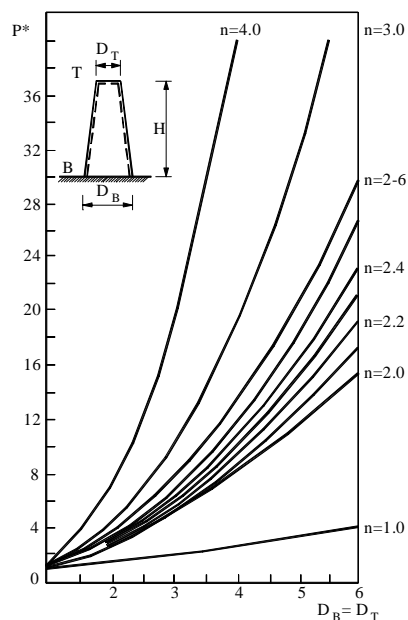


Figura 6. Determinação aproximada da carga crítica de mastros de inércia variável

Nesta perspectiva, determinar a carga crítica de Euler P_{crit} de encurvadura do mastro com factor de adelgaçamento n , através das expressões

$$n = \frac{\log(I_B/I_T)}{\log(D_B/D_T)} \quad P_{\text{crit}} = P^* \frac{\pi^2 EI_T}{4H^2} \quad (19)$$

Considerar uma carga concentrada equivalente aplicada no topo do mastro P'' definida, a partir da carga real aplicada no topo do mastro P_{real} e do peso próprio médio do mastro q_{pp} por unidade de comprimento, por

$$P'' = P_{\text{real}} + 0,3 q_{pp} H \quad (20)$$

Com esta carga equivalente determinar o factor de amplificação para quantificação do efeito $P - \Delta$, e usar as equações de interacção de mastros metálicos reformulando as normas australianas AS-1250 (Lay¹⁶) e expressas por

$$\frac{P''}{0,6P_{\text{crit}}} + \left[\frac{1}{1 - \frac{P''}{0,6P_{\text{crit}}}} \right] \frac{(f_{bc})_S}{F_{bc}} + \left[\frac{1}{1 - \frac{P''}{0,6P_{\text{crit}}}} \right] \frac{(f_{bc})_D}{F_{bc}} \leq 1 \quad \text{para} \quad \frac{P''}{0,6P_{\text{crit}}} \geq 0,15$$

$$\frac{P''}{0,6P_{\text{crit}}} + \frac{(f_{bc})_S}{F_{bc}} + \left[\frac{1}{1 - \frac{P''}{0,6P_{\text{crit}}}} \right] \frac{(f_{bc})_D}{F_{bc}} \leq 1 \quad \text{para} \quad \frac{P''}{0,6P_{\text{crit}}} < 0,15 \quad (21)$$

em que P'' é a carga total equivalente (20), P_{crit} é a carga de encurvadura do mastro de inércia variável (19), $(f_{bc})_S$ são as tensões de flexão do mastro determinadas por uma análise de 1ª ordem e devidas às cargas gravíticas e do vento, $(f_{bc})_D$ são as tensões de flexão do mastro determinadas por uma análise de 1ª ordem do efeito $P - \Delta$ e F_{bc} é a máxima tensão de compressão admissível (incluindo factores de redução associados aos valores de D/t).

O método de Mendera

Para aplicação das directivas do EC-3 a mastros e colunas de inércia variável aplicar-se-á um modelo de análise, válido em regimes elástico e elasto-plástico, desenvolvido por Mendera¹⁹ para 3 modelos então designados de α , β e γ . Admite-se: um adelgaçamento linear dos mastros ou colunas de secção rectangular ou circular, a partir da secção intermédia do comprimento de encurvadura; a não-ocorrência de encurvadura lateral por flexo-torção; e, contraventamento da secção extrema de menor inércia, evitando instabilidades locais.

Após estudo ponderado e comparação com resultados obtidos pelo método dos elementos finitos (com erro relativo de 2 % na determinação da carga crítica) foi escolhido o modelo de cálculo α que determina a *capacidade resistente média de mastros reais de inércia variável com adelgaçamento linear*. Neste método a carga crítica de instabilidade é calculada a partir dum momento de inércia equivalente I_e e do factor de comprimento efectivo de encurvadura μ (AISC,¹² SSRC,¹³ Barros²⁰) através de

$$N_{\text{cr}} = \frac{\pi^2 EI_e}{(\mu H)^2} \quad \text{sendo} \quad I_e = \alpha I_{\text{max}} = [p\sqrt{I_{\text{min}}/I_{\text{max}}} + (1-p)\sqrt[4]{I_{\text{min}}/I_{\text{max}}} + (1-p)]I_{\text{max}} \quad (22)$$

em que $p = 0,10$ para mastros de inércia variável $I(x)$ mas secção constante, $p = 0,15$ para mastros de secção em I de área e inércia variáveis e $p = 0,25$ para mastros tubulares de área e inércia variáveis; a área da secção equivalente é determinada aproximadamente por $A_e = (A_{\text{min}} + A_{\text{max}})/2,0$.

A capacidade resistente à encurvadura N_{Rb} do mastro equivalente é determinada aproximadamente por

$$N_{Rb} = \chi A_e f_y / \gamma_{M1} \leq A_{\text{min}} f_y / \gamma_{M1} \quad (23)$$

em que χ é um factor de encurvadura dependente do parâmetro de esbeltez $\bar{\lambda}_e = \sqrt{(N_{pl}/N_{cr})}$ e $N_{pl} = A_e f_y$ é o valor característico da capacidade resistente plástica do mastro equivalente.

A carga limite de projecto do mastro à encurvadura N_d , incluindo o efeito $P - \Delta$ de 2ª ordem, o peso próprio e as características de inércia variável, deverá no entanto ser calculada com uma fórmula de interacção entre o esforço axial N_d e os momentos flectores secundários (M_d)^s. Estes são induzidos pelo esforço axial N_d num padrão de imperfeições iniciais e_{od} amplificadas pelo esforço axial do mastro. A fórmula de interacção utilizada por Mendera¹⁹ para calcular por tentativas a carga limite N_d , para determinada secção do mastro para a qual $x \in [0, H]$ é

$$\frac{N_d}{N_{Rc}^{(x)}} + \frac{M_d^s(x)}{M_R(x)} \leq 1 \quad (24)$$

em que $N_{Rc}(x) = A(x)f_y/\gamma_{M1}$, $M_R(x) = W(x)f_y/\gamma_{M1}$, sendo $W(x)$ o módulo de flexão da secção $A(x)$, e o momento flector secundário em secções à distância x da base, é

$$M_d^s(x) = N_d e_d \delta(x) = N_d \frac{e_{od}}{1 - \frac{N_d}{N_{cr}}} \delta(x) \quad (25)$$

Nesta expressão $\delta(x)$ é o 1º modo de instabilidade e a amplitude e_{od} das imperfeições iniciais é determinada de acordo com o EC-3 pela expressão

$$e_{od} = \alpha(\bar{\lambda}_e - 0,2)k_\gamma \frac{W_{\max}}{A_{\max}} = (\bar{\lambda}_e - 0,2)[1 - k_\delta + 2k_\delta \bar{\lambda}_e] \frac{W_{\max}}{A_{\max}} \quad (26)$$

sendo α um parâmetro de imperfeição de acordo com a curva de encurvadura do EC-3 e k_δ um coeficiente dependente de α e do factor de segurança parcial γ_{M1} .

Exemplo de aplicação

Como exemplo de determinação da capacidade resistente à encurvadura dum mastro metálico em aço Fe 360 (Euronorma 25) de $E = 210$ GPa e $f_y = 235$ MPa, considere-se o mastro de 7,5 metros de altura e de secção em I com adelgaçamento linear de áreas, representado na Figura 7 (Mendera¹⁹).

Da figura obtém-se $I_{\min}/I_{\max} = 10774/105707 = 0,102$ e $A_{\min}/A_{\max} = 112/176 = 0,636$, pelo que

$$I_e = [0,15\sqrt{0,102} + 0,85\sqrt[4]{0,102}]I_{\max} = 0,52827 \times 105707 = 55842 \text{ cm}^4$$

Um valor aproximado da carga crítica pode ser calculado através de

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 210 \times 10^9 55842 \times 10^{-8}}{(2 \times 7,5)^2} \times 10^{-3} = 5144 \text{ KN}$$

Todavia um valor mais real da carga crítica é mais rigorosamente determinado por uma série de simulações da degradação da rigidez da torre ou mastro ao deslocamento lateral, em função do factor de carga (Harrison²¹). Este método é especialmente adequado para colunas de secção não uniforme e constitui uma adaptação dos princípios justificativos do gráfico de Southwell. O quociente F_x/d_x , entre uma força horizontal F_x aplicada no topo do mastro e o deslocamento horizontal d_x na extremidade, pode ser interpretado como uma medida da rigidez transversal do mastro, para cada valor do carregamento axial N .

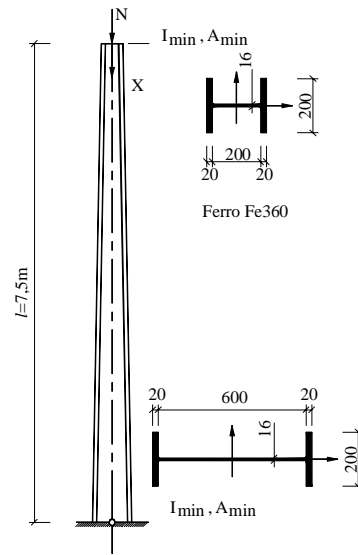


Figura 7. Mastro em aço, de inércia variável e secção linearmente variável

Foi desenvolvido um programa extremamente eficiente em Fortran, designado Mast-Buck.for, para determinar a capacidade resistente de mastros de inércia variável (Barros¹⁵), comprimidos axialmente e solicitados lateralmente por determinadas acções devidas ao vento. Em complemento o programa calcula o encurtamento axial associado a deformadas em equilíbrio, e determina o 1º modo normalizado de instabilidade $\delta(x)$. A Tabela I sintetiza a simulação realizada, de cuja regressão linear é possível definir a variação da rigidez lateral com o factor de carga λ , através de

$$\frac{F_x}{d_x} \approx a + b\lambda = 95,46 - 18,38 \lambda$$

F_x (KN)	P (KN)	d_x (mm)	F_x/d_x (KN/mm)	λ
100	1000	1,301	76,86	1,0
100	2000	1,701	58,79	2,0
100	3000	2,471	40,47	3,0
100	4000	4,546	22,00	4,0
100	4500	7,716	12,96	4,5
100	4700	10,38	9,63	4,7
50	4800	7,030	7,11	4,8
50	4900	9,077	5,51	4,9
20	4950	4,994	4,00	4,95
20	5000	6,291	3,18	5,0

Tabela I. Simulações para determinação do carregamento crítico

Por definição, para o factor crítico de carga ou factor de carregamento crítico λ_{cr} a coluna terá rigidez lateral nula, isto é, será compatível com deslocamento lateral infinito ou ilimitado. Por extrapolação da regressão linear, $\lambda_{cr} = 95,46/18,38 = 5,193$, e portanto $N_{cr} \approx 5193$ KN. Também, recorrendo ao referido programa, conseguiu-se ainda caracterizar a configuração de equilíbrio para $N = 5195$ KN, ao fim de 70 iterações!

Face aos dados deste exemplo de aplicação

$$A_e \approx (112 + 176)/2 = 144 \text{ cm}^2$$

$$N_{pl} = A_e f_y = 3384 \text{ KN}$$

Com o parâmetro de esbeltez

$$\bar{\lambda}_e = \sqrt{\frac{N_{pl}}{N_{cr}}} = \sqrt{\frac{3384}{5193}} = 0,807$$

e recorrendo à curva de encurvadura [b] do EC-3, obtém-se $\chi = 0,7058$. Então:

$$N_{Rb} = 0,7058 * 3384/1,1 = 2172 \text{ KN} \leq 112 * 10^{-4} * 235 * 10^3/1,1 = 2393 \text{ KN}$$

Também para a curva [b], $\alpha = 0,34$, $k_\delta = 0,15$ e $k_\gamma = 1 - 0,15 + 2 * 0,15 * 0,807 = 1,09$. A amplitude das imperfeições iniciais, de acordo com o EC-3, será

$$e_{od} = 0,34 * (0,81 - 0,2) * 1,09 * \frac{105707/32}{176} = 4,24 \text{ cm}$$

A introdução destes dados numa subrotina de determinação e avaliação da capacidade resistente do mastro permite obter a Tabela II, extraída directamente do programa Mast-Buck.for, por pesquisa e aproximações sucessivas sobre a desigualdade de interacção (24). A carga de projecto obtida, e indicadora da sua capacidade resistente, é $N_d \approx 2078$ KN.

Carga de projecto: 2078.000						
Verificação das secções do mastro, pela desigualdade de interacção						
ABCISSA(TOP)	$N_R^{(x)}$	$M_R^{(x)}$	MODE	$N_d/N_R^{(x)}$	$+ M^s/M_R^{(x)}$	$= < 1,0$
,0	2409,818	196,753	,000	,862	+	,000 = ,862
,5	2478,182	213,087	,136	,839	+	,094 = ,933
1,0	2580,727	248,953	,266	,805	+	,158 = ,963
1,5	2649,091	266,200	,387	,784	+	,215 = ,999
2,0	2751,636	303,871	,497	,755	+	,242 = ,997
2,5	2854,182	342,857	,595	,728	+	,257 = ,985
3,0	2922,545	361,524	,681	,711	+	,279 = ,990
3,5	3025,091	402,288	,756	,687	+	,278 = ,965
4,0	3127,636	444,316	,819	,664	+	,273 = ,937
4,5	3196,000	464,429	,871	,650	+	,277 = ,928
5,0	3298,545	508,218	,913	,630	+	,266 = ,896
5,5	3401,091	553,251	,946	,611	+	253 = ,864
6,0	3469,454	574,830	,971	,599	+	,250 = ,849
6,5	3572,000	621,616	,987	,582	+	,235 = ,817
7,0	3674,545	669,625	,997	,566	+	,220 = ,786
7,5	3742,909	692,716	1,000	,555	+	,214 = ,769

Tabela II. Capacidade resistente de secções do mastro

CONCLUSÕES

Foram abordadas consistentemente questões técnicas pertinentes do dimensionamento de mastros metálicos, nomeadamente as relativas às acções eólicas permanentes e não-permanentes sobre os mastros, bem como a estabilidade de mastros de inércia variável. Um exemplo abordando a verificação da estabilidade de mastros segundo o EC-3 foi resolvido pormenorizadamente, recorrendo a suporte computacional desenvolvido.

REFERÊNCIAS

- 1 B.J. Vickery e K.H. Kao, “Drag of along-wind response of slender structures”, *J. Structural Div.*, ASCE, Vol. **98**, ST1, Proc. Paper 8635, pp. 21–36, New York, (1972).
- 2 R.C. Barros, “Motion of structures in waves”, Conjunto de textos de apoio à disciplina Dinâmica das Estruturas Marítimas (Mestrado em Hidraulica), FEUP, Porto, (1986).
- 3 R.C. Barros, “Acções hidrodinâmicas sobre cilindros ou tubos circulares sob a acção da corrente e da ondulação”, *1º Congresso Luso-Moçambicano de Engenharia*, Maputo, Moçambique, pp. 14–16, Setembro 1999, (1999).
- 4 A. Bolton, “Natural frequencies of structures for designers”, *J. Structural Engineer*, Vol. **56A**, Nº 9, pp. 245–255, London, (1978).
- 5 British Standards Institution, “Specification for steel chimneys”, BS 4076, London, (1978).
- 6 M. Zar e S. Chu, “Chimneys”, Section 26, *Structural Engineering Handbook*, E.H. Gaylord e C.N. Gaylord (Eds.), McGraw-Hill Book Company, New York, (1979).
- 7 A.G. Davenport, “Gust loading factors”, *J. Structural Div.*, ASCE, Vol. **93**, ST3, pp. 11–34, New York, (1967).
- 8 APLE (Association of Public Lighting Engineers), “High mast lighting”, Technical Report Nº 7, London, (1976).
- 9 C.G. Schilling, “Buckling strength of circular tubes”, *J. Structural Div.*, ASCE, Vol. **91**, ST5, pp. 325–348, New York, (1965).
- 10 R.C. Barros, “Instability during bending of thin circular cylindrical beams”, Palestra e trabalho de síntese apresentados a 30 de Maio de 1979 na Universidade da Califórnia (Berkeley) e inserida nas provas prestadas como parte da aprovação final na disciplina Advanced Mechanics of Materials III, Berkeley, USA, (1979).
- 11 DIN 4114, Stahlbau, Stabilitätsfalle, Deutsche Normen, (1952).
- 12 AISC (American Institute of Steel Construction), “Load and resistance factor design”, Specification, New York, (1986).
- 13 SSRC (Structural Stability Research Council), “Guide to stability design criteria for metal structures”, T. Galambos (ed.), 4ª ed., John Wiley & Sons, New York, (1988).
- 14 J. Morel, “Calcul des structures métalliques selon l’Eurocode 3”, Éditions Eyrolles, Paris, (1994).
- 15 R.C. Barros, “Programa MastBuck.for”, Relatório técnico interno, Engedec, Porto, (1995).

- 16 M.G. Lay, “Source book for Australian steel structures codes – AS 1250”, Sydney, Australia, (1975).
- 17 ASCE (American Society of Civil Engineers), “Design of steel transmission pole structures”, Task Committee on Steel Transmission Poles of the Committee on Analysis and Design of Structures of the Structural Division, New York, (1978).
- 18 R.J. Veitch, “The design of tapered steel lighting masts”, AISC Journal, *Steel Construction*, Vol. **16**, N° 3, pp. 2–16, New York, (1982).
- 19 Z. Mendera, “Design rules of tapered steel columns”, Tempus Jep Workshop, Cracow, Poland, (1994).
- 20 R.C. Barros, “Dimensionamento de colunas em aço”, Relatório técnico interno de apoio técnico, científico e didático à disciplina ‘Instabilidade de estruturas’, da 13ª edição do *Curso de Mestrado em Estruturas de Eng. Civil*, Ano lectivo 1997/98, FEUP, Porto, (1998).
- 21 H.B. Harrison, “Non-linear elastic analysis of unguyed towers and stacks”, *Civil Engng. Trans.*, I.E. Aust., CE 17, N° 1, Australia, (1975).