

# Estudio numérico del comportamiento de los hormigones reforzados con fibras cortas

**Numerical study of the behaviour of concrete reinforced with short fibers**

◆  
Sergio Oller

◆  
Alex H. Barbat

◆  
Juan Miquel

Departamento de Resistencia de Materiales, ETSECCPB, Universidad Politécnica de Cataluña

## RESUMEN

En este trabajo se presenta un acercamiento al estudio del comportamiento de los hormigones reforzados con fibras cortas. Se establece una formulación basada en una modificación de la teoría de mezclas clásica para determinar sus parámetros mecánicos a partir de las características de los materiales componentes (hormigón–fibras cortas). También se muestran resultados numéricos obtenidos mediante el método de los elementos finitos y se comentan las posibilidades de un método analítico simplificado para el estudio de su comportamiento.

El desarrollo del trabajo trata sobre el comportamiento del hormigón reforzado con fibras y las características que justifican su utilización. Se estudia el equilibrio interno y mecanismo de transmisión de tensiones entre el hormigón y las fibras cortas y la formulación general del problema e inserción dentro de la técnica de los elementos finitos. Se hace un breve comentario sobre el tratamiento simplificado del comportamiento de los hormigones reforzados con fibras cortas y se presenta un ejemplo de comprobación.

## SUMMARY

*An approach for the short fibers reinforced concrete behavior is presented in this work. A formulation based on a modification of the classical mixing theory to obtain the composite mechanical properties starting from the single compounding characteristics (concrete–short fibers) is developed. Numerical results obtained by means of the finite ele-*

*ment method are also shown and the possibilities of using a simplified analytical method in the study of the short fibers reinforced concrete are commented.*

*The development of the work studies the behavior of the concrete reinforced with short fibers and the characteristics that justify its use. It studies the internal balance and the stress transmission mechanism between the concrete and the short fibers as well as the general formulation of the problem and its insertion within the frame of the finite element technique. A brief comment is made on the simplified treatment of the behavior of the concrete reinforced with short fibers and a validation example is presented.*

## 1. CLASIFICACIÓN DE LOS MATERIALES COMPUESTOS

Es muy difícil definir un material compuesto dada sus cualidades, composición, propiedades, forma de fabricación, etc. Por esta razón hay distintas maneras de clasificar los materiales compuestos y con seguridad cada una de ellas acertaría en la forma de hacerlo. En este caso, y para ser coherente con el posterior desarrollo del trabajo, se presenta la siguiente clasificación:

### 1.1. Clasificación según su topología

Entre las posibles clasificaciones, está aquella que se basa en su configuración topológica, es decir en como son y como

se distribuyen los componentes: materiales de matriz compuesta (hormigón), materiales de matriz compuesta con fibras cortas y/o largas (hormigón reforzado con fibras), materiales laminados y también una combinación de cada uno de estos tipos enunciados.

## 1.2. Clasificación según sus componentes

Los materiales compuestos pueden también clasificarse según el tipo y forma en que están constituidos. Entre los grupos más importantes están los materiales:

- **Fibrosos:** Compuestos por fibras continuas cortas o largas, en una dos o tres direcciones, o bien distribuidas en forma aleatoria aglutinados por una matriz. A su vez esta matriz puede estar formada por dos o más materiales (caso de hormigones reforzados con fibras).
- **Particulados:** Formados por partículas que puntualmente trabajan aglutinadas por una matriz.
- **Laminares:** Compuestos por capas o constituyentes laminares con características de resistencia en magnitud y dirección diferentes.

Los más utilizados son los fibrosos, en los cuales las fibras asumen el papel de resistir las acciones mecánicas y la matriz sirve como aglutinante y protector del medio ambiente. La resistencia mecánica de las fibras es del orden de 25 a 50 veces mayor que la matriz. En el caso del hormigón a tracción esta relación es del orden de 100 veces. La matriz (hormigón) tiene como objetivo garantizar la distribución y transmisión de las cargas a las fibras.

## 1.3. Hipótesis para realizar un estudio numérico

En este trabajo se presentará un estudio estructural desde el punto de vista macroscópico, considerando las siguientes hipótesis:

- Las fibras se distribuyen uniformemente en la matriz,
- Existe perfecta adherencia entre la matriz y el refuerzo, pudiéndose considerar el deslizamiento relativo entre ambos mediante la incorporación de la teoría de la plasticidad en la interface de la matriz-fibra,
- La matriz no contiene vacíos ni defectos,
- No existen tensiones residuales en el material compuesto provenientes de posibles defectos en la fabricación. Sin embargo, es posible incluirlos como condiciones iniciales.

Una extensa descripción sobre los tipos de materiales compuestos y de componentes, formas de fabricación y aplicaciones industriales, puede consultarse en Miravete (2000) (1) y Car (2000) (2).

## 2. INTRODUCCIÓN LOS COMPUESTOS REFORZADOS CON FIBRAS

La utilización de nuevos materiales compuestos en el diseño de las estructuras se ha visto incrementada notablemente

en los últimos años. Esta tendencia se debe a la posibilidad de diseñar el material con ciertas propiedades especiales que mejoren las cualidades de comportamiento de las estructuras.

Las mayores dificultades que se encuentran en la utilización de estos nuevos materiales radican en la falta de tecnología apropiada para garantizar su correcto funcionamiento. Esta situación ocurre en los materiales con fibras largas de matrices de hormigón o epoxy. Hay también una cierta incertidumbre en cuanto a la durabilidad de los refuerzos cortos y largos y sobre todo, actualmente hay un problema serio en conseguir una evaluación estructural fiable, pues son materiales cuya no linealidad se manifiesta desde que comienzan los micromovimientos entre fibra y matriz, situación que ocurre a cargas bajas.

Particularmente, se define el hormigón con fibras como aquel material compuesto por cemento, árido y agua, más la adición de fibras cortas discontinuas y/o fibras largas continuas.

La distribución de estas fibras en el hormigón es aleatoria, pero se busca una homogeneidad que confiera una cierta isotropía al conjunto. Para conseguir esto se debe realizar una mezcla evitando tanto la segregación de los áridos como la concentración, preservando una dada orientación dominante en las fibras.

Las fibras para hormigones pueden ser de acero, de vidrio, de asbestos, cerámicas o de algún material plástico. Las fibras confieren al hormigón propiedades muy diversas, pero las cualidades mecánicas más importantes que aporta al comportamiento del material compuesto son:

- a. Las fibras cortas dan al material compuesto mayor ductilidad, aunque no aumenta considerablemente la resistencia del conjunto,
- b. Las fibras largas dan al material compuesto mayor resistencia, con menor aumento de la ductilidad que los compuestos de fibras cortas.

De estas dos ideas surge que el hormigón con fibras cortas y largas se transforma en un buen material estructural, transformándose en un material de cualidades destacables frente a otros materiales tradicionales.

Entre las fibras más utilizadas en la actualidad en hormigones puede citarse:

a. **Fibras de Vidrio:** Resultan de un filtrado del vidrio a través de una malla metálica. El diámetro de las fibras depende de esta malla, de la temperatura del vidrio y de la velocidad de estiramiento. La colocación en el hormigón puede realizarse luego de constituir un tejido uni, bi o tridimensional. Su primera incorporación en el mundo de los materiales compuestos data del 1950, cuando se intentó sustituir el acero mediante tendones de fibra de vidrio, puesto que su resistencia es del orden de los 2000 MPa y el módulo de elasticidad de 70 GPa. El mayor problema en la utilización de las fibras de vidrio surgió a nivel tecnológico por las dificultades de anclaje que estas tienen (Páez, 1979) (3).

**b. Fibras Plásticas:** Se caracteriza por su bajo peso específico y bajo coste. Sus características mecánicas son más modesta que las del grupo anterior, pues su resistencia alcanza escasamente los 500 MPa con un módulo de elasticidad de 10 GPa. Este tipo de fibras admite endurecimientos y aumento de resistencia por plasticidad en frío, mediante retorcido y/o estirado. Entre sus cualidades está su inalterabilidad frente a agentes agresivos junto a su bajo coste y peso. También puede tratarse como ventaja su trabajabilidad durante la fabricación del hormigón.

**c. Fibras Cerámicas:** Un grupo de materiales que ha comenzado a ser muy atractivo en la conformación de compuestos, son los denominados cerámicos de altas prestaciones o también cerámicas ?nas o nuevas cerámicas. Estos materiales se componen principalmente de Óxidos de Aluminio, Zirconio, Silicio, Berilio, Titanio, Magnesio, etc.; de Nitruros de Silicio, Boro, Aluminio, etc.; y de Carburos de Silicio (fibra de carbono) y Boro. Estos nuevos materiales tienen una gran potencialidad para ser utilizados en distintas formas, solos o formando parte de un compuesto.

**d. Fibras Metálicas:** Es un tipo de fibras cortas muy utilizado en el hormigón. Su resistencia es del orden de 2 a 3 GPa y su modulo elástico de 210 GPa. Uno de los problemas más serios es su falta de adherencia con el hormigón, situación que se pone de manifiesto en ensayos a tracción y flexión. Esta situación, que en menor medida ocurre en otras fibras, hace que su capacidad de participación en el material compuesto está limitado a su posibilidad de transferir esfuerzos, más que a su resistencia nominal.

### 3. REPRESENTACIÓN MECÁNICA DEL COMPORTAMIENTO DE UN COMPUESTO REFORZADO CON FIBRAS CORTAS

#### 3.1. Introducción

En este apartado se presenta un modelo basado en la mecánica de medios continuos, que permite representar el comportamiento tenso-deformacional de un punto de un material compuesto. La formulación se orienta en este caso particular al estudio de compuestos de matriz reforzada con fibras cortas. Toda esta formulación mecánica se incorpora dentro de un procedimiento numérico de análisis por elementos finitos para problemas no-lineales, que no se describe en este trabajo pero su formulación se encuentra con detalle en la literatura clásica (ver O. Zienkiewicz, R. Taylor) (4).

Existen diversas teorías que permiten simular el comportamiento constitutivo de los materiales compuestos en un punto (ver una síntesis de ellos en Car (2000) (5), Zalamea (2000) (6), una de ellas es la Teoría de Mezclas (Trusdell y Toupin, 1960) (7), que se considera adecuada para la simulación del comportamiento de materiales compuestos en régimen lineal y con ciertas modificaciones permite representar el comportamiento no lineal del material. Por otro lado, esta teoría, en su forma clásica, establece que los materiales componentes, que coexisten en un punto del sólido deben tener la misma deformación (componentes participando en paralelo). Esta hipóte-

sis plantea una fuerte limitación en la utilización de esta teoría para la predicción del comportamiento de los materiales compuestos. Para solucionar este problema, se debe reformular la teoría clásica a partir de una ecuación de compatibilidad que se adapte al comportamiento del compuesto (componentes participando en serie-paralelo).

La teoría de mezclas clásica fue estudiada inicialmente por Trusdell y Toupin (1960) (7) en el año 1960 y a su vez estos estudios establecieron las bases de otros trabajos posteriores (Green y Naghdi, 1965) (8), Ortiz y Popov (1982) (9, 10), Oller *et al.* (1996) (11), Oller y Oñate (1996) (12). La teoría que aquí se presenta es más general que la clásica y representa el comportamiento constitutivo de un material compuesto por varias fases –“n-fases”– altamente anisótropas y sin la limitación exigida por la clásica ecuación de compatibilidad de la teoría original, permitiendo que la relación de comportamiento entre las sustancias componentes pueda ser en serie o en paralelo.

La teoría de mezclas podría entenderse como un “gestor de los modelos constitutivos” de cada componente del compuesto, permitiendo considerar la interacción entre las distintas leyes de comportamiento de las diversas fases de un compuesto. Esta técnica de combinación de comportamientos, o de sustancias en este caso particular, permite que cada una de ellas conserve su ley constitutiva original, isotropa o anisotropa, lineal o no-lineal, y a la vez condicione el comportamiento global del conjunto o compuesto.

Como ya se ha mencionado, la forma clásica de la teoría de mezclas es sólo adecuada para simular el comportamiento mecánico de ciertos materiales compuestos, cuyos componentes responden en paralelo (con igual deformación y sin movimientos relativos entre ellos). Materiales que responden a este perfil son aquellos constituidos de matrices con refuerzo de fibras largas alineadas con la acción de la carga. Para otra orientación de la carga u otros tipos de materiales compuestos, como las fibras es necesario realizar modificaciones en la teoría clásica.

#### 3.2. Teoría de mezclas clásica

La teoría de mezclas clásica de sustancias básicas se basa en la mecánica del sólido continuo local y se considera adecuada para explicar el comportamiento de un punto de un sólido compuesto. Se basa en el principio de interacción de entre las sustancias que componen el material compuesto, suponiendo las siguientes hipótesis básicas:

- i. En un compuesto participan un conjunto de sustancias componentes;
- ii. Cada componente contribuye en el comportamiento del compuesto en la misma proporción que su participación volumétrica;
- iii. Todos los componentes poseen la misma deformación –ecuación de cierre o compatibilidad–;
- iv. El volumen ocupado por cada componente es mucho menor que el volumen total del compuesto.

La segunda de las hipótesis implica una distribución homogénea de todas las sustancias en cada punto del compuesto. La interacción entre las diferentes sustancias componentes, cada una con su respectiva ley constitutiva, determina el comportamiento del material compuesto y depende básicamente del porcentaje en volumen ocupado por cada componente y de su distribución en el compuesto. Esto permite combinar materiales con comportamientos diferenciados (elástico, elasto-plástico, etc.), donde cada uno de ellos presenta un comportamiento evolutivo gobernado por su propia ley.

La tercera hipótesis establece que en ausencia de difusión atómica<sup>1</sup> se cumple la siguiente condición de compatibilidad bajo la hipótesis de pequeñas deformaciones para cada una de las fases del material compuesto:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots \varepsilon_n \quad [1]$$

donde  $\varepsilon$  y  $\varepsilon_n$  representan respectivamente las deformaciones del material compuesto y de la  $n$ -ésima componente de dicho material compuesto.

El coeficiente de participación volumétrica  $k_c$  permite considerar la contribución de cada fase dentro del compuesto y se obtiene considerando la participación volumétrica de cada una de los materiales componentes respecto del volumen total

$$k_c = \frac{dV_c}{dV_0} \Rightarrow \sum_{c=1}^n k_c = 1 \quad [2]$$

donde  $V_c$  representa el volumen del componente  $c$ -ésimo del material y  $V_0$  es el volumen total del material compuesto.

La ecuación constitutiva deriva de un planteamiento termo-dinámico consistente y tiene la siguiente forma:

$$=\mathbf{C}:\boldsymbol{\varepsilon}^e = \sum_{c=1}^n k_c \sigma_c = \sum_{c=1}^n k_c \mathbf{C}_c : \boldsymbol{\varepsilon}_c^e \quad [3]$$

siendo  $\sigma$  la tensión en el material compuesto,  $\sigma_c$  la tensión en cada componente (fibra/matriz),  $\mathbf{C}$  el tensor constitutivo del compuesto,  $\mathbf{C}_c$  el tensor constitutivo de cada material componente y  $\boldsymbol{\varepsilon}_c^e = \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_c^p - \boldsymbol{\varepsilon}_c^\theta$  la deformación elástica de cada material componente. En esta última,  $\boldsymbol{\varepsilon}_c^e$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}_c^p$  y  $\boldsymbol{\varepsilon}_c^\theta$  representan las cuotas de deformación elástica, plástica y de origen térmico.

De las ecuaciones anteriores surge que el tensor constitutivo del compuesto adquiere la forma

$$\mathbf{C} = \sum_{c=1}^n k_c \mathbf{C}_c \quad [4]$$

La teoría de mezclas clásica, la cual parte de la hipótesis de que el campo de deformaciones es el mismo para todos los componentes del compuesto, es rigurosamente válida sólo si se aplica a materiales cuyos componentes trabajan en paralelo.

<sup>1</sup> Nota: Los fenómenos de difusión atómica se producen a temperaturas cercanas al punto de fusión. En los análisis se considera una temperatura inferior a la correspondiente al punto de fusión.

lo. Estos materiales se caracterizan porque su estado tensional resulta ser la suma de las tensiones de cada componente, ponderadas de forma proporcional al volumen que ocupa cada fase respecto del total –ejemplo: matriz con fibras largas, hormigón armado, etc.–. En el caso de matrices con refuerzo de corta longitud no resulta válida la hipótesis de igualdad entre las deformaciones de todos los componentes. Para solucionar este inconveniente existen dos alternativas: definir otra ecuación de cierre (Ecuación [1]), que permita simular adecuadamente los fenómenos que se producen en el material, o realizar una corrección en las propiedades de cada componente y mantener la hipótesis de igualdad de deformaciones en cada uno de los componentes del compuesto, expresión que se utilizará en este trabajo y se explicará más adelante.

### 3.3. Teoría de mezclas para refuerzo de poca longitud –Fibra corta–

La formulación de la teoría de mezclas clásica está orientada a un material de matriz reforzada con fibras largas, y a medida que la relación de aspecto<sup>2</sup> de la fibra disminuye, la condición de compatibilidad fibra-matriz deja de cumplirse. Así, al acortarse la longitud de la fibra el efecto de deslizamiento se hace más significativo y disminuye la capacidad de transmisión de esfuerzos entre fibra y matriz y la “eficacia” de la contribución de las fibras en la rigidez del material compuesto disminuye.

La Figura 1 muestra la deformación de la matriz circundante a una fibra discontinua embebida en la misma y sometida a una carga de tracción paralela a la fibra.

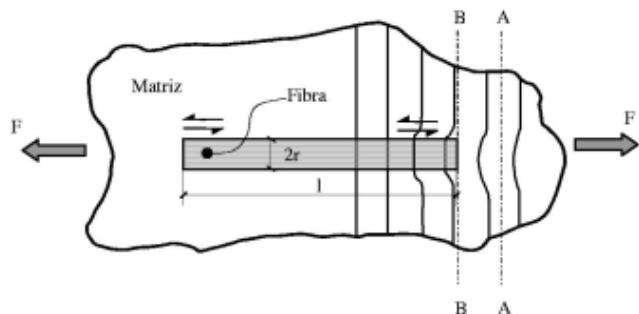


Figura 1. Deformación alrededor de una fibra discontinua embebida en una matriz sometida a tracción.

En un material compuesto con refuerzo de fibras largas se tiene el mismo estado de deformaciones para la matriz y las fibras. Por otro lado, la tensión a lo largo del refuerzo no varía salvo en la zona de los extremos, donde se verifica que la deformación de la misma es menor respecto a la de la matriz. En el caso de refuerzos de corta longitud embebidos en una matriz este fenómeno juega un papel fundamental en la determinación de las propiedades mecánicas del compuesto.

<sup>2</sup> Nota: Se define como relación de aspecto al cociente  $l/2r$ , donde  $l$  y  $r$  son la longitud y el radio de una fibra corta respectivamente.

Este fenómeno puede explicarse teniendo en cuenta la Figura 1. En la misma, en la sección AA la deformación del conjunto se debe sólo a la deformación de la matriz. En la sección BB, justo en el extremo de la fibra, evidencias experimentales muestran que la transferencia de esfuerzos de la matriz hacia la fibra es gradual, con esfuerzo nulo en el extremo de la fibra y con un aumento gradual de la tensión a lo largo de la fibra hasta el punto en el cual las deformaciones de matriz y fibra son iguales. De acuerdo con esto, la zona central de una fibra presenta el máximo valor de tensión axial. Se define como *longitud de transferencia*  $l_c$  a la longitud de refuerzo necesaria para garantizar la compatibilidad fibra-matriz y la transferencia de los esfuerzos desde la matriz hacia la fibra. Cualquier refuerzo cuya longitud sea inferior a esta magnitud, no participa plenamente en los mecanismos de transferencia de esfuerzo (Jayatilaka, 1969) (13).

En la Figura 2 se muestra la distribución de esfuerzos en una fibra de refuerzo. La tensión tangencial es máxima en los extremos de las fibras y resulta casi nulo en la zona central. En la misma figura se observa que en los extremos de las fibras la tensión axial cae a cero, resultando un esfuerzo medio en la fibra de longitud  $l$  menor que en una fibra continua sometida a las mismas cargas externas. La "eficacia" del refuerzo disminuye en la medida en que lo hace la longitud de la fibra debido a que no toda la fibra puede trabajar a la máxima tensión. Por lo tanto, en los materiales compuestos reforzados con fibras cortas es necesario que la longitud  $l$  de la fibra sea superior a la longitud crítica de transferencia  $l_c$  con el objetivo de que las mismas sean aprovechadas a su máxima capacidad.

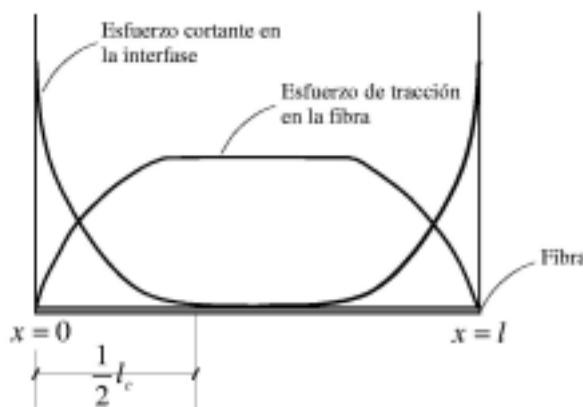


Figura 2. Distribución de esfuerzos axiales en la fibra y cortantes en la interfaz fibra-matriz.

Debido a estos fenómenos locales, los materiales compuestos reforzados con fibras cortas no cumplen exactamente con la condición de compatibilidad expresada en la Ecuación [1], debido a las diferentes deformaciones que se presentan entre la matriz y las fibras. Por ello, a los fines de representar el comportamiento constitutivo de estos materiales, es necesario el plantear de otra ecuación de cierre de deformaciones (Oller *et. al.*, 1995) (14) o, como se ha mencionado anteriormente, mantener la clásica teoría de mezclas, manteniendo la hipótesis de igualdad de deformaciones en todos los componentes y realizar una corrección en las propiedades de cada componente (Car *et. al.*, 1997) (15).

### Distribución de tensión axial en la fibra

A los fines de determinar una expresión analítica de la distribución de tensiones en una fibra es necesario considerar el equilibrio en la zona de transferencia de tensiones (ver Figura 3). El equilibrio de la fibra en la dirección longitudinal  $x$  está dado por la siguiente ecuación:

$$\sigma_f \pi r^2 + 2\tau \pi r dx = (\sigma_f + d\sigma_f) \pi r^2 \Rightarrow \frac{\partial \sigma_f}{\partial x} = \frac{2\tau}{r} \quad [5]$$

o, en términos de fuerzas,

$$\frac{\partial P_f}{\partial x} = 2\tau \pi r \quad [6]$$

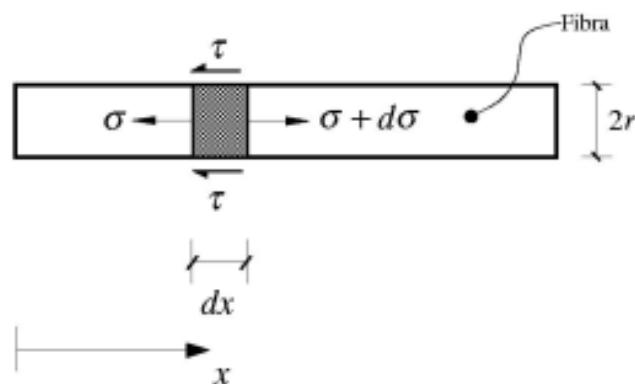


Figura 3. Esfuerzos en los extremos de fibras.

donde  $\sigma_f$  es la tensión en la fibra en la dirección  $x$ ,  $d\sigma_f$  es el incremento de la tensión en la fibra en  $x + dx$  y  $\tau$  es la tensión tangencial en la interfase fibra-matriz. La tensión tangencial  $\tau$  se produce debido a las deformaciones diferenciadas entre fibra y matriz y por lo tanto depende de la diferencia entre los campos de desplazamientos de fibra y matriz. El equilibrio entre matriz y fibra corta puede describirse mediante la siguiente ecuación diferencial sobre el eje longitudinal de la fibra resulta (Jayatilaka, 1979) (13).

$$\frac{\partial^2 P_f}{\partial x^2} = H \left[ \frac{P_f}{C_f A_f} - E_m \right] \quad [7]$$

donde  $P_f$  es la fuerza máxima de interacción entre el refuerzo y la matriz,  $H$  una constante que depende de la distribución topológica de las fibras,  $C_f$  el módulo de Young del refuerzo,  $A_f$  la sección transversal media del refuerzo y  $E_m$  es la deformación longitudinal en la matriz. La solución de la ecuación diferencial (7) permite obtener la siguiente fuerza en la fibra,

$$P_f = c_1 \operatorname{senh}(\beta x) + c_2 \cosh(\beta x) + C_f A_f E_m \quad [8]$$

siendo  $c_1$  y  $c_2$  las constantes que resultan de las condiciones de contorno  $P_f = 0$  en  $x = 0$  y  $x = l$ ;  $\beta$  es un coeficiente que tiene

en cuenta parámetros mecánicos y geométricos y está dado por la siguiente expresión:

$$\beta = \sqrt{\frac{H}{C_f A_f}} = \sqrt{\frac{G_c}{C_f} \frac{2\pi}{A_f \ln\left(\frac{r'}{r}\right)}} \quad [9]$$

en la cual  $G_c$  es el módulo elástico transversal del compuesto y  $r'$  la distancia media entre las fibras de refuerzo (ver Figura 4).

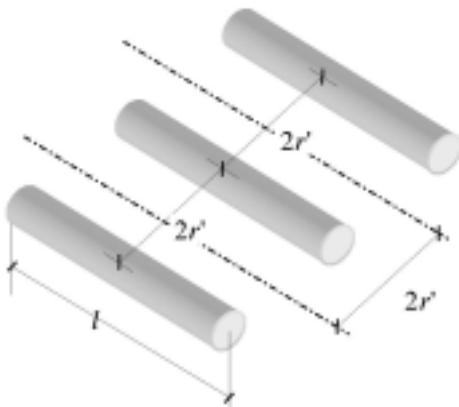


Figura 4. Relación de aspecto que se considera en el refuerzo.

Una vez obtenidas las constantes de integración, la ecuación de la tensión resulta:

$$\sigma_f(x) = C_f E_m \left[ 1 - \frac{\cosh\left(\beta\left(\frac{l}{2} - x\right)\right)}{\cosh\left(\beta\frac{l}{2}\right)} \right] \quad \forall 0 \leq x \leq \frac{l}{2} \quad [10]$$

Esta ecuación establece la distribución de tensiones axiales a lo largo de la fibra. Esta distribución se muestra esquemáticamente en la Figura 2. En la zona central del refuerzo no existe un valor de tensión constante, pero si el refuerzo es lo suficientemente largo se puede admitir la hipótesis de que  $\sigma_f \approx C_f E_m$ . El valor de tensión máximo se produce en  $x = l/2$  y está dado por

$$(\sigma_f)_{max} = \sigma_f(x = \frac{l}{2}) = C_f E_m \left[ 1 - \frac{1}{\cosh\left(\beta\frac{l}{2}\right)} \right] \quad [11]$$

#### Distribución de tensión tangencial en la interfaz

La distribución de tensión tangencial en la interfaz se obtiene haciendo el equilibrio en la fibra entre tensiones axiales y adherencia con la matriz. Para ello, teniendo en cuenta la ecuación [5] y la ecuación [10], resulta:

$$\tau_f(x) = \frac{C_f E_r \beta}{2} \frac{\operatorname{senh}\left(\beta\left(\frac{l}{2} - x\right)\right)}{\cosh\left(\beta\frac{l}{2}\right)} \quad [12]$$

Esta última ecuación establece la función de distribución de tensiones tangenciales en la interfaz fibra-matriz. Esta distribución se muestra esquemáticamente en la Figura 2. El valor de la tensión cortante es nulo en la zona central de la fibra y coincide con el máximo de la tensión axial. En esta zona no existen deformaciones diferenciadas entre fibra y matriz lo cual explica el valor nulo de las tensiones tangenciales. La máxima tensión tangencial se verifica en el extremo de la fibra y está dada por

$$(\tau_f)_{max} = \tau_f(x = \frac{l}{2}) = \frac{C_f E_m r \beta}{2} \tanh\left(\frac{\beta l}{2}\right) \quad [13]$$

#### Módulo de elasticidad y tensión media para las fibras cortas

Una forma de incorporar la contribución del refuerzo en fibras cortas en la teoría de mezclas es a través de la tensión media a lo largo de la fibra –parámetros homogeneizados–, esto es:

$$\bar{\sigma}_f = \frac{1}{l} \int_0^l \sigma_f(x) dx = C_f \left[ 1 - \frac{\tanh\left(\beta\frac{l}{2}\right)}{\left(\beta\frac{l}{2}\right)} \right] E_m = \tilde{C}_f E_m \quad [14]$$

siendo  $\tilde{C}_f$  el módulo de Young medio del refuerzo o módulo homogeneizado. La ecuación [14] muestra que el módulo de Young de un refuerzo de fibras es función de la longitud de las mismas y de otros parámetros geométricos. En el caso de fibras largas el módulo elástico promedio tiende al valor nominal del módulo de Young del refuerzo, en tanto en este caso se ve fuertemente afectado por la capacidad para transferir las tensiones que tiene la interfaz matriz-refuerzo.

La definición de un módulo de Young promedio del refuerzo, de magnitud inferior al real, explica que la participación de este aporta unas características mecánicas al compuesto que no sólo dependen de las propiedades intrínsecas del mismo, sino también de las propiedades del conjunto matriz-refuerzo. En esta situación las propiedades de la interface entre los componentes son determinantes en la forma de participación de los mismos. Esto significa que las propiedades mecánicas de un punto del sólido no sólo dependen de sí mismas, sino del conjunto matriz-refuerzo.

#### Modelo constitutivo para fibras cortas

La matriz de un material compuesto reforzado con fibras de corta longitud suele estar sometido a tensiones superiores a aquellas constituidas con fibras largas. En general, las propiedades mecánicas del material compuesto con fibras cortas son inferiores que los compuestos con refuerzo continuo<sup>3</sup>.

El concepto de homogeneización que se describe en la sección anterior puede extenderse a “3-D” mediante la simplifi-

<sup>3</sup> Nota: Se entiende por refuerzo continuo a aquel que presenta una longitud mayor a la necesaria para transmitir los esfuerzos desde la matriz hacia el refuerzo.

cación de admitir una reducción isótropa del cambio de propiedades, resultando el siguiente tensor constitutivo aproximado para la fibra corta:

$$\tilde{\mathbf{C}}_f = \mathbf{C}_f \left[ 1 - \frac{\tanh\left(\beta \frac{1}{2}\right)}{\left(\beta \frac{1}{2}\right)} \right] \quad [15]$$

donde el tensor constitutivo del refuerzo en la configuraciones referencial  $\mathbf{C}_f$  es ortotropo. De esta manera la formulación que se presenta permite tener en cuenta la pérdida de efectividad del refuerzo en la respuesta debido a su escasa longitud que impide una total transferencia de los esfuerzos desde la matriz.

Considerando el tensor constitutivo de la fibra corta, definido en la ecuación [15], se obtiene la ley constitutiva de la fibra, afectada de sus condiciones de contorno

$$\sigma = \left[ 1 - \frac{\tanh\left(\beta \frac{1}{2}\right)}{\beta \frac{1}{2}} \right] \cdot \mathbf{C}_f : \boldsymbol{\varepsilon}^e = \tilde{\mathbf{C}}_f : \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad [16]$$

El factor  $\xi$  representa la corrección de las propiedades mecánicas del material debido a la presencia de un refuerzo de corta longitud dentro del material compuesto.

#### 3.4. Ecuación del compuesto - Propiedades de conjunto del material compuesto

En el caso de materiales compuestos reforzados con fibras cortas se debe modificar la ecuación de compatibilidad [1] o hacer una corrección en las propiedades de cada componente manteniendo la ecuación de cierre de la teoría de mezclas clásica (Car *et al.*, 1998) (16). Este último método conduce a una formulación más simple que es la que se mostrará a continuación.

La eficacia de la participación del refuerzo de fibras cortas es menor que la del de fibras largas, por lo tanto se deduce que las propiedades mecánicas de los materiales compuestos reforzados con fibras cortas no son mejores que aquellos reforzados con fibras largas. La expresión del tensor constitutivo del material compuesto dado en la ecuación [4] en pequeñas deformaciones se generaliza en la siguiente forma para el caso de refuerzos de corta longitud.

$$\mathbf{C} = \underbrace{\sum_{c_m=1}^{n_m} k_{c_m} \mathbf{C}_{c_m}}_{\text{Componentes de la matriz}} + \underbrace{\sum_{c_r=1}^{n_r} k_{c_r} \xi_{c_r} \mathbf{C}_{c_r}}_{\text{Componentes del refuerzo}} \quad [17]$$

En las definiciones anteriores  $n_m$  es el número de materiales componentes que constituyen la matriz del compuesto y  $n_r$  es el número de materiales componentes que constituyen la fase del refuerzo. En el caso de refuerzos continuos el factor  $\xi_{c_r}$  tiende a la unidad y hace que la expresión para fibras cortas coincida con la de fibras largas.

La ecuación de la tensión en el material compuesto queda definida como

$$\sigma = \underbrace{\sum_{c_m=1}^{n_m} k_{c_m} \mathbf{C}_{c_m} : \boldsymbol{\varepsilon}_{c_m}^e}_{\text{Componentes de la matriz}} + \underbrace{\sum_{c_r=1}^{n_r} k_{c_r} \xi_{c_r} \mathbf{C}_{c_r} : \boldsymbol{\varepsilon}_{c_r}^e}_{\text{Componentes del refuerzo}} \quad [18]$$

#### 3.5. Deslizamiento fibra-matriz

Entre las causas del comportamiento no-lineal de los materiales compuestos reforzados con fibras largas y más aun aquellos con fibras cortas, está el fenómeno de formación de grietas en la matriz, acompañada del deslizamiento o movimiento relativo entre fibra y matriz. Este fenómeno se conoce en la literatura en inglés como *debonding* y se caracteriza por el agrietamiento de la matriz y el deslizamiento relativo entre fibra y matriz. Esta pérdida de adherencia se manifiesta como una pérdida de rigidez del material compuesto e induce a movimientos que pueden representarse en forma de deformaciones inelásticas, o no-recuperables, entre la fibra y la matriz. El fenómeno antes mencionado se designará en este trabajo con las siglas “DFM” (Deslizamiento Fibra-Matriz).

El proceso de apertura de fisuras en la matriz ocurre a niveles de tensiones que resultan significativamente menores que el nivel tensional necesario para producir la rotura de las fibras. La rotura de la matriz ocurre a valores bajos de tensión y está usualmente alineado con la dirección de las tensiones principales, produciendo una disminución en la rigidez e induciendo deformaciones inelásticas y ciclos de histéresis (Beyerley *et al.*, 1992) (17), (Pryce y Smith, 1992) (18).

Los materiales compuestos sometidos a estados tensionales en los cuales se ha producido el fenómeno “DFM” no cumplen con la condición cinemática impuesta por la teoría de mezclas de sustancias básicas. Este fenómeno tiene como consecuencia directa la limitación de la matriz, para transferir esfuerzos a la fibra. Esto es, la fibra no es capaz de aumentar su estado tensional por causas atribuibles a la adherencia limitada que existe en la zona de interface fibra-matriz.

La incorporación de este fenómeno en el modelo constitutivo mencionado en los apartados previos se basa en la idea de que el proceso de transferencia de cargas de matriz a fibra varía en el momento en que la matriz sufre deformaciones plásticas. El movimiento relativo entre fibra y matriz puede representarse en mecánica de medios continuos a través de una deformación inelástica irrecuperable en la fibra. La determinación del inicio de este fenómeno se realiza mediante una condición umbral máxima de resistencia que compara la tensión efectiva en un punto con la resistencia de la fibra. Dada la forma en que participa la fibra dentro del compuesto y el mecanismo de transmisión de tensiones entre fibra y matriz, la determinación de su máxima resistencia o resistencia real y su capacidad de colaboración depende de su propia resistencia nominal ( $f_f^N$ ), o resistencia de la fibra en condiciones aisladas, de la resistencia nominal de la matriz ( $f_m^N$ ) y de la resistencia nominal de la interface fibra-matriz ( $f_{fib-mat}^N$ ), o capacidad de transferencia de tensiones desde la matriz a la fibra. Desde otro punto de vista, se puede decir que la fibra

participa dentro del compuesto en función de su propia resistencia y de la capacidad de transferencia de esfuerzo de la interfaz fibra-matriz, por lo tanto su resistencia está influenciada por el medio que la contiene y podría decirse que su tratamiento constitutivo implica una formulación no-local. Se define entonces la resistencia de una fibra contenida en una matriz como:

$$(f^\sigma)_{fib} = \min \left\{ (f^\sigma)_{fib}^N, (f^\sigma)_{mat}^N, \left[ \frac{(f^\tau)_{fib-mat}^N \cdot 2\pi r_f}{A_f} \right] \right\} [19]$$

en la que  $r_f$  representa el radio de la fibra y  $A_f$  es el área de la sección transversal de la fibra. A partir de la ecuación [19] se deducen los siguientes casos límites:

- Si la matriz es más resistente que la fibra y la adherencia fibra-matriz es perfecta, la capacidad de participación de la fibra queda limitada por su propia resistencia nominal  $(f^\sigma)_{fib} \equiv (f^\sigma)_{fib}^N$ .
- Si se produce un fallo en la matriz por microfisuras, etc., en tanto la fibra se mantiene en régimen lineal, la resistencia de la fibra queda limitada por la resistencia de la matriz, pues se rompe el “mecanismo” de transferencia de tensión entre fibra y matriz y no se podría transferir más tensión que la permitida por el medio que contiene la fibra  $(f^\sigma)_{fib} \equiv (f^\sigma)_{mat}^N$ .
- Si el fallo se produce en la interface fibra-matriz, la resistencia de la fibra queda limitada por la de la interfaz

$$(f^\sigma)_{fib} \equiv \frac{2 \cdot (f^\tau)_{fib-mat}^N \cdot 2\pi r_f}{A_f} = \frac{2 \cdot (f^\tau)_{fib-mat}^N}{r_f}$$

En la mayoría de los materiales compuestos se verifica que el agrietamiento por tensiones tangenciales en la interfaz se produce antes que la rotura de las fibras y se observa una separación masiva entre fibra y matriz y por lo tanto la resistencia de la fibra queda limitada por la capacidad de la interfaz de transmitir esfuerzos. La aparición de fenómenos plásticos en la matriz de un material compuesto sometido a un estado de cargas monótono creciente impide la transferencia de los esfuerzos desde la matriz hacia las fibras dando lugar a

la aparición de deformaciones irrecuperables por deslizamiento de la fase de refuerzo respecto de la matriz. A partir de este momento la transferencia de cargas de fibras a matriz no es nula debido a la presencia de fenómenos de fricción entre ambas fases del material compuesto. Por lo tanto, las fibras aumentan su estado tensional según un módulo elástico diferente del inicial.

#### 4. EJEMPLO DE APLICACIÓN

A continuación se obtiene una respuesta numérica de una viga de hormigón reforzado con fibras cortas de acero –DRAMIX–, mediante el método de los elementos finitos, utilizando dentro de éste el modelo mecánico para materiales compuestos con fibras cortas presentado en apartados previos. Se realiza una comparación de estos resultados numéricos con aquellos obtenidos experimentalmente en laboratorio por otros investigadores (19).

##### 4.1. Detalles del ensayo y la viga

El material compuesto utilizado en el ensayo de laboratorio es un hormigón de alta resistencia con humo de sílice reforzado con fibras cortas de acero en diferentes fracciones de volumen (0.0%, 0.5% y 1.0%).

Los materiales componentes del hormigón fueron cemento I 55-A (ASTM tipo III, CEN clase I 52.5), arena silícea (0-5 mm), arcilla (5-12 mm) y humo de sílice (ELKEM grado 920D). También se añadió superplastificante GRACE Darcem 195 en la proporción de 25.4 litros/m<sup>3</sup> de hormigón (superplastificante seco/cemento = 1.5% en peso). Los valores medio de la resistencia a compresión,  $f_c = 86.4 \text{ MPa}$  ( $\pm 2.76\%$ ) y  $f_c = 88.3 \text{ MPa}$  ( $\pm 2.82\%$ ) y  $f_c = 92.47 \text{ MPa}$  ( $\pm 5.39\%$ ) para el 0.0%, 0.5% y 1.0% en volumen de fibra, respectivamente. Las fibras cortas fueron de acero tipo DRAMIX ZC30, con un límite elástico de 1150 MPa, 30 mm de longitud y 0.5 mm de diámetro.

Los ensayos se realizaron aplicando una carga de 1MN en un Instron 8505, bajo control de desplazamiento en el punto de aplicación de la carga Figura 5.

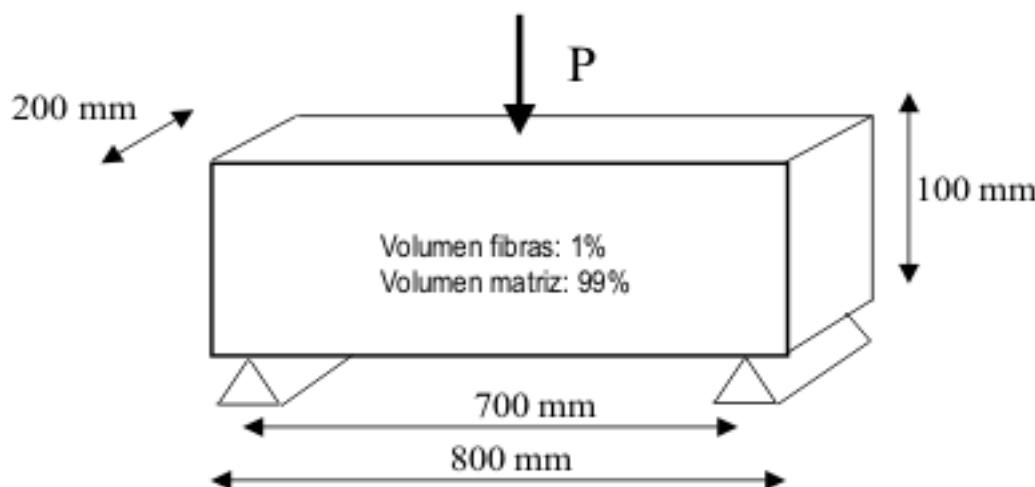


Figura 5. Características geométricas de la viga del ensayo.

**Tabla 2. Características mecánicas de los materiales componentes a utilizar en la simulación numérica**

Propiedad	Matriz	Fibras (real)	Fibras (modificado)
Módulo de Young	50000 MPa	210000 MPa	190000 MPa
Coeficiente de Poisson	0,17	0,25	0,25
Resistencia umbral a tracción	8,27 Mpa	1150 Mpa	277 Mpa
Resistencia umbral a compresión	82,7 Mpa	1150 Mpa	277 Mpa
Módulo de endurecimiento	Ablandamiento	0	0
Material simulado	Mohr-Coulomb, $\phi=30^\circ$	von-Mises	von.Mises
Energía de fractura	25 KN/m	$3 \times 10^6$ KN/m	$7.2 \times 10^5$
Energía de aplastamiento	2500 KN/m	$3 \times 10^6$ KN/m	$7.2 \times 10^5$

El problema ha sido resuelto por elementos finitos con 80 elementos de tensión plana con 4 nodos y dos grados de libertad por nodo, bajo la hipótesis de tensión cuasi-estática. A este modelo numérico se le ha incorporado el modelo constitutivo mencionado en apartados previos, considerando los siguientes tres casos:

- a- Hormigón 100%,
- b- Hormigón 99% + Fibras cortas metálicas 0.5% orientadas a  $0^\circ$  + Fibras cortas metálicas 0.5% orientadas a  $90^\circ$ ,
- c- Hormigón 99% + Fibras cortas metálicas 0.3% orientadas a  $0^\circ$  + Fibras cortas metálicas 0.7% orientadas a  $90^\circ$ ,

En las figuras que a continuación se muestran, puede verse la influencia de la ductilidad que añaden estas fibras cortas al hormigón simple y también un aumento en la resistencia. También puede verse la comparación de estos resultados numéricos con los experimentales.

En la Figura 6 puede verse la comparación entre la respuesta numérica de un hormigón simple y un hormigón con un 1% de fibras cortas, de las cuales la mitad de ellas está orientada según el eje longitudinal de las fibras ( $0^\circ$ ) y la otra mitad transversal a dicho eje ( $90^\circ$ ).

Como puede verse en la Figura 7, la sola disminución de la proporción de fibras en la dirección longitudinal a  $0^\circ$  (de 0,5% a 0,3%), se produce una disminución de la carga máxima o carga de pico de 4500 N a 4200 N. Esta situación muestra que el material es muy sensible a la orientación de las fibras cortas, siendo este uno de los problemas que presenta este material compuesto.

La Figura 8 muestra la comparación entre la respuesta numérica y experimental. En ella puede verse una diferencia en el nivel de la carga de pico que puede soportar la viga y se considera que esto se debe al problema de deslizamiento fibra matriz, del que no hay datos suficientes para ajustar el modelo.

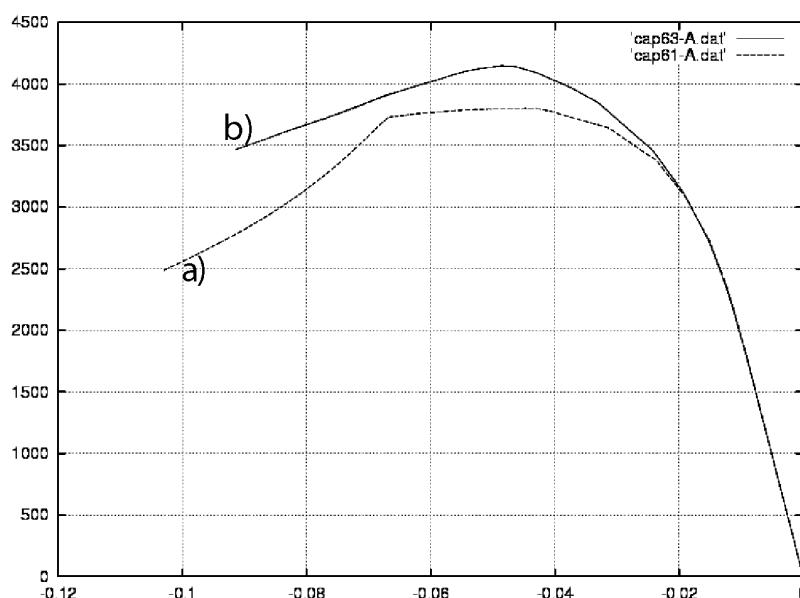


Figura 6. Respuesta numérica. Carga [ $x10=N$ ]- Desplazamiento [ $x10 =mm$ ]:  
a) Hormigón (100%).  
b) Hormigón (99%)+ Fibra corta (0,5%-0°)+ Fibra corta (0,5%-90°)

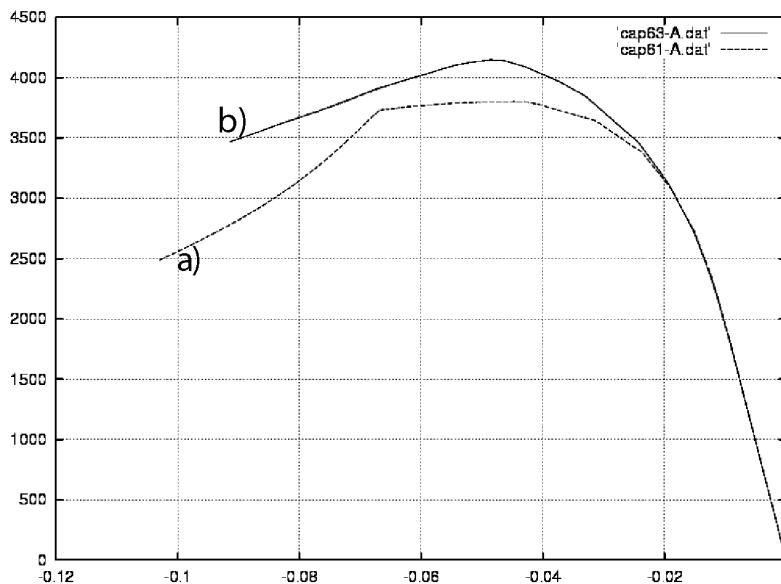


Figura 7. Respuesta numérica. Carga [ $x10=N$ ]- Desplazamiento [ $x10 =mm$ ]:  
 a) Hormigón (100%).  
 b) Hormigón (99%)+ Fibra corta (0,3%-0°)+ Fibra corta (0,7%-90°).

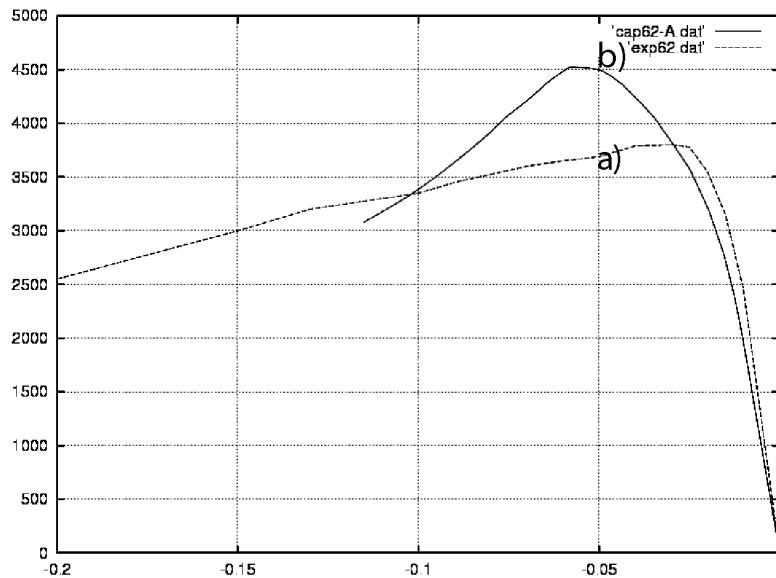


Figura 8. Respuesta numérica-experimental. Carga [ $x10=N$ ]-Desplazamiento [ $x10 =mm$ ]:  
 a) Experimental.  
 b) Hormigón (99%)+ Fibra corta (0,5%-0°)+ Fibra corta (0,5%-90°).

La Figura 9 muestra también la comparación entre la respuesta numérica y experimental. En ella nuevamente puede verse una diferencia en el nivel de la carga de pico que puede soportar la viga y se considera que esto se debe al problema de deslizamiento fibra matriz, del que no hay datos suficientes para ajustar el modelo. A diferencia de la Figura 8, aquí puede verse que la diferencia entre la carga de pico entre la respuesta experimental y numérica es menor.

## 5. CONCLUSIONES

De todo esto surge como conclusión que la incorporación de fibras cortas en el hormigón mejora su ductilidad y en

menor medida su resistencia y por lo tanto se convierte en un material con mejores cualidades para su utilización estructural. Además, el cálculo y diseño de estructuras con este material es posible tratarlo en forma simplificada si se admite el cambio de las propiedades reales del material por otras que serían las denominadas propiedades homogeneizadas, tal como se trata en este trabajo. Esto permitiría utilizar estas nuevas propiedades dentro del esquema de cálculo simplificado tradicional que se realiza en el hormigón. No obstante esta simplificación, cabe decir que si se quiere estudiar el material en rotura es necesario resolver su comportamiento a través de elementos finitos, prestando especial atención a los efectos no lineales del deslizamiento fibra matriz mediante la utilización del modelo constitutivo previamente presentado.

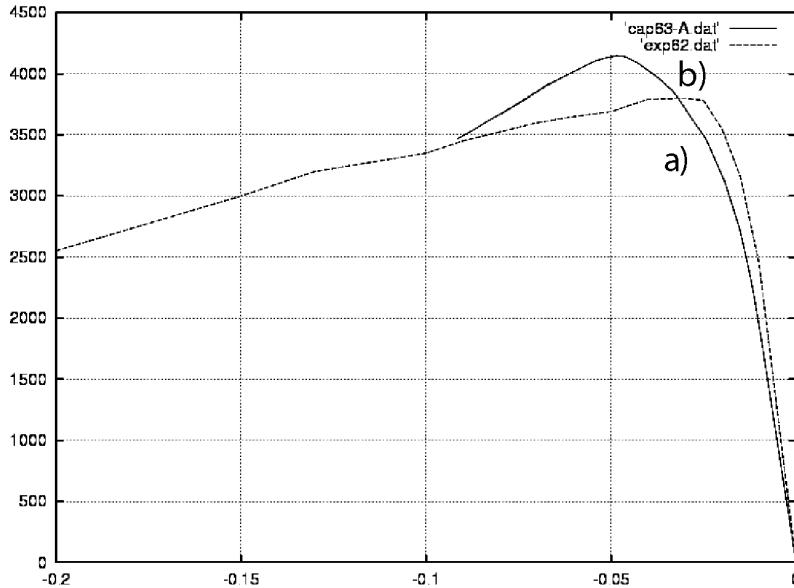


Figura 9. Respuesta numérica-experimental. Carga [ $\times 10 = \text{N}$ ]- Desplazamiento [ $\times 10 = \text{mm}$ ]:  
a) Experimental.  
b) Hormigón (99%)+ Fibra corta (0,3%-0º)+ Fibra corta (0,7%-90º).

## 6. AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen a la DGICYT por la financiación concedida a través del contrato MAT2000-0741-C02-02 y al Ministerio de Fomento por el proyecto de investigación concedido en el área de la construcción civil.

## 7. REFERENCIAS

- (1) Miravete A. (2000). *Materiales Compuestos*. Vol. 1 y Vol. 2. Director de la obra: Antonio Miravete.
- (2) Car E. (2000). *Modelo constitutivo continuo para el estudio del comportamiento mecánico de los materiales compuestos*. Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Cataluña.
- (3) Paez A. (1979). *Hormigones fibrosos*. Universidad de Santander, Escuela de Ingenieros de Caminos Canales y Puertos.
- (4) Zienkiewicz, O.C. and Taylor R. (1994). *El método de elementos finitos Vol. 1 y 2*. Mc Graw Hill – CIMNE.
- (5) Car E. (2000). *Modelo constitutivo continuo para el estudio del comportamiento mecánico de los materiales compuestos*. PhD thesis, Universidad Politécnica de Cataluña. Barcelona, España.
- (6) Zalamea F. (2000). *Tratamiento numérico de materiales compuestos mediante la teoría de homogeneización*. PhD thesis, Universidad Politécnica de Cataluña. Barcelona, España.
- (7) Trusdell, C. y Toupin, R. (1960). *The classical Field Theories*. Handbuch der Physik III/I. Springer Verlag, Berlin.
- (8) Green A. and Naghdi P. (1965). "A dynamical theory of interacting continua". *Journal of Engineering Science*, 3 3-231.
- (9) Ortiz M. and Popov E. (1982). "A physical model for the inelasticity of concrete". *Proc. Roy. Soc. London*, A383, 101-125.
- (10) Ortiz M. and Popov E. (1982). "Plain concrete as a composite material". *Mechanics of Materials*, 1, 139-150.
- (11) Oller S., Oñate E., Miquel J., and Botello S. (1996). "A plastic damage constitutive model for composite materials". *Int. J. Solids and Structures*, 33 (17), 2501-2518.
- (12) Oller S., Oñate E. (1996). "A Hygro-Thermo-Mechanical constitutive model for multiphase composite materials". *Int. J. Solids and Structures*. Vol.33, (20-22), 3179-3186.
- (13) Jayatilaka, A. (1979). *Fracture of engineering brittle materials*. Applied Science Publishers
- (14) Oller, S., Neamtu, L., & Oñate, E. (1995). Una generalización de la teoría de mezclas clásica para el tratamiento de compuestos en serie/paralelo. *Congreso Nacional de Materiales Compuestos*, pp. 433 - 438.
- (15) Car, E., Oller, S., & Oñate, E. (1997). "Un modelo constitutivo elasto-plástico acoplado con daño mecánico e higrométrico. Aplicación a pavimentos flexibles". U. de Brasilia (Ed.), *XVIII CILAMCE Congresso Ibero Latino-Americano de Métodos Computacionais Em Engenharia* (pp. 2100 - 2108). Brasilia.
- (16) Car, E., Oller, S., & Oñate, E. (1998). "Un modelo constitutivo elasto plástico acoplado con daño mecánico e higrométrico. Aplicación a pavimentos flexibles". *Rev. Int. de Ingeniería de Estructuras*, 3(1), 19 - 37
- (17) Beyerley D. and Spearing S. M. and Zok F. W. and Evans A. G. (1992). "Damage, degradation and failure in a unidirectional ceramic-matrix composite". *J. Am. Ceram. Soc.*, 75, pp. 2719-2725.
- (18) Pryce A. W. and Smith P. A. (1992). "Modelling of the stress/strain behavior of unidirectional ceramic matrix composite laminates". *J. Mater. Sci.*, 27, pp. 2695-2704.
- (19) Saldivar H., Gettu R. and Aguado A. (1997). *Test on high strength fiber reinforced concrete beams*. Dpto. De Ingeniería de la Construcción, ETSECCPB-UPC.