Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería. Vol. 12,4, 427–445(1996)

MATRICES GENERADAS POR ADICIÓN DE DÍADAS (MATRICES DE RANGO 1): PROPIEDADES Y APLICACIONES

MANUEL D. ORTIGUEIRA

IST/INESC
R. Alves Redol, 9, 2º
1000 Lisboa, Portugal

RESUMEN

Se estudian las matrices elementales de rango 1 (díadas). Para estas matrices se presentan fórmulas para su factorización, inversión, descomposición en valores propios y valores singulares. Estos resultados son aplicados en análisis recursivo a cualquier matriz, siempre que se descomponga en una suma de matrices de rango 1.

SUMMARY

Elementary rank-one matrices (dyads) are studied. For these matrices formulae for their factorization, inversion, eigendecomposition and singular value decomposition. These results are applied to the recursive analysis of an arbitrary matrix, whenever it is decomposed into a sum of rank-one matrices.

INTRODUCCIÓN

Consideraciones previas

El estudio y utilización de las matrices de rango 1 (matrices singulares elementales o díadas) [8] parece no haber sido muy extensa, atendiendo al pequeño número de artículos y libros que se ocupan del tema. El creciente auge de las técnicas de tratamiento multisensor y la necesidad de métodos adaptativos para la localización y extracción de fuentes fomenta el interés de la actualización de matrices de datos o de covarianza vía la díada formada por el vector obtenido del muestreo simultáneo de la apertura. Sólo en trabajos recientes se ha prestado alguna atención a esas matrices y se han usado sus propiedades en la obtención de algortimos para el análisis recursivo de matrices[1,2,3,8].

En trabajos anteriores[6,7] hemos presentado algunos resultados de procesado recursivo con utilización de estas matrices. En el presente trabajo se van a revisar y generalizar los resultados anteriores para presentar nuevos algoritmos sobre factorización, inversión y diagonalización de matrices generadas recursivamente como sumas de díadas.

Recibido: Julio 1990

 ISSN 0213-1315

Líneas generales del artículo

Vamos a empezar este estudio por una revisión de las propiedades de las díadas y especialmente de lo referente a descomposiciones en valores propios y valores singulares. Se presentará también el análisis de las matrices resultantes de sumar matrices diagonales con díadas. En una de las secciones posteriores se tratarán las aplicaciones: la factorización, inversión, autodescomposición y descomposición en valores singulares de matrices generadas recursivamente. Finalmente, presentaremos algunos resultados numéricos y algunas conclusiones.

Definiciones y notaciones

Consideraremos matrices complejas de la forma siguiente

$$\sum_{i=1}^{L} \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{w}_i^H \tag{1}$$

donde $\mathbf{v}_i$ y $\mathbf{w}_i$ son vectores complejos que supondremos siempre no nulos y de dimensiones N y M, respectivamente. El símbolo $(\cdot)^H$ servirá para representar la conjugación hermítica, mientras que la trasposición será denotada por $(\cdot)^T$. Para la conjugación se usará el símbolo $(\cdot)^*$.

Dada una matriz $\mathbf{A}$ cualquiera podemos representar, siempre en la forma (1). Para ello nos basta elegir los $\mathbf{v}_i$ como sus columnas y $\mathbf{w}_i$ como columnas de la matriz identidad. Sin embargo, la situación representada por ec.(1) es muy general y contempla una gama muy amplia de situaciones prácticas.

En una gran parte de lo que sigue manipulamos matrices de rango inferior al mínimo de sus dos dimensiones que tienen pseudo-inversas y no inversas. No obstante, no haremos distinción entre inversas y pseudo-inversas; les asignaremos siempre indistintamente el símbolo $(\cdot)^{-1}$. De forma análoga el símbolo $(\cdot)^H$ se asignará a la conjugada hermítica de la inversa. En general $(\cdot)^k$ (k entero) representará la potencia k de una matriz cuadrada dada.

Se representará por diag $\{a, b, c, \ldots\}$ una matriz diagonal cuyos elementos no nulos sean los elementos $d_{ii}(i = 1, 2, \ldots)$ que son $a, b, c \ldots$. La matriz identidad de dimensión N representaremos por I_N. Si no hay ambigüedad, representaremos sólo por $\mathbf{I}$. La matriz diagonal con sólo 1's en la diagonal secundaria representaremos por $\mathbf{J}$.

El vector $\mathbf{e}_k(k = 1, 2, \ldots)$ denotará siempre la columna de posición de la matriz identidad.

Las siglas ED y SVD representan siempre autodescomposición y descomposicón en valores singulares, respectivamente. Un autovector se denomina derecho, si verifica $\mathbf{A}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$, e izquierdo, si verifica $\mathbf{u}^H\mathbf{A} = \lambda\mathbf{u}^H$. La matriz de los autovectores derechos (izquierdos) se denominará matriz modal derecha (izquierda). De forma análoga se definen vectores y matrices singulares derechos e izquierdos.

LAS MATRICES SINGULARES ELEMENTALES

Introducción

Como ya se ha mencionado en el apartado anterior, sean $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ dos vectores no nulos de dimensiones N y M, respectivamente, que forman una díada. Para la matriz resultante puede establecerse la siguiente definición.

Definición

Una matriz $\mathbf{E}$ de dimensiones $N \times M$ se denomina elemental (o díada), si es de la forma

$$\mathbf{E} = \mathbf{v}\mathbf{w}^H \tag{2}$$

Como se ha afirmado, $\mathbf{E}$ es una matriz de rango 1, dado que todas sus filas (o columnas) son proporcionales entre sí. Esto significa que si $\mathbf{E}$ es una matriz cuadrada, entonces solamente tiene un autovalor diferente de cero; si $\mathbf{E}$ es una matriz rectangular $(N \neq M)$, entonces tiene un valor singular diferente de cero. Esto se va a establecer en los teoremas siguientes.

Teorema 2.1

Sea $\mathbf{E}$ una díada cuadrada $(N \times N) : \mathbf{E} = \mathbf{v}\mathbf{w}^H$. Entonces sus autovectores derecho e izquierdo son respectivamente proporcionales a $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$. El autovalor correspondiente vale $(\mathbf{w}^H\mathbf{v})$.

Demostración

a) Sea $\mathbf{u}$ el autovector derecho, entonces $(\mathbf{v}\mathbf{w}^H)\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$. Pudiéndose concluir que $\mathbf{u}$ es proporcional a $\mathbf{v}$, y por tanto $\mathbf{u} = \mathbf{v}$. En lo referente al autovector izquierdo $\mathbf{s}$, el procedimiento es similar; se obtiene, salvo un factor: $\mathbf{s} = \mathbf{w}$. Si se desea que $\mathbf{s}$ y $\mathbf{u}$ sean columnas de matrices inversas, los autovectores deben normalizarse de forma que $(\mathbf{s}^H\mathbf{u}) = 1$. Los autovectores correspondientes a los autovectores nulos deben ser ortogonales a los vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$: $[(\mathbf{w}^H\mathbf{u}) = 0$ y $(\mathbf{s}^H\mathbf{v}) = 0]$. Más adelante veremos como determinarlos.

b) Multiplicando por $\mathbf{w}^H$ la ecuación $(\mathbf{v}\mathbf{w}^H)\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$, se concluye inmediatamente que el autovalor es $\lambda = (\mathbf{w}^H\mathbf{v})$, lo que nos muestra que si $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son ortogonales, entonces la díada es equivalente a una matriz nula.

Teorema 2.2

Sea $\mathbf{E}$ una díada rectangular $(N \times M) : \mathbf{E} = \mathbf{v}\mathbf{w}^H$. Entonces sus vectores singulares derecho e izquierdo son respectivamente iguales a $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$. El valor singular correspondiente vale $\sigma = \rho_v\rho_w$
con

$$\rho_v = \sqrt{\mathbf{v}^H \cdot \mathbf{v}} \quad \text{y} \quad \rho_w = \sqrt{\mathbf{w}^H \cdot \mathbf{w}}$$

Demostración

a) Sea $\mathbf{u}$ el vector singular derecho y $\mathbf{s}$ el correspondiente izquierdo, entonces $(\mathbf{vw}^H)\mathbf{u} = \sigma\mathbf{s}$ y $\mathbf{s}^H(\mathbf{vw}^H) = \sigma\mathbf{u}^H$, de lo que se puede concluir que, salvo constantes, $\mathbf{u}$ es igual a $\mathbf{w}$ y $\mathbf{s}$ es igual a $\mathbf{v}$. Los vectores singulares deben ser normalizados a la unidad. Entonces $\mathbf{s} = \mathbf{v}\rho_v^{-1}$ y $\mathbf{u} = \mathbf{w}\rho_w^{-1}$.

b) Multiplicando por $\mathbf{s}^H$ la ecuación $(\mathbf{vw}^H)\mathbf{u} = \sigma\mathbf{s}$ y usando el resultado anterior se obtiene inmediatamente $\sigma = \rho_v\rho_w$ como valor singular. Entonces

$$E = (\rho_v\rho_w)su^H \tag{3}$$

La suma de una matriz diagonal con una díada

En este apartado vamos a analizar la suma de matrices diagonales con díadas. Este tipo de matrices va a ser muy importante en las aplicaciones que presentaremos en la sección siguiente. No trataremos el caso de la diferencia dada su similitud. Este caso es el que se presenta en tratamiento multisensor, cuando se actualiza la matriz de covarianza inicializada con sólo ruido no-direccional, con la llegada de una nueva muestra de la apertura, también denominada "snapshot".

Caso A–matriz diagonal igual a la matriz identidad

Se comenzará por el caso más sencillo en que la matriz diagonal es la matriz identidad.

Teorema 2.3

Si α es un escalar diferente de $-(\mathbf{y}^H\mathbf{x})^{-1*}$ y $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ dos vectores de igual dimensión, entonces[5,9]

$$[\mathbf{I} + \alpha\mathbf{xy}^H]^{-1} = \left[\mathbf{I} - \frac{\alpha}{(1+\alpha\mathbf{y}^H\mathbf{x})}\mathbf{xy}^H\right] \tag{4}$$

Para demostrar esta igualdad es suficiente multiplicar los dos miembros de la ec. (4) por $[\mathbf{I} + \alpha\mathbf{xy}^H]$ y hacer el desarrollo del producto.

Un caso de especial interés es la situación en que $\alpha = -2(y^Hx)^{-1}$. En este caso la matriz $\mathbf{H}$ se denomina de Householder y tiene forma

$$\mathbf{H} = \mathbf{I} - \frac{2}{\mathbf{y}^H\mathbf{x}}\mathbf{xy}^H \tag{5}$$

Como puede ser verificado, usando la ec.(4) $\mathbf{H}^2 = \mathbf{I}$, y por tanto $\mathbf{H} = \mathbf{H}^{-1}$. La propiedad más importante de las matrices de Householder va a ser establecida en el teorema siguiente.

* Si α es igual a $-(\mathbf{y}^H\mathbf{x})^{-1}$, la matriz $\mathbf{I} - (\mathbf{y}^H\mathbf{x})^{-1}\ \mathbf{xy}^H$ es singular, como se comprueba fácilmente por cálculo de los valores propios.

Teorema 2.4

Sea $\mathbf{H}$ una matriz de Householder definida por ec.(5), tal que los vectores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ son dados por

$$\mathbf{x} = \mathbf{v} - \alpha \mathbf{e}_k \qquad \mathbf{y} = \mathbf{w} - \beta \mathbf{e}_k \tag{6}$$

siendo $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ dos vectores no ortogonales cualquiera, $\mathbf{e}_k$ la columna deposición k-ésima de la matriz identidad y $\mathbf{e}_k^T \mathbf{v} \neq 0$, $\mathbf{w}^H \mathbf{e}_k \neq 0$

$$\alpha = \sqrt{\eta}\gamma, \qquad \beta^* = \frac{\sqrt{\eta}}{\gamma} \tag{7}$$

donde

$$\eta = \mathbf{w}^H \mathbf{v}, \qquad \gamma = \frac{\mathbf{e}_k^T \mathbf{v}}{\mathbf{w}^H \mathbf{e}_k} \tag{8}$$

Si $\mathbf{x}$ es ortogonal a $\mathbf{y}$, se cambia α por $-\alpha$ y/o β por $-\beta$. Entonces la matrix $\mathbf{H}$ verifica las igualdades siguientes

$$\alpha \mathbf{H} \mathbf{e}_k = \mathbf{v} \tag{9a}$$

donde

$$\beta^* \mathbf{e}_k^T \mathbf{H} = \mathbf{w}^H \tag{9b}$$

La verificación es sencilla.

Las relaciones (9ab) nos permiten mostrar que las matrices de Householder definidas por la ec.(5) transforman dos vectores en otros proporcionales a columnas (o filas) de la matriz identidad. De hecho, como $\mathbf{H}^2 = \mathbf{I}$, es inmediato obtener

$$\mathbf{H}\mathbf{v} = \alpha \mathbf{e}_k \tag{10a}$$

y

$$\mathbf{w}^H \mathbf{H} = \beta^* \mathbf{e}_k^H \tag{10b}$$

Esto no pasa, si los vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son ortogonales. La matriz $\mathbf{H}$ definida por (5) no existe. Es posible transformar uno sólo de ellos usando la matriz hermitiana correspondiente: $\mathbf{H} = \mathbf{I} - \frac{2}{\mathbf{x}^H \mathbf{x}} \mathbf{x}\mathbf{x}^H$ o $\mathbf{H} = \mathbf{I} - \frac{2}{\mathbf{y}^H \mathbf{y}} \mathbf{y}\mathbf{y}^H$, fácil de obtener.

Estas propiedades nos sirven para hallar la autodescomposición y descomposición en valores signulares de una díada.

Corolario 2.4.1

Sea $\mathbf{E}$ una díada cuadrada (2). Bajo las condiciones del Teorema 2.4 la autodescomposición de $\mathbf{E}$ es

$$\mathbf{E} = \mathbf{H\Lambda H} \tag{11}$$

donde

$$\mathbf{\Lambda} = \mathrm{diag}\left\{ \begin{matrix} 0, 0, \ldots, 0, \mathbf{w}^H\mathbf{v}, 0, \ldots, 0 \\ -\mathrm{pos}\ k- \end{matrix} \right\}$$

La justificación se obtiene de las ecuaciones (9a) y (9b).

En cuanto a la descomposición en valores singulares, es presentada en el corolario siguiente.

Corolario 2.4.2

Existen dos matrices, $\mathbf{G}_v$ y $\mathbf{G}_w$, con las cuales $\mathbf{E}$ (2) tiene la siguiente descomposición

$$\mathbf{E} = \mathbf{G}_v\mathbf{D}\mathbf{G}_w \tag{12}$$

con

$$\mathbf{D} = \mathrm{diag}\left\{ \begin{matrix} 0, 0, \ldots, 0, \rho_v, \rho_w, 0, \ldots, 0 \\ -\mathrm{pos}\ k- \end{matrix} \right\}$$

donde ρ_v y ρ_w son las normas de los vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$, respectivamente.

Para hacer la prueba, definimos $\mathbf{H}_v$ y $\mathbf{H}_w$ como dos matrices de Householder hermíticas $\mathbf{H}_v = \mathbf{I} - \frac{2}{\mathbf{x}^H\mathbf{x}}\mathbf{x}\mathbf{x}^H$ y $\mathbf{H}_w = \mathbf{I} - \frac{2}{\mathbf{y}^H\mathbf{y}}\mathbf{y}\mathbf{y}^H$ con los vectores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ dados por las ec.(6), tales que $\mathbf{H}_v\mathbf{v} = \rho_v e^{i\theta}\mathbf{e}_k$ y $\mathbf{H}_w\mathbf{w} = \rho_w e^{i\phi}\mathbf{e}_k$; θ y ϕ son los argumentos de las componentes k-ésimas de los vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$. Atendiendo a que las matrices de Householder hermíticas son unitarias obtenemos: $\mathbf{v} = \rho_v e^{i\theta}\mathbf{H}_v\mathbf{e}_k$ y $\mathbf{w} = \rho_w e^{i\phi}\mathbf{H}_w\mathbf{e}_k$, de donde se deduce la ec.(12) con $\mathbf{G}_v = e^{i\theta}\mathbf{H}_v$ y $\mathbf{G}_w = e^{-i\phi}\mathbf{H}_w$. La descomposición en valores singulares puede escribirse

$$\mathbf{E} = [e^{i\theta}\mathbf{H}_v] \begin{bmatrix} 0 & & & & & & & & \\ & 0 & & & & & & & \\ & & 0 & & & & & & \\ & & & \cdots & & & & & \\ & & & & \rho_v, \rho_w & & & & \\ & & & & & \cdots & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & & 0 \end{bmatrix} [e^{i\phi}\mathbf{H}_w]^H \tag{13}$$

Vamos a regresar a la suma de una matriz identidad con una díada y veamos como factorizarla.

Teorema 2.5

Sea $\mathbf{E}$ una díada cuadrada. La suma de esta matriz con la matriz identidad es factorizable y se tiene

$$\mathbf{I} + \mathbf{v}\mathbf{w}^H = \mathbf{P}\mathbf{Q} \tag{14a}$$

con

$$\mathbf{P} = \mathbf{H}\mathbf{D} \text{ y } \mathbf{Q} = \mathbf{D}\mathbf{H} \tag{14b}$$

siendo

$\mathbf{H}$ la definida en el Teorema 2.4 y

$$\mathbf{D} = \mathrm{diag}\{\sqrt{1 + \mathbf{w}^H\mathbf{v}},\ 1, \ldots, 1\} \tag{14c}$$

Para demostrarlo nos basta tener en cuenta que $\mathbf{H}\mathbf{H} = \mathbf{I}$ y retomar la autodescomposición de una díada (11) para $k = 1$

$$\mathbf{I} + \mathbf{v}\mathbf{w}^H = \mathbf{I} + \mathbf{H}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{H} = \mathbf{H}[\mathbf{I} + \boldsymbol{\Lambda}]\mathbf{H} = \mathbf{H}\mathbf{D}^2\mathbf{H} = \mathbf{P}\mathbf{Q}$$

donde se deduce el resultado.

Debemos notar que el resultado expresado en las ecs.(14) no es más que la descomposición en valores propios. También es posible obtener una factorización usando una matriz de Householder hermítica, pero en lugar de una diagonal $\mathbf{D}^2$ obtendríamos el producto de una diagonal por una triangular, lo que es menos interesante. El resultado expresado en las ecs.(14) también es útil para obtener las respectivas inversas.

Corolario 2.5.1

La inversa de la suma de la matriz identidad con una díada cuadrada es

$$[\mathbf{I} + \mathbf{v}\mathbf{w}^H]^{-1} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{P}^{-1} \tag{15}$$

$$\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{H},\ \mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{H}\mathbf{D}^{-1} \tag{16}$$

si $\mathbf{w}^H\mathbf{v} \neq 1$.

La justificación es sencilla.

Caso B–matriz diagonal cualquiera

En este apartado se va a considerar el caso de una suma de una matriz diagonal $\mathbf{D}$ no singular con una díada. La factorización de la suma de una diagonal con una díada es fácilmente reducible al caso que hemos visto en el apartado anterior.

Corolario 2.5.2

La factorización de la suma de una diagonal no singular con una díada viene dada por

$$\mathbf{D} + \mathbf{v}\mathbf{w}^H = \mathbf{P}\mathbf{Q} \tag{17}$$

donde

$$\mathbf{P} = \mathbf{D}^{1/2}\mathbf{H}\boldsymbol{\Delta},\ \ \mathbf{Q} = \boldsymbol{\Delta}\mathbf{H}\mathbf{D}^{1/2} \tag{18a}$$

con

$$\boldsymbol{\Delta} = \mathrm{diag}\{\sqrt{1 + \mathbf{w}^H\mathbf{D}^{-1}\mathbf{v}},\ 1, \ldots, 1\} \tag{18b}$$

Para demostrarlo nos basta proceder como sigue

$$\mathbf{D} + \mathbf{v}\mathbf{w}^H = \mathbf{D}^{1/2} + [\mathbf{I} + \mathbf{D}^{-1/2}\mathbf{v}\mathbf{w}^H\mathbf{D}^{-1/2}]\mathbf{D}^{1/2} = \mathbf{D}^{1/2}\mathbf{H}\boldsymbol{\Delta}^2\mathbf{H}\mathbf{D}^{1/2} = \mathbf{P}\mathbf{Q}$$

siendo $\mathbf{H}$ calculada de forma análoga a la indicada en el Teorema 2.4.

Vamos ahora a prestar atención a las descomposiciones en valores propios y singulares. Estas podremos traducir en los dos teoremas siguientes.

Teorema 2.6

Sea $\mathbf{D}$ una matriz diagonal $(L \times L)$ con $M - 1 (M \leq L)$ autovalores no nulos distintos

$$\mathbf{D} = \mathrm{diag}\{d_1, d_2, \ldots, d_{M-1}, 0, \ldots, 0\}$$

$\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ dos vectores $(L \times 1)$ con las primeras $M - 1$ coordenadas no nulas y $\sum\limits_{i=M}^{L} w_i^* v_i \neq 0$.

La suma $\mathbf{D} + \mathbf{v}\mathbf{w}^H$ tiene M valores propios distintos y no nulos, soluciones de la ecuación

$$\sum_{i=1}^{M-1} \frac{w_i^* v_i}{\lambda - d_i} + \frac{1}{\lambda} \sum_{i=M}^{L} w_i^* v_i = 1 \tag{19}$$

a los que corresponden M autovectores linealmente independientes proporcionales a

$$\mathbf{u} = [\lambda\mathbf{I} - \mathbf{D}]^{-1}\mathbf{v}, \quad \mathbf{s}[\lambda\mathbf{I} - \mathbf{D}]^{-1}\mathbf{w} \tag{20}$$

Demostración

Empecemos por calcular los autovalores y autovectores directamente. Vamos a suponer que los elementos no nulos de $\mathbf{D}$ están en las $M-1$ primeras posiciones de la diagonal no siendo necesario que estén ordenados. Tenemos

$$[\mathbf{D}+\mathbf{v}\mathbf{w}^H]\mathbf{u}=\lambda\mathbf{u}, \quad \mathbf{s}^H[\mathbf{D}+\mathbf{v}\mathbf{w}^H]=\lambda\mathbf{s}^H \tag{21}$$

Si $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq d_i \quad (i=1,\ldots,M-1)$, $[\lambda\mathbf{I}-\mathbf{D}]$ es invertible, por lo que si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{s}$ no son nulos $(\mathbf{w}^H\mathbf{u}) \neq 0$, $(\mathbf{v}^H\mathbf{s}) \neq 0$ y

$$\begin{aligned}\mathbf{u}&=(\mathbf{w}^H\mathbf{u})[\lambda\mathbf{I}-\mathbf{D}]^{-1}\mathbf{v}\\ \mathbf{s}&=(\mathbf{v}^H\mathbf{s})[\lambda\mathbf{I}-\mathbf{D}]^{-1}\mathbf{w}\end{aligned}$$

de donde

$$\mathbf{w}^H\mathbf{u}=(\mathbf{w}^H\mathbf{u})\mathbf{w}^H[\lambda\mathbf{I}-\mathbf{D}]^{-1}\mathbf{v}, \quad \mathbf{v}^H\mathbf{s}=(\mathbf{v}^H\mathbf{s})\mathbf{v}^H[\lambda\mathbf{I}-\mathbf{D}]^{-1}\mathbf{w}$$

Finalmente obtenemos la ec.(19) que llamaremos *ecuación característica* , donde v_j y w_j $(j=1,\ldots,M)$ son las componentes de los vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$, respectivamente. Es interesante notar que (19) es equivalente a hacer $\mathbf{w}^H\mathbf{u}=\mathbf{s}^H\mathbf{v}=1\neq 0$ como obliga la demostración. La solución de la ec.(19) nos proporciona los M autovalores. Los correspondientes autovectores se obtienen de (20). Éstos tienen la forma siguiente

$$\mathbf{u}_i=K\left[\frac{v_1}{\lambda_i-d_1},\ \frac{v_2}{\lambda_i-d_2},\ldots\ \ldots\frac{v_{M-1}}{\lambda_i-d_{M-1}},\ \frac{v_M}{\lambda_i},\ \ldots\frac{v_L}{\lambda_i}\right]^T \tag{22a}$$

$$\mathbf{s}_i=K\left[\frac{w_1}{\lambda_i-d_1},\ \frac{w_2}{\lambda_i-d_2},\ldots\ \ldots\frac{w_{M-1}}{\lambda_i-d_{M-1}},\ \frac{w_M}{\lambda_i},\ \ldots\frac{w_L}{\lambda_i}\right]^T \tag{22b}$$

donde $i=i,\ldots,M$. Los M autovalores son necesariamente diferentes de cero y de los d_i $(I=1,2,\ldots,M-1)$. Para probarlos vamos a reescribir la ec.(19) en la forma

$$f(\lambda)=\sum_{i=1}^{M}\frac{w_i^* v_i}{\lambda-d_i}-1=0 \tag{23}$$

cuyo primer miembro es un desarrollo en fracciones simples con numerador y denominador de igual grado. El denominador está completamente definido por sus raíces $d_i(d_M=0)$. El numerador depende de todas variables en juego. Es de destacar que los valores que nos interesan son exactamente los ceros del numerador. En consecuencia $(w_i^* v_i)$ puede considerarse como el residuo de $f(\lambda)$ en $\lambda=d_i$; basta que w_i (o v_i) sea nulo para que la fracción simple $\frac{1}{\lambda-d_i}$ no aparezca. Esto significa que si w_i (o v_i) es nulo, el residuo también lo es siendo, entonces $f(d_i)=0$, y por lo tanto no hay cambio en el autovalor i-ésimo[1]. De acuerdo con la hipótesis del teorema, esto no pasa nunca, lo que justifica la afirmación hecha.

Para relacionar los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{s}$ nos basta tener en cuenta que siendo $\mathbf{U}$ ($\mathbf{S}$) la matriz de autovectores derechos (izquierdos)

$$\mathbf{U\Lambda U}^{-1} = \mathbf{S}^{-H}\mathbf{\Lambda S}^{H} \tag{24a}$$

$$\mathbf{S}^{H}\mathbf{U\Lambda} = \mathbf{\Lambda S}^{H}\mathbf{U} \tag{24b}$$

donde $\mathbf{S}^H\mathbf{U}$ es diagonal, y por lo tanto los autovectores izquierdos y derechos correspondientes a autovalores distintos son ortogonales. Entonces

$$\mathbf{U}^{-1} = (\mathbf{S}^H\mathbf{U})^{-1}\mathbf{S}^H \tag{24c}$$

Es suficiente dividir cada autovector izquierdo por el producto interno entre él y el correspondiente derecho.

Corolario 2.6.1

Si la matriz a diagonalizar fuera de la forma

$$\alpha\mathbf{D} + \beta\mathbf{v}\mathbf{w}^H, \qquad \alpha \neq 0,\ \beta \neq 0 \tag{25}$$

entonces

$$\sum_{i=1}^{M-1} \frac{w_i^* v_i}{\gamma - d_i} + \frac{1}{\gamma}\sum_{i=M}^{L} w_i^* v_i = \delta \tag{26a}$$

con

$$\gamma = \frac{\lambda}{\alpha}, \qquad \delta = \frac{\alpha}{\beta} \tag{26b}$$

Por lo tanto, para calcular los autovalores de (25) basta calcular las soluciones de (26a) y multiplicarlas por α. Los autovectores vienen dados por (20) con los γ en lugar de los λ.

En el teorema hemos hecho la suposición de que las componentes de los vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ no son cero. Si para alguna j la componente j de uno de los vectores $\mathbf{v}$ o $\mathbf{w}$ es nula, el teorema no es aplicable. Normalmente se procede a una deflación[3,4]. El caso extremo corresponde a la situación en que $\mathbf{v}\mathbf{w}^H$ es diagonal

$$\mathbf{v}\mathbf{w}^H = \operatorname{diag}\left\{ \begin{matrix} 0, 0, \ldots, 0, \mathbf{w}^H\mathbf{v}, 0, \ldots, 0 \\ -\text{pos } j- \end{matrix} \right\}$$

en que los autovalores vienen dados por

$$\lambda_j = d_j \qquad j \neq i \qquad \lambda_i = d_i + \mathbf{w}^H\mathbf{v} \tag{27}$$

Para percibir un poco más las cuestiones en torno al problema del cálculo de los valores propios vamos a estudiar el caso hermitiano ($w_i = v_i$) y vamos a suponer que

$v_i \neq 0, \quad (i = 1, \ldots, M)$. En este caso los autovalores son reales positivos. $f(\lambda)$ será entonces

$$f(\lambda) = \sum_{i=1}^{M} \frac{|v_i|^2}{\lambda - d_i} - 1$$

y su derivada siempre negativa. Supóngase que los d_i se encuentran ordenados de forma decreciente, ya sabemos que $f(d_i) = \infty$. Entonces $f(\lambda)$ está constituida por varios tramos donde es decreciente[10]. Esta situación se ilustra en la Figura 1.

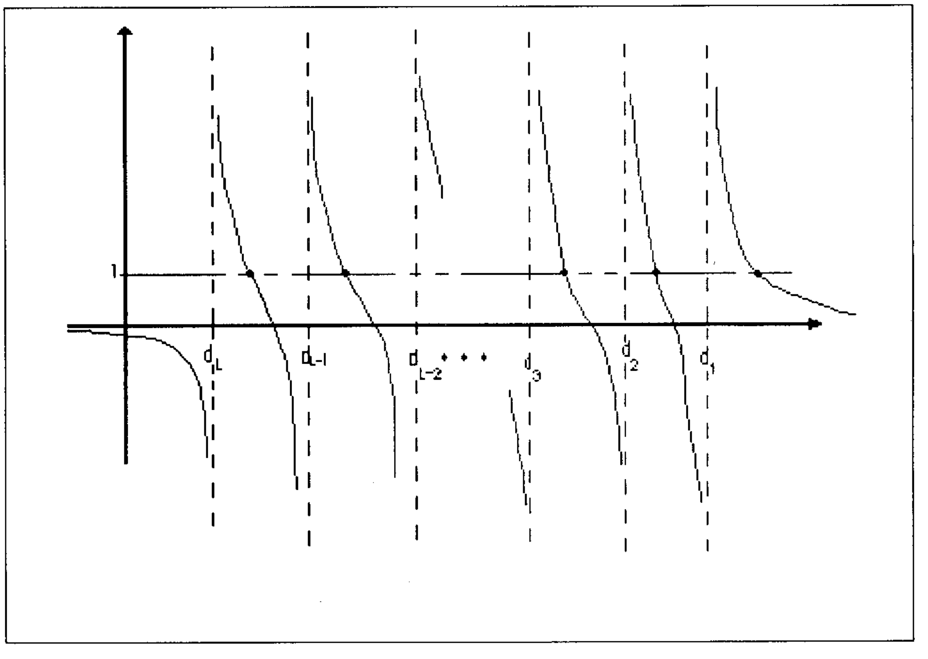

Figura 1. Ilustración de la ecuación (19)

Como $f(\lambda)$ es continua para todo el $\lambda \neq d_i$, $f(\lambda)$, debe ser nula para algún λ, tal que $d_i < \lambda < d_{i-1}$, si $i > 1$. Si $i = 1$, entonces calculando las trazas en $\mathbf{D} + \mathbf{v}\mathbf{w}^H = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^{-1}$ llegamos a la conclusión de que: $d_1 < \lambda < d_1 + v^H v$.

Vamos a ver como aparecen los autovalores dobles. Sea $v_j = 0$. Como hemos visto, $\lambda_j = d_j$. Esto quiere significar que $\lambda_{j+1} \in [d_{j+1},\ d_{j-1}]$. En particular λ_{j+1} puede ser igual a d_j. El proceso puede repetirse dando lugar a autovalores múltiples existiendo técnicas apropiadas a este caso[1,3].

Ahora vamos a obtener resultados análogos a los anteriores para la descomposición en valores singulares.

Teorema 2.7

Sea la matriz

$$\mathbf{D} + \mathbf{v}\mathbf{w}^H \tag{28}$$

donde $\mathbf{D}$ es una matriz $N \times M$ $(N \geq M)$ con $\mathbf{D} = \text{diag}\{d_i,\ i = 1, \ldots, M\}$ con $d_M = 0$ y $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ dos vectores de dimensiones N y M con coordenadas no nulas. La suma $\mathbf{D} + \mathbf{v}\mathbf{w}^H$ tiene M valores singulares reales *distintos y no nulos, soluciones de la ecuación en σ

$$[(\mathbf{w}^H\mathbf{F}_M\mathbf{D}^T\mathbf{v}) - 1](\mathbf{v}^H\mathbf{F}_N\mathbf{D}\mathbf{w}) - 1] - \sigma^2(\mathbf{w}^H\mathbf{F}_M\mathbf{w})(\mathbf{v}^H\mathbf{F}_N\mathbf{v}) = 0 \tag{29}$$

con

$$\mathbf{\Delta}_M = \mathbf{D}^T\mathbf{D},\ \mathbf{\Delta}_N = \mathbf{D}\mathbf{D}^T,\ \mathbf{F}_k = [\sigma^2\ \mathbf{I}_k - \mathbf{\Delta}_k]^{-1}, \quad k = M, N \tag{30}$$

A los valores singulares corresponden M vectores linealmente independientes dados, salvo una normalización por

$$\mathbf{u} = [\sigma^2\mathbf{I}_M - \mathbf{\Delta}_M]^{-1}[\mathbf{D}^T\mathbf{v} + \rho\sigma\mathbf{w}] \tag{31}$$

$$\mathbf{s} = [\sigma^2\mathbf{I}_N - \mathbf{\Delta}_N]^{-1}[\sigma\mathbf{v} + \rho\mathbf{D}\mathbf{w}] \tag{32}$$

con

$$\rho = -[(\mathbf{w}^H\mathbf{F}_M\mathbf{D}^H\mathbf{v}) - 1]/(\sigma\mathbf{w}^H\mathbf{F}_M\mathbf{w}) \tag{33a}$$

$$= -(\sigma\mathbf{v}^H\mathbf{F}_N\mathbf{v})/[(\mathbf{v}^H\mathbf{F}_N\mathbf{D}\mathbf{w}) - 1] \tag{33b}$$

de forma que si $\mathbf{U}(\mathbf{S})$ es la matriz singular derecha (izquierda)

$$\mathbf{D} + \mathbf{v}\mathbf{w}^H = \mathbf{S}\sum\mathbf{U}^H \tag{34}$$

siendo $\sum = \text{diag}\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_M\}$ y $\sigma_i \quad i = 1, \ldots, M$ las soluciones de (29).

Demostración

Sean $\mathbf{s}^H$ y $\mathbf{u}$ los vectores singulares izquierdo y derecho, tenemos

$$[\mathbf{D} + \mathbf{w}\mathbf{v}^H]\mathbf{u} = \sigma\mathbf{s}, \quad \mathbf{s}^H[\mathbf{D} + \mathbf{v}\mathbf{w}^H] = \sigma\mathbf{u}^H \tag{35}$$

desarrollando los primeros miembros en (35) haciendo

$$\alpha = (\mathbf{w}^H\mathbf{u}), \quad \beta = (\mathbf{v}^H\mathbf{s}) \tag{36}$$

y solucionando el sistema de ecuaciones resultantes en orden a $\mathbf{u}$ y $\mathbf{s}$ obtenemos (31) y (32) que multiplicadas por $\mathbf{v}^H$ y $\mathbf{w}^H$, respectivamante, nos dan

* Los valores singulares podrían ser complejos, pero sólo sus módulos quedan determinados; los argumentos serían indeterminados.

$$\alpha = \alpha(\mathbf{w}^H\mathbf{F}_N\mathbf{D}^H\mathbf{v}) + \beta\sigma(\mathbf{w}^H\mathbf{F}_M\mathbf{w}) \tag{37}$$

$$\beta = \alpha\sigma(\mathbf{v}^H\mathbf{F}_N\mathbf{v}) + \beta(\mathbf{v}^H\mathbf{F}_N\mathbf{D}\mathbf{w}) \tag{38}$$

Este sistema sólo obtiene solución no nula, si el determinante fuera nulo resultando de ahí la ec.(29). Por otro lado, $\rho = \beta/\alpha$ se obtiene de (33) y los vectores singulares vienen dados, salvo una normalización, por (31) y (32). Para llegar a la solución de la ec.(29) y concluir la demostración es conveniente transformarla en una ecuación de la forma de (19), por descomposición en fracciones simples, funciones de σ^2. Esta descomposición nos permite mostrar, como anteriormente, que en las condiciones del teorema los valores singulares son distintos de los $\sigma_i (i = 1, 2, \ldots, M)$.

Debe notarse que si $\mathbf{v} = \mathbf{w}$, este algortimo se reduce al de apartado anterior con $\lambda = \sigma^2$. La generalización para matrices generadas de forma similar a representada en la ec.(25) es inmediata, por lo que no la presentamos explícitamente.

APLICACIONES

En este apartado se van a considerar las aplicaciones de lo expuesto en secciones anteriores al análisis de matrices generadas de la forma recursiva expuesta en (39)

$$\mathbf{R}_n = \mathbf{R}_{n-1} + \mathbf{v}_n\mathbf{w}_n^H \qquad n = 1, 2, \ldots, L \tag{39}$$

donde $\mathbf{v}_n$ y $\mathbf{w}_n$ son vectores no nulos. Este tipo de matrices es muy corriente en procesado de señal, donde $\mathbf{R}_n$ es o una matriz de datos o una matriz de covarianza. En el primer caso se pretende en general la obtención recursiva de su SVD. En el segundo se pretende su inversión o hacer su autodescomposición.

Inversión

Teorema 3.1

Sea $\mathbf{R}_n$ una matriz $(N \times N)$ que verifica la ley de formación dada en la ec.(39) donde $\mathbf{v}_n$ y $\mathbf{w}_n$ son dos vectores de dimensiones N. Entonces si $\mathbf{R}_{n-1}$ es invertible y $\mathbf{w}_n^H\mathbf{u}_n \neq -1, \mathbf{R}_n$, también lo es y

$$\mathbf{R}_n^{-1} = (\mathbf{I} - \alpha\mathbf{R}_{n-1}^{-1}\mathbf{v}_n\mathbf{w}_n^H)\mathbf{R}_{n-1}^{-1} \tag{40}$$

con

$$\alpha = \frac{1}{1 + \mathbf{w}_n^H\mathbf{u}_n}, \quad \mathbf{w}_n^H\mathbf{u}_n \neq -1 \tag{41}$$

y

$$\mathbf{u}_n = \mathbf{R}_{n-1}^{-1}\mathbf{v}_n \tag{42}$$

constituyendo estas ecuaciones al algoritmo de Sherman y Morrison[4,9].

Demostración

De la ec.(39) usando la ec.(42) viene

$$\mathbf{R}_n = \mathbf{R}_{n-1}(\mathbf{I} + \mathbf{u}_n\mathbf{w}_n^H) \tag{43}$$

y

$$\mathbf{R}_n^{-1} = [\mathbf{I} + \mathbf{u}_n\mathbf{w}_n^H]^{-1}\mathbf{R}_{n-1}^{-1} \tag{44}$$

donde usando la ec.(4)

$$[\mathbf{I} + \mathbf{u}_n\mathbf{w}_n^H]^{-1} = [\mathbf{I} - \alpha\mathbf{u}_n\mathbf{w}_n^H] \tag{45}$$

con α dado por la ec.(41).

En el caso en que $\mathbf{w}_n^H\mathbf{u}_n = -1$, la matriz $\mathbf{I} + \mathbf{u}_n\mathbf{w}_n^H$ es singular, como hemos visto antes.

Factorización

En este apartado se pretende expresar una matriz $\mathbf{R}_n$ $(N \times N)$ generada según la recursión (39) como el producto de dos matrices.

Teorema 3.2

Sea $\mathbf{R}_n$ una matriz $(N \times N)$ que verifica la ley de formación dada en la ec.(39) con $\mathbf{R}_0 = \alpha\mathbf{I}$, α constante no nula, donde $\mathbf{v}_n$ y $\mathbf{w}_n$ son dos vectores de dimensión N. Entonces $\mathbf{R}_n$ es factorizable en la forma

$$\mathbf{R}_n = \mathbf{P}_n\mathbf{Q}_n^H \tag{46}$$

con

$$\mathbf{P}_n = \mathbf{P}_{n-1}\mathbf{H}_n\mathbf{D}_n, \qquad \mathbf{Q}_n^H = \mathbf{D}_n\mathbf{H}_n\mathbf{Q}_{n-1}^H \tag{47}$$

siendo $\mathbf{H}_n$ y $\mathbf{D}_n$ calculadas como en el Teorema 2.5 y tales que

$$[\mathbf{I} + \mathbf{u}_n\mathbf{s}_n^H] = \mathbf{H}_n\mathbf{D}_n^2\mathbf{H}_n \tag{48}$$

con

$$\mathbf{u}_n = \mathbf{P}_{n-1}^{-1}\mathbf{v}_n, \quad \mathbf{s}_n = \mathbf{Q}_{n-1}^{-H}\mathbf{w}_n, \qquad (\mathbf{s}_n^H\mathbf{u}_n) \neq -1 \tag{49}$$

Demostración

Vamos a tomar una forma inductiva. Para una n qualquiera se hace

$$\mathbf{R}_n = \mathbf{P}_{n-1}\mathbf{Q}_{n-1}^H + \mathbf{v}_n\mathbf{w}_n^H \tag{50}$$

de donde

$$\mathbf{R}_n = \mathbf{P}_{n-1}[\mathbf{I} + \mathbf{u}_n\mathbf{s}_n^H]\mathbf{Q}_{n-1}^H, \qquad n = 2, 3, \ldots \tag{51}$$

con $\mathbf{u}_n$ y $\mathbf{s}_n$ dados por (49). Ahora se usa el Teorema 2.5 obtenido anteriormente. Como es evidente, las matrices $\mathbf{P}_n$ y $\mathbf{Q}_n$ son calculadas recursivamente por (47) con

$$\mathbf{P}_0 = \sqrt{\alpha}\mathbf{I}, \quad \mathbf{Q}_0^H = \sqrt{\alpha}\mathbf{I} \tag{52}$$

o directamente

$$\mathbf{P}_n = \sqrt{\alpha}\prod_{i=1}^{n}\mathbf{H}_i\mathbf{D}_i, \quad \mathbf{Q}_n^H = \sqrt{\alpha}\prod_{i=n}^{1}\mathbf{D}_i\mathbf{H}_i \tag{53}$$

Para calcular $\mathbf{u}_n$ y $\mathbf{s}_n$ en las ecs.(49) necesitamos las inversas $\mathbf{P}^{-1}$ y $\mathbf{Q}^{-1}$ que se pueden calcular también de una forma recursiva que se obtiene directamente de las ecs.(47)

$$\mathbf{P}_n^{-1} = \mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{H}_n\mathbf{P}_{n-1}^{-1}, \qquad \mathbf{Q}_n^{-H} = \mathbf{Q}_{n-1}^{-H}\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{H}_n \tag{54}$$

Su existencia está garantizada, si $(\mathbf{s}_n^H\mathbf{u}_n) \neq -1$ para todo $n = 1, 2, \ldots$

Si para todo el n, $\mathbf{v}_n = \mathbf{w}_n$ (caso hermítico), entonces

$$\mathbf{Q}_n = \mathbf{P}_n, \quad \mathbf{R}_n = \mathbf{P}_n\mathbf{P}_n^H \tag{55}$$

En el caso real $\mathbf{P}_n$ es una raíz cuadrada de $\mathbf{R}_n$.

Autodescomposición

Vamos a suponer que se nos plantea la situación recurrente expresada en la ec.(39) y que la descomposición de $\mathbf{R}_{n-1} = \mathbf{V}_{n-1}\mathbf{D}_{n-1}\mathbf{V}_{n-1}^{-1}$ está disponible. Entonces

$$\mathbf{R}_n = \mathbf{V}_{n-1}[\mathbf{D}_{n-1} + \mathbf{V}_{n-1}^{-1}(\mathbf{v}_n\mathbf{w}_n^H)\mathbf{V}_{n-1}]\mathbf{V}_{n-1}^{-1} \tag{56}$$

Se va a calcular $\mathbf{V}_n$ y $\mathbf{D}_n$, tales que verifiquen (57)

$$\mathbf{R}_n = \mathbf{V}_n\mathbf{D}_n\mathbf{V}_n^{-1} \tag{57}$$

Un cambio de base nos permite expresar $\mathbf{v}_n$ y $\mathbf{w}_n$ en el espacio de los autovectores de $\mathbf{R}_{n-1}$

$$\mathbf{v} = \mathbf{V}_{n-1}^{-1}\mathbf{v}_n \tag{58}$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{V}_{n-1}^{H}\mathbf{w}_n \tag{59}$$

El problema pasa ahora a ser el de descomponer la matriz

$$\mathbf{D}_{n-1} + \mathbf{v}\mathbf{w}^H \tag{60}$$

Para la descomposición de la matriz anterior hemos de usar los resultados del teorema la descomposición presentado anteriormente (Teorema 2.6, ec.(19),(20)). Si la j-ésima componente ($j = 1, \ldots, M$) es cero, no hay cambio en el autovalor y se debe proceder a una deflación.

Sin embargo, hay un problema que tenemos para resolver - el de la creación del subespacio nulo. Los vectores $\mathbf{v}(\mathbf{w})$ son proyecciones de los vectores $\mathbf{v}_n$ $(\mathbf{w}_n)$ según los autovectores de la base correspondiente, filas de $\mathbf{V}^{-1}$ $(\mathbf{V}^H)$ que definen el subespacio $\lambda \neq 0$. Pero $\mathbf{v}_n$ $(\mathbf{w}_n)$ puede no ser vector de tal subespacio, lo que implica que tenga proyección no nula en el subespacio nulo ($\lambda = 0$). Para definir este subespacio necesitamos crear una base para ello. Habiendo infinitas podremos elegir la que tiene un vector paralelo a la componente de $\mathbf{v}_n$ $(\mathbf{w}_n)$ ortogonal al subespacio $\lambda \neq 0$. Esto trae como consecuencia que si la $L - M$ es la dimensión del subespacio $\lambda = 0$, $\mathbf{v}$ $(\mathbf{w})$ tiene $L-M+1$ componentes nulas, por lo que se concluye que los $L-M+1$ correspondientes autovectores no son necesarios. Entonces el procedimiento es el siguiente:

a) Se calculan las proyecciones α_i y β_i de $\mathbf{v}_n$ y $\mathbf{w}_n$ sobre los autovectores $\mathbf{s}_i$ y $\mathbf{u}_i$ izquierdo y derecho, respectivamente.

b) Se forman los vectores

$$\mathbf{d} = \sum_{i=1}^{M-1} \alpha_i \mathbf{u}_i \tag{61a}$$

$$\mathbf{e} = \sum_{i=1}^{M-1} \beta_i \mathbf{s}_i \tag{61b}$$

Nótese que la combinación lineal se hace con las proyecciones sobre la otra base. Los vectores $\mathbf{d}$ y $\mathbf{e}$ pertenecen al subespacio $\lambda \neq 0$.

c) Los vectores

$$\mathbf{u}_M = \mathbf{v}_n - \mathbf{d} \tag{62a}$$

$$\mathbf{s}_M = \mathbf{w}_n - \mathbf{e} \tag{62b}$$

están en el subespacio nulo y pueden servirnos para autovectores correspondientes al autovalor λ_M.

Este procedimiento que nos permite dar una expresión a cualquier vector al crear una base del subespacio $\lambda = 0$ es esencialmente el método de ortogonalización de Gram y Schmidt, que es sabido que tiene algunos problemas numéricos[5]. En situaciones prácticas puede pasarse que los vectores definidos por las ecs.(62a) y (62b) sean solamente residuos debidos a falta de precisión, y por lo tanto no ortogonales a los vectores de las bases. Para intentar que tal no pase se ha usado en la obtención de las ecs.(62a) y (62b) una implementación secuencial doble por subtracción con i creciente y decreciente de cada término de las ecs.(61a) y (61b) y que se describe a continuación para el vector $\mathbf{v}_n$; para el vector $\mathbf{w}_n$ es similar no siendo necesaria su presentación.

a) Sea $\mathbf{t}_0 = \mathbf{v}_n$, *y* una sucesión de vectores

$$\mathbf{t}_j = \mathbf{t}_{j-1} - a_j \mathbf{s}_j \qquad j = 1, 2, \ldots, M-1 \tag{63a}$$

con $a_j = \mathbf{t}_{j-1}^H \, \mathbf{s}_j$.

b) Sea $\mathbf{r}_M = \mathbf{v}_n + \mathbf{t}_{M-1}$, *y* una nueva sucesión de vectores

$$\mathbf{r}_j = \mathbf{t}_{j+1} - b_j \mathbf{s}_j \qquad j = M-1, \ldots, 2, 1 \tag{63b}$$

con $b_j = \mathbf{t}_{j+1}^H \, \mathbf{s}_j$.

c) Si $\mathbf{r}_1 \neq 0$, debe ser normalizado y usado como el vector propio $\mathbf{s}_M$. Si $\mathbf{r}_1 = 0$ o $M - 1$ fuera igual a la dimensión de la base, no hay cambio en la dimensión del subespacio.

d) Las componentes de $\mathbf{v}$ son $v_j = (a_j + b_j)/2$ para $j = 1, 2, \ldots, M-1$ y v_M es igual a la norma de $\mathbf{r}_1$.

La práctica muestra que si la norma de $\mathbf{r}_1$ es muy pequeña, entonces este vector puede ser el resultado de los errores de aproximación numérica, y por lo tanto no sirve para vector de base siendo descartado. La razón es que no es ortogonal a los otros vectores de la base.

Si los vectores $\mathbf{u}_M$ y $\mathbf{s}_M$ no son nulos, después de normalizados, serán los vectores de orden M de las bases. Todo se maneja como si hubiera un vector del subespacio nulo ($\lambda = 0$) que "pasa" al otro ($\lambda \neq 0$). Estas consideraciones nos llevan a conclusión de que para obtener una matriz de rango L hace falta sumar L díadas linealmente independientes.

Descomposición en valores singulares

Se procederá en este apartado a obtener resultados análogos a los anteriores para la descomposición en valores singulares. Igual que antes suponemos las matrices generadas de la forma (39) con $\mathbf{R}_n$ una matriz $(N \times M)$ y $\mathbf{v}_n$ y $\mathbf{w}_n$ dos vectores de dimensiones N y M $(N \geq M)$ y cuyas componentes son números complejos. Se supondrá también que se dispone de la SVD de $\mathbf{R}_{n-1}$

$$\mathbf{R}_{n-1} = \mathbf{V}_{n-1} \sum\nolimits_{n-1} \mathbf{W}_{n-1}^H \tag{64}$$

Las matrices $\mathbf{V}_{n-1}$ y $\mathbf{W}_{n-1}$ son unitarias. Si añadimos una díada a $\mathbf{R}_{n-1}$, obtenemos una matriz $\mathbf{R}_n$ de que se pretende hallar su SVD

$$\mathbf{R}_n = \mathbf{V}_n \sum\nolimits_n \mathbf{W}_n^H \tag{65}$$

Si

$$\mathbf{v} = \mathbf{V}_{n-1}^H \mathbf{v}_n, \quad \mathbf{w} = \mathbf{W}_{n-1}^H \mathbf{w}_n \tag{66}$$

entonces el problema se reduce a la descomposición de

$$\mathbf{D} + \mathbf{v}\mathbf{w}^H \tag{67}$$

con $\mathbf{D} = \sum_{n-1} = \mathrm{diag}\{d_i \quad i = 1, \ldots, n\}$ $n \leq M$, con $d_M = 0$. La solución del problema viene dada por el Teorema 2.7, ecs.(29) a (34).

El caso en que la matriz se crease por adición de columnas se puede considerar un caso particular del anterior en el que el vector $\mathbf{w}_n$ es la columna de orden n de la matriz identidad. Hay un caso muy interesante en aplicaciones al procesado de agregados donde los vectores son muestras de una señal vectorial. En esta situación la matriz es una ventana deslizante, es decir, la primera columna se descarta, las otras se desplazan hacia la izquierda siendo el nuevo vector la última.

Este nuevo problema tiene una solución muy sencilla. Empecemos por multiplicar por la derecha la matriz dada por una matriz de permutación $\mathbf{P}$ dada por

$$P_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i+1 \text{ o } i = N \text{ y } j = 1 \\ 0 & \text{en los casos restantes} \end{cases}$$
$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0100\ldots\ldots00 \\ 0010\ldots\ldots00 \\ 0001\ldots\ldots00 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0000\ldots\ldots01 \\ 1000\ldots\ldots00 \end{bmatrix} \tag{68}$$

Esta matriz sólo intercambia las columnas de $\mathbf{W}_{n-1}^H$ sin destruir la ortogonalidad. La última columna de esta matriz es la antigua. Ahora nos basta añadir la díada

$$(\mathbf{v}_n - \mathbf{r}_M)\mathbf{e}_M^T \tag{69}$$

donde $\mathbf{v}_n$, $\mathbf{r}_M$ y $\mathbf{e}_M$ son respectivamente: la nueva columna, la antigua columna y la columna M-ésima de la matriz identidad. Ahora se aplica el algoritmo atrás presentado.

CONCLUSIONES

Hemos presentado varios algoritmos de análisis recursivo de matrices usando las propiedades de las matrices de rango 1, que o son generalizaciones de otros ya existentes como son los de la inversión y autodescomposición recursivas, o bien son nuevos, como sean los de la factorización y descomposición recursivas. Los algoritmos básicos presentados pueden ser muy útiles en las más variadas situaciones en que se deseen algoritmos adaptativos: voz agregados, análisis espectral etc. Estos algoritmos son muy sencillos, fáciles de implementar, tienen un grado muy elevado de paralelismo, lo que es muy bueno para las implementaciones prácticas. Es posible obtener mejores resultados recurriendo a técnicas adicionales como son por ejemplo la ortogonalización parcial[4] que mejora los algoritmos de autodescomposición y de descomposición en valores singulares.

REFERENCIAS

1. J.R. Bunch, C.P. Nielsen and D.C. Sorensen, "Rank-One Modification of the Symmetric Eigenproblem, *Numerische Mathematik*, Vol. **26**, pp. 26–40, (1989).
2. J.R. Bunch and C.P. Nielsen, "Updating the Singular Value Decomposition", *Numerische Mathematik*, Vol. **26**, pp. 111–124, (1989).
3. R.D. Degroat and R.A. Roberts, "Efficient Numerically Stabilized Rank-One Eigenvalue Updating", *IEEE Trans. on ASSP*, Vol. **33**, 2, (1990).
4. G.H. Golub and C.F. Van Loan, "*Matrix Computations*", John Hopkins University Press, (1983).
5. T. Kailath, "*Linear Systems*", Prentice-Hall, (1980).
6. M.D. Ortigueira and M.A. Lagunas, "A Recursive Algorithm for the Computation of Eigenvalues and Eigenvectors with Application to Array Processing", *Proc. of the Latvian Signal Processing International Conference*, Riga, April, (1990).
7. M.D. Ortigueira and M.A. Lagunas, "A Recursive SVD Algorithm for Array Signal Processing", *Proc. of the EUSIPCO-90*, Barcelona, Spain, September, (1990).
8. M.C. Pease, "*Methods of Matrix Algebra*", Academic Press, (1965).
9. J. Sherman and W.J. Morrison, "Adjustment of an Inverse Matrix Corresponding to Changes in the Elements of a Given Column or a Given Row of the Original Matrix", *Annals of Mathem. Statis.*, Vol. **20**, pp. 256, (1944).
10. J.H. Wilkinson, "*The Algebraic Eigenvalue Problem*", Clarendon Press, Oxford, (1963).