

# SOLUCION DE CAMPOS ALTERNOS DE BAJA FRECUENCIA EN DIELECTRICOS HETEROGENEOS MEDIANTE ELEMENTOS FINITOS

EFRAIN ASENJO  
y  
JUAN JARA

*Departamento de Ingeniería Eléctrica,  
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas,  
Universidad de Chile,  
Santiago, Chile*

## RESUMEN

Se presenta un método para resolver campos eléctricos alternos de baja frecuencia en dieléctricos heterogéneos en que la solución depende tanto de las corrientes de desplazamiento como de las de conducción. El método se basa en el empleo de una aproximación cuasi-estática que permite eliminar el acoplamiento que existe entre el campo eléctrico y el magnético expresado a través de las ecuaciones de Maxwell.

El método se implementa numéricamente mediante la técnica de elementos finitos, definiendo una funcional compleja.

## SUMMARY

A method to solve ac low frequency electric fields in heterogeneous dielectrics, when the solution depends both on the displacement and the conduction currents is presented. The method is based on decoupling Maxwell's equations using a quasi-static approximation.

The method is implemented numerically through the finite elements technique by defining a complex functional.

## INTRODUCCION

Los equipos de alto voltaje alterno normalmente se aíslan con materiales de resistividad eléctrica muy elevada. Por este motivo para calcular el campo eléctrico, en ellos se suelen despreciar las corrientes de conducción (resistivas) frente a las de desplazamiento (capacitivas). Lo anterior porque en dichos sistemas aislantes  $\omega\epsilon \gg \sigma$ , siendo  $\omega$  la frecuencia angular,  $\sigma$  y  $\epsilon$  la conductividad eléctrica y la permitividad del medio respectivamente.

Sin embargo algunos sistemas aislantes se construyen aplicando capas resistivas semiconductoras sobre parte de la superficie de la aislación con el objeto de reducir

Recibido: Marzo 1989

la concentración de los gradientes de voltaje en zonas críticas. En estos casos ya no se pueden despreciar las corrientes de conducción frente a las de desplazamiento y por lo tanto al calcular el campo se debe considerar el carácter fasorial de él. Algo similar ocurre en los aisladores contaminados. En todas estas situaciones al resolver el campo eléctrico  $\mathbf{E}$  se debería tomar en cuenta su acoplamiento con el campo magnético  $\mathbf{H}$  lo que significa una gran complicación en comparación con el cálculo de un campo electrostático en que dicho acoplamiento no existe.

El problema planteado ha sido resuelto mediante el método de elementos finitos incorporando el efecto de las corrientes de conducción através de un modelo circuital de resistencias superpuesto al modelo de campo electrostático<sup>1</sup>.

Una forma más general para resolver el mismo problema consiste en calcular el campo eléctrico utilizando una aproximación cuasi-estática la que permite desacoplar el campo eléctrico del campo magnético. Esta idea fue desarrollada y se implementó numéricamente mediante la técnica de diferencias finitas<sup>2,3</sup>.

En el presente trabajo se implementa numéricamente el último método mediante la técnica de elementos finitos lo cual significa definir una funcional adecuada que considera tanto las corrientes capacitivas como las resistivas.

## PLANTEAMIENTO DEL METODO

Las ecuaciones de Maxwell que rigen el campo electromagnético alterno de frecuencia angular  $\omega$  son :

$$\nabla \times \mathbf{E} = -i\omega\mu\mathbf{H} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \varepsilon\mathbf{E} = \rho \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = \sigma\mathbf{E} + i\omega\varepsilon\mathbf{E} \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (4)$$

en que:

$\mathbf{E}$  Es el vector intensidad de Campo eléctrico complejo.

$\mathbf{H}$  Es el vector intensidad de campo magnético complejo.

$\rho$  Es la densidad de carga volumétrica compleja.

$\sigma$  Es la conductividad y  $\mu$  la permeabilidad del medio.

$i = \sqrt{-1}$ .

Resolver en forma exacta las ecuaciones anteriores es un problema arduo debido al acoplamiento entre el campo eléctrico y el campo magnético. Sin embargo se puede obtener una solución aproximada, para  $\omega$  pequeño, despreciando el campo eléctrico inducido por las variaciones del campo magnético lo que equivale a suponer  $\nabla \times \mathbf{E} = 0$  en reemplazo de la relación (1). Con esta aproximación se logra desacoplar el campo eléctrico del magnético y la solución, llamada cuasi-estática, se reduce a encontrar un campo eléctrico irrotacional tal que  $\mathbf{E} = \nabla\phi$  siendo  $\phi$  el potencial eléctrico complejo<sup>2</sup>.

Como el campo eléctrico es irrotacional, si consideramos que  $\rho = 0$ , el potencial  $\phi$  cumple con la ecuación de Laplace.

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (5)$$

El problema se reduce por lo tanto a encontrar una solución de la ecuación de Laplace que cumpla con las condiciones de contorno en los conductores de potencial conocido y cumpla además con las condiciones de contorno suplementarias en los límites de los materiales dieléctricos. Estas últimas condiciones se pueden obtener de la relación (3) de la siguiente manera:

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{H} = \nabla \cdot [\sigma \mathbf{E} + i\omega \epsilon \mathbf{E}] = 0 \quad (6)$$

De esta última relación se deduce que los límites del dieléctrico se deben conservar las componentes normales del vector  $(\sigma \mathbf{E} + i\omega \epsilon \mathbf{E})$ .

Para aplicar el método de los elementos finitos se debe definir una funcional adecuada al problema que se pretende resolver. Considérese la funcional

$$I = \int \int \int_{\Omega} \frac{1}{2} (\sigma + i\omega \epsilon) \nabla \phi \cdot \nabla \phi d\Omega \quad (7)$$

en que  $\Omega$  es el volumen en que interesa calcular el potencial  $\phi$ .

Expresando  $\nabla \phi$  en coordenadas cartesianas se tiene

$$\nabla \phi = \hat{i} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (8)$$

de donde:

$$\nabla \phi \cdot \nabla \phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)^2 \quad (9)$$

por lo tanto

$$I = \int \int \int_{\Omega} \frac{1}{2} (\sigma + i\omega \epsilon) \left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)^2 \right\} d\Omega \quad (10)$$

$$I = \int \int \int_{\Omega} \frac{1}{2} (\sigma + i\omega \epsilon) \{ (\phi_x)^2 + (\phi_y)^2 + (\phi_z)^2 \} d\Omega \quad (11)$$

$$I = \int \int \int_{\Omega} F(\phi, \phi_x, \phi_y, \phi_z) d\Omega \quad (12)$$

siendo

$$\phi_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad \phi_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad \phi_z = \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

Para que la funcional  $I$  sea estacionaria se debe cumplir la ecuación de Euler<sup>4</sup>

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial \phi_x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial F}{\partial \phi_y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial F}{\partial \phi_z} \right) - \frac{\partial F}{\partial \phi} = 0 \quad (13)$$

Considerando que  $\frac{\partial F}{\partial \phi} = 0$  ya que  $F$  no depende explícitamente de  $\phi$ , la ecuación de Euler se reduce a:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ (\sigma + i\omega\epsilon) \frac{\partial \phi}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ (\sigma + i\omega\epsilon) \frac{\partial \phi}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ (\sigma + i\omega\epsilon) \frac{\partial \phi}{\partial z} \right] = 0 \quad (14)$$

Esta última relación es equivalente a (6) y corresponde aplicarla en los puntos en que hay variaciones de  $(\sigma + i\omega\epsilon)$  o sea en los límites de materiales. Para puntos interiores a un solo medio esta relación se reduce a la ecuación de Laplace (5).

Lo anterior significa que el problema planteado de calcular un campo eléctrico que cumpla con la ecuación  $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ , con las correspondientes condiciones de contorno y además con las condiciones de contorno suplementarias  $\nabla \cdot [(\sigma + i\omega\epsilon)\mathbf{E}] = 0$  en los límites materiales es equivalente a encontrar un valor estacionario de la funcional (7).

## IMPLEMENTACION Y VERIFICACION DEL METODO

El método se implementó para resolver el campo en sistemas aislantes con simetría de traslación y de rotación. Se mostrarán los resultados correspondientes a simetría de rotación por corresponder a la mayoría de los casos que se presentan en la práctica.

Considerando en la zona de interés (plano meridiano) un sistema de coordenadas ortogonales  $\rho, z$  siendo  $z$  el eje de simetría, se subdivide la zona en elementos triangulares (elementos finitos simples) tal como se muestra en la Figura 1.

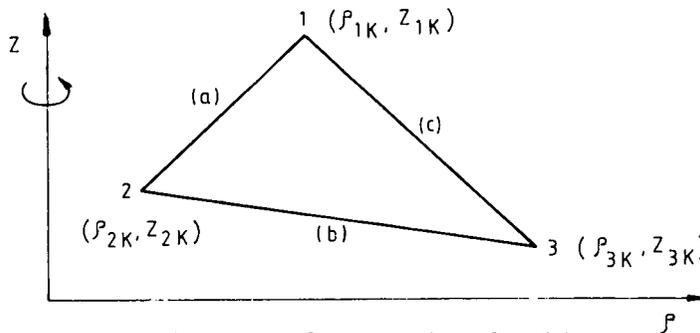


Figura 1. Elemento triangular típico.

Además se supone que dentro de cada elemento triangular el potencial se aproxima por la relación

$$\phi = A + B\rho + CZ \quad (15)$$

Se considera además la existencia de líneas semiconductoras (que corresponden a superficies semiconductoras en el problema tridimensional real) entre los nodos del triángulo. Para ello se supone la existencia de conductividades superficiales finitas  $\sigma_{sa}, \sigma_{sd}, \sigma_{sc}$ , en los lados  $a, b$  y  $c$  del elemento triangular, estando la conductividad superficial  $\sigma_s$  relacionada con la conductividad volumétrica  $\sigma$  a través de la relación  $\sigma_s = \delta\sigma$ , siendo  $\delta$  el espesor de la capa semiconductor. Se supone además que  $\delta \rightarrow 0$  y  $\sigma \rightarrow \infty$  de modo que  $\sigma_s$  es finita.

Imponiendo la condición de minimización de la funcional (7) se obtiene finalmente la siguiente relación de elementos finitos entre el potencial de nodo 1 y los potenciales de los nodos 2 y 3 de todo los elementos triangulares ( $k$ ) que tienen en común el mismo nodo 1 (acomodando la numeración de modo que el nodo común será numerado 1 en todos los triángulos).

$$\begin{aligned} \sum_{\Omega_1} (C_{1k} + D_{ak} - D_{ck})\phi_{1k} + \sum_{\Omega_1} (C_{2k} + D_{bk} - D_{ak})\phi_{2k} + \\ + \sum_{\Omega_1} (C_{3k} + D_{ck} - D_{bk})\phi_{3k} = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

siendo:

$\Omega_1$  Región del plano meridiano constituida por todos los elementos triangulares que poseen en común el nodo 1, incluidas las líneas conductoras, si existen.

$$C_{1k} = \frac{\pi\rho_k(\sigma_k + i\omega\epsilon_k)}{2A_k} \{(Z_{2k} - Z_{3k})^2 + (\rho_{3k} - \rho_{2k})^2\} \quad (17a)$$

$$\begin{aligned} C_{2k} = \frac{\pi\rho_k(\sigma_k + i\omega\epsilon_k)}{2A_k} \{(Z_{3k} - Z_{1k})(Z_{2k} - Z_{3k}) + \\ + (\rho_{1k} - \rho_{3k})(\rho_{3k} - \rho_{2k})\} \end{aligned} \quad (17b)$$

$$\begin{aligned} C_{3k} = \frac{\pi\rho_k(\sigma_k + i\omega\epsilon_k)}{2A_k} \{(Z_{1k} - Z_{2k})(Z_{2k} - Z_{3k}) + \\ + (\rho_{2k} - \rho_{1k})(\rho_{3k} - \rho_{2k})\} \end{aligned} \quad (17c)$$

$$\begin{aligned} D_{ak} = \frac{\pi(\rho_{1k} + \rho_{2k})\sigma_{sak}}{\sqrt{(Z_{2k} - Z_{1k})^2 + (\rho_{2k} - \rho_{1k})^2}} \\ D_{bk} = \frac{\pi(\rho_{2k} + \rho_{3k})\sigma_{sbk}}{\sqrt{(Z_{3k} - Z_{2k})^2 + (\rho_{3k} - \rho_{2k})^2}} \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} D_{ck} = \frac{\pi(\rho_{3k} + \rho_{1k})\sigma_{sck}}{\sqrt{(Z_{1k} - Z_{3k})^2 + (\rho_{1k} - \rho_{3k})^2}} \\ \rho_k = \frac{1}{3}(\rho_{1k} + \rho_{2k} + \rho_{3k}) \end{aligned} \quad (19)$$

$A_k$  = Area del elemento triangular  $k$ .

$\sigma_k$  = Conductividad volumétrica del elemento triangular  $k$ .

$\epsilon_k$  = Permittividad del elemento triangular  $k$ .

- $\omega$  = Frecuencia angular.  
 $\sigma_{sak}$  = Conductividad superficial entre nodo 1 y 2 del elemento triangular  $k$ .  
 $\sigma_{sbk}$  = Conductividad superficial entre nodo 2 y 3 del elemento triangular  $k$ .  
 $\sigma_{sck}$  = Conductividad superficial entre nodo 3 y 1 del elemento triangular  $k$ .

Si en un elemento triangular no existe línea semiconductor (capa semiconductor en el problema tridimensional real) se tiene  $\sigma_s = 0$ . Por ejemplo si en un elemento triangular  $k$  sólo hay líneas semiconductoras entre los nodos 1 y 2 se tendrá  $\sigma_{sb} = \sigma_{sc} = 0$ ,  $\sigma_{sa} \neq 0$  y por lo tanto,  $D_{bk} = D_{ck} = 0$ ,  $D_{ak} \neq 0$ .

Aplicando la relación (16) a todos los elementos triangulares en que se ha dividido la zona de interés, se obtiene un sistema de ecuaciones lineares de la forma

$$\mathbf{A} \mathbf{V} = \mathbf{U} \quad (20)$$

donde:

- $\mathbf{A}$  Es la matriz de coeficientes del sistema.
- $\mathbf{V}$  Es el vector de incógnitas, los potenciales  $\phi_i$  desconocidos.
- $\mathbf{U}$  Es el vector dato que depende de las condiciones de contorno.

A diferencia del caso electrostático en que todos los coeficientes de la matriz  $\mathbf{A}$  son reales, en el caso cuasi-estático algunos coeficientes de  $\mathbf{A}$  son complejos. Por este motivo aunque las condiciones de contorno (elementos de  $\mathbf{U}$ ) sean todas reales, los elementos del vector  $\mathbf{V}$  (potenciales  $\phi_i$ ) en general resultan complejos.

El sistema de ecuaciones lineales (20) se resolvió aplicando el método de descomposición triangular<sup>5</sup>.

La precisión global del método se verificó aplicándolo a casos simples que pueden ser resueltos utilizando conceptos de circuitos eléctricos de parámetros concentrados. Los casos considerados son condensadores cilíndricos con varios materiales dieléctricos de permitividades y conductividades finitas, en serie y con efecto de punta pronunciando de modo de tener un campo fuertemente no-uniforme en alguna parte de la región de interés. El campo de la región distante del efecto de punta se puede verificar comparando el potencial con el que se obtiene aplicando los métodos de resolución de circuitos eléctricos. Se obtuvieron errores inferiores al 1% tanto en la parte real como en la parte imaginaria del potencial.

## APLICACIONES

Para ilustrar las aplicaciones del método se darán los resultados obtenidos en el cálculo del potencial complejo en el plano meridiano de un aislador tipo disco contaminado superficialmente. Se eligió un aislador tipo disco, ya que este posee un perfil bastante complicado, en comparación con otros tipos de aisladores. A pesar de esta dificultad el método de elementos finitos permite aproximar el perfil del aislador en forma muy adecuada.

En la Figura 2 se muestra el perfil del aislador tipo disco. En la Figura 3 se muestra el reticulado de elementos triangulares con el cual se calculó el potencial

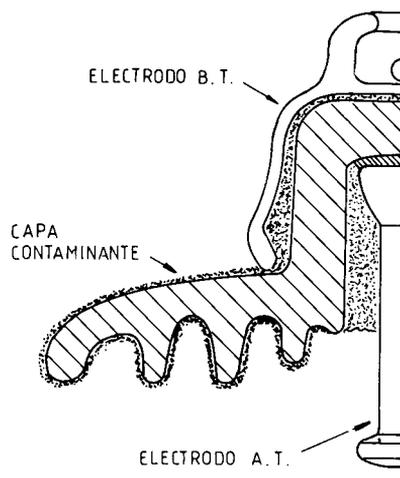


Figura 2. Perfil de aislador tipo disco.

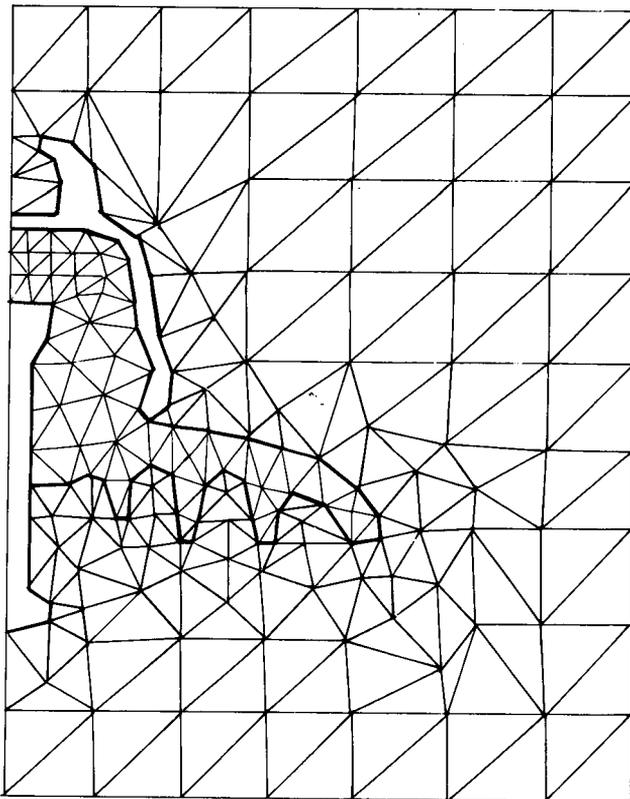


Figura 3. Parte del reticulado de elementos triangulares adaptado al aislador.

eléctrico complejo en el aislador. En el cálculo de potencial complejo se impuso como condición de contorno la existencia de una superficie a potencial cero a gran distancia del aislador, además de las condiciones de contorno  $\phi = 1$  en  $^{\circ}/1$  en el extremo del aislador conectado a alta tensión y  $\phi = 0$  en el extremo del aislador conectado a masa.

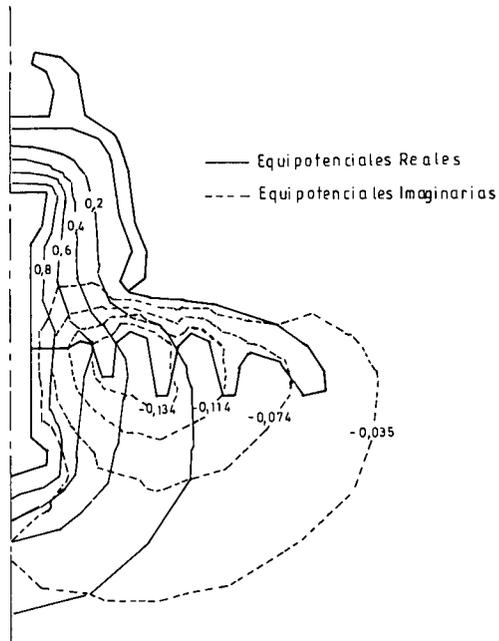


Figura 4. Equipotenciales reales e imaginarias para el aislador cubierto de capa semiconductora  $\sigma_s = 4.125 \mu$  Siemens.

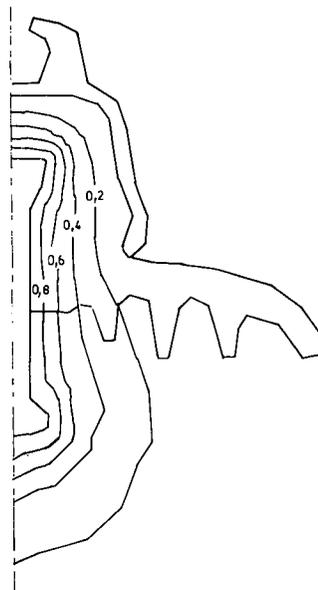


Figura 5. Equipotenciales reales e imaginarias para el aislador cubierto con una capa semiconductora  $\sigma_s = 0.002 \mu$  Siemens.

En la Figura 4 se muestran las equipotenciales reales (líneas llenas) e imaginarias (líneas punteadas) obtenidas en el caso de un aislador cubierto con una capa contaminante de conductividad superficial  $\sigma_s = 4.125\mu$  Siemens. En este caso la parte imaginaria del potencial alcanzó su mayor valor en relación a la parte real cuyo mayor valor es 1 en  $^\circ/1$ .

En la Figura 5 se muestran los resultados obtenidos con la conductividad superficial  $\sigma_s = 0.002\mu$  Siemens en que la solución coincide con la solución electrostática en que se pueden despreciar las corrientes de conducción frente a las corrientes de desplazamiento. Por este motivo el potencial resulta real en todo el espacio.

### CONCLUSIONES

Se ha presentado un procedimiento para resolver campos eléctricos alternos de baja frecuencia en medios con dieléctricos heterogéneos, de amplia aplicación. El método permite considerar medios con materiales dieléctricos de conductividad finita y también materiales dieléctricos cubiertos con capas superficiales semiconductoras. Gracias a esto último es posible calcular el campo eléctrico complejo en aisladores contaminados.

El método se implementó numéricamente para resolver problemas con simetría de traslación o de revolución pero en principio se puede extender a problemas sin simetría con las complicaciones inherentes que tiene dicha implementación en los casos tridimensionales.

### AGRADECIMIENTOS

Este trabajo se realizó gracias al financiamiento otorgado por Fondecyt al Proyecto 0524-88 y por el Departamento Técnico de Investigación de la Universidad de Chile al Proyecto I-2276-34.

### REFERENCIAS

1. O.W. Andersen, "Finite element solution of complex potential electric fields", *IEEE Transaction on Power Apparatus and Systems*, Vol. PAS-9, N°4, pp. 1156-1161, (1977).
2. E. Asenjo y N. Morales, "Low frequency complex fields in polluted insulators", *IEEE Transactions on Electrical Insulation*, Vol. EI-17, N°3, pp. 262-268, (1982).
3. E. Asenjo y N. Morales, "Resolución de campos eléctricos cuasi-estáticos en dieléctricos heterogéneos", *Anais do VIII Congresso Latino-Americano e Ibérico sobre Métodos Computacionais para Engenharia*, Vol. A, pp. 395-402.
4. F.B. Hildebrand, "Methods of Applied Mathematics", Prentice-Hall, Inc., Second Edition, (1965).
5. P.P. Silvester y R.L. Ferrari, "Finite Elements for Electrical Engineers", Cambridge University Press, (1983).