

# Simula  o do comportamento não linear de materiais quase-frágeis via elementos finitos com fissura embebida

Osvaldo L. Manzoli · Eduardo A. Rodrigues · Andre L. Ghamio

Recibido: Diciembre 2010, Aceptado: Marzo 2011  
©Universitat Politécnica de Catalunya, Barcelona, Espa  a 2010

**Resumo.** No presente trabalho desenvolve-se um modelo constitutivo baseado na mecânica do dano contínuo para representar o comportamento de materiais que apresentam diferentes respostas quando solicitados    traço ou    compressão. Obt  m-se uma representación constitutiva atráves da composi  o de modelos simples e específicos para tratar cada tipo de solicita  o. O modelo combinado    capaz inclusive de lidar com carregamentos alternados (traço e compressão), envolvendo fechamento e reabertura de fissuras existentes. Para modelar o comportamento em compressão emprega-se o modelo constitutivo que tem como critério de degrada  o o segundo invariante do tensor de tensão desviador (critério de Von Mises ou J2). Para simular o aparecimento de fissuras de traço, usa-se o modelo de dano com critério de degrada  o baseado na energia de deformación da parte positiva do tensor de tensões ef  etivas. A integra  o dos modelos    feita com base em tensões ef  etivas. O modelo    apto para representar a formación de descontinuidades no campo de deslocamento (descontinuidades fortes) em materiais quase-frágeis. Nesse caso, a região de localiza  o de deformación (zona de processo da fratura) pode ser descrita pelo modelo de dano combinado, com lei de abrandamento de tensões (softening) exponencial, que estabelece dissipa  o compatível com a energia de fratura. A região contínua pode ser descrita pelo modelo de dano J2, com parâmetros ajustados com base no comportamento não linear    compressão. Para a validación do modelo proposto, analisam-se alguns testes b  asicos, focando a capacidade do modelo em re-

presentar os principais aspectos do comportamento de materiais quase-frágeis.

## SIMULATION OF NON-LINEAR BEHAVIOR OF QUASI-BRITTLE MATERIALS USING FINITE ELEMENTS WITH EMBEDDED CRACKS

**Summary** A combined constitutive model based on the Continuum Damage Mechanics is presented to represent the nonlinear behavior of quasi-brittle materials, which present different response when subjected to tension or compression. The constitutive model is a composition of two simple and specific models designed to treat each type of behavior. The combined model is able to deal with alternating load (tension-compression), involving formation, closure and reopening of cracks. To model the compressive behavior, a degradation criterion based on the second invariant of the deviatoric part of the effective stress tensor (Von Mises or J2 criterion) is used. To simulate cracking, a damage model with degradation criterion based on the strain energy associated to the positive part the effective stress tensor is adopted. The combination of the models is made on the basis of the effective stresses. The model is able to represent the formation of discontinuities in the displacement field (strong discontinuities) for quasi-brittle materials. The region of strain localization (fracture process zone) is described by a softening law which establishes dissipation energy compatible with the fracture energy. The continuous region is described by the J2 damage model, with parameters adjusted to describe the compressive nonlinear behavior in compression. Some basic tests are performed to assess the ability of the model to represent the main

aspects of the behavior of quasi-brittle materials. The ability of the model to predict the ductile behavior of reinforced concrete beams is also studied by comparing the numerical results with experimental ones.

## 1. Introdução

Nos últimos anos foram desenvolvidos diversos modelos constitutivos para simular os efeitos das alterações micro-estruturais no comportamento mecânico dos materiais [4,5,7]. A mecânica do dano contínuo, segundo Lemaitre [1], lida com a capacidade de carga de sólidos sem fissuras principais, mas onde o próprio material é danificado devido à presença de microdefeitos, tais como microfissuras e microvazios. Os microdefeitos contribuem para a resposta não-linear pós-pico, que se torna evidente macroscopicamente pela redução de rigidez e resistência do material.

Os modelos constitutivos de dano têm sido usados como uma importante ferramenta de análise da perda de rigidez de estruturas, com a finalidade de prever a degradação do material. Seu interesse consiste na simulação da degradação mecânica de materiais quase-frágeis, tais como concreto, cerâmicas e rochas, para os quais, depois de percorrido o regime elástico, ocorre descendência tensional (abrandamento) a cada incremento de deformação, delineando o comportamento não linear do material. Para o desenvolvimento de ferramentas apropriadas, é indispensável que a propriedade não linear desses materiais seja conhecida e modelada precisamente, especialmente o seu estado de danificação.

No presente trabalho desenvolve-se um modelo constitutivo de dano combinado, através de uma metodologia nova, buscando representar o comportamento diferenciado em tração e em compressão para materiais quase-frágeis. Embora originalmente desenvolvido para representar estados de fissuração difusos, os modelos de dano têm sido empregados para representar os fenômenos degradativos que precedem a formação de fraturas, na chamada zona de processo de fratura. Nesse contexto, a representação dos efeitos da formação das fissuras pode ser modelada através de elementos finitos com fissuras incorporadas, no contexto da Aproximação Contínua de Descontinuidades Fortes (ACDF), que já vêm sendo aplicados com êxito para casos nos quais a não linearidade estrutural provém predominantemente de estados de tração [2,3]. O presente trabalho estende tais formulações para que, no mesmo contexto da ACDF, seja possível também representar o comportamento não linear do material sob estados tensionais de compressão, associados a diferentes mecanismos de degradação.

Esse objetivo de representar de maneira unificada ambos os tipos de comportamentos, conforme o tipo de solicitação, já vem sendo buscado por diferentes autores [4], usando distintos tipos de aproximações, principalmente através do emprego de modelos de fissuras distribuídas [10,11,12], combinadas com modelos baseados na teoria de plasticidade.

No presente trabalho a modelagem é baseada apenas na mecânica do dano contínuo, embora possa ser facilmente adaptada para envolver modelos de plasticidade para representar o comportamento compressivo.

Para o modelo de dano combinado proposto são consideradas duas variáveis escalares de dano, como proposto por [5], que irão representar o comportamento do material em tração e compressão. Consequentemente duas superfícies de dano são definidas, delimitando o regime elástico.

O modelo de dano J2 é formulado segundo o critério de Huber-von Mises, a partir da decomposição do tensor de tensões efetivas em parte hidrostática e desviadora, tomando como critério de degradação o segundo invariante (J2) para delimitar a superfície de dano em compressão. As tensões nominais são então obtidas degradando-se apenas a parte desviadora das tensões efetivas através de uma variável de dano escalar [6]. O modelo de dano à tração, com sua própria variável de dano escalar, é formulado segundo o critério de energia de deformação [5,7], aplicado somente à parte positiva (contendo apenas as tensões principais positivas) do tensor de tensões.

A composição de ambos os modelos independentes para representar o comportamento geral do material se faz através de uma associação em série, usando as tensões efetivas (inicialmente elásticas) já degradadas pelo modelo à compressão como tensões efetivas do modelo de dano à tração.

Para validação do modelo de dano combinado proposto são apresentados, para o caso unidimensional, alguns testes básicos com um elemento submetido à tração, compressão e cargas alternadas.

Analisa-se a capacidade dessas ferramentas para prever o nível de ductilidade de vigas de concreto armado, no qual tanto o crescimento de fissuras de tração quanto o esmagamento do concreto em compressão desempenham um papel importante. Desta forma, essas análises serão baseadas e comparadas com os ensaios experimentais realizados por [8], que estudou influência da variação da taxa de armadura na capacidade de rotação plástica de seções de vigas de concreto armado.

Para o caso tridimensional são apresentados alguns testes básicos, nos quais um cubo é primeiramente submetido à tração, de maneira a formar uma fissura, e posteriormente é submetido à compressão na direção

do plano de fissura, impedindo-se o deslocamento das faces paralelas ao plano de fissura, resultando em um estado de compressão biaxial após o fechamento da fissura produzida pela compressão [4].

## 2. Modelo de dano J2 (compressão)

O modelo é formulado segundo as condições de carga, descarga e recarga associadas ao critério de dano no campo das tensões efetivas, baseado no segundo invariante do tensor das tensões desviadoras.

O tensor das tensões efetivas,  $\bar{\sigma}^J$ , pode ser dividido em parte volumétrica e desviadora,

$$\bar{\sigma}^J = \bar{\mathbf{S}}^J + \bar{\sigma}_m^J \cdot \mathbf{I} \quad (1)$$

onde  $\bar{\mathbf{S}}$  é o tensor de tensão desviador,  $\bar{\sigma}_m$  é a tensão média e  $\mathbf{I}$  é o tensor identidade de segunda ordem.

O critério de dano ou critério de degradação pode ser expresso da seguinte forma:

$$F^J(\tau, r) = \tau^J(\bar{\mathbf{S}}^J) - r_0^J \leq 0 \quad (2)$$

onde a variável escalar  $\tau^J$  é uma função da norma do tensor de tensão desviador,

$$\tau^J = \sqrt{\frac{3}{2} \|\bar{\mathbf{S}}^J\|} \quad (3)$$

A variável  $r^J$  estabelece o limite de dano, controlando a dimensão do domínio elástico. A superfície limite de dano no espaço de tensões efetivas é expressa por  $F^J(\tau^J, r^J) = 0$ . Define-se um valor inicial ao limite de dano,  $r_0^J$ , em função da tensão limite de compressão,  $\sigma_c$ ,

$$r_0^J = B\sigma_c \quad (4)$$

onde o parâmetro  $B$  estabelece o nível de tensão para qual tem início o processo de degradação.

A evolução do limite de dano pode ser expressa de forma fechada, tomando-se sempre o máximo valor atingido por  $\tau^J$  durante o processo de carregamento, ou seja,  $r^J = \max(r^J, \tau^J)$ .

Pode-se definir a evolução da variável de dano em termos da variável limite de dano, estabelecendo uma lei de endurecimento/abrandamento linear,

$$d^J = \frac{r^J - r_0^J}{r^J(1 + H)} \quad (5)$$

ou exponencial

$$D^J = 1 - \left[ A^J \cdot e^{-\frac{1}{A^J} \left( 1 - \frac{r^J}{r_0^J} \right)} + \frac{1}{B} \right] \cdot \frac{r_0^J}{r^J} \quad (6)$$

com os parâmetros de abrandamento linear  $H$  e exponencial  $A^J = 1 - 1/B$ .

Então, aplicando-se o dano somente ao tensor de tensão desviador, a expressão final do tensor de tensão fica dada por:

$$\sigma^J = (1 - d^J) \bar{\mathbf{S}}^J + \bar{\sigma}_m^J \cdot \mathbf{I}$$

que também pode ser expressa como:

$$\sigma^J = \bar{\sigma} - d^J \cdot \bar{\mathbf{S}} \quad (7)$$

## 3. Modelo de dano à tração

Nesse caso decompõe-se o tensor de tensões efetivas em partes positiva e negativa (componentes positivas e componentes negativas do tensor de tensões efetivas, respectivamente),

$$\bar{\sigma}^t = \bar{\sigma}^+ + \bar{\sigma}^- \quad (8)$$

onde  $\bar{\sigma}^+$  e  $\bar{\sigma}^-$  são os tensores de tensão efetiva contendo as tensões principais de tração e de compressão, respectivamente:

$$\bar{\sigma}^+ = \langle \bar{\sigma} \rangle = \sum_{i=1}^3 \langle \sigma_i \rangle \mathbf{p}_i \otimes \mathbf{p}_i \quad (9)$$

onde  $\bar{\sigma}_i$  denota o valor da  $i$ -ésima tensão principal do tensor  $\bar{\sigma}$ ,  $\mathbf{p}_i$  representa o vetor unitário associado com a respectiva direção principal e o símbolo  $\otimes$  denota o produto tensorial. O símbolo  $\langle \cdot \rangle$  representa a função de Macaulay (retornando o valor da expressão quando positiva, e zero em caso contrário)

A componente negativa do tensor de tensão efetiva pode ser obtida fazendo-se:

$$\bar{\sigma}^- = \bar{\sigma} - \bar{\sigma}^+ \quad (10)$$

Para estabelecer as condições de carga, descarga e recarga, define-se o critério de dano empregando-se o conceito de tensão efetiva para tração,

$$F^t(\bar{\tau}^t, r^t) = \bar{\tau}^t(\bar{\sigma}^+) - r^t \leq 0 \quad (11)$$

onde  $\bar{\tau}^t$  retorna um valor escalar em função da componente positiva das tensões efetivas.

Adota-se a norma energética do tensor:

$$\bar{\tau}^t = \sqrt{\bar{\sigma}^+ : \mathbf{C}^{-1} : \bar{\sigma}^+} = \bar{\tau}^t(\bar{\sigma}^+) \quad (12)$$

onde  $\mathbf{C}^{-1}$  é o tensor constitutivo elástico isotrópico de quarta ordem.

A variável  $r^t$  estabelece o limite de dano, controlando a dimensão do domínio elástico no espaço das

**Tabela 1.** Algoritmos para o modelo de dano combinado

Modelo de dano J2 ( $\Sigma^J$ )	Modelo de dano somente à tração ( $\Sigma^t$ )
Entrada: $\mathbf{C}, \sigma_c, H, d_n^J, r_n^J, \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}$	Entrada: $\mathbf{C}, \sigma_t, d_n^J, r_n^J, \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^J$
Saída: $d_{n+1}^J, r_{n+1}^J, \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^J$	Saída: $d_{n+1}^t, r_{n+1}^t, \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^t$
(1) Calcular $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^J = \mathbf{C} : \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}$	(1) Assumir $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^t = \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^J$
(2) Calcular $\tau_{n+1}^J = \sqrt{\frac{3}{2}} \ \bar{\mathbf{S}}_{n+1}^J\ $	Calcular $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^t = \langle \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^+ \rangle$
(3) Verificar se $\tau_{n+1}^J = r_n^J$	(3) Calcular $\tau_{n+1}^t = \sqrt{\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^+ : \mathbf{C}^{-1} : \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^+}$
VERDADEIRO: $r_{n+1}^J = \tau_{n+1}^J$	(4) Verificar se $\tau_{n+1}^t > r_n^t$
FALSO: $r_{n+1}^J = r_n^t$	VERDADEIRO: $r_{n+1}^t = \tau_{n+1}^t$
(4) Calcular	FALSO: $r_{n+1}^t = r_n^t$
$d_{n+1}^J = \frac{r^J - r_0^J}{r^J(1+H)}$	(5) Calcular $d_{n+1}^J = 1 - \left( \frac{r_0^t e^{A\left(1 - \frac{r_0^t}{r^t}\right)}}{r^t} \right)$
(5) Calcular a tensão final:	(6) Calcular a tensão final:
$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^J = (1 - d_{n+1}^J) \cdot \bar{\mathbf{S}}_{n+1}^J + (\bar{\boldsymbol{\sigma}}_m^J) \cdot \mathbf{I}$	$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^t = \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^t - d_{n+1}^t \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^+$

tensões efetivas. O limite de dano é delimitado pela superfície  $F^t(\tau^t, r^t) = 0$ . O valor inicial do limite de dano é expresso em termos da resistência à tração,  $\sigma_t$ ,

$$r_0^t = \frac{\sigma_t}{\sqrt{E}}. \quad (13)$$

Define-se a evolução da variável de dano para tração em função da variável limite de dano,

$$d^t(r^t) = 1 - \frac{r_0^t}{r^t} e^{A\left(1 - \frac{r^t}{r_0^t}\right)} \quad (14)$$

que estabelece uma lei de abrandamento exponencial, em termos do parâmetro de abrandamento exponencial,  $A$ .

Portanto, a lei constitutiva finalmente pode ser expressa como:

$$\boldsymbol{\sigma}^t = (1 - d^t) \bar{\boldsymbol{\sigma}}^+ + \bar{\boldsymbol{\sigma}}^-$$

ou

$$\boldsymbol{\sigma}^t = \bar{\boldsymbol{\sigma}} - d^t \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}}^+ \quad (15)$$

#### 4. Modelo de dano combinado

Os modelos de dano foram expressos a partir das tensões efetivas, que até agora não foram definidas. A Tabela 1 resume as etapas de cálculo dos dois modelos, em um processo incremental, no qual calculam-se as tensões e as variáveis do modelo constitutivo no passo de carga  $n + 1$ , a partir das deformações desse passo e das variáveis de estado do modelo no passo anterior,  $n$ .

A composição entre os modelos é feita em série, aplicando-se primeiramente o modelo de dano J2, empregando-se como tensões efetivas as tensões puramente elásticas, calculadas a partir das deformações,  $\boldsymbol{\epsilon}$ ,

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}^J = \mathbf{C} : \boldsymbol{\epsilon} \quad (16)$$

Posteriormente aplica-se o modelo de dano à tração, admitindo-se que as tensões efetivas para esse modelo são as tensões degradadas pela aplicação do modelo de dano J2, ou seja:

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}^t = \boldsymbol{\sigma}^J \quad (17)$$

Portanto, a lei constitutiva para o modelo combinado pode ser expressa da seguinte forma:

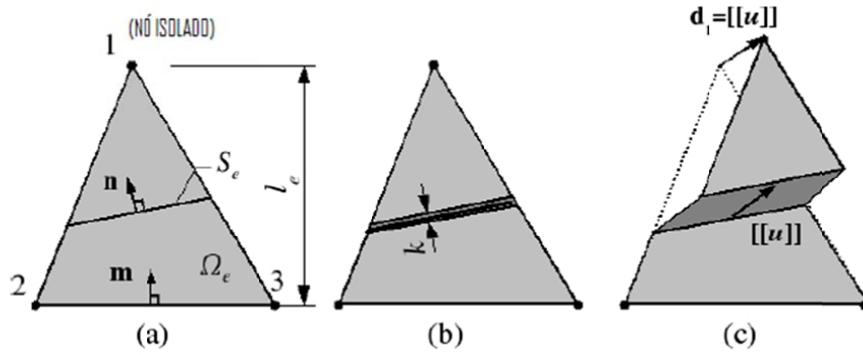
$$\boldsymbol{\sigma} = \Sigma^t(\Sigma^J(\bar{\boldsymbol{\sigma}}^J)) \quad (18)$$

onde  $\Sigma^J$  e  $\Sigma^t$  representam a relação constitutiva para o modelo de dano J2 e a relação constitutiva somente à tração, respectivamente.

O modelo resultante é capaz de representar as principais características do comportamento de materiais quase-frágeis, submetidos a diferentes estados tensionais.

#### 5. Elemento finito com banda de localização embebida

Considere-se o elemento triangular com três nós de domínio  $\Omega_e$ , comprimento  $l_e$ , com uma banda de localização de deformações,  $S_e$ , de largura  $k$ , que divide o



**Figura 1.** Elemento finito de três nós com banda de localização embebida (Manzoli & Shing [2])

elemento em duas partes, isolando o nó 1 dos nós 2 e 3, como mostra a Figura 1.

Um salto no campo de deslocamento,  $[[u]]$ , resultante sobre  $S_e$  produz um movimento relativo de corpo rígido, levando aos seguintes deslocamentos nodais (como pode ser visto na Figura 1c),

$$\mathbf{d}_1 = [[\mathbf{u}]]; \quad \mathbf{d}_2 = 0; \quad \mathbf{d}_3 = 0 \quad (19)$$

onde  $\mathbf{d}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) representa o vetor deslocamentos nodais do nó  $i$ , produzido pelo salto no campo de deslocamento.

A deformação na parte contínua,  $\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}\}$ , pode ser obtida pela relação deformação-deslocamento convencional do elemento finito,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{B}_i (\mathbf{D}_i - \mathbf{d}_i) = \sum_{i=1}^3 \mathbf{B}_i \mathbf{D}_i - \mathbf{B}_1 [[\mathbf{u}]] = \mathbf{BD} - \boldsymbol{\varepsilon}^R \quad (20)$$

onde  $\mathbf{D}_i$  representa o vetor de deslocamentos nodais totais,  $\mathbf{B}_i$  é a matriz que estabelece a relação deformação-deslocamento e  $\boldsymbol{\varepsilon}^R = \mathbf{B}_1 [[\mathbf{u}]]$  está associada com a deformação devido ao salto no campo de deslocamento e que proporciona um relaxamento da parte contínua.

Sejam os vetores  $\mathbf{n} = [n_x, n_y]^T$  normal à interface e  $\mathbf{m} = [m_x, m_y]^T$  normal ao lado do elemento oposto ao nó isolado, como mostra à Figura 1a. A deformação devido ao salto resultante no campo de deslocamento pode ser escrito como:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^R \\ \varepsilon_y^R \\ \gamma_{xy}^R \end{Bmatrix} = \frac{1}{l_e} \begin{bmatrix} m_x & 0 \\ 0 & m_y \\ m_y & m_x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} [[u]]_x \\ [[u]]_y \end{Bmatrix} = \frac{\mathbf{M}}{l_e} [[\mathbf{u}]] \quad (21)$$

onde  $\mathbf{M}$  é a matriz formada pelas componentes do vetor  $\mathbf{m}$  e  $l_e$  é a distância entre o nó isolado e o lado oposto, como mostra a Figura 1a.

A correspondente tensão,  $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}^T$  na região contínua pode ser expressa da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\sigma} = \Sigma^J (\boldsymbol{\varepsilon}) = \Sigma^J \left( \mathbf{BD} - \frac{\mathbf{M}}{l_e} [[\mathbf{u}]] \right) \quad (22)$$

onde  $\Sigma^J$  representa o modelo constitutivo de dano J2 (modelo de dano que usa como critério de degradação Von Mises ou Drucker-Prager). Portanto, o vetor das forças internas, correspondente ao elemento finito de três nós, com deformação e tensão na região contínua constante, de área  $A_e$ , fica dado por:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{int} &= \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega_e = \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} A_e \\ &= \mathbf{B}^T \Sigma^J \left( \mathbf{BD} - \frac{\mathbf{M}}{l_e} [[\mathbf{u}]] \right) A_e \end{aligned} \quad (23)$$

A deformação e a correspondente tensão na banda de localização de deformações podem ser escritas da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_S = \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\mathbf{N}}{k} [[\mathbf{u}]] = \mathbf{BD} - \frac{\mathbf{M}}{l_e} [[\mathbf{u}]] + \frac{\mathbf{N}}{k} [[\mathbf{u}]] \quad (24)$$

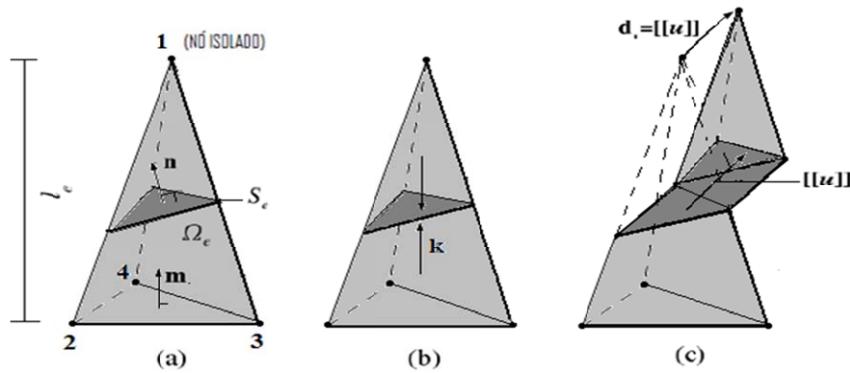
$$\boldsymbol{\sigma}_S = \Sigma^C (\boldsymbol{\varepsilon}_S) \quad (25)$$

onde  $k$  representa a largura da banda de localização de deformações,  $\Sigma^C$  representa a relação constitutiva combinada, ou seja, na região de localização o critério de degradação é segundo o modelo de dano combinado,  $\mathbf{N}$  é uma matriz obtida a partir das componentes do vetor normal  $\mathbf{n}$ , ou seja:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y \\ 0 & n_y & n_x \end{bmatrix} \quad (26)$$

As forças de superfície na região de localização de deformação devem estar em equilíbrio com as forças calculadas na adjacência (pontos na região contínua que faz fronteira com a região de localização de deformação), ou seja, no espaço vetorial de tensões deve-se ter:

$$\mathbf{N}^T (\boldsymbol{\sigma}_S - \boldsymbol{\sigma}) = 0 \quad (27)$$



**Figura 2.** Elemento finito tetraédrico de quatro nós com banda de localização embebida

Substituindo as expressões (22) e (25) em (27), tem-se:

$$\mathbf{N}^T \Sigma^C \left( \mathbf{BD} - \frac{\mathbf{M}}{l_e} [[\mathbf{u}]] + \frac{\mathbf{N}}{k} [[\mathbf{u}]] \right) - \mathbf{N}^T \Sigma^J \left( \mathbf{BD} - \frac{\mathbf{M}}{l_e} [[\mathbf{u}]] \right) = 0 \quad (28)$$

O salto  $[[\mathbf{u}]]$  no elemento pode ser obtido resolvendo-se a Eq.(28), para um determinado estado de deformação, através do método iterativo de Newton-Raphson, que permite uma aproximação melhorada a partir da resposta da interação interior, buscando-se a solução da Eq.(29) por meio da fórmula recursiva da Eq.(30),

$$\mathbf{F}([[\mathbf{u}]]) = \mathbf{N}^T \left( \Sigma^C \left( \hat{\boldsymbol{\epsilon}} + \left( \frac{\mathbf{N}}{k} - \frac{\mathbf{M}}{l_e} \right) [[\mathbf{u}]] \right) - \Sigma^J \left( \hat{\boldsymbol{\epsilon}} - \frac{\mathbf{M}}{l_e} [[\mathbf{u}]] \right) \right) = 0 \quad (29)$$

$$[[\mathbf{u}]]^{i+1} = [[\mathbf{u}]]^i - \left[ \frac{\partial \mathbf{F}([[\mathbf{u}]]^i)}{\partial [[\mathbf{u}]]^i} \right]^{-1} \mathbf{F}([[\mathbf{u}]]^i) \quad (30)$$

onde  $\hat{\boldsymbol{\epsilon}} = \mathbf{BD}$  é a deformação regular do elemento e a derivada da Eq.(29) é expressa da seguinte forma:

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial [[\mathbf{u}]]} = \mathbf{N}^T \left( \Sigma^{C'} \left( \frac{\mathbf{N}}{k} - \frac{\mathbf{M}}{l_e} \right) + \Sigma^{J'} \frac{\mathbf{M}}{l_e} \right) \quad (31)$$

onde  $\Sigma^{C'} = \partial \Sigma^C / \partial \boldsymbol{\epsilon}$  e  $\Sigma^{J'} = \partial \Sigma^J / \partial \boldsymbol{\epsilon}$  são as matrizes constitutivas tangentes do modelo combinado e do modelo  $J_2$ , respectivamente.

Uma vez calculadas as componentes do salto através do processo interativo, as tensões no elemento podem ser obtidas por meio da Eq.(22). Outros resultados obtidos com este modelo podem ser vistos em Gamino *et al.* [10].

A formulação apresentada pode ser estendida para elementos tridimensionais tetraédricos de quatro nós (Figura 2), tomando-se:

$$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}\}^T \quad (32)$$

$$\boldsymbol{\epsilon} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \varepsilon_y, \gamma_{zy}, \gamma_{xz}\}^T \quad (33)$$

$$[[\mathbf{u}]] = \{[[u]]_x, [[u]]_y, [[u]]_z\}^T \quad (34)$$

$$\mathbf{N}^T = \begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y & 0 & 0 & n_z \\ 0 & n_y & n_x & 0 & n_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n_z & n_y & n_x \end{bmatrix} \quad (35)$$

$$\frac{\mathbf{M}^T}{l_e} = \begin{bmatrix} m_x & 0 & m_y & 0 & 0 & m_z \\ 0 & m_y & m_x & 0 & m_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_z & m_y & m_x \end{bmatrix} \quad (36)$$

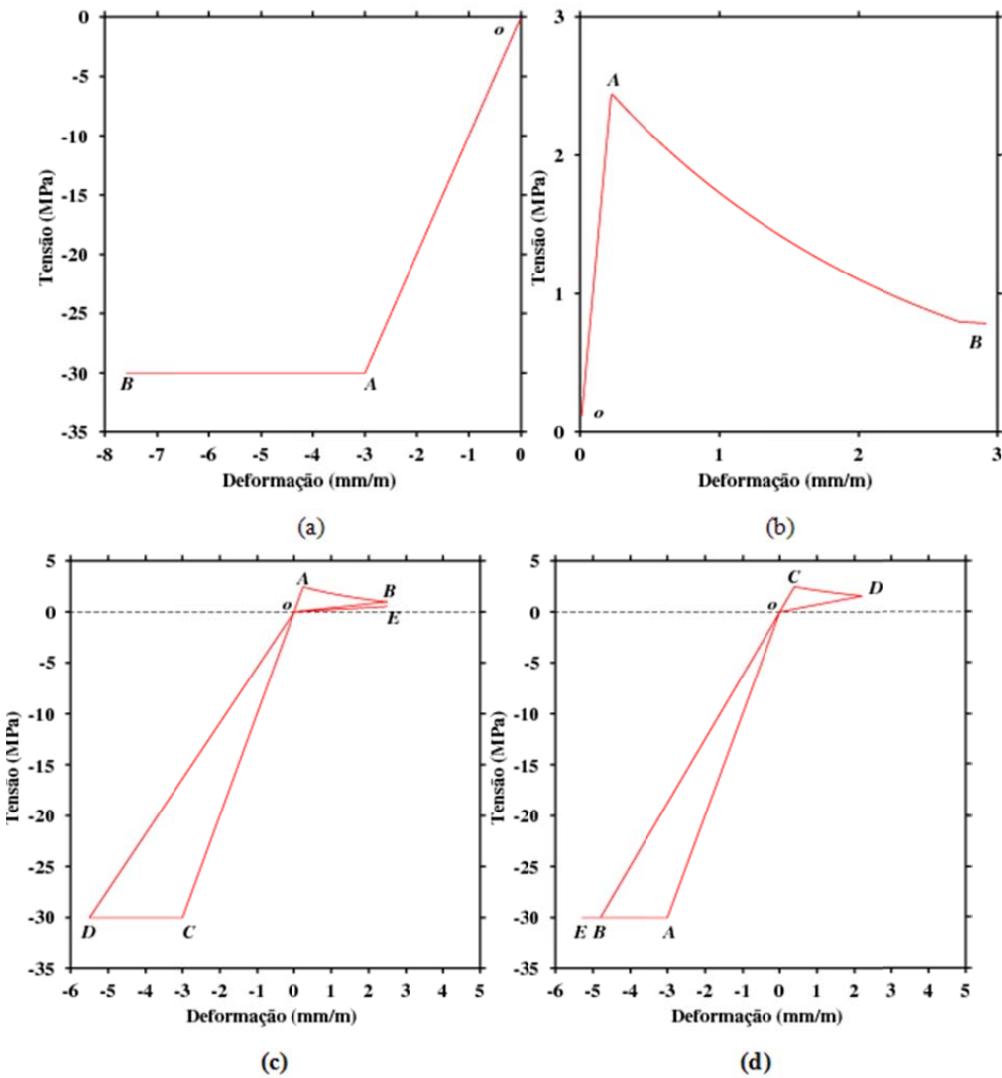
onde, nesse caso,  $m_x$ ,  $m_y$  e  $m_z$  são as derivadas, com respeito às coordenadas espaciais, da soma das funções de forma convencionais associadas aos nós isolados, ou seja, aos nós separados dos demais pelo plano da banda de localização. Note que para o elemento de quatro nós, o plano da banda de localização pode separar um ou dois nós dos demais.

## 6. Resultados

### 6.1. Testes unidimensionais

A fim de ilustrar o comportamento do modelo, segundo o algoritmo apresentado na Tabela 1, simulou-se estados uniaxiais de tração, de compressão e alternados, impondo-se incrementos de deformação constantes. Assumiu-se o módulo de endurecimento/abrandamento nulo para o modelo  $J_2$ ,  $H = 0,0$ ,  $B = 1,0$ , e o parâmetro de abrandamento exponencial do modelo à tração  $A = 0,4$ . As propriedades do material usadas foram: módulo de elasticidade  $E = 10,0$  GPa, resistência à tração  $\sigma_t = 2,45$  MPa e resistência à compressão,  $\sigma_c = 30,0$  MPa.

Os resultados são apresentados na Figura 3, com o material submetido à compressão uniaxial (Figura 3a)



**Figura 3.** Curva tensão *versus* deformação: (a) compressão, (b) tração, (C) tração compressão e (d) compressão tração

e à tração uniaxial (Figura 3b), assim como com solicitações alternadas (Figura 3c e Figura 3d).

Na Figura 3a, o seguimento  $\overline{OA}$  corresponde ao regime elástico linear, com a tensão proporcional à deformação, sem evolução das variáveis de dano ( $\dot{d}^J = 0, \dot{d}^t = 0$ ). No seguimento  $\overline{AB}$ , o material está no regime elasto-degradável perfeito, já que  $H = 0$ , com evolução somente da variável de dano  $J2$ , ( $\dot{d}^t = 0, \dot{d}^J \neq 0$ ). Na Figura 3b tem-se a curva tensão *versus* deformação, para o material submetido à tração uniaxial, com as tensões proporcionais às deformações (regime elástico) no seguimento  $\overline{OA}$  ( $\dot{d}^J = 0, \dot{d}^t = 0$ ). No seguimento  $\overline{AB}$ , tem-se o regime elasto-degradável com abrandamento exponencial e evolução da variável de dano à tração ( $\dot{d}^J = 0, \dot{d}^t \neq 0$ ).

A curva tensão *versus* deformação, mostrada na Figura 3c, corresponde à resposta quando o material é submetido primeiramente à tração e posteriormente à compressão. No processo de carregamento em tração, o material está no regime elástico no trecho  $\overline{OA}$  e em processo de degradação no trecho  $\overline{AB}$ , com abrandamento exponencial. No trecho  $\overline{BO}$ , o processo é de descarregamento com dano à tração não nulo e sem evolução das variáveis de dano. Na transição do processo de tração para compressão, observa-se uma recuperação da rigidez do material, caracterizando o regime elástico até o material atingir a resistência à compressão, trecho  $\overline{OC}$ . No trecho “pós-pico”, tem-se o processo elasto-degradável perfeito ( $\overline{CD}$ ), com evolução da variável de dano do modelo  $J2$ , promovendo a perda de rigidez do

material, que pode ser observado no processo de descarregamento mostrado no seguimento  $\overline{DO}$ . Quando o processo passa de compressão para tração, o comportamento de material reflete a perda de rigidez ocorrida em tração e em compressão (seguimento  $\overline{OE}$ ).

Na Figura 3d mostra-se a resposta quando o material é primeiramente submetido à compressão e posteriormente à tração (carregamento alternado inverso), apresentando compatibilidade com o carregamento alternado da Figura 3c. O regime é elástico linear no seguimento  $\overline{OA}$ , em processo de degradação (regime elastodegradável perfeito) no seguimento  $\overline{AB}$ , com evolução da variável de dano do modelo J2, e em processo de descarregamento no seguimento  $\overline{BO}$ . Na transição do processo de compressão para tração o material não recupera totalmente a rigidez, seguimento  $\overline{OC}$ , já que este traz a perda de rigidez devido à degradação PersonNameProductIDem compress?o. Noem compress?o. Noem compressão. No trecho  $\overline{CD}$ , o processo é de degradação, abrandamento exponencial, com evolução do dano à tração. Novamente, tem-se o descarregamento, seguimento  $\overline{DO}$ , passando para o processo de carregamento em compressão, trecho  $\overline{OB}$ , no qual recupera-se a rigidez correspondente ao estado de compressão. O material volta novamente a danificar em compressão quando é atingida a resistência à compressão.

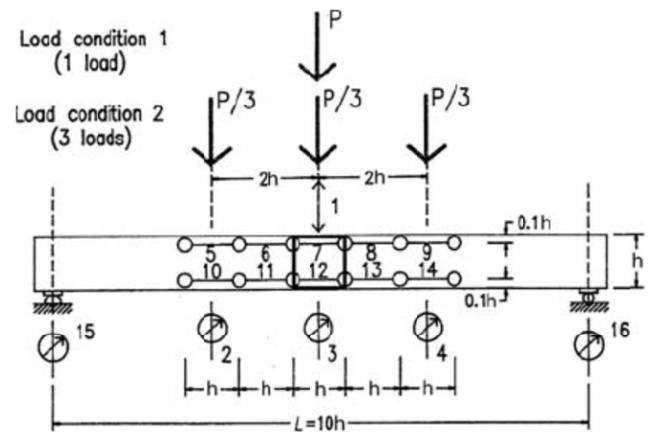
A recuperação da rigidez do material na passagem do processo de tração para compressão representa os efeitos decorrentes do fechamento das falhas e microfissuras, fazendo com que o material readquira suas propriedades mecânicas.

## 6.2. Testes bidimensionais

A fim de investigar o comportamento do modelo constitutivo de dano combinado, analisa-se capacidade de rotação plástica de vigas de concreto armado, tentando reproduzir os testes experimentais reportados por Bosco & Debernardi [8].

Dentre os testes, escolheram-se os referentes à viga de comprimento  $L = 2000$  mm, altura  $h = 200$  mm e largura  $b = 100$  mm, armadas com estribos de diâmetro de 6 mm espaçados de 15 cm. As taxas de armadura longitudinal de tração,  $p_t$ , e de compressão,  $p_c$ , em relação a secção transversal, são de 0,57% e 0,25% (viga V0,57) para o primeiro teste, 1,13% e 0,50% (viga V1,13) para o segundo teste e 1,71% (viga V1,71) para o terceiro teste, respectivamente. O esquema do teste é ilustrado na Figura 4, que por questões de simetria, para o modelo numérico tem apenas sua metade modelada.

A Figura 5 mostra a malha de elementos finitos, a forma de distribuição das barras de aço e estribos e



**Figura 4.** Modelo geométrico da viga (Bosco & Debernardi [8])

as condições de contorno para o modelo numérico da viga. O concreto é representado com elementos finitos triangulares de três nós, enquanto que as barras da armadura são representadas com elementos lineares de dois nós, conectados aos nós dos elementos sólidos. Para a obtenção da curva estrutural (momento-rotação) o processo de carregamento foi realizado controlando-se o deslocamento vertical do ponto de carregamento situado na seção central (ver Figura 5).

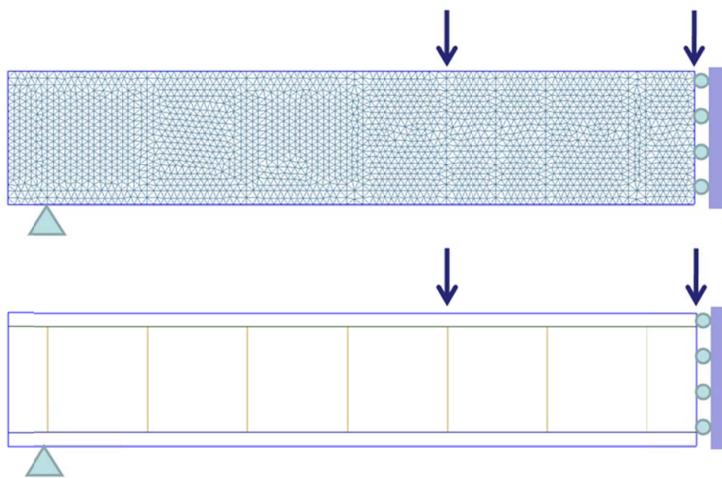
Para representar o comportamento não linear do concreto utilizou-se o modelo de dano composto. Assumiu-se o módulo de endurecimento/abrandamento  $H = -0,01$  para o modelo J2,  $B = 1,0$ , e o parâmetro de abrandamento exponencial do modelo à tração  $A = 0,025$ . As propriedades do material usadas foram: módulo de elasticidade  $E = 34,690$  GPa, coeficiente de Poisson  $\nu = 0,2$ , resistência à tração  $\sigma_t = 2,66$  MPa e resistência à compressão,  $\sigma_c = 26,60$  MPa.

Para o aço, assumiu-se comportamento elástico-perfeitamente plástico. As propriedades do material usadas foram: módulo de elasticidade  $E = 200,0$  GPa, coeficiente de Poisson  $\nu = 0,2$  e resistência à tração igual à compressão,  $\sigma = 562,0$  MPa.

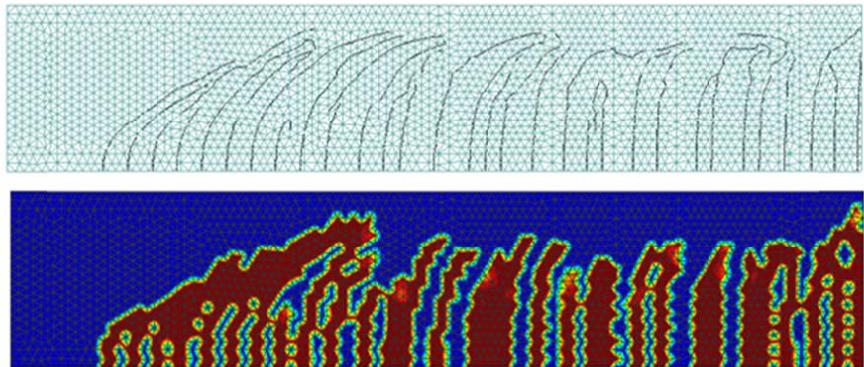
O padrão de fissuras da viga V1,13 obtido numericamente pode ser observado na Figura 6, na qual são mostrados as linhas de fissuras incorporadas e o panorama da variável de dano à tração.

Na Figura 7 apresentam-se as curvas momento x rotação para as diferentes taxas de armadura. Observa-se que os resultados numéricos reproduzem bem o comportamento experimental, caracterizado pela redução da ductilidade com o aumento da armadura longitudinal.

Um fator importante da modelagem é a capacidade de representar a ruptura por esmagamento do concreto.



**Figura 5.** Malha de elementos finitos, distribuição geométrica das barras e estribos de aço e as condições de contorno da viga



**Figura 6.** Padrão de fissuras proporcionado pelas linhas de fissuras incorporadas e pela variável de dano à tração da viga V1,13

to, que de fato define a máxima rotação que pode ser atingida após o escoamento da armadura de tração. A Figura 8 mostra o panorama do dano à compressão no final da análise da viga, quando a região comprimida sofre esmagamento, que se caracteriza por um mecanismo de deslizamento de uma cunha delimitada por bandas cisalhantes.

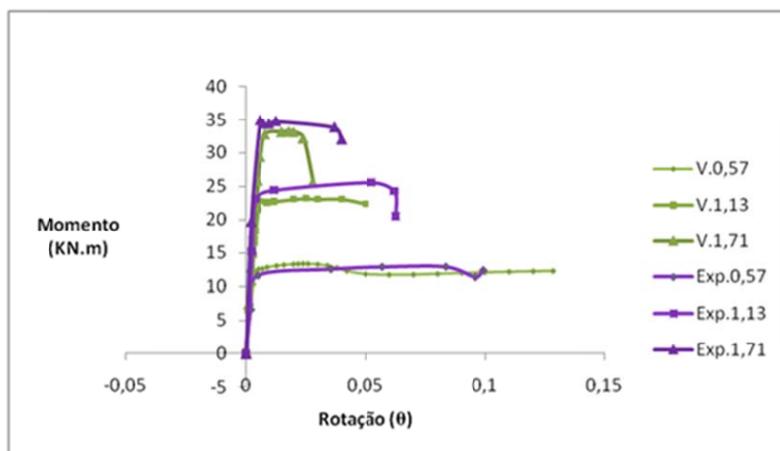
### 6.3. Testes tridimensionais

Apresenta-se uma análise numérica do processo de fissuração de um elemento cúbico, seguido por aplicação de compressão na direção do plano de fissura, registrando-se as respostas tensão-deslocamento para as diferentes direções.

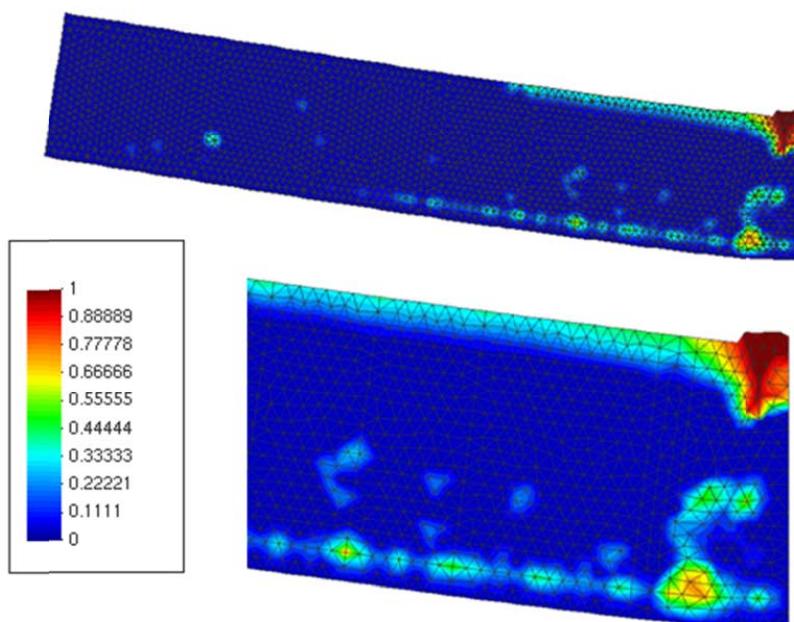
Analisou-se um cubo de aresta  $L = 200$  mm, com uma potencial banda de localização plana de largura 0,5 mm, seccionando transversalmente o cubo em sua

região central, como mostra a Figura 10. Empregou-se uma malha de 86 elementos finitos tetraédricos de 4 nós, como ilustra a Figura 9. Os elementos finitos permitem simular os efeitos de uma banda de localização plana em seu interior, de acordo com formulação de elementos finitos com descontinuidades incorporadas proposta por Manzoli & Shing [2], estendida para casos tridimensionais.

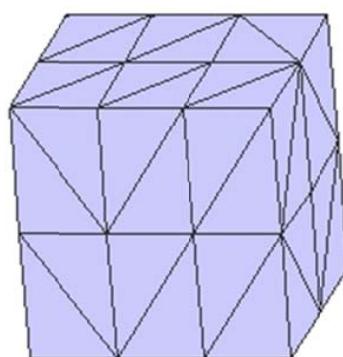
É importante salientar que, nesse caso, a abertura de fissura de tração é simulada mediante o processo de localização de deformações inelásticas no interior da banda de localização. A redução das tensões com o acréscimo das deformações, descrita pela lei de abrandamento, estabelece a interação do tipo coesiva entre as faces da fissura, associada à energia de fratura do material. A relação existente entre as deformações na banda de localização e os modos de descontinuidade na fissura (abertura de deslizamentos) é dada pela cinemática



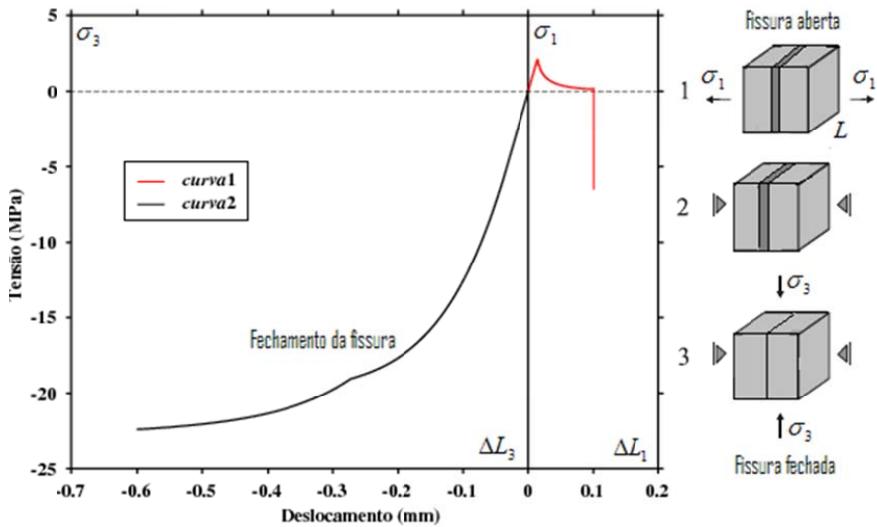
**Figura 7.** Curva momento *versus* rotação comparando as respostas estruturais obtidas numericamente e experimentalmente



**Figura 8.** Esmagamento do concreto devido à compressão na viga (variável de dano de compressão)



**Figura 9.** Malha de elementos finitos tetraédricos



**Figura 10.** Curva tensão versus deslocamento com fissura localizada para o estado de tensão biaxial

da Aproximação Contínua de Descontinuidades Fortes (Oliver [3]).

As propriedades do modelo constitutivo assumidas são: módulo de Young  $E = 30,0$  GPa, coeficiente de Poisson  $\nu = 0,2$ , resistência à tração  $\sigma_t = 2,0$  MPa; resistência à compressão  $\sigma_c = 20,0$  MPa; variável de dano com abrandamento de compressão exponencial da Eq.(6), com  $B = 0,25$ ; e parâmetro de abrandamento exponencial de tração  $A = 0,015$ .

Primeiramente, o cubo é submetido ao estado de tração uniaxial na direção 1, abrindo-se a fissura ortogonal após percorrer-se o regime elástico, atingindo uma abertura de 0,1 mm, como mostra curva 1 da Figura 10. Em seguida é aplicada compressão na direção 3, impedindo-se os deslocamentos das faces na direção 1. O processo é de compressão uniaxial na direção 3, acompanhado de movimentos da direção 1, no sentido de fechamento da fissura, pelo efeito Poisson. Após o fechamento da fissura, o cubo passa a estado biaxial em compressão (confinado), com ganho de rigidez proporcionado pela compressão na direção 1, devido às reações nas faces vinculadas, como ilustra a curva 2 da Figura 10.

Para efeito de comparação com a curva 2 da Figura 10 apresentam-se a curva 2 na Figura 11, obtida para o cubo sem fissura em processo de compressão simples na direção 3, e a curva 3 da mesma figura para o cubo submetido à compressão biaxial, com os movimentos das faces impedidas na direção 1 (situação confinada).

Como se pode observar, o comportamento à compressão do cubo fissurado é similar ao correspondente à compressão simples até que a fissura se feche. A par-

tir de então o comportamento tende progressivamente à situação de compressão biaxial confinada.

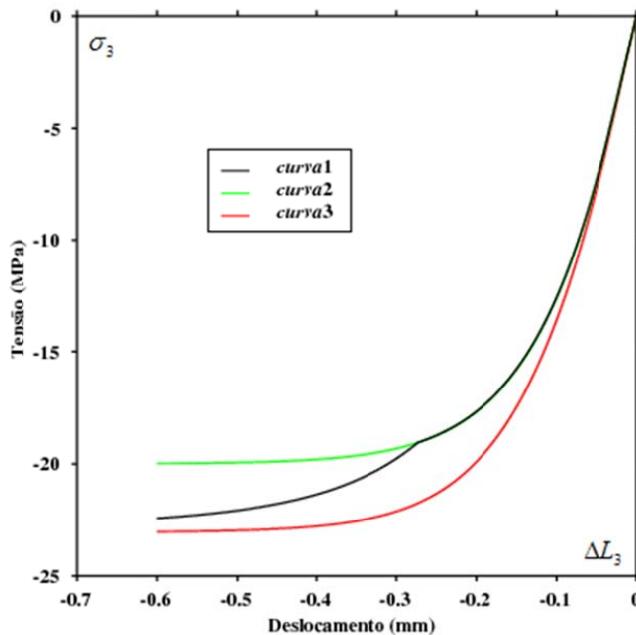
## 7. Conclusões

No presente trabalho apresentou-se um modelo constitutivo de dano combinado capaz de representar o comportamento diferenciado de materiais quase-frágeis, quando solicitados à tração ou compressão, inclusive para cargas alternadas, tração-compressão ou compressão-tração.

O modelo é obtido mediante a composição de modelos independentes projetados para representar fenômenos de degradação distintos, associados a estados compressivos ou de tração, mediante uma interpretação envolvendo comportamentos em distintas escalas. A forma de composição proposta se mostrou adequada para representar as principais características mecânicas de materiais quase-frágeis, refletindo as mudanças comportamentais conforme o tipo de solicitação.

Embora as análises tenham focado os aspectos qualitativos da simulação, a modelagem pode ser aperfeiçoada mediante definições de leis de endurecimento/abrandamento que reflitam com mais realismo o comportamento não linear de materiais quase-frágeis. Também é possível estender o modelo de compressão para representar efeitos associados ao atrito interno do material, através da introdução da dependência do critério de dano com relação à tensão média, como é o caso do modelo de Drucker-Prager.

A principal motivação para esse tipo de composição proposta é sua aplicação na simulação de processos de fraturamento, usando elementos finitos com fissuras in-



**Figura 11.** Curva tensão deslocamento para o estado de tensão em compressão

corporadas, no contexto da Aproximação Contínua de Descontinuidades Fortes (Manzoli & Shing [2]). Os exemplos apresentados demonstram que a composição proposta é capaz de tratar situações envolvendo não linearidades proporcionadas simultaneamente pelo aparecimento de fissuras de tração e por processos dissipativos em compressão, que podem ocorrer em elementos estruturais reforçados, como os de concreto armado.

## 8. Agradecimentos

Os autores agradecem o apoio do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), da Coordenação de Aperfeiçoamento do Pessoal de Nível Superior (CAPES) e da Fundação para o Desenvolvimento da UNESP (FUNDUNESP).

## Referências

1. Lemaitre J. (1992) *A course on damage mechanics*. Springer-Verlag.
2. Manzoli O.L., Shing P.B. (2006) A general technique to embed non-uniform discontinuities into standard solid finite elements. *Computers and Structures* 84:742-757
3. Oliver J., Cervera M., Manzoli O. (1999) Strong discontinuities and continuum plasticity model: The strong discontinuity approach. *International Journal of Plasticity*. 15(3):319-351
4. Cervenka J., Papanikolaou V.K. (2008) Three dimensional combined fracture-plastic material model for concrete. *International Journal of Plasticity*. 24(12):2192-2220
5. Cervera M., Oliver J., Manzoli O. (1996) A rate-dependent isotropic damage model for the seismic analysis of concrete dams. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*. 25(9):987-1010
6. Cervera M., Chiumenti M., Agelet de Saracibar C. (2004) Shear band localization via local  $j_2$  continuum damage mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 193(9-11):849-880
7. Simo J.C., Ju J.W. (1987) Strain- and stress-based continuum damage models – I. Formulation. *Int. J. Solids Struct.* 23:821-840
8. Bosco C., Debernardi P.G. (1992) Experimental investigation on the ultimate rotational capacity of R.C. beams. Report no. 36. Atti del Dipartimento, Politecnico di Torino. Ingegneria Strutturale.
9. Oliver J. (1995) *Continuum modeling of strong discontinuities in solid mechanics*. Proc. IV Int. Conf. on Computational Plasticity. CIMNE. pp.455-479
10. Gamino A.L., Manzoli O.L., Sousa J.L.A.O., Bittencourt T.N. (2010) 2D Evaluation of Crack Openings using Smeared and Embedded Crack Models. *Computers and Concrete*. 7(6):483-496
11. Gamino A.L., Bittencourt T.N., Sousa J.L.A.O. (2009) Finite element computational modeling of externally bonded CFRP composites flexural behavior in RC beams. *Computers and Concrete* 6(3):187-202
12. Gamino A.L., Manzoli O.L. (2010) Dependência Estrutural da Capacidade de Rotação Plástica em Vigas de Concreto Armado. *Rev. Internac. Mét. Num. Cál. Dis. Ing.* 26(4):251-261.