

METODO DE REDUCCION AL CONTORNO PARA LA DINAMICA DE UN FLUIDO CON SUPERFICIE LIBRE

ALBERTO FALQUES

*Departamento de Física Aplicada
E.T.S. Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos
Universidad Politècnica de Catalunya
Jordi Girona Salgado, 31
08034 Barcelona, España*

RESUMEN

La descripción usual del movimiento de un fluido incompresible en régimen potencial, bajo la acción de la gravedad, con su superficie superior libre, viene dada por la ecuación de Laplace —lineal y sin derivadas respecto al tiempo— y unas condiciones de contorno en la superficie libre que generan toda la dependencia temporal y las no-linealidades. En este artículo se presenta una formulación del problema en términos —exclusivamente— de las variables restringidas a la superficie libre. Esta formulación presenta varias ventajas, tanto desde un punto de vista teórico como práctico. Algunas de ellas son puestas de manifiesto mediante el ejemplo de aplicación que presentamos: el cálculo numérico de las frecuencias de resonancia de un recinto con una variación brusca de profundidad.

SUMMARY

The usual approach to surface gravity waves in an incompressible fluid is based on both, Laplace Equation —linear and without time derivatives— and boundary conditions at the free surface, the latter generating all the time dependence and non-linearities. In this paper we present a formulation for the dynamical problem of surface gravity waves using only the variables defined on the free surface. This approach has several theoretical and practical advantages, some of them displayed by the example we present: the numerical computation of the spectrum of the frequencies resonant in a basin with a step-like bottom.

INTRODUCCION

La dinámica de las ondas de superficie en una capa de un fluido incompresible bajo la acción de la gravedad, tiene una descripción euleriana, en régimen potencial, que viene dada por la ecuación de Laplace —lineal y sin derivadas respecto al tiempo— y unas condiciones de contorno en la superficie libre que generan toda la dependencia temporal, así como las no-linealidades. En consecuencia, resulta natural plantear dicho

Recibido: Enero 1987

problema dinámico en términos, únicamente, de las variables restringidas a la superficie libre. Este modo de proceder presenta varias ventajas:

- 1) Permite escribir el problema dinámico en su forma canónica:

$$\frac{du(t)}{dt} = \mathcal{A}(u(t)) \quad , \quad (1)$$

donde $\mathcal{A}$ es un operador, en general no lineal, que actúa sobre el estado del sistema, $u(t)$, que pertenece a cierto espacio funcional. Esta forma de escribir un problema dinámico conlleva una transparencia total respecto a las condiciones iniciales y de contorno que dan lugar a un problema "well-posed".

- 2) El tratamiento numérico basado en dicho planteamiento reduce la cantidad de puntos de la discretización espacial en un factor N , puesto que para el problema dinámico propiamente dicho sólo se requiere la discretización de una superficie (N^2 puntos) en lugar de un volumen (N^3 puntos).
- 3) En el ejemplo de aplicación que presentamos —el cálculo de las frecuencias de resonancia de un recinto con una variación brusca de profundidad— la reducción al contorno permite resolver de forma natural la dificultad ocasionada por el carácter singular del problema de autovalores asociado.

El precio que hay que pagar por estas ventajas proviene del carácter no local del operador $\mathcal{A}$, lo cual, en el tratamiento numérico, exige el uso de matrices llenas en lugar de matrices banda.

En este artículo se presenta la formulación teórica del problema dinámico exclusivamente en términos de las variables definidas sobre la superficie libre, y un ejemplo de aplicación: el cálculo numérico de las frecuencias de resonancia de un recinto con una variación brusca de profundidad.

FUNDAMENTACION TEORICA

Consideremos el movimiento de una capa de un fluido incompresible, en régimen potencial, bajo la acción de la gravedad, con la superficie superior libre y a presión constante. Tomaremos el eje y según la vertical, hacia arriba, y los ejes x, z sobre el plano horizontal definido por la superficie libre en reposo (ver Figura 1). Dicha superficie vendrá dada en general por

$$y = \eta(x, z, t) \quad , \quad (2)$$

mientras que el fondo vendrá definido por

$$y = -h(x, z) \quad . \quad (3)$$

Finalmente, el campo de velocidades $\mathbf{v}(x, y, z, t)$ dependerá del potencial $\phi(x, y, z, t)$ a través de la igualdad:

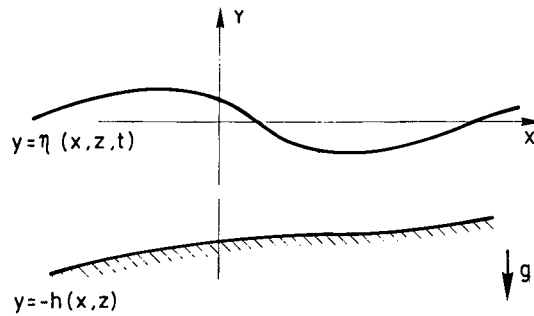


Figura 1. Sistema de coordenadas y volumen ocupado por la masa fluida.

$$\mathbf{v} = \nabla \phi \quad (4)$$

De acuerdo con la formulación clásica (véase [8],[3]), el movimiento de la masa fluida definida por (2),(3) planteará el problema dinámico:

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (-h(x, z) < y < \eta(x, z, t)) \quad (5)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial z} \quad (y = \eta(x, z, t)) \quad (6)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -g\eta - \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 \quad (y = \eta(x, z, t)) \quad (7)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial z} \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad (y = -h(x, z)) \quad (8)$$

para las funciones $\phi(x, y, z, t), \eta(x, z, t)$. Si la masa de fluido viene limitada por alguna superficie vertical con vector normal unitario $\mathbf{n} = (n_x, 0, n_z)$ habrá que añadir una condición de contorno para el potencial en ella del tipo:

$$n_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + n_z \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad (8')$$

Dado un abierto $I \subset \mathbb{R}^2$ y una función $\eta \in C^1(I, \mathbb{R})$, introduciremos la notación:

$$\Omega_\eta = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -h(x, z) < y < \eta(x, z), (x, z) \in I\}$$

$$\Gamma_\eta = \{(x, \eta(x, z), z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, z) \in I\} \quad ,$$

con lo cual el problema (5)-...(8) se escribirá:

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad , \quad (x, y, z) \in \Omega_{\eta(t)} \quad , \quad t \in \mathbb{R} \quad (9)$$

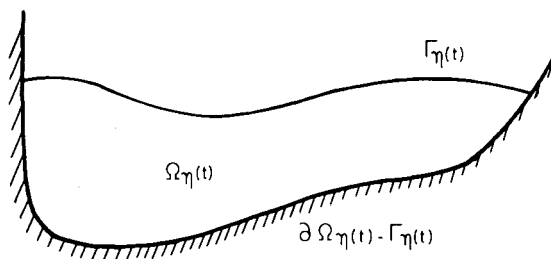


Figura 2. Geometría del problema dinámico.

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial n} \quad , \quad (x, y, z) \in \Gamma_{\eta(t)} \quad , \quad t \in R \quad (10)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -g\eta - \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 \quad , \quad (x, y, z) \in \Gamma_{\eta(t)} \quad , \quad t \in R \quad (11)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad , \quad (x, y, z) \in \partial\Omega_{\eta(t)} - \Gamma_{\eta(t)} \quad , \quad t \in R \quad , \quad (12)$$

donde $\partial/\partial n$ indica derivada respecto a la normal exterior a la frontera de $\Omega_{\eta(t)}$, $\partial\Omega_{\eta(t)}$.

El problema (9)----(12) tiene unas características que lo hacen especialmente difícil:

- 1) Se trata de un problema de frontera libre, es decir, el dominio de integración, $\Omega_{\eta(t)}$, es una de las incógnitas.
- 2) Es no lineal, no sólo debido a las condiciones (10),(11), sino debido, también, a que dichas condiciones están definidas en la frontera libre, $\Gamma_{\eta(t)}$.
- 3) Se trata de un problema dinámico, y, no obstante, no aparecen derivadas temporales en la ecuación diferencial, (9). Toda la dependencia temporal se genera exclusivamente en la superficie libre, $\Gamma_{\eta(t)}$.

Por otra parte, resulta usual en Teoría de Sistemas Dinámicos plantear los problemas de evolución en la forma:

$$\frac{du(t)}{dt} = \mathcal{A}(u(t)) \quad , \quad (13)$$

donde $u(t)$ es, para cada t , el estado del sistema, que pertenece al llamado espacio de fases del sistema, de dimensión finita en el caso discreto, e infinita en el caso continuo. Planteado el problema en estos términos, resulta evidente que la condición inicial apropiada será la información necesaria para definir un elemento u_0 de este espacio, y las condiciones de contorno apropiadas serán las que definen el espacio de fases como subconjunto de cierto espacio funcional. En consecuencia, éste es el marco más natural y adecuado para un análisis del carácter "well-posed" del problema de evolución, es decir de las condiciones que dan lugar a la existencia y unicidad de solución. Debido al

tercer punto, arriba mencionado, la formulación del problema (9)-...-(12) en la forma (13) no resulta inmediata. A continuación vamos a desarrollarla.

Definiremos, como estado del sistema, el par:

$$u = (\eta, \hat{\phi}) \quad ,$$

donde $\hat{\phi}$ es la restricción de la función ϕ sobre la superficie libre

$$\hat{\phi}(x, z, t) = \phi(x, \eta(x, z, t), z, t) \quad ,$$

y consideraremos como ecuaciones dinámicas únicamente las condiciones:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial n} \quad , (x, y, z) \in \Gamma_{\eta(t)} , t \in R \quad (10)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -g\eta - \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 \quad , (x, y, z) \in \Gamma_{\eta(t)} , t \in R. \quad (11)$$

En estas ecuaciones interviene la derivada normal de ϕ , que no puede ser calculada a partir, únicamente, de $\hat{\phi}$ y de η . No obstante, si tenemos en cuenta las restantes ecuaciones, (9) y (12), el potencial ϕ quedará determinado por sus valores sobre el contorno, $\hat{\phi}$, ya que el problema:

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad , (x, y, z) \in \Omega_{\eta} \quad (9)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad , (x, y, z) \in \partial\Omega_{\eta} - \Gamma_{\eta} \quad (12)$$

$$\phi = \hat{\phi} \quad , (x, y, z) \in \Gamma_{\eta} \quad (12')$$

admite solución única para cada $\hat{\phi} \in L_2(\Gamma_{\eta})$ ([6]). Entonces, denotando la correspondencia biyectiva entre ϕ y $\hat{\phi}$ (para cada función η dada) por:

$$\hat{\phi} = \mathcal{R}(\eta)\phi \quad , \quad (14)$$

y definiendo

$$\mathcal{P}(\eta)\hat{\phi} = \mathcal{R}(\eta)\left[\frac{\partial}{\partial y}\mathcal{R}(\eta)^{-1}\hat{\phi}\right] \quad , \quad (15)$$

podremos calcular todas las derivadas que intervienen en (10)-(11) en función de $\hat{\phi}$ y de η :

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} \big|_{y=\eta} = \mathcal{P}(\eta)\hat{\phi} \quad (16)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \big|_{y=\eta} = \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} - \frac{\partial \eta}{\partial x} \mathcal{P}(\eta)\hat{\phi} \quad (17)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} \big|_{y=\eta} = \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial z} - \frac{\partial \eta}{\partial z} \mathcal{P}(\eta) \hat{\phi} \quad (18)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} \big|_{y=\eta} = \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t} - \frac{\partial \eta}{\partial t} \mathcal{P}(\eta) \hat{\phi} \quad (19)$$

Nótese que el operador

$$\mathcal{R}(\eta) : H^1(\Omega_\eta) \longrightarrow L_2(\Gamma_\eta) \quad ,$$

es lineal y —para el caso de un dominio Ω_η acotado— bicontinuo. El carácter lineal es consecuencia evidente del carácter lineal del problema (9)-(12)-(13)(*). La continuidad de $\mathcal{R}(\eta)^{-1}$ resulta inmediata a partir de la Teoría de Ecuaciones Elípticas (ver [6] cap.IV) , mientras que la continuidad de $\mathcal{R}(\eta)$ es consecuencia de la desigualdad de las trazas (ver [6] cap.III). De la propia definición resulta obvio que el operador lineal $\mathcal{P}(\eta)$ es no local, es decir el valor de la función $\mathcal{P}(\eta)\hat{\phi}$ en el punto (x, z) no depende únicamente de los valores de $\hat{\phi}$ y de sus derivadas en (x, z) , sino de la función $\hat{\phi}$ considerada globalmente.

Finalmente, teniendo en cuenta las expresiones (16),(17),(18) y (19) , las ecuaciones dinámicas (10)-(2.10) podrán ser escritas como:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \eta \\ \hat{\phi} \end{pmatrix} = \mathcal{A} \begin{pmatrix} \eta \\ \hat{\phi} \end{pmatrix} \quad , \quad (20)$$

donde:

$$\mathcal{A} \begin{pmatrix} \eta \\ \hat{\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\hat{\nabla} \eta \cdot \hat{\nabla} \hat{\phi} + (1 + |\hat{\nabla} \eta|^2) \mathcal{P}(\eta) \hat{\phi} \\ -g\eta + \frac{1}{2}(1 + |\hat{\nabla} \eta|^2)(\mathcal{P}(\eta)\hat{\phi})^2 - \frac{1}{2} |\hat{\nabla} \eta|^2 \end{pmatrix} \quad , \quad (21)$$

siendo:

$$\hat{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad .$$

Una formulación en cierta forma equivalente a la que presentamos ha sido utilizada por Longuet-Higgins y Cokelet [4] para el estudio de olas rompientes (Véase, también, [9]).

(*) Nótese que la expresión $\hat{\phi} = \mathcal{R}(\eta)\phi$ es lineal respecto a ϕ pero no lineal respecto a η .

APLICACION: FRECUENCIAS DE RESONANCIA DE UN RECINTO CON UNA VARIACION BRUSCA DE PROFUNDIDAD

Planteamiento y discretizacion clásica

A continuación vamos a estudiar el fenómeno de resonancia de un recinto rectangular con una variación brusca de profundidad, frente a ondas de superficie incidentes en la dirección x (ver Figura 3). Aplicando la teoría de ondas de pequeña amplitud en régimen potencial (linealización de las ecuaciones (9)-...(12), (ver [3] o [8]) el movimiento vendrá dado por:

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad ((x, y, z) \in \Omega_0, t \in R) \quad (22_1)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad (y = 0) \quad (22_2)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad (y = -h_1, 0 \leq x \leq l_1; y = -h_2, l_1 \leq x \leq l_1 + l_2) \quad (22_3)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad (x = l_1, -h_1 \leq y \leq -h_2; x = l_1 + l_2, -h_2 \leq y \leq 0) \quad (22_4)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad (z = 0, l) \quad (22_5)$$

siendo:

$$\Omega_0 = R_1 \cup R_2$$

$$R_1 = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq l_1, -h_1 < y < 0, 0 < z < l\}$$

$$R_2 = \{(x, y, z) \mid l_2 < x < l_1 + l_2, -h_2 < y < 0, 0 < z < l\}$$

y donde la elevación de la superficie libre, η , viene dada en función del potencial, ϕ , por:

$$\eta(x, z, t) = -\frac{1}{g} \frac{\partial \phi(x, y, z, t)}{\partial t} \Big|_{y=0} \quad (23)$$

Al sistema (22) se le añade, como condición de contorno en la entrada del recinto, $x = 0$, la suposición de una perturbación armónica

$$\eta(0, z, t) = a \operatorname{sen} \omega t \quad ,$$

con lo cual admitirá soluciones independientes de z , que podremos escribir en la forma:

$$\phi(x, y, z, t) = \psi(x, y) \cos \omega t \quad .$$

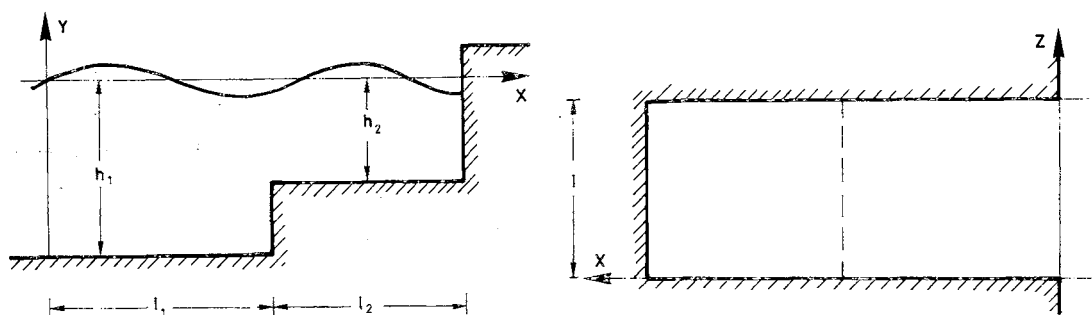


Figura 3. Recinto de integración.

Esta suposición transforma el problema (22), inicialmente tridimensional, en bidimensional.

Entonces, las frecuencias resonantes serán aquellos valores de ω para los cuales existe solución no nula de (22) para $a \rightarrow 0$, es decir para los cuales existe solución no nula del problema (ver [5],[7]):

$$\nabla^2 \psi = 0 \quad ((x, y) \in \Omega_0) \quad (24)$$

$$g \frac{\partial \psi}{\partial y} = \omega^2 \psi \quad (y = 0) \quad (25)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \quad (y = -h_1, 0 \leq x \leq l_1; y = -h_2, l_1 \leq x \leq l_1 + l_2) \quad (26)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad (x = l_1, -h_1 \leq y \leq -h_2; x = l_1 + l_2, -h_2 \leq y \leq 0) \quad (27)$$

$$\psi = 0 \quad (x = 0) \quad (28)$$

La discretización de las ecuaciones (24)-...(28) mediante el método de diferencias finitas no ofrece dificultad, obteniéndose un problema de autovalores:

$$\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\psi} = \omega^2 \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\psi} \quad , \quad (29)$$

donde $\boldsymbol{\psi} \in R^n$, con

$$n = (M' - 1)N + (M - M')N' \quad ,$$

donde N, M, N', M' indican la cantidad de puntos de la malla (ver Figura 4) y donde $\mathbf{B}, \mathbf{C}$ son matrices cuadradas $n \times n$. Ahora bien, puesto que ω solo aparece en la condición de contorno (3.1.4), la matriz $\mathbf{C}$ resulta singular, y los métodos usuales para el cálculo de autovalores no son aplicables. Tenemos, entonces, dos posibilidades:

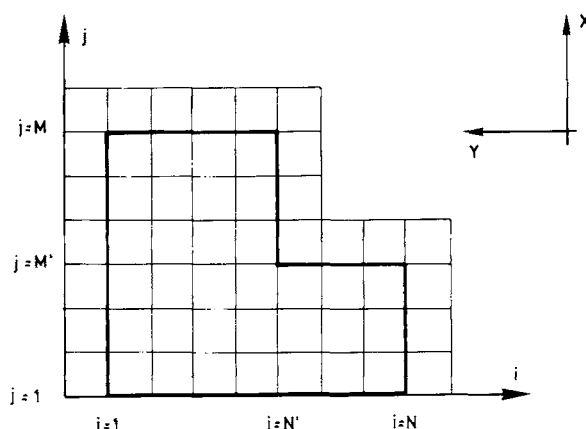


Figura 4. Discretización del recinto de integración.

- Tratar (29) como un sistema no lineal para ω^2 y $n - 1$ componentes de $\hat{\psi}$.
- Usar aquellas ecuaciones del sistema (29) en las cuales no aparece ω , para reducir la dimensión del problema de autovalores y tratar luego un problema reducido de la forma:

$$\hat{B} \cdot \hat{\psi} = \omega^2 \hat{C} \cdot \hat{\psi} ,$$

donde $\hat{\psi} \in R^M$, y donde ahora, la matriz $\hat{C}$ no será singular.

Siguiendo la segunda alternativa, uno debería resolver las ecuaciones del sistema (29) que no contienen ω , por métodos algebraicos, a fin de obtener todas las componentes del vector $\hat{\psi}$ en función de un número reducido de ellas, tantas como puntos del contorno $y = 0$ (es decir M), y que constituirían las componentes del vector $\hat{\psi}$. Sin embargo, este proceso no es necesario si previamente planteamos el problema de resonancia mediante el método de reducción al contorno, expuesto en la sección anterior.

Así, como veremos en el siguiente apartado, planteando el problema de resonancia para las ecuaciones dinámicas reducidas a la superficie libre (20), se obtiene un problema de autovalores similar a (29) pero con dos ventajas substanciales:

- La matriz C no es singular.
- Las matrices B, C son de dimensión $M - 1$, en lugar de

$$n = (M' - 1)N + (M - M')N' \sim NM.$$

Aplicación del método de reducción al contorno

Suponiendo ondas de pequeña amplitud, y linealizando la ecuación (20) escribiremos:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \eta \\ \phi \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \eta \\ \phi \end{pmatrix} , \quad (30)$$

donde $\mathcal{A}$ es el operador lineal:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{P}(0) \\ -I & 0 \end{pmatrix}, \quad (31)$$

y donde se ha adimensionalizado mediante las escalas de longitud y tiempo:

$$L = l_1 + l_2, \quad T = L^{\frac{1}{2}} g^{-\frac{1}{2}}. \quad (32)$$

Suponiendo dependencias respecto al tiempo de la forma:

$$\begin{pmatrix} \eta(x, t) \\ \dot{\phi}(x, t) \end{pmatrix} = e^{i\omega t} \begin{pmatrix} X(x) \\ Y(x) \end{pmatrix},$$

y eliminando X , (30) se escribirá:

$$\mathcal{P}(0)Y = \omega^2 Y.$$

Así, las frecuencias de resonancia se corresponderán con los autovalores del operador $\mathcal{P}(0)$, mientras que sus autovectores darán la forma de la superficie libre correspondiente a cada modo. En consecuencia, plantearemos el cálculo en dos etapas:

- 1) Discretización del operador $\mathcal{P}(0)$ y determinación de su matriz, $\mathbf{F}$.
- 2) Cálculo de los autovalores y autovectores de $\mathbf{F}$.

Observación: Nótese que el operador $\mathcal{P}(0) : H^1(\Gamma_0) \rightarrow L_2(\Gamma_0)$ es autoadjunto respecto al producto escalar de $L_2(\Gamma_0)$. En efecto, sean $\hat{\phi}, \hat{\psi} \in H^1(\Gamma_0)$ y sean $\phi = \mathcal{R}(0)^{-1}\hat{\phi}, \psi = \mathcal{R}(0)^{-1}\hat{\psi} \in H^2(\Omega_0)$. Tendremos:

$$\langle \hat{\psi} | \mathcal{P}(0)\hat{\phi} \rangle = \int_{\Gamma_0} \hat{\psi} \cdot \widetilde{\mathcal{P}(0)\hat{\phi}} = \int_{\Gamma_0} \hat{\psi} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial y}.$$

Ahora bien, usando la fórmula de Gauss, y teniendo en cuenta que en virtud de la definición de $\mathcal{R}(0)$, las funciones ψ, ϕ son armónicas, con derivada normal nula en $\partial\Omega_0 - \Gamma_0$:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_0} \hat{\psi} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial y} &= \int_{\Omega_0} \nabla \cdot (\psi \nabla \tilde{\phi}) = \int_{\Omega_0} \nabla \psi \cdot \nabla \tilde{\phi} = \\ &= \int_{\Omega_0} \nabla \cdot (\tilde{\phi} \nabla \psi) = \int_{\Gamma_0} \tilde{\phi} \frac{\partial \psi}{\partial y}. \end{aligned}$$

De aquí, obviamente:

$$\langle \hat{\psi} | \mathcal{P}(0)\hat{\phi} \rangle = \langle \mathcal{P}(0)\hat{\psi} | \hat{\phi} \rangle.$$

Además, el operador $\mathcal{P}(0)$ resulta definido positivo, en virtud de:

$$\langle \hat{\phi} | \mathcal{P}(0)\hat{\phi} \rangle = \int_{\Omega_0} |\nabla \phi|^2 \geq 0.$$

A continuación pasamos a exponer la primera etapa del cálculo. De acuerdo con su definición (dada por (15)), con las condiciones del problema de resonancia (24), (25), (27), (28), y con la adimensionalización expresada en (32), el operador $\mathcal{P}(0)$ hace corresponder a cada función $\hat{\phi} \in L_2([0, 1], R)$ la función

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_{y=0} ,$$

donde ϕ viene dada por:

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad ((x, y) \in \Omega_0) \quad (33)$$

$$\phi = \hat{\phi} \quad (y = 0) \quad (34)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad (y = -h_1, 0 \leq x \leq l_1; y = -h_2, l_1 \leq x \leq l_1 + l_2) \quad (35)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad (x = l_1, -h_1 \leq y \leq -h_2; x = l_1 + l_2, -h_2 \leq y \leq 0) \quad (36)$$

$$\phi = 0 \quad (x = 0) \quad (37)$$

Por lo tanto, el cálculo de F exigirá, en primer lugar, la discretización del problema (33)-(37). Para ello supondremos que l_1 y h_1/h_2 son números racionales, y tomaremos una malla tal que:

$$\frac{1}{M-1} = \frac{l_1}{M'-1} = \Delta x \quad , \quad \frac{h_1}{N-1} = \frac{h_2}{N'-1} = \Delta y \quad .$$

Los puntos de la malla vendrán numerados por los índices i, j , en las direcciones y, x respectivamente. El contorno vendrá dado por $i = 1 (y = 0)$, $j = 1 (x = 0)$, $j = M (x = 1)$, $i = N (y = -h_1)$, $j = M' (x = l_1)$, $i = N' (y = -h_2)$ (ver Figura 4)). Se añade un falso contorno a fin de tratar convenientemente las condiciones de frontera del tipo Newman. Usando esta discretización e introduciendo diferencias finitas centradas, escribiremos (33) en la forma:

$$\beta_0 \phi_{ij} = \beta_1 \phi_{i+1j} + \beta_2 \phi_{i-1j} + \beta_3 \phi_{ij+1} + \beta_4 \phi_{ij-1} - g_{ij} \quad , \quad (38)$$

donde:

$$\beta_0 = 2(\Delta x)^2 + 2(\Delta y)^2 \quad , \quad g_{ij} = -(\Delta x)^2 \hat{\phi}_j \delta_{i2} \quad , \quad (39_1)$$

$$\beta_1 = \zeta_1 (\Delta x)^2, \beta_2 = \zeta_2 (\Delta x)^2, \beta_3 = \zeta_3 (\Delta y)^2, \beta_4 = \zeta_4 (\Delta y)^2 \quad . \quad (39_2)$$

Para los puntos interiores, definidos por $3 \leq i \leq N - 1$, $3 \leq j \leq M' - 1$, y por $3 \leq i \leq N' - 1$, $M' \leq j \leq M - 1$, tendremos:

$$\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_3 = \zeta_4 = 1 \quad , \quad (40)$$

mientras que para los puntos del contorno habrá que introducir las siguientes modificaciones de las expresiones (40) ocasionadas por las condiciones de frontera (34)-...-(37) (indicamos unicamente las modificaciones):

$$i = 2, 3 \leq j \leq M - 1 \quad : \quad \zeta_2 = 0$$

$$j = 2 \quad : \quad \zeta_2 = \zeta_3 = 0$$

$$j = M \quad : \quad \zeta_2 = \zeta_3 = 0, \zeta_4 = 2$$

$$j = 2, 3 \leq i \leq N - 1 \quad : \quad \zeta_4 = 0$$

$$i = N \quad : \quad \zeta_1 = \zeta_4 = 0, \zeta_2 = 2$$

$$i = N, 3 \leq j \leq M' - 1 \quad : \quad \zeta_1 = 0, \zeta_2 = 2$$

$$j = M' \quad : \quad \zeta_1 = \zeta_3 = 0, \zeta_2 = \zeta_4 = 2$$

$$j = M', N' + 1 \leq i \leq N - 1 \quad : \quad \zeta_3 = 0, \zeta_4 = 2$$

$$i = N', M' + 1 \leq j \leq M - 1 \quad : \quad \zeta_1 = 0, \zeta_2 = 2$$

$$j = M \quad : \quad \zeta_1 = \zeta_3 = 0, \zeta_2 = \zeta_4 = 2$$

$$j = M, 3 \leq i \leq N' - 1 \quad : \quad \zeta_3 = 0, \zeta_4 = 2 \quad .$$

Una vez discretizado el problema (33)-...-(37), y como consecuencia de (15), la matriz **F** vendrá dada por las igualdades:

$$\phi_{0j+1} - \phi_{2j+1} = 2\Delta y \sum_{k=1}^{M-1} F_{jk} w_k \quad , \quad j = 1, 2, \dots, M - 1, \quad (41)$$

donde **w** son las $M - 1$ componentes independientes del vector $\hat{\phi}$ ($w_j = \hat{\phi}_{j+1}$)(*). Calcularemos cada una de las columnas de **F** resolviendo el sistema (38) para cada uno de los vectores de la base canónica de R^{M-1} . Es decir, para cada $k = 1 \dots M - 1$ tomaremos

$$w_j = \delta_{jk} \quad , \quad j = 1, 2, \dots, M - 1 \quad ,$$

o sea:

(*) El valor de $\hat{\phi}_1$ está fijado por la condición de contorno (37), que exige: $\hat{\phi}_1 = 0$, $\phi_{01} - \phi_{21} = 0$.

$$\hat{\phi}_j = \delta_{jk+1} \quad , \quad j = 1, 2, \dots, M-1 \quad , \quad (42)$$

resolveremos el sistema (39), y una vez determinado el potencial ϕ calcularemos la columna k -ésima de $\mathbf{F}$ mediante:

$$F_{jk} = \frac{1}{2\Delta y}(\phi_{0j+1} - \phi_{2j+1}) \quad , \quad j = 1, 2, \dots, M-1 \quad . \quad (43)$$

Resuelto el sistema (38) para $\hat{\phi}$ dado por la expresión (42), tendremos directamente los valores de ϕ_{2j+1} que aparecen en (44). No obstante, los valores de ϕ_{0j+1} deberán ser calculados aplicando las ecuaciones (39) en los puntos del contorno $i = 1$. En consecuencia, tendremos la siguiente expresión final para F_{jk} :

$$F_{jk} = \frac{1}{\Delta y}[\phi_{1j+1} - \phi_{2j+1} - \frac{1}{2}(\frac{\Delta y}{\Delta x})^2(\phi_{1j+2} + \phi_{1j} - 2\phi_{1j+1})] \quad , \quad 1 \leq j \leq M-2$$

$$F_{M-1k} = \frac{1}{\Delta y}[\phi_{1M} - \phi_{2M} - (\frac{\Delta y}{\Delta x})^2(\phi_{1M-1} - \phi_{1M})] \quad .$$

Finalmente, la resolución del sistema (38) se lleva a cabo mediante el método de Gauss-Seidel acelerado que detallamos en el apéndice.

La segunda etapa del cálculo, es decir la determinación de los autovalores y autovectores de la matriz $\mathbf{F}$, ha sido efectuada mediante una subrutina de la librería IMSL. Puesto que la matriz $\mathbf{F}$ es simétrica (véase observación pag. 330) y bien condicionada, dicho cálculo no ha ofrecido dificultad para dimensiones de $\mathbf{F}$ del orden de hasta 150x150. La calidad del cálculo se mide mediante el índice de calidad, p , proporcional a:

$$\max_{1 \leq i \leq n} \frac{\|\mathbf{F}\mathbf{x}^i - \hat{\lambda}^i\mathbf{x}^i\|_1}{\|\mathbf{F}\|_1 \|\mathbf{x}^i\|_1} \quad ,$$

que a su vez es cota superior del error en la determinación de los autovalores, de acuerdo con [2]:

$$\min_j |\hat{\lambda}^i - \lambda_j| \leq \frac{\|\mathbf{F}\mathbf{x}^i - \hat{\lambda}^i\mathbf{x}^i\|_2}{\|\mathbf{x}^i\|_2} \leq cp \quad i = 1 \dots n \quad ,$$

donde $\hat{\lambda}^i$, $\mathbf{x}^i$ son los autovalores y autovectores calculados, λ_j los autovalores exactos, c una constante, y donde:

$$\|\mathbf{a}\|_1 = \sum_{i=1}^n |a_i| \quad , \quad \|\mathbf{a}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad .$$

Según las instrucciones de uso de la subrutina la precisión es excelente si $p < 1$, buena si $0 < p < 100$, y mala si $p > 100$. En el cálculo de las frecuencias de

resonancia para el caso $l_1 = 1/6, h_1 = 1/6, h_2 = 1/30$, que presentamos en el apartado de la sección siguiente se ha obtenido un índice $p < 2.0 \times 10^{-2}$, lo cual indica que la precisión es excelente.

Resultados

El desarrollo del método de cálculo de las frecuencias de resonancia y de las ondas estacionarias asociadas, descrito en el apartado anterior ha dado lugar al programa Fortran REDCON. Dicho programa ha sido utilizado para este cálculo en el caso: $l_1 = 1/6, h_1 = 1/6, h_2 = 1/30$. Previamente, a fin de tener una estimación de la precisión del método, se ha tratado el caso de un fondo constante, resoluble analíticamente. Todos los cálculos han sido efectuados mediante el ordenador DIGITAL VAX 8600 de la E.T.S. d'Enginyers de Camins, Canals i Ports. A continuación pasamos a describir los resultados.

a) Precisión del método

A fin de estudiar la precisión del método se ha considerado el caso de un recinto con fondo constante ($h_1 = h_2, N = N'$), resoluble analíticamente (ver, por ejemplo [5]), siendo los períodos de resonancia:

$$T_n = \left[\frac{8\pi L}{(2n-1)g \tanh((2n-1)\frac{\pi h}{2L})} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (44)$$

donde $h = h_1 = h_2, L = l_1 + l_2$, y se ha comparado los valores calculados analíticamente, con los valores calculados numericamente mediante el método expuesto. Los resultados han sido presentados en las Figuras 6, 7, 8 y en la Tabla I. En todo momento se ha usado la adimensionalización definida en (32). Previamente, se ha explorado el valor óptimo del parámetro s de sobrerrelajación, en función de la malla (N, M), obteniéndose los resultados expuestos en la Figura 5. A continuación presentamos las conclusiones de la exploración efectuada:

- 1) La elección de la discretización y del cociente entre el residuo final e inicial exigido en la resolución iterativa del sistema (38), ϵ (ver apéndice), debe hacerse en función de la precisión deseada en los distintos períodos. Por ejemplo, para $h = 0.2$, si se quiere calcular T_1 con un error inferior al 0.2 % basta tomar $N = 6, M = 26$ y $\epsilon = 10^{-2}$, requiriéndose un tiempo de cálculo de 5". En cambio, si se quiere obtener T_4 con la misma precisión será necesario tomar $N = 11, M = 51$ y $\epsilon = 10^{-6}$, siendo necesario un tiempo de cálculo de 2'11" (ver Tabla I).
- 2) La obtención de una buena precisión en el período fundamental no requiere el uso de una malla muy fina. Es más, un refinamiento excesivo de la malla no mejora la precisión. Por el contrario, la disminución de ϵ si mejora, sensiblemente, la precisión en T_1 (ver Figura 7 y Tabla I).
- 3) Para un cálculo dado, los modos obtenidos con mayor precisión suelen ser los de orden inferior.
- 4) La obtención de precisiones aceptables en los sucesivos armónicos requiere valores cada vez más elevados de N, M (ver Tabla I).

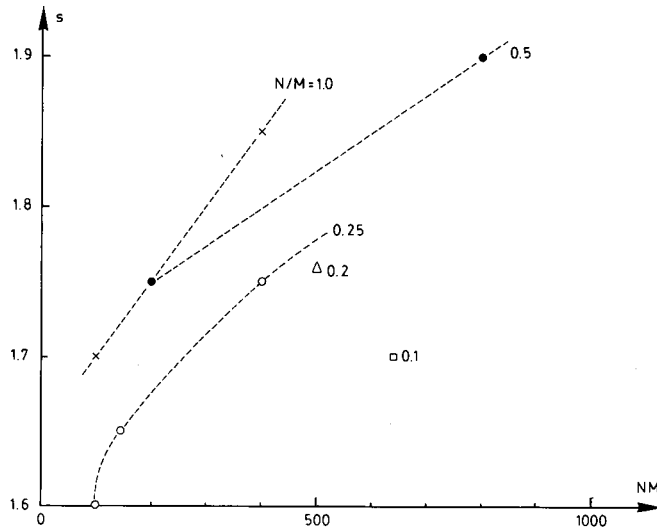


Figura 5. Valor óptimo del parámetro s en función de la discretización. Nótese que es función creciente de NM y N/M .

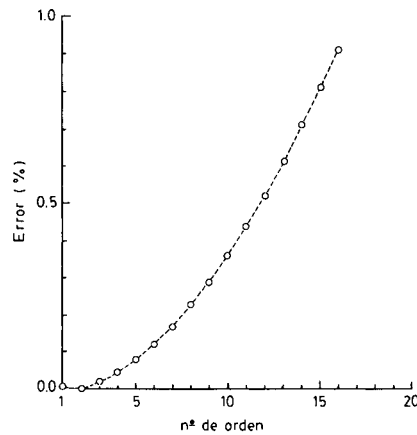


Figura 6. Error en el período fundamental y en los 15 primeros armónicos, para $h = 0.2$, $N = 21$, $M = 101$, $\epsilon = 10^{-8}$, $s = 1.70$.

- 5) Cuanto mayores son N , M menor debe ser ϵ . Si ϵ no es lo suficientemente pequeño, un aumento de N , M puede dar lugar a una pérdida de exactitud de los resultados, especialmente para los modos de orden más bajo (ver Figura 7).
- 6) El número de modos con un error inferior al 1%, M_b , depende de M y, por debajo de un cierto umbral, no depende de ϵ (ver Figura 8). Dicho umbral se sitúa en 10^{-2} para $M = 26$, y en 10^{-6} para $M = 51$ o $M = 101$. M_b es aproximadamente proporcional a M , cumpliéndose:

$$M_b \sim 0.15 M \quad (44)$$

	% error	N	M	ϵ	cpu
T_1	0.20	6	26	10^{-2}	5''
	0.018	6	26	10^{-4}	8''
	0.001	6	26	10^{-6}	10''
T_2	0.71	6	26	10^{-2}	5''
	0.076	6	26	10^{-4}	8''
	0.060	6	26	10^{-6}	10''
	0.020	11	51	10^{-6}	2'11''
	0.015	11	51	10^{-8}	3'59''
T_3	0.48	6	26	10^{-2}	5''
	0.29	6	26	10^{-4}	8''
	0.26	11	51	10^{-4}	1'03''
	0.084	11	51	10^{-6}	2'11''
	0.074	11	51	10^{-8}	3'59''
	0.058	21	101	10^{-6}	37'44''
	0.019	21	101	10^{-8}	1h22'18''
T_4	0.54	6	26	10^{-2}	5''
	0.26	11	51	10^{-2}	44''
	0.18	11	51	10^{-6}	2'11''
	0.043	21	101	10^{-6}	37'44''
T_5	1.1	6	26	10^{-2}	5''
	0.89	11	51	10^{-2}	44''
	0.38	11	51	10^{-4}	1'03''
	0.31	11	51	10^{-6}	2'11''
	0.079	21	101	10^{-6}	37'44''

Tabla I. Discretización, factor de error ϵ y cpu necesarios para una precisión dada en el período fundamental y algunos armónicos, para $h = 0.2$.

b) Cálculo de las ondas resonantes para $l_1 = 1/2$, $h_1 = 1/6$, $h_2 = 1/30$

El cálculo ha sido llevado a cabo para tres valores del factor ϵ , y la progresiva estabilización de los resultados conforme ϵ disminuye, constituye una prueba de su exactitud. En la Tabla II presentamos el período fundamental y los catorce primeros armónicos, así como el tiempo de cálculo requerido y el índice de calidad en la determinación de los autovalores, p . Al pasar de $\epsilon = 10^{-4}$ a $\epsilon = 10^{-6}$ se observan variaciones significativas, que llegan al 13% para los primeros modos, y se reducen al 0.1 % para los últimos. En el paso de $\epsilon = 10^{-6}$ a $\epsilon = 10^{-8}$ la máxima variación

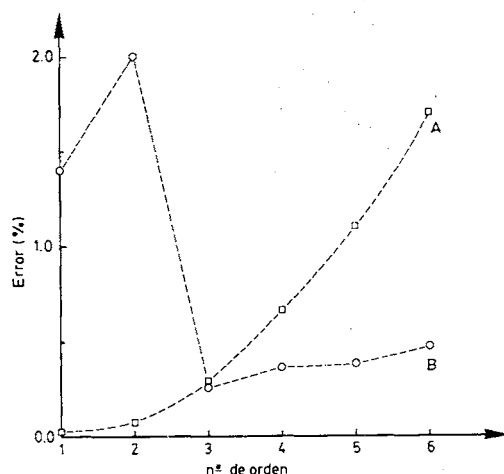


Figura 7. Efecto de una malla excesivamente fina para un factor de error, ϵ , dado.
 $h = 0.2$, $\epsilon = 10^{-4}$. (A): $N = 6$, $M = 26$ (B): $N = 11$, $M = 51$.

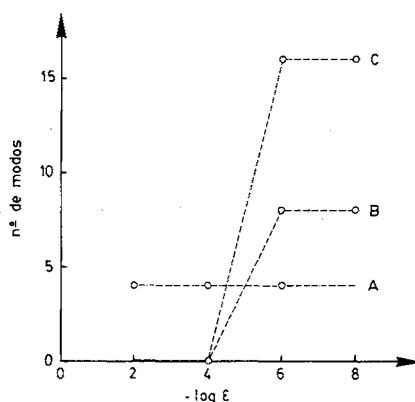


Figura 8. Número de modos con error inferior al 1%, en función del factor de error, ϵ , para tres discretizaciones distintas, con $h = 0.2$. (A): $N = 6$, $M = 26$ (B): $N = 11$, $M = 51$ (C): $N = 21$, $M = 101$.

es de 0.6%, teniendo lugar en el primer armónico, mientras que la variación en el período fundamental es de un 0.07%; a partir del cuarto armónico, dicha variación no excede de 0.1%. De acuerdo con la estimación (44), cabe esperar en los resultados correspondientes a $\epsilon = 10^{-8}$ un error inferior al 1%. No obstante, según los resultados presentados en la Figura 6, el error en el período fundamental y en los tres o cuatro primeros armónicos sería bastante inferior, del orden, como máximo del 0.1%. Nótese, además, que el valor del período fundamental en nuestro caso debe estar entre los valores correspondientes al caso de una profundidad constante igual a $1/6$ o igual a $1/30$, que son, respectivamente, 9.909 y 21.92; el valor obtenido, 13.96, está de acuerdo con esta acotación.

Finalmente, en la Figura 9 se presenta la forma de la superficie libre correspondiente al modo fundamental, y al primer, segundo y quinto armónicos. Puede observarse

$\epsilon = 10^{-4}$	$\epsilon = 10^{-6}$	$\epsilon = 10^{-8}$
14.32	13.97	13.96
5.989	5.333	5.303
3.799	3.541	3.526
2.659	2.487	2.484
2.214	2.042	2.040
1.819	1.763	1.762
1.611	1.555	1.555
1.441	1.420	1.420
1.319	1.306	1.306
1.224	1.220	1.220
1.149	1.146	1.146
1.085	1.085	1.085
1.033	1.034	1.034
0.987	0.988	0.988
0.949	0.049	0.949
cpu=18'	cpu=1h14'	cpu=2h58'
$p = 1.75 \times 10^{-2}$	$p = 1.65 \times 10^{-2}$	$p = 1.45 \times 10^{-2}$

Tabla II. Períodos de los quince primeros modos, para $h_1 = 1/6$, $h_2 = 1/30$, $l_1 = 1/2$, $N = 26$, $M = 151$, $N' = 6$, $M' = 76$, $s = 1.65$.

claramente como la reducción de profundidad repercute en una disminución de longitud de onda y en un aumento de altura de la ola.

APENDICE : RESOLUCION DEL SISTEMA 38

Para la resolución del sistema (3.2.9) se ha usado un método de Gauss- Seidel acelerado (ver [1]).

Se inicializa el proceso iterativo mediante:

$$\phi_{ij}^{(0)} = \hat{\phi}_j, \quad \begin{cases} 2 \leq j \leq M', & 2 \leq i \leq N \\ M' + 1 \leq j \leq M, & 2 \leq i \leq N' \end{cases}$$

y en la iteración p -ésima se hace:

$$\phi_{ij}^{(p)} = (1 - s)\phi_{ij}^{(p-1)} + \frac{s}{\beta_0}(\beta_1\phi_{i+1j}^{(p-1)} + \beta_2\phi_{i-1j}^{(p-1)} + \beta_3\phi_{ij+1}^{(p-1)} + \beta_4\phi_{ij-1}^{(p-1)} - g_{ij}),$$

siendo s el parámetro de sobrerelajación, $1 < s < 2$. Se define el residuo en la iteración p -ésima como la discrepancia entre $\phi^{(p)}$ y la solución exacta, por lo cual, si el sistema se escribe en la forma:

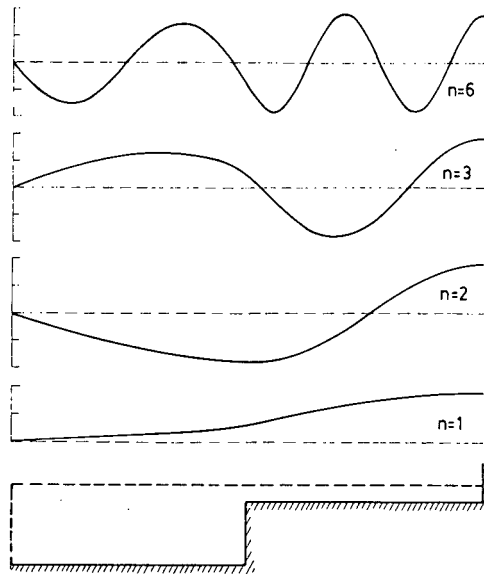


Figura 9. Perfil de la superficie libre para la onda fundamental y algunos armónicos, resonantes en el recinto representado en la Figura 3, para $h_1 = 1/6$, $h_2 = 1/30$, $l_1 = 1/2$. Se ha representado a escala el correspondiente perfil del fondo.

$$\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\phi} = \mathbf{g} \quad ,$$

el residuo vendrá dado por:

$$\mathbf{r}^{(p)} = \mathbf{g} - \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\phi}^{(p)} \quad ,$$

es decir:

$$r_{ij} = g_{ij} + \beta_0 \phi_{ij} - \beta_1 \phi_{i+1j} - \beta_2 \phi_{i-1j} - \beta_3 \phi_{ij+1} - \beta_4 \phi_{ij-1} \quad .$$

El proceso se detiene cuando el residuo es menor que una cierta fracción, ϵ , del residuo inicial, o sea:

$$\|\mathbf{r}^{(p)}\| < \epsilon \|\mathbf{r}^{(0)}\| \quad ,$$

donde se usa la norma del supremo:

$$\|\mathbf{r}\| = \max_{i,j} |r_{ij}| \quad .$$

AGRADECIMIENTOS

El autor desea expresar su agradecimiento al Dr. J.M. Massaguer por las valiosas discusiones sobre el tema. Asimismo, se agradece el soporte del Centro de Cálculo de la E.T.S. d'Enginyers de Camins, Canals i Ports de la Universitat Politècnica de Catalunya.

REFERENCIAS

1. W.F. Ames, "*Numerical methods for partial differential equations*", Academic Press, New York, (1977).
2. E. Isaacson y H.B. Keller, "*Analysis of numerical methods*", John Wiley and Sons, New York, (1966).
3. B. LeMehauté, "*An introduction to Hydrodynamics and water waves*", Springer-Verlag, New York, (1976).
4. M.S. Longuet-Higgins y E.D. Cokelet, "The deformation of steep surface waves", *Proc. R. Soc. Lond.*, Vol. A, **350**, pp. 1-26, (1976).
5. J.M. Massaguer y M. Net, "Contribució a l'estudi de les rissagues", Public. no. ME004-86 de la E.T.S. Eng. Camins (Univ.Pol.Cat.), Barcelona, (1986).
6. V.P. Mijailov, "*Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales*", Mir, Moscú, (1978).
7. F. Raichle, "Harbor resonance", "*Estuary and coastline hydrodynamics*", editado por A.T.Ippen, McGraw-Hill, New York, (1966).
8. J.J. Stoker, "Water waves", *Interscience*, New York, (1957).
9. R.W. Yeung, "Numerical methods in free-surface flows", *Ann. Rev. Fluid Mech.*, Vol. 14, pp. 395-442 (1982).