

# Recálculo de estructuras lineales por medio de la transformación de Shanks

Jorge Hurtado

Universidad Nacional de Colombia  
Apartado 127, Manizales, Colombia  
Tel.: 57-6-886.31.82 ; Fax: 57-6-886.32.20  
e-mail: jhurtado14@epm.net.co

## Resumen

Tanto los análisis de optimización como de confiabilidad estructurales requieren la repetición de análisis del modelo estructural, usando cada vez valores diferentes de las variables de diseño. Para el caso de estructuras lineales, esta labor podría simplificarse si la información obtenida en un punto de referencia en el espacio de diseño bastase para inferir los resultados correspondientes a otros puntos. Este importante objetivo ha sido buscado por medio del uso de las series de Neumann, las cuales, no obstante, muestran una convergencia lenta cuando la distancia con respecto al punto de referencia es moderada o grande. Recientemente, ha sido propuesto un método para la aceleración de las series de Neumann por medio de los aproximantes de Padé. Esta técnica, sin embargo, requiere del cálculo de bases ortonormales de los términos de la serie de Neumann. En este artículo se examina la posibilidad de acelerar la convergencia de la serie de Neumann por medio de la extrapolación de Richardson y de la transformación de Shanks. Por medio de un ejemplo se demuestra que con este último método se obtiene un grado de precisión superior al de los métodos basados en las técnicas de Neumann, Padé y Richardson con un cálculo mucho más sencillo.

**Palabras clave:** *optimización estructural, confiabilidad estructural, series de Neumann, transformación de Shanks, aproximantes de Padé.*

## REANALYSIS OF LINEAR STRUCTURES USING SHANKS TRANSFORMATION

## Summary

Both structural optimization and reliability computations imply the repeated analysis of the structural model by varying the design variables in each run. For the case of linear structures this task could be simplified if the information derived from a single analysis performed at a convenient point in the design space would suffice for the inference of the results corresponding to other points. This important goal has been pursued using Neumann series which, however, exhibits slow convergence when the departure from the reference point is moderate or large. Recently, a method for convergence acceleration of Neumann series using Padé approximants has been proposed. This technique, however, requires the calculation of an orthonormal basis for the Neumann series terms. In this paper the use of Richardson extrapolation technique and Shanks transformation for accelerating the convergence of the Neumann series is explored. It is shown that the last method features the highest degree of accuracy among the methods compared herein with less computational labour.

**Keywords:** *structural optimization, structural reliability, Neumann series, Shanks transformation, Padé approximants.*

## INTRODUCCIÓN

La necesidad de realizar múltiples recálculos de estructuras surge con frecuencia en dos clases de análisis estructurales, cuales son los de confiabilidad y de optimización. En el primer caso se trata de estimar la probabilidad de que una o varias respuestas estructurales superen umbrales considerados como críticos para el comportamiento de la estructura; el recálculo de ésta se hace necesario al aplicar los clásicos métodos iterativos [1, 2] de

estimación del índice de confiabilidad si la función de estado límite no se encuentra dada de manera explícita, o cuando se recurre al método de Monte Carlo. Aunque se han desarrollado técnicas para reducir el número de recálculos [3, 4] éste sigue siendo, en general, alto. En el problema de optimización, por otra parte, se busca encontrar un conjunto de variables de diseño que haga mínimo el costo de la estructura dentro de restricciones predefinidas. Para ello se hace necesario, en varios métodos propuestos, calcular repetidamente la estructura, cada vez con valores diferentes de dichas variables. En ambos casos, pues, se tiene un espacio de variables (llamadas variables básicas en confiabilidad estructural y variables de diseño en el campo de optimización), de suerte que el recálculo corresponde a asignaciones de valores diferentes de estas variables, sea de manera determinista (como en el método de superficie de respuesta [5], ampliamente usado en optimización, o los métodos de diferencias finitas [2] para resolver el problema iterativo de confiabilidad) o aleatoria (como en el método de Monte Carlo [6, 7] o los métodos genéticos y evolutivos para optimización [8, 9, 10, 11]).

En el caso de estructuras lineales, la independencia de la matriz de rigidez de la trayectoria de deformación hace viable la expresión del vector de respuestas estructurales en función del vector correspondiente a un punto de referencia por medio de series de potencias. En aras de la sencillez consideremos un problema estático, pues uno dinámico simplemente implica la adición del término de inercia de acuerdo con el principio de D'Alembert. Haciendo uso del método de elementos finitos [12] el problema puede formularse entonces como

$$\mathbf{k}_0 \mathbf{u}_0 = \mathbf{f}_0 \quad (1)$$

donde  $\mathbf{k}_0$  es la matriz de rigidez evaluada en un punto de referencia en el espacio de variables,  $\mathbf{u}_0$  el vector de grados de libertad y  $\mathbf{f}_0$  el vector de fuerzas externas. Cualquier otra solución evaluada en un punto diferente la expresaremos mediante la ecuación

$$\mathbf{k} \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (2)$$

donde las matrices involucradas se relacionan con las correspondientes al punto de referencia en la forma siguiente

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= \mathbf{k}_0 + \epsilon \Delta \mathbf{k} \\ \mathbf{f} &= \mathbf{f}_0 + \epsilon \Delta \mathbf{f} \end{aligned} \quad (3)$$

siendo  $\epsilon$  un parámetro conveniente para medir la separación del punto de cálculo del de referencia y  $\Delta \mathbf{k}$  y  $\Delta \mathbf{f}$  los cambios en las matrices de rigidez y de fuerzas, respectivamente. De acuerdo con esto, se puede plantear la siguiente expansión de MacLaurin del vector solución  $\mathbf{u}$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \epsilon \mathbf{u}_1 + \epsilon^2 \mathbf{u}_2 + \epsilon^3 \mathbf{u}_3 + \dots \quad (4)$$

Al reemplazar esta ecuación en (2), bajo consideración de la ecuación (1) resulta

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_0 &= \mathbf{k}_0^{-1} \mathbf{f}_0 \\ \mathbf{u}_1 &= \mathbf{k}_0^{-1} (\Delta \mathbf{f} - \Delta \mathbf{k} \mathbf{u}_0) \\ \mathbf{u}_2 &= -\mathbf{k}_0^{-1} \Delta \mathbf{k} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_3 &= \mathbf{k}_0^{-1} \Delta \mathbf{k} \mathbf{u}_2 \end{aligned} \quad (5)$$

Para el caso en que no hay cambios en el vector de fuerzas ( $\Delta \mathbf{f} \equiv \mathbf{0}$ ), se puede presentar la solución en forma de una serie de potencias. Al denotar por  $\mathbf{d}$  el producto  $\mathbf{k}_0^{-1} \Delta \mathbf{k}$  y hacer  $\epsilon \equiv 1$ , resulta

$$\mathbf{u} = (\mathbf{I} - \mathbf{d} + \mathbf{d}^2 - \mathbf{d}^3 + \dots) \mathbf{u}_0 \quad (6)$$

donde  $\mathbf{I}$  es la matriz identidad. La ecuación anterior se conoce con el nombre de serie de Neumann, debido a que es un caso particular de la expresión desarrollada por John von Neumann para resolver problemas de operadores en general [13, 14]. En el caso en que haya variaciones en las fuerzas externas se debe hacer uso de la expresión más general (5) que, a falta de mejor nombre, igualmente llamaremos serie de Neumann.

Las ecuaciones finales anteriores indican que se puede estimar la respuesta estructural para variables básicas o de diseño diferentes a las del punto de referencia sin necesidad de ensamblar ni resolver el problema general de elementos finitos en cada caso. Sin embargo, cuando la distancia entre el nuevo punto de cálculo y el de referencia es grande (de acuerdo con las matrices  $\Delta \mathbf{k}$  y  $\Delta \mathbf{f}$ ), la convergencia de las expansiones anteriores se hace lenta, por lo que es conveniente utilizar técnicas de aceleración de la misma. Una de tales ha sido propuesta recientemente [15], con base en los aproximantes de Padé. Para la aplicación de este método se requiere, sin embargo, del cálculo de una base ortonormal para los vectores  $\mathbf{u}_i, i = 1, 2, \dots$ , paso que debe realizarse, a la vista de la ecuación (5), para cada punto de recálculo y, en el caso dinámico, para cada instante de tiempo, además.

En la sección siguiente se resume el método de Padé, de acuerdo con la referencia [15] y luego las técnicas de aceleración de convergencia de series de potencias de Shanks y Richardson, las cuales, a diferencia del método de Padé, no requieren ningún cómputo intermedio al ser aplicadas a la serie de Neumann. La precisión de estas tres vías de análisis se discute por medio de un ejemplo. La comparación muestra que, de una parte, la extrapolación de Richardson empeora la convergencia de la serie de Neumann en lugar de mejorarla, mientras que la transformación de Shanks rinde los mejores resultados con menores implicaciones de cómputo que el método de Padé o, incluso, que la adición de más términos a la expansión de Neumann. Por ese motivo se ha adoptado para el título de este trabajo.

## MÉTODO DE APROXIMANTES DE PADÉ

Los aproximantes de Padé son útiles para ampliar el radio de convergencia de series de potencias  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \epsilon^k$ . Consisten en la sustitución de la serie por una secuencia de funciones racionales del tipo

$$\Pi_P^Q = \frac{\sum_{j=0}^Q T_j \epsilon^j}{\sum_{j=0}^P S_j \epsilon^j} \quad (7)$$

donde  $S_0 \equiv 1$  por convención, lo cual no resta generalidad. Los  $P+Q+1$  términos restantes se calculan de modo que igualen a los primeros  $P+Q+1$  términos de la expansión de Taylor de la función racional. Esto conduce a un procedimiento algebraico sencillo [16, 17, 18]

$$\mathbf{C} \mathbf{s} = -\tilde{\mathbf{c}} \quad (8)$$

donde  $C_{ij} = c_{-P+i-j}$ ,  $\mathbf{s} = [S_1 S_2 \dots S_P]^T$  y  $\tilde{\mathbf{c}} = [c_{Q+1} c_{Q+2} \dots c_{Q+P}]^T$ . Una vez resuelto este problema correspondiente al denominador, los coeficientes del numerador se hallan por medio de la fórmula

$$T_j = \sum_{i=0}^j c_{j-i} S_i \quad (9)$$

A continuación resumiremos el método de Padé desarrollado en [15] para el recálculo de estructuras lineales:

Para el vector de incrementos de desplazamiento, dado por

$$\Delta \mathbf{u} = \epsilon \mathbf{u}_1 + \epsilon^2 \mathbf{u}_2 + \epsilon^3 \mathbf{u}_3 + \dots \quad (10)$$

se forma una matriz  $\mathbf{D}$  de columnas  $\mathbf{u}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ . Luego se calcula una base ortonormal  $\mathbf{B}$  para la matriz  $\mathbf{D}$

$$\mathbf{D}_i = \sum_{k=1}^i \theta_{ki} \mathbf{B}_k \quad (11)$$

Esta es la conocida ortogonalización de Schmidt [19, 20], en la cual

$$\theta_{ki} = \begin{cases} \frac{\langle \mathbf{D}_i, \mathbf{B}_k \rangle}{\langle \mathbf{B}_k, \mathbf{B}_k \rangle} & \text{si } i \neq k \\ 1 & \text{si } i = k \end{cases} \quad (12)$$

Al sustituir la expresión (11) en (10), se obtiene que el incremento de desplazamiento es

$$\Delta \mathbf{u} = \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon^i f_i(\epsilon) \mathbf{B}_i \quad (13)$$

donde

$$f_i(\epsilon) = \sum_{j=i}^{\infty} \theta_{ji} \epsilon^{j-i} \quad (14)$$

Ahora bien, las funciones  $f_i(\epsilon)$ , por ser series de potencias, pueden ser reemplazadas por aproximantes de Padé para ser luego sustituidas en la ecuación (13). Al aplicar el método resumido anteriormente de cálculo de los coeficientes de Padé, se obtienen los siguientes sucedáneos de las funciones  $f_i(\epsilon)$  en el caso de que la matriz  $\mathbf{D}$  tenga tres columnas

$$\begin{aligned} f_1(\epsilon) &= \theta_{11} + \theta_{12}\epsilon + \theta_{13}\epsilon^2 : & \Pi_1^1 &= (1 + (\theta_{12} - \theta_{13}/\theta_{12})\epsilon)/(1 - \theta_{13}/\theta_{12}\epsilon) \\ f_2(\epsilon) &= \theta_{22} + \theta_{23}\epsilon : & \Pi_1^0 &= 1/(1 - \theta_{23}\epsilon) \\ f_3(\epsilon) &= \theta_{33} : & \Pi_0^0 &= 1 \end{aligned} \quad (15)$$

Esto permite calcular el vector de desplazamientos como  $\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u}_0 + \Delta \mathbf{u}$ .

## TRANSFORMACIÓN DE SHANKS Y EXTRAPOLACIÓN DE RICHARDSON

Expondremos en primer lugar los fundamentos de la transformación de Shanks. Considérese una secuencia infinita  $\{a_0, a_1, a_2, \dots\}$ . Sea  $\alpha$  el límite de la suma de la secuencia, es decir

$$\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \quad (16)$$

y  $\alpha_k$  las sumas parciales de orden  $k$ , esto es,  $\alpha_0 = a_0, \alpha_1 = a_0 + a_1, \dots$ . La transformación de Shanks tiene una motivación diferente de los aproximantes de Padé, a saber, la eliminación del término residual que presente la disminución más lenta hacia cero [16]. Para conseguirlo, se escribe el límite en la forma

$$\alpha \equiv \alpha_k - \nu\gamma^k \quad (17)$$

donde  $|\gamma| < 1$  y  $\nu$  son parámetros. Se pueden calcular las tres incógnitas  $\alpha, \gamma$  y  $\nu$  con la ayuda de tres sumas parciales  $\alpha_{k-1} = \alpha + \nu\gamma^{k-1}$ ,  $\alpha_k = \alpha + \nu\gamma^k$  y  $\alpha_{k+1} = \alpha + \nu\gamma^{k+1}$ . En particular, la solución para el límite da como resultado

$$\hat{\alpha} = \frac{\alpha_{k+1}\alpha_{k-1} - \alpha_k^2}{\alpha_{k+1} + \alpha_{k-1} - 2\alpha_k} \quad (18)$$

En el contexto del recálculo de estructuras lineales se puede usar esta ecuación para cada elemento del vector  $\mathbf{u}$ , formando las sumas parciales  $\alpha_k = u_{0,i} + u_{1,i} + \dots + u_{k,i}$ .

Examinaremos ahora el método de extrapolación de Richardson, el cual se aplica cuando la suma parcial puede ser escrita en la forma

$$\alpha_k \approx \beta_0 + \beta_1 k^{-1} + \beta_2 k^{-2} + \dots \quad (19)$$

El procedimiento consiste en truncar la serie anterior en el término  $J$ -ésimo y ajustar por regresión el polinomio resultante a las sumas parciales. En vista de los exponentes negativos, es obvio que el término  $\beta_0$  es una aproximación del límite. Por fortuna, existe una expresión explícita de este término, la cual puede ser entonces usada como aproximación del límite de la serie de potencias

$$\hat{\alpha} = \sum_{j=0}^J \frac{\alpha_{k+j}(k+j)^J(-1)^{j+J}}{j!(J-j)!} \quad (20)$$

En la aplicación que nos ocupa en este artículo, el procedimiento de Richardson se aplica de igual forma que en el caso de la transformación de Shanks. Debe observarse, sin embargo, que aquél requiere el conocimiento previo de  $k+J$  sumas parciales. Por ejemplo, si sólo se desea calcular hasta  $u_3$  en la serie de Neumann, entonces  $k+J=3$ , lo que deja las posibilidades  $k=3, J=0$ ,  $k=2, J=1$  y  $k=1, J=2$ .

El ejemplo numérico que consta a continuación muestra claramente que, de todas estas técnicas, la que da mejores resultados es la transformación de Shanks aplicada a la serie de Neumann.

## EJEMPLO NUMÉRICO

Con el fin de comparar los diversos métodos descritos en la sección anterior, analizaremos la estructura que aparece en la Figura 1. Se trata de una armadura sometida a dos fuerzas de diferentes dirección y punto de aplicación. El ejemplo ha sido tomado de [21], donde se hace un único análisis de la estructura con un módulo de elasticidad de 200 GPa y un área seccional  $A_0 = 2,5 \times 10^{-3} \text{m}^2$  para todos los elementos. Se trata en este caso de calcular otras 10 posibilidades de la estructura definidas por

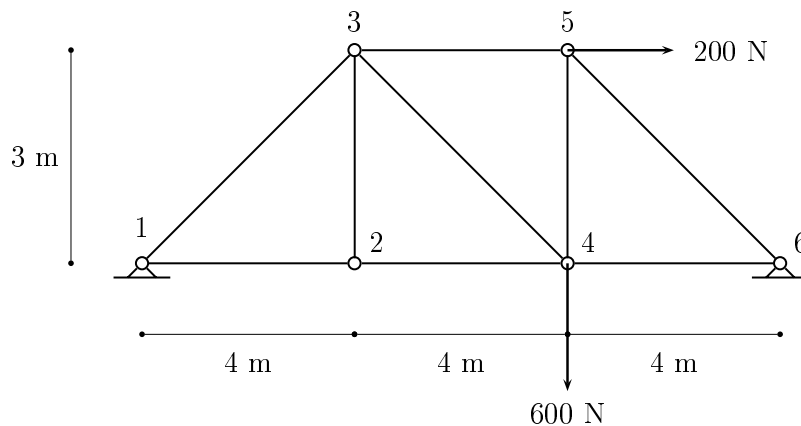
$$A = A_0(1 + \epsilon) \quad (21)$$

donde  $\epsilon$  toma valores uniformemente espaciados en el rango  $[0, 1]$ . Esto significa que se analizan estructuras con elementos con hasta el doble de área seccional.

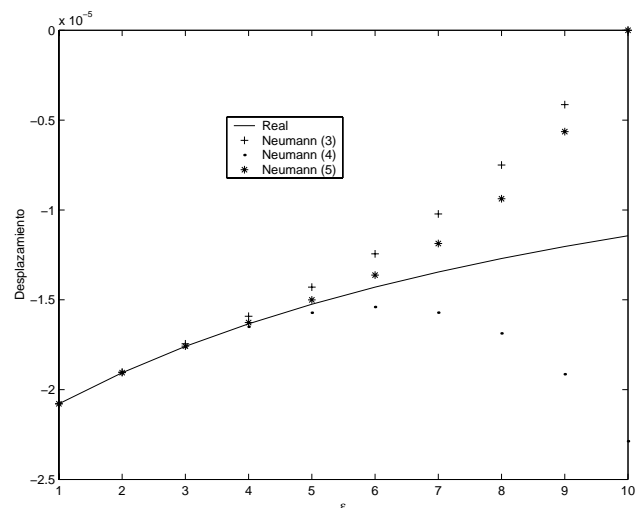
En la Figura 2 se muestran los resultados obtenidos con varios términos de la serie de Neumann, indicados entre paréntesis, para el desplazamiento vertical del nodo 4. Con este diagrama se ilustra la lenta convergencia de la serie, lo que justifica su aceleración. En la Figura 3 se compara el resultado real con los obtenidos con tres términos de la serie de Neumann y el método de Padé propuesto por [15]. Puede verse que, aunque el método de Padé da buenos resultados, su convergencia comienza a deteriorarse progresivamente a partir de  $\epsilon = 0,5$ . Por el contrario, la transformación de Shanks da excelentes resultados en todo el rango de variación del área seccional, como lo demuestra la Figura 4. Es evidente, además, que el método de Richardson empeora la convergencia en lugar de mejorarla y que, por tanto, debe descartarse.

La discusión anterior deja como alternativas solamente las técnicas de Padé y de Shanks, las cuales se comparan en la misma escala en la Figura 5. Es claro que segunda opción es la mejor, no sólo por su mayor precisión sino también por su mayor simplicidad para el cálculo.

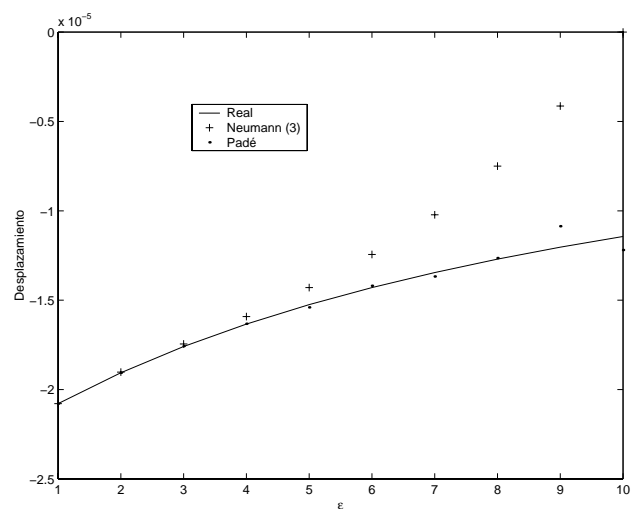
Comparación de los métodos de Padé y Shanks



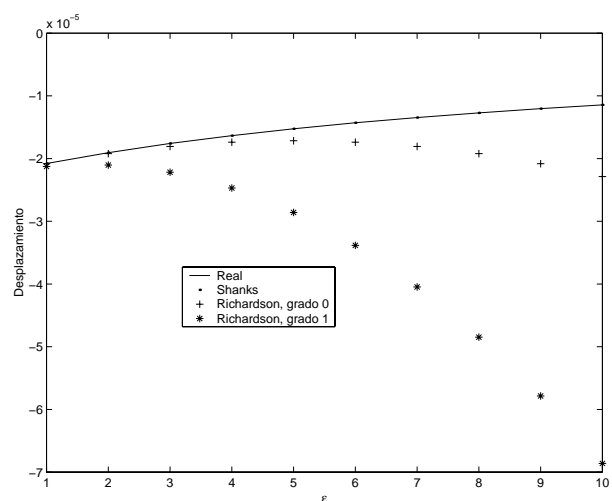
**Figura 1.** Estructura resuelta en el ejemplo numérico



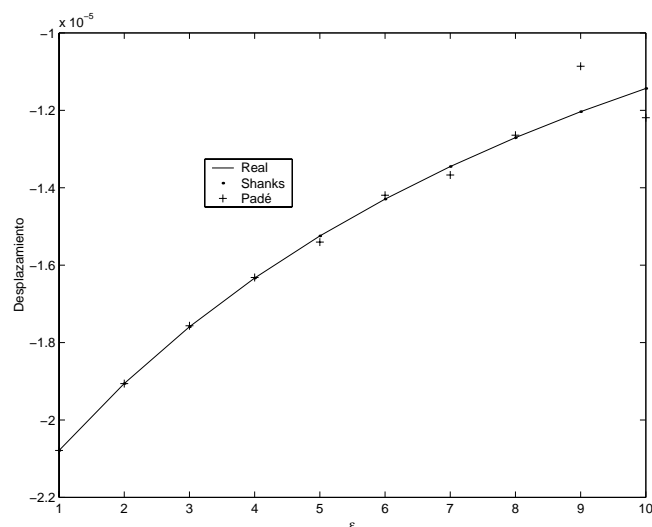
**Figura 2.** Convergencia de la serie de Neumann



**Figura 3.** Métodos de Neumann y Padé



**Figura 4.** Métodos de Shanks y Richardson



**Figura 5.** Comparación de los métodos de Padé y Shanks

## CONCLUSIONES

Una necesidad corriente en los estudios de confiabilidad y optimización de estructuras es el múltiple recálculo de los modelos, cada vez con parámetros diferentes. Se ha presentado un método que permite realizar tales recálculos para el caso de estructuras lineales modeladas con elementos finitos que evita ensamblar y resolver el sistema de ecuaciones algebraicas para cada conjunto de parámetros. El método utiliza la transformación de Shanks aplicada a la serie (o resolvente) de Neumann para acelerar su convergencia. A través de un ejemplo se ha demostrado que el método rinde mejores resultados que el uso de más términos de la serie de Neumann, la aplicación de los aproximantes de Padé o la extrapolación de Richardson a dicha serie.

## AGRADECIMIENTOS

Para la realización de esta investigación se contó con apoyo de la Universidad Nacional de Colombia, entidad a la cual el autor expresa su agradecimiento.

## REFERENCIAS

- 1 R. Rackwitz y B. Fiessler, "Structural reliability under combined load sequences", *Computers and Structures*, Vol. **9**, pp. 489–494, (1978).
- 2 R.E. Melchers, "*Structural Reliability: Analysis and Prediction*", John Wiley and Sons, Chichester, (1999).
- 3 J.E. Hurtado y D.A. Alvarez, "Neural network-based reliability analysis: A comparative study", *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. **191**, pp. 113–132, (2001).
- 4 J.E. Hurtado, "Analysis of one-dimensional stochastic finite elements using neural networks", *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol. **17**, pp. 35–44, (2002).
- 5 G.E.P. Box y N.R. Draper, "*Empirical Model Building and Response Surfaces*", John Wiley and Sons, New York, (1987).



- 6 , R.Y. Rubinstein, “*Simulation and the Monte Carlo Method*”, John Wiley and Sons, New York, (1981).
- 7 R.Y. Rubinstein, “*Monte Carlo Optimization, Simulation and Sensitivity of Queuing Networks*”, Krieger Publishing Company, Malabar, (1992).
- 8 D.E. Goldberg, “*Genetic Algorithms in search, optimization and machine learning*”, Addison-Wesley, New York, (1989).
- 9 S. Botello, J.L. Marroquin, E. Oñate y J. Horebeek, “Solving structural optimization problems with genetic algorithms and simulated annealing”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. **45**, pp. 1069–1084, (1999).
- 10 C.A. Coello, “Constraint-handling using an evolutionary multiobjective optimization technique”, *Civil Engineering and Environmental Systems*, Vol. **17**, pp. 319–346, (2000).
- 11 T.Bäck, F.Hoffmeister y H.P. Schwefel, “A survey on evolution strategies”, En R.K. Belew y L.B. Booker, editores, *Proceedings of the Fourth International Conference on Genetic Algorithms*, Morgan Kauffman Publishers, pp 2–9, San Mateo, California, (1991).
- 12 K.J. Bathe, “*Finite Element Procedures*”, Prentice Hall, Upper Saddle River, (1996).
- 13 F. Riesz y S. Nagy, “*Functional Analysis*”, Dover Publications, New York, (1990).
- 14 E. Zeidler, “*Applied Functional Analysis. Applications to Mathematical Physics*”, Springer, New York, (1995).
- 15 S.H. Chen, X.W. Yang y B.S. Wu, “Static displacement reanalysis of structures using perturbation and Padé approximation, *Communications in Numerical Methods in Engineering*, Vol. **16**, pp. 75–82, (2000).
- 16 C.M. Bender y S. A. Orszag, “*Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers*”, McGraw-Hill, New York, (1978).
- 17 W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling y B.P. Flannery, “*Numerical Recipes in FORTRAN*”, Cambridge University Press, Cambridge, (1992).
- 18 A. Pozzi, “*Applications of Padé Approximation Theory in Fluid Dynamics*”, World Scientific, Singapore, (1994).
- 19 I.Ñ. Bronshtein y K.A. Semendyayev, “*Handbook of Mathematics*”, Springer, Berlin, (1997).
- 20 F.R. Gantmacher, “*Théorie des matrices*, Dunod, Paris, (1966).
- 21 Y.W. Kwon y Y. Bang, “*The Finite Element Method using MATLAB*, CRC, Boca Ratón, (1997).