

# **Principis d'acústica, d'aeroacústica i breu introducció a l'aeroacústica computacional de fluxos subsònics**

**O. Guasch i Fortuny**

# **Principis d'acústica, d'aeroacústica i breu introducció a l'aeroacústica computacional de fluïxos subsònics**

**O. Guasch i Fortuny**

**Publicació CIMNE N°-220, Setembre 2002**



# ÍNDIX

1- INTRODUCCIÓ ...	2
2- DEFINICIONS I CONCEPTES BÀSICS D'ACÚSTICA ...	3
2.1 Introducció ...	3
2.2 L'equació d'ones ...	3
2.2.1 Les equacions fonamentals i l'equació d'ones ...	3
2.2.2 Solucions a l'equació d'ones ...	6
2.3 L'equació d'ones inhomogènia ...	7
2.3.1 Fonts monopolars ...	7
2.3.2 Resposta a l'impuls, funció de Green i integral de Kirchhoff - Helmholtz ...	7
2.3.3 Fonts dipolars i quadrupolars ...	9
2.3.4 Desenvolupament multipolar ...	10
2.4 Anàlisi de Fourier ...	11
2.4.1 Introducció ...	11
2.4.2 Funcions periòdiques ...	11
2.4.3 Funcions aperiòdiques que s'anul·len a l'infinit ...	12
2.4.4 Processos estocàstics ...	13
2.4.5 Transformades espacials i transformades conjuntes $k-\omega$ ...	16
2.5 Intensitat i potència acústiques ...	18
2.5.1 Intensitat i potència instantànies ...	18
2.5.2 Intensitat i potència mitjanes ...	18
2.5.3 Nivells de pressió, intensitat i potència ...	19
3- AEROACÚSTICA ...	20
3.1 Introducció ...	20
3.2 La definició d'analogia acústica ...	21
3.3 L'analogia de Lighthill ...	21
3.3.1 L'equació de Lighthill ...	21
3.3.2 La solució temporal en camp llunyà ...	23
3.3.3 La solució al domini freqüencial en camp llunyà ...	25
3.3.4 Anàlisi dimensional ...	27
3.4 L'analogia de Powell-Howe ...	27
3.5 L'analogia de Möhring ...	28
3.6 L'analogia de Ffowcs Williams - Hawkins (FW-H). Interacció amb superfícies sòlides ...	29
3.7 Altres analogies ...	31
3.7.1 L'analogia de Legendre ...	31
3.7.2 L'analogia de Phillips ...	31
3.7.3 L'analogia de Lilley ...	31
3.7.4 L'analogia de Ribner ...	31
3.7.5 L'analogia de Howe ...	31
4- AEROACÚSTICA COMPUTACIONAL DE FLUIXOS SUBSÒNICS ...	32
4.1 Introducció ...	32
4.2 Dificultats que presenta l'aeroacústica computacional de fluxos subsònics ...	32
4.3 Alternatives de computació el soroll aerodinàmic ...	33
4.4 Analogies acústiques en CAA ...	34
5- CONCLUSIONS ...	36
REFERÈNCIES ...	38



# 1. INTRODUCCIÓ

En aquest escrit presentarem una breu introducció a l'aeroacústica computacional. L'aeroacústica és un camp sorgit de l'acústica i de la mecànica de fluids que s'encarrega de l'estudi del soroll generat per fluxos no-estacionaris i/o turbulents i per la seva interacció amb superfícies sòlides.

En primer lloc, i per a aquells lectors sense coneixements previs d'acústica, presentarem una recopilació de les definicions i conceptes bàsics d'aquesta ciència. Veurem les equacions fonamentals de les ones sonores, les equacions d'ones homogènies i els casos més típics d'equacions d'ones inhomogènies (presència de fonts monopolars, dipolars i quadrupolars). També farem un breu repàs de l'anàlisi de Fourier per a senyals deterministes i estocàstiques i finalment definirem els nivells de pressió, d'intensitat i de potència acústiques.

A continuació ens endinsarem en el camp de l'aeroacústica i veurem algunes de les diferents analogies acústiques existents, la primera de les quals fou establerta per Lighthill. Aquest mostrà com, per mitjà d'un reordenament de les equacions del moviment i continuïtat del fluid, es pot excitar un camp acústic lineal per mitjà d'un procés clarament no lineal com la turbulència. La idea subjacent a tota analogia acústica és la d'establir una separació entre la font de soroll (fluid no periòdic i/o turbulent) i la zona on es propaga el camp acústic. Tot i que això implica algunes limitacions, les analogies acústiques són d'una gran utilitat per tal d'entendre els mecanismes físics de generació de soroll aerodinàmic. Per altra banda, i pel que fa a l'aeroacústica computacional, cal assenyalar que l'ús de les diferents analogies acústiques ha estat i segueix essent una de les vies més exitoses a l'hora de calcular els camps acústics generats per fluxos subsònics.

Les analogies acústiques que presentarem amb cert detall són aquelles que, al nostre entendre, poden ser més útils de cara a resoldre els problemes d'enginyeria que aquí ens interessin, i que estan bàsicament centrats en el càlcul del soroll aerodinàmic generat per la interacció de fluxos subsònics amb superfícies sòlides. Alguns exemples d'aquests problemes poden ser el càlcul del soroll aerodinàmic generat per la carrosseria i pels apèndixs de trens d'alta velocitat, pels apèndixs d'automòbils o per diferents models de ventiladors.

Pel que fa a l'aeroacústica computacional esmentarem quines són les característiques dels camps acústics aerodinàmics que dificulten notablement la seva simulació numèrica i presentarem alguns dels mètodes que s'han seguit per tal de fer càlculs aeroacústics més o menys fiables. També comentarem breument quina és l'opció més vàlida, al nostre entendre, per tal d'intentar resoldre els problemes d'enginyeria del paràgraf anterior.

Finalment, i pel que fa a la notació, volem assenyalar que a les fórmules que apareixen al llarg del text s'ha fet ús del conveni d'Einstein sobre els índexs repetits i que per a les derivades parcials s'ha emprat la notació  $\partial_a \equiv \frac{\partial}{\partial x_a}$ ,  $\partial_a \partial_b = \partial_b \partial_a \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_a \partial x_b}$  i  $\partial_a^n \equiv \frac{\partial^n}{\partial x_a^n}$ . Les derivades materials s'han designat per  $D_t := \partial_t + v_i \partial_i \equiv \frac{D}{Dt} := \frac{\partial}{\partial t} + v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ . També emprarem  $d_x \equiv \frac{d}{dx}$ .

## 2. DEFINICIONS I CONCEPTES BÀSICS D'ACÚSTICA

### 2.1 Introducció

El so es pot definir com una vibració o pertorbació mecànica que es propaga per un medi elàstic, bé sigui un gas, un líquid o un sòlid. Les característiques d'aquesta vibració vénen donades, en cada cas, per les solucions de la corresponent "equació d'ones" que presentarem més endavant.

La definició anterior és molt general i inclou els casos de vibracions ultrasòniques, sòniques i infrasonsiques. Tanmateix, en aquest treball tan sols ens ocuparem d'aquelles pertorbacions capaces de ser captades pel sentit de l'oïda humà, i que de forma genèrica s'anomenen *soroll*.

El sentit de l'oïda és sensible a les variacions de pressió respecte la pressió atmosfèrica dins d'un determinat marge de freqüències. A aquestes variacions de pressió se les anomena *pressió acústica*. De fet, l'oïda no és directament sensible a la pressió acústica sinó que varia de forma logarítmica amb el seu flux d'energia o intensitat acústica, que definirem en els pròxims apartats. Per tant, un soroll que sigui dues vegades més intens que un altre tan sols ens produeix una sensació auditiva lleugerament superior, mentre que per doblar aquesta sensació l'hauríem d'intensificar cent vegades.

Una persona que gaudeixi d'un sentit de l'oïda sa és capaç de percebre sons que varien entre els 15 Hz i els 16.000 Hz. La resposta de l'oïda no és igual a totes les freqüències: és força insensible a baixes freqüències mentre que és especialment sensible entre els 1000 Hz i els 4000 Hz. La corba de la resposta en freqüència de l'oïda per a un soroll d'intensitat moderada, i espectre constant, s'anomena filtre A. Per a sorolls molt intensos l'oïda esdevé més sensible a baixes freqüències i la seva resposta s'ajusta amb corbes diferents (filtres C i D).

Els conceptes i definicions que presentarem als pròxims apartats es poden trobar a molts llibres d'acústica i mecànica, alguns dels quals s'han inclòs a les referències [1, 2, 3, 4, 5, 6 i 7].

### 2.2 L'equació d'ones homogènia

#### 2.2.1 Les equacions fonamentals i l'equació d'ones

A 2.1 hem definit la pressió acústica com les variacions de pressió respecte la pressió atmosfèrica per a un marge determinat de freqüències. Tanmateix, i per tal de poder parlar de pressió acústica, aquestes variacions no poden ser qualssevol sinó que han de ser solució de l'anomenada equació d'ones. Les pertorbacions de la pressió atmosfèrica que no compleixen aquest darrer requisit, però que poden ser captades per un micròfon (p.ex les variacions de pressió degudes a la convecció de remolins en un flux) s'acostumen a anomenar *pseudo-so*.

Si suposem que l'aire de l'atmosfera es pot aproximar per un flux ideal (flux en que s'ha negligit la viscositat i per tant no admet esforços tallants) el moviment d'una de les seves partícules, sotmesa a una força externa  $\mathbf{f}_0$  independent del temps, ens ve descrit per l'equació d'Euler

$$\rho D_t \mathbf{v} + \nabla p = \mathbf{f}_0 \quad (2.1)$$

En el cas que l'atmosfera estigui en repòs i que la puguem caracteritzar per una pressió atmosfèrica  $p_0$  i per una densitat  $\rho_0$  (valors típics:  $p_0=10^5$  Pa i  $\rho_0=1.21$  kg/m<sup>3</sup>) l'equació (2.1) es redueix a

$$\nabla p_0 = \mathbf{f}_0 \quad (2.2)$$

Si ara pertorbem lleugerament l'aire, de manera que els valors de la pressió i de la densitat esdevinguin  $p=p_0+p'$  i  $\rho=\rho_0+\rho'$ , amb  $p' \ll p_0$  i  $\rho' \ll \rho_0$ , i els substituïm a (2.1) arribem a

$$\nabla p' = -\rho_0 \partial_t \mathbf{v} \quad (2.3)$$

on hem negligit totes les potències d'ordre superior a 1 de  $p'$ ,  $\rho'$ ,  $\mathbf{v}$  i les seves derivades, i a més a més hem emprat (2.2). Per tal de fer-nos una idea de l'ordre de magnitud de les pertorbacions p.ex.  $p'$  de què estem parlant, direm que l'oïda humana és capaç de percebre variacions de pressió de  $2 \cdot 10^{-5}$  Pa que són 10 ordres de magnitud inferiors a la pressió atmosfèrica de  $10^5$  Pa.

Per altra banda, l'equació de continuïtat en un flux on no hi ha fonts de flux té la següent expressió

$$D_t \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.4)$$

Substituint  $\rho$  per  $\rho=\rho_0+\rho'$  a (2.4) obtenim

$$\partial_t \rho' = -\rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \nabla \rho_0 \quad (2.5)$$

i si considerem la densitat a l'equilibri  $\rho_0$  pràcticament homogènia a tot l'espai, aleshores  $\nabla \rho_0 \sim 0$  i el segon terme de la dreta de (2.5) es pot ignorar.

Si a continuació suposem que l'equació d'estat del flux és tal que la densitat només depèn de la pressió, i.e.  $\rho=\rho(p)$ <sup>1</sup> podem expressar el coeficient de compressibilitat,  $B$ , del flux com

$$B := -\frac{1}{V} d_p V \Big|_m = -\frac{m}{V} d_p \left(\frac{V}{m}\right) \Big|_m = -\rho d_p \left(\frac{1}{\rho}\right) = -\rho \left(-\frac{1}{\rho^2}\right) d_p \rho = \frac{1}{\rho} d_p \rho \quad (2.6)$$

essent  $m$  la massa,  $V$  el volum,  $\rho$  la densitat i  $p$  la pressió.

Prenent novament  $p=p_0+p'$  i  $\rho=\rho_0+\rho'$  i aproximant  $d_p$  per  $p'$  i  $d\rho$  per  $\rho'$  arribem a

---

<sup>1</sup> Aproximació isentròpica.



$$\frac{\rho'}{\rho_0} = \frac{p'}{B} \quad (2.7)$$

expressió que podem aprofitar per eliminar  $p'$  o  $\rho'$  a partir de (2.3) o (2.5). Si eliminem  $\rho'$  de (2.5) ens queda

$$\partial_t p' = -B \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (2.8)$$

Les equacions (2.3) i (2.8) són les *equacions fonamentals de les ones sonores* i es poden utilitzar tant per trobar una expressió per a  $p'$  com per a  $\mathbf{v}$ . Les presentem conjuntament degut a la seva importància

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{v} &= -\frac{1}{\rho_0} \nabla p' \\ \partial_t p' &= -B \nabla \cdot \mathbf{v} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Prenent la divergència de la primera equació de (2.9) i permutant l'ordre de derivació ens queda

$$\partial_t (\nabla \cdot \mathbf{v}) = -\frac{1}{\rho_0} \nabla^2 p' \quad (2.10)$$

Finalment si derivem la segona equació de (2.9) respecte el temps i substituïm a (2.10) obtenim l'*equació d'ones homogènia* per a la pressió acústica

$$\partial_t^2 p' - c_0^2 \nabla^2 p' = 0 \quad (2.11)$$

on  $c_0 := \sqrt{B/\rho_0}$  és la velocitat de propagació de les ones acústiques que són solució de (2.11).

Tenint en compte la definició de l'operador d'Alambertià,  $\square^2 := \partial_a \partial_a$ , i prenent  $x_4 := ic_0 t$ , l'equació (2.11) és pot escriure com

$$\square^2 p' = 0 \quad (2.12)$$

Ja que la relació entre la pressió i la densitat és lineal, (2.7), i l'equació (2.12) també ho és, aquesta es complirà per a les pertorbacions de densitat. A través de les equacions fonamentals de les ones sonores podem demostrar que la velocitat  $\mathbf{v}$  també compleix una equació d'ones i també es possible demostrar que el potencial de velocitat  $\phi$ , amb  $\mathbf{v} = \nabla \phi$ , compleix (2.12):

$$\square^2 p' = 0, \quad \square^2 \phi = 0 \quad i \quad \partial_t^2 \mathbf{v} - c_0^2 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0 \quad (2.13)$$

Finalment, volem remarcar que les equacions (2.12) i (2.13) no són sinó un cas particular deduïble de les equacions dinàmiques linealitzades d'un gas [5]:

$$\left. \begin{aligned} \rho_0(\partial_t \mathbf{v}' + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \mathbf{v}' + \mathbf{v}' \cdot \nabla \mathbf{v}_0) + \rho' \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \mathbf{v}_0 &= -\nabla p' + \mathbf{f}_0 \\ \partial_t \rho' + \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}' + \rho' \mathbf{v}_0) &= \rho_0 Q \\ \partial_t S' + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla S' + \mathbf{v}' \cdot \nabla S_0 &= 0 \\ c_0^2(\partial_t \rho' + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \rho' + \mathbf{v}' \cdot \nabla \rho_0) + c_0'^2 \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \rho_0 &= \partial_t p' + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla p' + \mathbf{v}' \cdot \nabla p_0 \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

on les variables amb "prima" representen petites pertorbacions respecte el seu valor estacionari, i.e  $x'=x-x_0$  (on  $x$  representa qualsevol de les variables de (2.14)), i  $\rho$  és la densitat del gas,  $\mathbf{v}$  és la velocitat d'un element de flux,  $p$  és la pressió,  $c$  la velocitat de propagació de les pertorbacions,  $S$  és l'entropia,  $\mathbf{f}_0$  una força externa estacionària i  $Q$  una font de generació de flux de volum<sup>2</sup>.

L'equació (2.14) és una expressió general que descriu la propagació de petites pertorbacions en un flux estacionari i per tant no és aplicable en aquelles regions on aquestes, o els seus gradients, prenen valors elevats.

### 2.2.2 Solucions a l'equació d'ones

En el cas que la pressió  $p'$  de l'equació (2.11) sigui periòdica, s'anul·li quan  $t \rightarrow \pm \infty$ , o sigui estacionària, podem fer la transformada de Fourier de (2.11) i obtenir l'anomenada *equació de Helmholtz*:

$$(\nabla^2 + k^2)\widehat{p}' = 0 \quad (2.15)$$

on  $|k| = k := \frac{\omega}{c_0}$  és el mòdul del vector número d'ones  $\mathbf{k}$ ,  $\omega$  és la freqüència angular i  $\widehat{p}'$  és la transformada de Fourier de la pressió  $p'$ . Una solució ben simple de (2.15) ens ve donada per

$$\widehat{p}' = A e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad (2.16)$$

amb  $A = \text{constant}$ . Si suposem, a més a més, que  $p'$  és una funció harmònica del temps aleshores

$$p' = \widehat{p}' e^{-i\omega t} \quad (2.17)$$

i una solució senzilla de (2.11) serà l'ona plana

$$p' = A e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad (2.18)$$

Ja que l'equació (2.11) és lineal, qualsevol combinació lineal d'ones planes del tipus (2.18) també en serà solució (*principi de superposició*). Així doncs una solució general a l'equació d'ones ens vindrà donada per l'expressió

$$p'(x, t) = \iint_{-\infty}^{\infty} A(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} d\mathbf{k}_u d\omega \quad (2.19)$$

<sup>2</sup> Suposem que ni  $\mathbf{f}_0$  ni  $Q$  produeixen entropia.

on  $\mathbf{k}_u = \mathbf{k}/k$  és el vector unitari en la direcció del vector nombre d'ones.

## 2.3 L'equació d'ones inhomogènia

### 2.3.1 Fonts monopolars

Amb les mateixes hipòtesis que ens han permès deduir l'equació d'ones (2.12) i (2.13) però suposant ara, que hi pot haver una font de flux de volum  $Q^3$  en un punt  $\mathbf{x}_s$  del flux, es pot demostrar a partir de les equacions linealitzades dinàmiques d'un gas (2.14) que les pertorbacions de pressió generades compliran l'equació d'ones inhomogènia:

$$\square^2 p' = -\rho_0 \partial_t Q(t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) \quad (2.20)$$

on  $\delta$  és la delta de Dirac.

Per entendre millor el significat de (2.20) podem pensar en el camp acústic generat per una esfera polsant de radi  $a(t)$  i centrada a  $\mathbf{x}_s$ , amb  $a(t) \ll T_p c_0$  i  $\frac{a'(t)}{a(t)} \ll 1$  on  $T_p$  és el període de pulsació de l'esfera. Sota aquestes condicions, les pertorbacions de pressió,  $p'$ , degudes a les oscil·lacions de l'esfera seran petites i compliran l'equació d'ones (2.12). Tenint en compte que el volum de flux a través d'una superfície petita, fixa i imaginària, que engloba l'esfera polsant, ens vindrà donat per  $Q(t) = 4\pi a^2(t) v_a$ , on  $v_a$  és la velocitat radial a la superfície de l'esfera, podem avaluar el camp acústic generat resolent (2.12) en coordenades esfèriques i imposant la condició que la velocitat de les partícules del flux siguin iguals a la de la superfície de l'esfera polsant,  $v_a$ , quan  $r = a$  (essent  $r$  la coordenada esfèrica radial). Seguint aquests passos s'obté la solució

$$p'(r, t) = \frac{\rho_0}{4\pi r} \partial_t Q\left(t - \frac{r}{c_0}\right). \quad (2.21)$$

Podem comprovar, per altra banda, que (2.21) també és solució de (2.20) si l'operador d'Alambertià s'expressa en coordenades esfèriques. Per tant, es pot concloure que el camp acústic generat per una esfera polsant de radi petit és el mateix que el generat per una font de flux de volum concentrada a  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_s$ . Això justifica, en part, el fet que puguem considerar els termes inhomogènics d'equacions semblants a (2.20) com a fonts de soroll.

El terme inhomogèni de (2.20), que representa una font puntual de soroll, s'anomena *monopol acústic* de força  $s(t) := (4\pi)^{-1} \rho_0 \partial_t Q(t)$ .

### 2.3.2 Resposta a l'impuls, funció de Green i integral de Kirchhoff-Helmholtz

La funció que representa el camp acústic, al domini temporal, generat per un monopol acústic de força instantània  $\delta(t - t_s)$  aplicada a l'instant  $t_s$ , s'acostuma a

<sup>3</sup> Tenint en compte que  $\rho_0$  és constant podem introduir-la dins de la derivada temporal a la dreta de (2.20) i pensar en termes de  $\rho_0 Q$  i.e de flux volúmic de massa.

anomenar *resposta a l'impuls*<sup>4</sup> i és solució de l'equació:

$$\square^2 G(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_s, t_s) = -4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s)\delta(t - t_s) \quad (2.22)$$

on la notació  $G(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_s, t_s)$  expressa el principi de reciprocitat, i.e, font i receptor es poden intercanviar sense modificar el resultat

$$G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_s, t_s) = G(\mathbf{x}_s, -t_s; \mathbf{x}, -t). \quad (2.23)$$

La resposta a l'impuls en camp lliure  $G^0(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_s, t_s)$  és

$$G^0(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_s, t_s) = \frac{1}{r}\delta(t - t_s + \frac{r}{c_0}) \quad (2.24)$$

on  $r$  és el mòdul de la distància entre  $\mathbf{x}$  i  $\mathbf{x}_s$ .

La transformada de Fourier de la resposta a l'impuls  $G^0$  és la *funció de Green* en camp lliure:

$$\widehat{G}_\omega^0(\mathbf{x} | \mathbf{x}_s) := \frac{1}{r}e^{i\omega \frac{r}{c_0}}. \quad (2.25)$$

Cal assenyalar que  $\widehat{G}_\omega^0$  també es pot obtenir com a solució de l'equació inhomogènia de Helmholtz en camp lliure

$$(\nabla^2 + k^2)\widehat{G}_\omega^0 = -4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s). \quad (2.26)$$

El coneixement de la funció de resposta a l'impuls i de la funció de Green ens permet calcular, utilitzant el principi de superposició, el camp acústic generat per una distribució arbitrària de monopols de forces  $s$ . En efecte, la pressió resultant en un punt  $\mathbf{x}$  de l'espai esdevé

$$p'(\mathbf{x}, t) = \iiint_{V_s} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_s, t_s) s(\mathbf{x}_s, t_s) dV_s dt_s = \iiint_{V_s} \frac{1}{r} s(\mathbf{x}_s, t - r/c_0) dV_s \quad (2.27)$$

on a la segona igualtat hem utilitzat  $G=G^0$  i (2.24) per tal d'obtenir el resultat en camp lliure. De forma equivalent, al domini freqüencial tindrem

$$\widehat{p}'_\omega(\mathbf{x}) = \iiint_{V_s} \widehat{G}_\omega(\mathbf{x} | \mathbf{x}_s) \widehat{s}(\mathbf{x}_s) dV_s = \iiint_{V_s} \frac{1}{r} e^{i\omega \frac{r}{c_0}} \widehat{s}(\mathbf{x}_s) dV_s \quad (2.28)$$

on a la segona igualtat també hem considerat  $\widehat{G}_\omega = \widehat{G}_\omega^0$ .

En el cas que a més a més d'una distribució de fonts acústiques tinguem contorns sòlids,  $S$ , que puguin reflectir, absorbir o fins i tot emetre so, podem utilitzar també el formalisme de la funció resposta a l'impuls i de la funció de Green

<sup>4</sup> La terminologia que aquí fem considerant la *funció resposta a l'impuls* com la solució a una excitació unitat al domini temporal i la *funció de Green* com la solució a una excitació unitat al domini freqüencial no s'acostuma a respectar en general a la literatura, i sovint es parla de la funció de Green al domini temporal i al freqüencial.

per tal d'obtenir el camp acústic total. La pressió acústica al domini freqüencial en un punt  $\mathbf{x}$  de l'espai esdevé [3,4]:

$$\begin{aligned} \widehat{p}'_{\omega}(\mathbf{x}) = & \iiint_{V_s} \widehat{G}_{\omega}(\mathbf{x} | \mathbf{x}_s) \widehat{S}(\mathbf{x}_s) dV_s + \\ & + \frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ \widehat{G}_{\omega}(\mathbf{x} | \mathbf{x}_s) \nabla \widehat{p}'(\mathbf{x}_s) - \widehat{p}'(\mathbf{x}_s) \nabla \widehat{G}_{\omega}(\mathbf{x} | \mathbf{x}_s) \right\} \cdot \mathbf{n}_s dS(\mathbf{x}_s) \end{aligned} \quad (2.29)$$

on  $\mathbf{n}_s$  representa la normal (dirigida cap a l'exterior) a la superfície  $S$  i  $\mathbf{x}_s$  és ara un punt de  $S$ . L'equació (2.29) ens diu per tant que el camp acústic total en un punt  $\mathbf{x}$  és la suma del camp directe produït per la distribució volúmica de fonts més el camp degut a les fonts superficials de  $S$ . La condició de radiació de Sommerfeld  $r(\partial_r p' - ikp') \rightarrow 0$  quan  $r \rightarrow \infty$  i  $r = |\mathbf{x}|$  evita les contribucions d'una integral de superfície a l'infinit.

Per altra banda, en el cas que no hi hagi fonts interiors a  $S$  el primer terme de la dreta de (2.29) s'anul·la, i si escollim novament  $\widehat{G}_{\omega} = \widehat{G}_{\omega}^0$ , l'equació (2.29) reb el nom de integral de Kirchoff-Helmholtz. Tant la integral de Kirchoff-Helmholtz com l'equació (2.29) tenen una gran quantitat d'aplicacions pràctiques i teòriques que tanmateix no discutirem aquí [2,3,9].

### 2.3.3 Fonts dipolars i quadrupolars

Un cas particular de distribució de monopols el constitueixen els dipols. Un dipol és un conjunt format per dos monopols de força oposada (oscil·lant en contrafase) i situats a molt curta distància l'un de l'altre.

En efecte, suposem que tenim un monopol de força  $s$  a  $\mathbf{x}_s + \frac{\mathbf{d}}{2}$  i un de força  $-s$  a  $\mathbf{x}_s - \frac{\mathbf{d}}{2}$  i prenem el límit  $d \rightarrow 0$  amb  $kd \ll 1$  i essent  $d = |\mathbf{d}|$  i  $k$  el mòdul del nombre d'ones. Aleshores, la funció de Green a  $\mathbf{x}_s \pm \frac{\mathbf{d}}{2}$  es pot aproximar mitjançant un desenvolupament de Taylor a primer ordre

$$G(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_s \pm \frac{\mathbf{d}}{2}, t_s) \simeq G(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_s, t_s) \pm \frac{\mathbf{d}}{2} \cdot \nabla_s G(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_s, t_s) \quad (2.30)$$

on  $\nabla_s$  és el gradient respecte les coordenades de la font. El camp acústic en un punt de l'espai ens vindrà donat per (2.27)

$$p'(\mathbf{x}, t) = s(t) \mathbf{d} \cdot \nabla_s G(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_s, t_s) = \mathbf{D} \cdot \nabla_s G(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_s, t_s) \quad (2.31)$$

on hem aprofitat la darrera igualtat per definir el *moment dipolar*  $\mathbf{D} := s\mathbf{d}$ .

Finalment, l'equació d'ones i l'equació de Helmholtz inhomogènies que es compleixen en aquest cas són

$$\begin{aligned} \square^2 p' &= -\mathbf{D} \cdot \nabla \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) \\ (\nabla^2 + k^2) \hat{p}'_\omega &= 4\pi \hat{\mathbf{D}} \nabla \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) \end{aligned} \quad (2.32)$$

on hem tingut en compte que  $\nabla_s = -\nabla$  per una funció que només depèn de  $\mathbf{x} - \mathbf{x}_s$ .

En el cas que tinguem un conjunt de dipols d'ídem moment dipolar, tals que la distància  $\mathbf{d}$  entre els seus monopols constituents sigui molt inferior a la distància entre ells mateixos podem parlar d'una distribució de dipols. Així doncs i de forma general, quan tinguem un terme inhomogèni de l'equació d'ones (2.32) de la forma  $\partial_i F_i(\mathbf{x}, t)$ , es podrà interpretar com una distribució de dipols de força  $F_i(\mathbf{x}, t)$  per unitat de volum.

Si ara considerem un conjunt format per dos dipols de moment dipolar oposat  $\mathbf{D}$ , i separats una distància  $\mathbf{d}$ , parlarem d'una font quadrupolar en el cas límit en que  $d \rightarrow 0$  i  $kd \ll 1$ . Es pot demostrar, seguint un procés anàleg al que hem exposat pels dipols, que el camp acústic en un punt de l'espai serà

$$\begin{aligned} p'(\mathbf{x}, t) &= (\mathbf{D} \cdot \nabla_s)(\mathbf{d} \cdot \nabla_s) G(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_s, t_s) = Q_{ij} \partial_i \partial_j G(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_s, t_s) \\ \hat{p}'_\omega(\mathbf{x}) &= (\mathbf{D} \cdot \nabla_s)(\mathbf{d} \cdot \nabla_s) \hat{G}_\omega(\mathbf{x} | \mathbf{x}_s) = \hat{Q}_{ij} \partial_i \partial_j \hat{G}_\omega(\mathbf{x} | \mathbf{x}_s) \end{aligned} \quad i, j=1 \div 3 \quad (2.33)$$

on  $\hat{Q}_{ij} := \hat{D}_i d_j$  i  $Q_{ij} := D_i d_j$ . Quan  $\mathbf{D}$  i  $\mathbf{d}$  siguin paral·lels parlarem de *quadrupols longitudinals* i quan  $\mathbf{D}$  i  $\mathbf{d}$  siguin perpendiculars parlarem de *quadrupols laterals*.

A l'igual que pels monopols i pels dipols, també és possible obtenir distribucions de quadrupols. De fet, qualsevol terme inhomogèni de l'equació d'ones de la forma  $\partial_i \partial_j F_{ij}(\mathbf{x}, t)$  es pot interpretar com una distribució de quadrupols de força  $F_{ij}(\mathbf{x}, t)$  per unitat de volum.

### 2.3.4 Desenvolupament multipolar

Hem vist a l'apartat 2.3.2 que el camp acústic generat per una distribució de monopols d'igual freqüència ens ve donat per l'expressió (2.28). Si aquests monopols es troben més o menys agrupats al voltant de l'origen de coordenades i dins d'un volum de radi  $d$ , de manera que  $kd \ll 1$ , podem desenvolupar en sèrie de Taylor la funció de Green en camp lliure  $r^{-1} e^{ikr}$  de (2.28). Aquesta convergirà ràpidament en el cas que  $r_0 \gg d$ , on  $r_0$  és la distància des del centre de coordenades (recordem que  $r$  és la distància des de la font situada a  $\mathbf{x}_s$  fins al punt receptor  $\mathbf{x}$ , i.e  $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_s|$ ). D'aquesta manera obtenim [4]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} e^{ikr} &= [e^{-\mathbf{x}_s \cdot \nabla}] \left( \frac{1}{r_0} e^{ikr_0} \right) \\ [e^{-\mathbf{x}_s \cdot \nabla}] &:= 1 - \mathbf{x}_s \cdot \nabla + \frac{1}{2!} (\mathbf{x}_s \cdot \nabla)(\mathbf{x}_s \cdot \nabla) - \dots \end{aligned} \quad (2.34)$$

i substituïnt a (2.28) arribem a

$$\begin{aligned}
\widehat{p}'_{\omega} &= \widehat{S} \frac{1}{r_0} e^{ikr_0} - \widehat{D} \cdot \nabla \left( \frac{1}{r_0} e^{ikr_0} \right) + \widehat{Q}_{ij} \partial_i \partial_j \left( \frac{1}{r_0} e^{ikr_0} \right) + \dots \\
\widehat{S} &:= \iiint_{V_s} \widehat{s}(\mathbf{x}_s) dV_s \\
\widehat{D} &:= \iiint_{V_s} \mathbf{x}_s \widehat{s}(\mathbf{x}_s) dV_s \\
\widehat{Q}_{ij} &:= \frac{1}{2} \iiint_{V_s} x_{si} x_{sj} \widehat{s}(\mathbf{x}_s) dV_s
\end{aligned} \tag{2.35}$$

Per tant hem aconseguit escriure el camp acústic resultant de la distribució de monopols com una suma d'un camp monopolar més un camp dipolar més un camp quadrupolar, etc. Al desenvolupament (2.35) se l'anomena *desenvolupament o expansió multipolar del camp acústic*.

Si es compleix clarament la condició  $kd \ll 1$  el camp acústic es podrà aproximar únicament amb el terme monopolar  $\widehat{S}$ . En el cas que aquest darrer s'anul·li per simetria, el camp acústic vindrà dominat pel terme dipolar,  $\widehat{D}$ , i el seu mòdul disminuirà en un factor d'ordre  $\sim kd$ . Si tant  $\widehat{S}$  com  $\widehat{D}$  s'anul·len, el terme quadrupolar serà el dominant i la seva amplitud disminuirà  $\sim (kd)^2$  vegades respecte al monopolar. La disminució de potència acústica (definida més endavant a l'apartat 2.5.1) serà respectivament de l'ordre de  $\sim (kd)^4$ .

## 2.4 Anàlisi de Fourier

### 2.4.1 Introducció

Als apartats anteriors hem utilitzat la transformada de Fourier d'algunes variables, com la pressió o la densitat, sense tenir massa cura de si aquestes complien els requisits necessaris per tal que aquesta existís.

En aquest apartat veurem quins són els tipus de senyals més habituals en acústica i quines estratègies podem seguir per tal de poder-los aplicar el formalisme de Fourier. També definirem algunes funcions de gran utilitat, i àmpliament utilitzades en el tractament de senyals, com les funcions d'autocorrelació, de correlació creuada, l'autoespectre o l'espectre creuat.

### 2.4.2 Funcions periòdiques

Una senyal periòdica  $f(t)$ , de període  $T$ , es pot representar com a superposició de funcions harmòniques simples mitjançant una sèrie de Fourier

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{-in\omega t} \tag{2.36}$$

on  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  és la *velocitat angular fonamental*,  $f = T^{-1}$  és la *freqüència fonamental* i els termes amb  $n \neq 0$  s'anomenen *harmònics*. Cada *coeficient de Fourier*  $C_n$  es pot calcular a partir de

$$C_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{in\omega t} dt, \quad C_n \in \mathbb{C} \quad (2.37)$$

i el seu mòdul s'anomena *amplitud* de l'harmònic n-èssim mentre que el seu argument s'anomena *fase*.

La funció de *correlació creuada* (cross-correlation) de dues senyals  $f_1(t)$  i  $f_2(t)$  es defineix com

$$\overline{f_1^*(t)f_2(t+\tau)} := \frac{1}{T} \int_0^T f_1^*(t)f_2(t+\tau) dt \quad (2.38)$$

on el superíndex \* indica el complex conjugat.

Si  $f_1(t)$  i  $f_2(t)$  són periòdiques d'igual període T podem utilitzar (2.36) i obtenir

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{-in\omega t} \\ f_2(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n e^{-in\omega t} \end{aligned} \quad (2.39)$$

de manera que la correlació creuada entre ambdues esdevé

$$\overline{f_1^*(t)f_2(t+\tau)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n^* B_n e^{-in\omega\tau}. \quad (2.40)$$

Veiem per tant que  $A_n^* B_n$  és el coeficient de Fourier n-èssim de la funció de correlació creuada. Per altra banda de (2.40) és immediat veure que la funció de correlació creuada de dues senyals periòdiques és invariant sota translacions temporals, i.e.

$$\overline{f_1^*(t+t_0)f_2(t+t_0+\tau)} = \overline{f_1^*(t)f_2(t+\tau)}. \quad (2.41)$$

En el cas particular en què  $f_1(t)=f_2(t)$  definim la *funció d'autocorrelació* com

$$\overline{f_1^*(t)f_1(t+\tau)} := \frac{1}{T} \int_0^T f_1^*(t)f_1(t+\tau) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |A_n|^2 e^{-in\omega\tau} \quad (2.42)$$

on la darrera igualtat només és certa si  $f_1(t)$  és periòdica. El *valor quadràtic mitjà*  $\overline{|f_1(t)|^2}$  de  $f_1(t)$  serà per tant

$$\overline{|f_1(t)|^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |A_n|^2. \quad (2.43)$$

### 2.4.3 Funcions aperiòdiques que s'anul·len a l'infinit

Suposem ara que tenim una funció  $f(t)$  que no és periòdica però que s'anul·la de



forma prou ràpida quan  $t \rightarrow \pm \infty$ . Una condició suficient per tal que la seva transformada de Fourier existeixi és que  $f(t) \in L^2$ , on  $L^2$  és l'espai de funcions de quadrat integrable, i.e

$$L^2 := \left\{ f(t) \mid \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty \right\} \quad (2.44)$$

Aleshores  $f(t)$  es pot representar mitjançant la integral de Fourier o anti-transformada

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (2.45)$$

I la transformada de Fourier o espectre  $\hat{f}(\omega)$  de  $f(t)$  ens vindrà donada per

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt \quad (2.46)$$

L'equació (2.45) ens diu, per tant, que qualsevol funció de  $L^2$  es pot representar com una superposició de funcions harmòniques de totes les freqüències possibles  $\omega/2\pi$ .

La quantitat  $|\hat{f}(\omega)|^2$  s'anomena *densitat espectral de potència* de  $f(t)$  a la freqüència  $\omega/2\pi$ .

La funció de correlació creuada (2.38) de dues funcions  $f_1(t)$  i  $f_2(t)$  tals que

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_1(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \\ f_2(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_2(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \end{aligned} \quad (2.47)$$

és

$$\overline{f_1^*(t) f_2(t+\tau)} := 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_1^*(\omega) \hat{f}_2(\omega) e^{-i\omega \tau} d\omega \quad (2.48)$$

I ens mostra que l'espectre creuat de potència (cross-power spectrum)  $\hat{f}_1^*(\omega) \hat{f}_2(\omega)$  és la transformada de Fourier de la funció de correlació creuada. També podem veure fàcilment de (2.48) que aquesta darrera és invariant sota translacions temporals i que la densitat espectral de potència,  $|\hat{f}(\omega)|^2$ , és la transformada de Fourier de la funció d'autocorrelació  $\overline{f^*(t) f(t+\tau)}$ .

#### 2.4.4 Processos estocàstics

Considerem ara el cas d'un procés estocàstic caracteritzat per una funció  $f(t)$  d'una

variable contínua  $t$ , en aquest cas el temps. Per tal d'obtenir valors mitjans de  $f(t)$  podríem realitzar una seqüència de  $N$  experiments sota condicions idèntiques i obtenir  $N$  valors de  $f(t_d)$  per a un valor determinat del temps,  $t_d$ . Amb aquest *conjunt de realitzacions* de  $f(t_d)$  i repetint el procés per a qualsevol valor de  $t_d$ , podem definir un *valor mitjà de conjunt* de qualsevol funció  $F$  de  $f(t)$ , o de la pròpia  $f(t)$ , de la següent manera

$$\overline{F[f(t)]} := \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N F[f_m(t)] \quad (2.49)$$

on  $f_m$  són els diferents valors de  $f$  obtinguts a cada mesura. És a dir, el valor mitjà de conjunt és el límit de la mitjana aritmètica d'un conjunt infinit de realitzacions.

En el cas que restem el valor mitjà de  $f(t)$  de (2.49) tindrem  $\overline{f(t)} = 0$ . Podem definir aleshores paràmetres estadístics de  $f(t)$  com l'autocorrelació

$$P(t, t + \tau) \equiv \overline{f(t)f(t + \tau)} := \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N f_m(t)f_m(t + \tau) \quad (2.50)$$

o mitjanes d'ordre superior com la correlació triple, quàdruple, etc.,  $\overline{f(t)f(t + \tau_1)f(t + \tau_2)f(t + \tau_3)} \dots$

Direm que la funció aleatòria  $f(t)$  és *estacionària* si es compleix que

$$\overline{f(t)f(t + \tau_1)f(t + \tau_2)f(t + \tau_3)} \dots = \overline{f(t + \tau)f(t + \tau_1 + \tau)f(t + \tau_2 + \tau)f(t + \tau_3 + \tau)} \dots \quad (2.51)$$

i.e els paràmetres estadístics es mantenen invariables sota translacions temporals. En aquest cas, i si la correlació de qualsevol ordre entre els valors de  $f(t)$  a temps diferents tendeix a zero de forma prou ràpida<sup>5</sup>, podem imaginar que el temps està dividit en diversos intervals seqüencials sense connexió estadística entre ells. Aleshores, enlloc d'haver d'obtenir un conjunt de  $N$  realitzacions repetint  $N$  vegades el mateix experiment, per tal de poder definir un valor mitjà, podem promitjar una sola realització al llarg del temps:

$$\overline{F[f(t)]} := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T F[f(t)] dt \quad (2.52)$$

Aquelles funcions tals que les seves mitjanes de conjunt (2.49) coincideixen amb les seves mitjanes temporals (2.52) s'anomenen processos *ergòdics*. D'ara en endavant suposarem que les funcions amb què treballarem compleixen el requisit d'ergodicitat i per això no hem utilitzat una notació diferent per tal de distingir els dos tipus de fer mitjanes.

Tal i com hem indicat a la introducció 2.4.1 el nostre objectiu és el d'aconseguir aplicar el formalisme de Fourier als diferents tipus de funcions que ens trobarem al treballar en acústica. Suposem ara que tenim una funció ergòdica  $f(t)$  tal que compleix

<sup>5</sup> És a dir  $\overline{f(t + \tau)f(t + \tau_1 + \tau)f(t + \tau_2 + \tau)f(t + \tau_3 + \tau)} \dots \rightarrow 0$  quan  $\tau$  creix

$$\overline{|f(t)|^2} := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(t)|^2 dt < \infty. \quad (2.53)$$

En aquest cas la transformada de Fourier  $\lim_{T \rightarrow \infty} \hat{f}(\omega, T)$  amb

$$\hat{f}(\omega, T) := \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T f(t) e^{i\omega t} dt \quad (2.54)$$

en general no existeix a no ser que  $f(t)$  sigui periòdica o que  $f(t) \rightarrow 0$  prou ràpidament. Tanmateix, per a una parella de funcions  $f_1(t)$  i  $f_2(t)$ , l'espectre creuat de potència definit per

$$\hat{S}_{12}(\omega) := \lim_{T \rightarrow \infty} \pi \frac{\hat{f}_1^*(\omega, T) \hat{f}_2(\omega, T)}{T} \quad (2.55)$$

amb  $\hat{f}_n(\omega, T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T f_n(t) e^{i\omega t} dt; \quad n = 1, 2$

si que existeix c.f [5] i és igual a la transformada de Fourier de la correlació creuada

$$\overline{f_1^*(t) f_2(t + \tau)} := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f_1^*(t) f_2(t + \tau) dt \quad (2.56)$$

de manera que

$$\overline{f_1^*(t) f_2(t + \tau)} = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{S}_{12}(\omega) e^{-i\omega \tau} d\omega. \quad (2.57)$$

La funció d'autocorrelació satisfà la relació

$$\overline{f_1^*(t) f_1(t + \tau)} = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{S}_{11}(\omega) e^{-i\omega \tau} d\omega \quad (2.58)$$

i per  $\tau=0$  tindrem

$$\overline{|f_1(t)|^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{S}_{11}(\omega) d\omega \quad (2.59)$$

essent  $S_{11}(\omega)$  la densitat espectral de potència.

Les funcions (2.55)-(2.59) ens mostren que tot i que no sigui possible definir la transformada de Fourier de la funció ergòdica  $f(t)$ <sup>6</sup>, sí que és possible definir la seva autocorrelació i la seva correlació creuada amb una altra variable ergòdica, alhora que les seves transformades de Fourier respectives.

<sup>6</sup> i en general de cap funció a no ser que sigui periòdica o s'anul.li prou ràpid quan  $t \rightarrow \infty$ .

Una alternativa per tal de poder completar el procés i obtenir la transformada de Fourier de  $f(t)$  és la d'utilitzar una funció de tall. Ja que la integral (2.53) existeix per a un  $T$  finit podem introduir una funció de tall  $f(t, T)$  definida per

$$f(t, T) := \begin{cases} 0 & |t| > T \\ f(t) & |t| < T \end{cases} \quad (2.60)$$

Aleshores  $f(t, T)$  i  $\hat{f}(\omega, T)$  esdevenen parells transformats i els podem aplicar el formalisme de Fourier. Un cop finalitzat l'anàlisi podem calcular la densitat espectral de potència prenent el límit  $T \rightarrow \infty$  tal com s'indica a (2.55).

El truc d'analitzar  $f(t)$  durant un interval finit  $2T$  està relacionat amb el procés físic de mesura ja que, lògicament, a la pràctica no es pot mesurar durant intervals infinits de temps!. El fet que  $2T$  sigui finit ens comportarà limitacions en la resolució i el rang de freqüències de l'espectre de  $f(t)$ . De fet, quanta més resolució vulguem obtenir en freqüència, per tal de separar components en una banda d'amplada  $\Delta\omega/2\pi$ , més temps de mesura  $2T$  necessitarem<sup>7</sup>.

La finitud del temps d'anàlisi  $2T$  no només comporta limitacions en la resolució de l'espectre sinó que afecta la seva forma. Tanmateix, en aquest escrit no aprofundirem més en aquest aspecte del tractament i anàlisi de senyals [2, 7].

#### 2.4.5 Transformades espacials i transformades conjuntes $k$ - $\omega$

Els conceptes que hem presentat als apartats anteriors utilitzant funcions dependents del temps es poden ampliar a espais  $N$ -dimensionals. En concret estarem interessats en les transformades respecte les variables espacials i en les transformades conjuntes respecte les variables espacio-temporals.

El parell transformada-antitransformada per una funció  $f(x)$  és el següent:

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ik \cdot x} dk \\ \hat{f}(k) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ik \cdot x} dx \end{aligned} \quad (2.61)$$

essent  $k$  el vector nombre d'ones. Fem notar que el conveni de signes que hem

<sup>7</sup> Per exemple, amb un  $2T$  típic de 80 ms tindrem una resolució de 12.5 Hz ( $1/T$ ); si volguéssim augmentar la resolució en freqüència hauríem d'augmentar el temps de mesura (160 ms  $\rightarrow$  6.25 Hz, etc.) i si volguéssim una resolució infinita en freqüència hauríem de mesurar durant un temps  $2T$  infinit. Per altra banda, la màxima freqüència que podem mesurar (*freqüència de tall de Nyquist*) depèn del nombre de mostres (o línies) que l'aparell de mesura pugui prendre durant el temps  $2T$ . Seguint l'exemple anterior, en el cas que per  $2T=80$  ms prenguem 1024 línies, la freqüència de Nyquist serà  $1/(80 \cdot 10^{-3}/1024/2.56)=5000$  Hz. Si mantenim  $2T=80$  ms i augmentem el nombre de línies aconseguirem mesurar freqüències superiors però amb la mateixa resolució de 12.5 Hz. Si en canvi augmentem  $2T$  mantenint constant el nombre de línies disminuirà la freqüència de Nyquist però tindrem una resolució major.

utilitzat és el contrari a l'emprat en el cas temporal.

Les funcions de correlació creuada, autocorrelació, espectre creuat i autoespectre per senyals periòdiques i aperiòdiques que pertanyen a  $L^2$  es defineixen de forma anàloga a com ho hem fet en el cas temporal tenint en compte (2.61).

En el cas de senyals estocàstiques ens trobem novament en la mateixa situació que en el cas temporal. Si els paràmetres estadístics d'una funció són invariants sota translacions espacials direm que aquesta és *homogènia* i podrem equiparar les mitjanes de conjunt amb les mitjanes espacials (ergodicitat).

La funció de correlació creuada entre dues funcions  $f_1(\mathbf{x})$  i  $f_2(\mathbf{x})$  serà

$$\overline{f_1^*(\mathbf{x})f_2(\mathbf{x}+\boldsymbol{\eta})} := \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \iiint_V f_1^*(\mathbf{x})f_2(\mathbf{x}+\boldsymbol{\eta})d\mathbf{x} \quad (2.62)$$

i es relaciona amb la densitat espectral creuada de potència

$$\hat{S}_{12}(\mathbf{k}) := \lim_{V \rightarrow \infty} (2\pi)^3 \frac{\hat{f}_1^*(\mathbf{k}, V)\hat{f}_2(\mathbf{k}, V)}{V} \quad (2.63)$$

amb  $\hat{f}_n(\mathbf{k}, V) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_V f_n(\mathbf{k})e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}d\mathbf{x}; n = 1, 2$

a través de la integral de Fourier

$$\overline{f_1^*(\mathbf{x})f_2(\mathbf{x}+\boldsymbol{\eta})} := \iiint_{-\infty}^{\infty} \hat{S}_{12}(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\eta}}d\mathbf{k} \quad (2.64)$$

Finalment podem estendre tot el formalisme anterior a funcions  $f(\mathbf{x}, t)$  que depenen alhora de l'espai i el temps. En el cas de processos homogenis i estacionaris podrem aplicar el principi d'ergodicitat i definir una densitat espectral de potència  $\hat{S}(\mathbf{k}, \omega)$  a partir de la funció d'autocorrelació espacio-temporal

$$P(\boldsymbol{\eta}, \tau) \equiv P(-\boldsymbol{\eta}, -\tau) = \overline{f^*(\mathbf{x}, t)f(\mathbf{x}+\boldsymbol{\eta}, t+\tau)} \quad (2.65)$$

en efecte

$$\hat{S}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^4} \iiint P(\boldsymbol{\eta}, \tau)e^{-i(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\eta}-\omega\tau)}d\boldsymbol{\eta}d\tau \quad (2.66)$$

i per tant

$$P(\boldsymbol{\eta}, \tau) = \iiint \hat{S}(\mathbf{k}, \omega)e^{i(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\eta}-\omega\tau)}d\mathbf{k}d\omega \quad (2.67)$$

## 2.5 Intensitat i potència acústiques

### 2.5.1 Intensitat i potència instantànies

El vector *d'intensitat acústica instantània* o flux d'energia ens ve donat per l'expressió

$$I(t) := p'(t)v(t) \quad (2.68)$$

i té unitats d'energia per unitat de superfície i per unitat de temps. La intensitat acústica es relaciona amb la densitat d'energia "e" mitjançant l'equació

$$\partial_t e = -\nabla \cdot I \quad (2.69)$$

amb

$$e = \frac{1}{2}\rho_0 v(t)^2 + \frac{1}{2}Bp'(t)^2. \quad (2.70)$$

La potència acústica instantània que travessa una determinada superfície S (oberta o tancada) ens ve donada per

$$\Pi(t) = \iint_S I \cdot n dS \quad (2.71)$$

on n és la normal a la superfície S.

### 2.5.2 Intensitat i potència mitjanes

La intensitat i la potència instantànies a la pràctica no tenen gaire interès i es sol treballar amb els seus valors mitjans al llarg d'un determinat interval de temps T. La *intensitat acústica mitjana* o simplement *acústica* a seques és per tant

$$\bar{I} = \frac{1}{T} \int_0^T p'(t)v(t) dt \quad (2.72)$$

En el cas d'ones planes (2.18) podem comprovar utilitzant (2.72) i (2.9) que el mòdul de la intensitat acústica es directament proporcional al quadrat de la pressió acústica

$$\bar{I} = \frac{\overline{p'^2}}{\rho_0 c_0} \quad (2.73)$$

En el cas d'una funció periòdica  $p'(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n(x)e^{-i\omega n t}$  tenim a partir de (2.73) i de (2.43)

$$\bar{I} = \frac{1}{\rho_0 c_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |P_n|^2. \quad (2.74)$$

Podem interpretar la quantitat

$$\bar{I}_n := \frac{1}{\rho_0 c_0} |P_n|^2 \quad (2.75)$$

com la intensitat acústica de l'armònic n-èsim i per tant com *l'espectre de la intensitat*. A partir de (2.42) podem veure que  $\bar{I}_n$  es relaciona amb la funció d'autocorrelació de la pressió normalitzada

$$\Gamma(\tau) := \frac{\overline{p'(t)p'(t+\tau)}}{\rho_0 c_0} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{I}_n e^{-in\omega\tau} \quad (2.76)$$

En el cas de funcions aperiòdiques que pertanyen a  $L^2$  o de funcions ergòdiques, podem definir la intensitat emprant (2.73) i (2.59)

$$\bar{I} := \frac{1}{\rho_0 c_0} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{S}_{11}(\omega) d\omega = \Gamma(0) \quad (2.77)$$

on  $\hat{S}_{11}(\omega)$  és la transformada de Fourier de la funció d'autocorrelació de la pressió  $\overline{p'(t)p'(t+\tau)}$ . Per tant,

$$\bar{I}_\omega := \frac{\hat{S}_{11}(\omega)}{\rho_0 c_0} \quad (2.78)$$

es pot interpretar com el flux mitjà d'energia per unitat de freqüència i.e l'espectre de la intensitat. L'equació (2.58) estableix la relació entre la funció d'autocorrelació normalitzada de la pressió i l'espectre de la intensitat

$$\Gamma(\tau) := \frac{\overline{p'(t)p'(t+\tau)}}{\rho_0 c_0} = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{I}_\omega e^{-i\omega\tau} d\omega \quad (2.79)$$

Finalment, només ens resta definir la potència mitjana com

$$\bar{\Pi} = \iint_S \bar{I} \cdot n dS \quad (2.80)$$

### 2.5.3 Nivells de pressió, intensitat i potència

Tal i com hem comentat a la introducció 2.1, l'oïda humana és sensible al logaritme de la intensitat acústica que per (2.77) està directament relacionada amb el valor quadràtic mitjà de la pressió. És per això que en acústica s'acostuma a treballar amb els anomenats nivells de pressió, intensitat i potència que definirem a continuació.

El *nivell de pressió acústica* (sound pressure level) es defineix com

$$L_p \equiv SPL := 10 \log_{10} \left( \frac{p^2}{p_0^2} \right) \quad (2.81)$$

on  $p_0$  és una pressió de referència que en el cas de l'aire val  $2 \cdot 10^{-5}$  Pa<sup>8</sup>. La pressió  $p$  pot ser tant una pressió instantània com un valor mitjà i pot estar expressada tant al domini temporal com al freqüencial.

Les unitats del nivell de pressió  $L_p$  són els decibels<sup>9</sup>, dB, i el seu rang de variació per a l'oïda humana varia, en terme mitjà, entre els 0 dB del llindar auditiu i els 140 dB del llindar dolorós. Tot i que normalment se sol parlar de "x" decibels de soroll referint-se a un valor "x" de  $L_p$ , el correcte es parlar de "x" decibels de pressió acústica referits a  $p_0$ , per tal de poder fer la distinció amb decibels referits a diferents valors de  $p_0$  (p.ex  $p_0=10^{-6}$  Pa en acústica subacuàtica) o amb decibels d'altres variables com la intensitat o la potència.

El *nivell d'intensitat acústica* (sound intensity level) ve definit per l'expressió següent

$$L_I \equiv SIL := 10 \log_{10} \left( \frac{I}{I_0} \right) \quad (2.82)$$

on ara la intensitat de referència és  $I_0=10^{-12}$  W/m<sup>2</sup>. Les unitats són els decibels d'intensitat referits a  $I_0$ .

Finalment, el *nivell de potència acústica* (sound watt level) ve donat per

$$L_W \equiv SWL := 10 \log_{10} \left( \frac{\Pi}{\Pi_0} \right) \quad (2.82)$$

on la potència de referència és  $\Pi_0=10^{-12}$  W. Les unitats són en aquest cas, decibels de potencia referits a  $\Pi_0$ .

## 3 AEROACÚSTICA

### 3.1 Introducció

Tal i com hem comentat a la introducció d'aquest escrit, l'aeroacústica s'encarrega de l'estudi del soroll generat per fluxos no-estacionaris i/o turbulents i per la seva interacció amb contorns sòlids.

En contraposició a " l'acústica clàssica ", l'aeroacústica avalua el soroll generat per les forces aerodinàmiques o moviments que s'originen dins del propi flux on aquest es propaga. Així doncs, el soroll generat per plaques vibrants, altaveus, instruments, etc., és a dir per forces externes al flux, són objecte d'estudi de l'acústica clàssica, mentre que el soroll generat per les forces no estacionaries que actuen sobre les pales d'un ventilador o d'un helicòpter, el soroll produït per l'expansió d'un raig, o el soroll degut al flameig d'una bandera sota l'acció del vent

<sup>8</sup>  $p_0$  és el valor a partir del qual l'oïda humana comença a percebre la sensació de soroll a la freqüència de 1000 Hz.

<sup>9</sup> Notem que els decibels no són pròpiament unitats en el sentit físic de la paraula sinó una escala de mesura, ja que estàn definits mitjançant un quocient de pressions, intensitats o potències.



són problemes propis de l'aeroacústica.

L'aeroacústica és una disciplina relativament recent, sobretot si la comparem amb l'acústica. Els seus fonaments foren establerts per Lighthill [11] l'any 1952, en un treball innovador sobre el soroll de raigs en expansió. Lighthill, que introduí la terminologia encara vigent, de soroll aerodinàmic per referir-se a l'aeroacústica va idear el concepte d'analogia acústica. Les analogies acústiques han permès, al llarg de la segona meitat del segle XX, entendre una gran quantitat de fenòmens que romanien inexplicables i progressar notablement en el disseny d'elements silenciosos.

## 3.2 La definició d'analogia acústica

Definició: El terme "analogia acústica" es refereix al reordenament de les equacions del moviment d'un flux en forma d'equació d'ones inhomogènia (veure apartat 2.3) i de manera que en camp llunyà (i ignorant els efectes no-lineals de distorsió del paquet d'ones, "steepening") les pertorbacions de pressió es propaguen en un medi en repòs a la velocitat del so,  $c_0$ , característica d'aquest [10]. És a dir una analogia acústica té la forma

$$\square^2 h = f(x, t) \quad (3.1)$$

on  $h$  en camp llunyà és equivalent a  $\rho' = \rho - \rho_0$  o a  $p' = p - p_0$ .  $f(x, t)$  és el terme font de  $h$  i pot incloure tots els mecanismes de generació i propagació tals com el scattering per remolins turbulents, les inhomogeneïtats de temperatura, els efectes de refracció en els camps de temperatura i velocitat, etc. Les diferents eleccions de  $h$  i  $f$  donen lloc a les diverses analogies que presentarem en els següents apartats.

Per tal de clarificar la definició d'analogia acústica seguirem els passos de Lighthill [11] en el seu treball pioner sobre la generació de soroll aerodinàmic. Veurem amb detall l'anomenada "analogia de Lighthill" així com la seva solució formal en el domini temporal i freqüencial [5,9]. La resta d'analogies seran presentades de forma breu i tant sols n'esmentarem algunes característiques

## 3.3 L'analogia de Lighthill

### 3.3.1 L'equació de Lighthill

El procés seguit per Lighthill amb l'idea d'obtenir una equació en la forma de (3.1) és el següent:

L'equació de continuïtat d'un flux ens ve donada per l'expressió

$$D_t \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \partial_t \rho + \partial_j (\rho v_j) = 0 \quad (3.2)$$

Per altra banda, sigui  $\tau_{ij}$  el tensor de tensions viscós del fluid donat per

$$\tau_{ij} = \mu(\partial_j v_i + \partial_i v_j - \frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{v} \delta_{ij}) \quad (3.3)$$

i  $\sigma_{ij}$  el tensor de tensions total del fluid donat per

$$\sigma_{ij} = p \delta_{ij} - \tau_{ij} \quad (3.4)$$

Aplicant la segona llei de Newton i tenint en compte (3.4) i (3.2) obtenim l'equació de Navier-Stokes pel moviment del fluid

$$\rho D_t v_i + \partial_j \sigma_{ij} = 0 \Leftrightarrow \partial_t(\rho v_i) + \partial_j(\rho v_i v_j + \sigma_{ij}) = 0 \quad (3.5)$$

Si a continuació fem  $\partial_t(3.2) - \partial_i(3.5)$  obtenim

$$\left. \begin{aligned} \partial_t(3.2) &= \partial_t^2 \rho + \partial_i \partial_i(\rho v_i) = 0 \\ \partial_i(3.5) &= \partial_t \partial_i(\rho v_i) + \partial_i \partial_j(\rho v_i v_j + \sigma_{ij}) = 0 \end{aligned} \right\} \text{i } \partial_t(3.2) - \partial_i(3.5) \Rightarrow \partial_t^2 \rho = \partial_i \partial_j(\rho v_i v_j + \sigma_{ij}) \quad (3.6)$$

i si restem  $c_0^2 \nabla^2 \rho$  a banda i banda de (3.6) i tenim en compte (3.4) ens queda

$$\partial_t^2 \rho - c_0^2 \nabla^2 \rho = \partial_i \partial_j(\rho v_i v_j + (\rho - c_0^2 \rho) \delta_{ij} - \tau_{ij}) = 0 \quad (3.7)$$

A continuació definim el tensor de components  $T_{ij}$  com

$$T_{ij} := \rho v_i v_j + (\rho - c_0^2 \rho) \delta_{ij} - \tau_{ij} \quad (3.8)$$

de manera que podem escriure (3.7) de la següent manera

$$\partial_t^2 \rho - c_0^2 \nabla^2 \rho = \partial_i \partial_j T_{ij} \quad (3.9)$$

o bé

$$\square^2 \rho = \partial_i \partial_j T_{ij} \quad (3.10)$$

Per tant, hem aconseguit escriure les equacions de moviment del flux en la forma (3.1) és a dir com l'equació de propagació de les ones sonores en presència d'una font de soroll.

Cal assenyalar que per arribar a l'equació (3.10) no hem fet cap aproximació i que aquesta no és sinó una forma alternativa d'escriure l'equació de Navier-Stokes (NS) fent ús de l'equació de continuïtat. Això vol dir que si admitem que NS és capaç de descriure qualsevol tipus de flux turbulent o no, l'equació (3.10) ens descriurà exactament quin és el camp acústic que aquest genera. És per això que es diu que l'analogia de Lighthill és una analogia exacta. Tanmateix, una primera aproximació que se sol fer és la de negligir el terme de viscositat i suposar que estem en el cas isentròpic. Aleshores obtenim  $T_{ij} = \rho v_i v_j$ , aproximació que s'utilitza freqüentment en els còmputos del soroll aerodinàmic generat per fluxos subsònics.

Per altra banda cal assenyalar que l'equació (3.9), o l'equivalent (3.10), també és vàlida per a les fluctuacions de densitat  $\rho' = \rho - \rho_0$  quan aquestes es propaguen en un flux subsònic ( $\square^2 \rho_0 \simeq 0$ ). Així doncs tindrem

$$\square^2(\rho - \rho_0) = \partial_i \partial_j T_{ij} \quad (3.11)$$

i comparant amb (3.1) ens queda per tant  $h = \rho' = \rho - \rho_0$  i  $f(\mathbf{x}, t) = \partial_i \partial_j T_{ij}$ .

### 3.3.2 La solució temporal en camp llunyà

La solució a l'equació de Lighthill (3.11) en camp llunyà generat per un volum finit de turbulència<sup>10</sup> estadísticament estacionària en un flux no convectiu<sup>11</sup> es pot expressar mitjançant la funció de Green tridimensional en camp lliure [5,9]. En efecte, per a les fluctuacions de densitat en un fluid sense condicions de contorn tindrem

$$(\rho - \rho_0)(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi c_0} \frac{\delta(\mathbf{x} - c_0 t)}{x} \star \partial_i \partial_j T_{ij} = \frac{1}{4\pi c_0} \partial_i \partial_j \left\{ \frac{\delta(\mathbf{x} - c_0 t)}{x} \right\} \star T_{ij} \quad (3.12)$$

on  $x = |\mathbf{x}|$  i  $\star$  representa el producte de convolució. Si ara tenim en compte que  $\partial_i x = \frac{x_i}{x}$ , que  $\partial_t A \star B = A \star \partial_t B$  i que les derivades de  $x^{-1}$  són negligibles enfront  $x^{-1}$  quan  $x \rightarrow \infty$ , podem escriure per a les variacions de densitat en camp llunyà

$$(\rho - \rho_0)_{x \rightarrow \infty}(\mathbf{x}, t) = \left\{ \frac{x_i x_j}{x^3} \frac{1}{4\pi c_0^3} \partial_t^2 \delta(\mathbf{x} - c_0 t) \right\} \star T_{ij} = \left\{ \frac{x_i x_j}{x^3} \frac{1}{4\pi c_0^3} \delta(\mathbf{x} - c_0 t) \right\} \star \partial_t^2 T_{ij} \quad (3.13)$$

que escrit explícitament i integrant en el temps esdevé

$$\begin{aligned} (\rho - \rho_0)_{x \rightarrow \infty}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{4\pi c_0^4} \frac{x_i x_j}{x^3} \int_{V(\mathbf{y})} \partial_t^2 T_{ij}(\mathbf{y}, t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}{c_0}) d^3 \mathbf{y} \\ &\simeq \frac{1}{4\pi c_0^4} \frac{x_i x_j}{x^3} \int_{V(\mathbf{y})} \partial_t^2 T_{ij}(\mathbf{y}, t + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{x c_0} - \frac{x}{c_0}) d^3 \mathbf{y} \end{aligned} \quad (3.14)$$

on al darrer pas hem utilitzat l'aproximació  $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = x - \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{x} + O(\frac{1}{x})$ ,  $d^3 \mathbf{y}$  representa l'element de volum tridimensional  $dV(\mathbf{y})$ , i  $V(\mathbf{y})$  és la regió on es troba la font de soroll (i.e el fluid turbulent).

La interpretació de l'equació (3.14) és la següent: el flux de fluid s'ha substituït per una distribució equivalent de fonts acústiques  $\partial_i \partial_j T_{ij}$  per unitat de volum, presents en una determinada regió  $V(\mathbf{y})$  immersa en un medi en repòs, on les pertorbacions acústiques es propaguen a una velocitat constant,  $c_0$ . Per altra banda, i per tal que (3.14) tingui sentit hem de suposar que  $T_{ij}$  decau de forma prou

<sup>10</sup>La metodologia que veurem a continuació és aplicable a una gran varietat de fluxos no necessàriament turbulents.

<sup>11</sup>En aquest escrit no presentarem les equacions pel cas convectiu. Es pot demostrar que l'efecte de la convecció és el de multiplicar la intensitat del so en una direcció  $\theta$  per un factor  $(1 - M_c \cos \theta)^{-5}$ , essent  $M_c$  el nombre de Mach convectiu, i el de provocar un efecte Doppler a l'espectre del soroll radiat.

ràpida amb la distància de manera que la integral a  $V(\mathbf{y})$  sigui finita<sup>12</sup>. A més a més cal fer una altra aproximació: ja que la que la densitat  $\rho - \rho_0$  a (3.14) no només apareix a l'esquerra de l'equació sinó que està present a  $T_{ij}$  (veure (3.8)) hem de suposar que  $T_{ij}$  es pot obtenir en bona aproximació dels càlculs d'un flux equivalent on s'ha negligit el camp acústic. D'aquesta manera (3.14) no esdevé una equació integral i  $\rho - \rho_0$  es pot obtenir directament un cop conegudes les fonts de soroll  $T_{ij}$ .

Una mesura estadística del soroll radiat en camp llunyà ens ve donada per la intensitat  $\overline{I(\mathbf{x})}$  (veure apartat 2.5.2) que es proporcional a la fluctuació quadràtica mitjana de la densitat (2.77):

$$\overline{I(\mathbf{x})} = \Gamma(0) \frac{x}{x} = \frac{c_0^3 (\rho - \rho_0)^2}{\rho_0} \frac{x}{x} \quad (3.15)$$

on a la darrera igualtat hem utilitzat (2.7) i  $c_0 := \sqrt{B/\rho_0}$ . Per tal d'elevat (3.14) al quadrat la multiplicarem per ella mateixa utilitzant una nova variable  $\mathbf{z}$  amb origen a  $\mathbf{y}$

$$(\rho - \rho_0)(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi c_0^4} \frac{x_k x_l}{x^3} \int_{V(\mathbf{z})} \partial_t^2 T_{kl}(\mathbf{y} + \mathbf{z}, t + \frac{x \cdot \mathbf{y}}{x c_0} + \frac{x \cdot \mathbf{z}}{x c_0} - \frac{x}{c_0}) d^3 \mathbf{z} \quad (3.16)$$

de manera que el mòdul de la intensitat ens queda

$$\overline{I(\mathbf{x})} = \frac{x_i x_j x_k x_l}{16\pi^2 \rho_0 c_0^5 x^6} \int_{V(\mathbf{y})} \int_{V(\mathbf{z})} \overline{\partial_t^2 T_{ij}(\mathbf{y}, t + \frac{x \cdot \mathbf{y}}{x c_0} - \frac{x}{c_0}) \partial_t^2 T_{kl}(\mathbf{y} + \mathbf{z}, t + \frac{x \cdot \mathbf{y}}{x c_0} + \frac{x \cdot \mathbf{z}}{x c_0} - \frac{x}{c_0})} d^3 \mathbf{z} d^3 \mathbf{y} \quad (3.17)$$

Per a un procés estacionari (2.51) però no homogeni podem definir la funció de correlació creuada dels tensors  $T_{ij}$  i  $T_{kl}$  com

$$W_{ijkl}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}, \tau) := \overline{T_{ij}(\mathbf{x}, t) T_{kl}(\mathbf{x} + \boldsymbol{\eta}, t + \tau)}, \quad (3.18)$$

que en el nostre cas particular esdevé

$$W_{ijkl}(\mathbf{y}, \mathbf{z}, \frac{x \cdot \mathbf{z}}{x c_0}) = \overline{T_{ij}(\mathbf{y}, t + \frac{x \cdot \mathbf{y}}{x c_0} - \frac{x}{c_0}) T_{kl}(\mathbf{y} + \mathbf{z}, t + \frac{x \cdot \mathbf{y}}{x c_0} + \frac{x \cdot \mathbf{z}}{x c_0} - \frac{x}{c_0})} = \overline{T_{ij}(\mathbf{y}, t) T_{kl}(\mathbf{y} + \mathbf{z}, t + \frac{x \cdot \mathbf{z}}{x c_0})} \quad (3.19)$$

Si a més a més tenim en compte que per a un procés estacionari es compleix [5]

$$\partial_\tau^4 W_{ijkl} = \overline{\partial_t^2 T_{ij} \partial_t^2 T_{kl}} \quad (3.20)$$

podrem escriure finalment el mòdul de la intensitat com

$$\overline{I(\mathbf{x})} = \frac{x_i x_j x_k x_l}{16\pi^2 \rho_0 c_0^5 x^6} \int_{V(\mathbf{y})} \int_{V(\mathbf{z})} \partial_\tau^4 W_{ijkl}(\mathbf{y}, \mathbf{z}, \tau) \Big|_{\tau = \frac{x \cdot \mathbf{z}}{x c_0}} d^3 \mathbf{z} d^3 \mathbf{y} \quad (3.21)$$

<sup>12</sup> Aquest punt no és trivial en absolut i els passos per arribar a 3.14 requereixen alguns matissos. Per una breu discussió sobre el tema veure la referència [5]. Una anàlisi detallada de la convergència i validesa de l'aproximació de Lighthill pel mètode de la mescla de desenvolupaments asimptòtics (MAE: Matched Asymptotic Expansions) es pot trobar a [33].

L'equació (3.21) ens dona el mòdul de la intensitat en un punt del camp llunyà,  $\mathbf{x}$ , a través d'una integral sobre el volum de la regió on es troba la font de soroll, definit per la variable  $\mathbf{y}$ . Per tant podem interpretar l'integrand de (3.21) com la contribució a la intensitat d'un diferencial de volum de turbulència centrat a  $\mathbf{y}$ . Si anomenem  $i(\mathbf{x})$  a aquesta contribució podem escriure el mòdul de la intensitat com

$$I(\mathbf{x}) = \int_{V(\mathbf{y})} i(\mathbf{x}) d^3 \mathbf{y} \quad (3.22)$$

on

$$i(\mathbf{x}) = \frac{1}{16\pi^2 \rho_0 c_0^5 x^2} \int_{V(\mathbf{z})} \partial_\tau^4 W_{(x)}(\mathbf{y}, \mathbf{z}, \tau) \Big|_{\tau = \frac{xz}{c_0}} d^3 \mathbf{z} \quad (3.23)$$

i hem definit

$$W_{(x)} := \frac{x_i x_j x_k x_l}{x^4} W_{ijkl} \quad (3.24)$$

per tal de compactificar la notació.

### 3.3.3 La solució al domini freqüencial en camp llunyà

Generalment, la informació que ens és més útil a l'hora de tractar amb problemes d'acústica és el contingut espectral del soroll rebut. És per això que resulta interessant expressar els resultats de l'apartat anterior al domini freqüencial, per tal de conèixer quina és la contribució de cada un dels components espectrals al soroll total mesurat en un punt,  $\mathbf{x}$ , de l'espai.

L'equació (2.79) ens relaciona l'espectre de la intensitat amb la funció d'autocorrelació normalitzada. De fet, l'espectre de la intensitat  $\bar{I}_\omega$  és la seva transformada de Fourier

$$\bar{I}_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau = \frac{1}{\rho_0 c_0} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{p'(t)p'(t+\tau)} e^{i\omega\tau} d\tau \quad (3.25)$$

i utilitzant (2.7) i  $c_0 := \sqrt{B/\rho_0}$

$$\bar{I}_\omega = \frac{c_0^3}{\rho_0} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{(\rho - \rho_0)(\mathbf{x}, t)(\rho - \rho_0)(\mathbf{x}, t + \tau)} e^{i\omega\tau} d\tau \quad (3.26)$$

A l'apartat anterior hem calculat la intensitat a partir de la funció d'autocorrelació per a la densitat quan  $\tau=0$ . La funció d'autocorrelació de la densitat per un  $\tau \neq 0$  serà, seguint el procés de les eqs (3.16)-(3.21) amb lleugeres modificacions

$$\overline{(\rho - \rho_0)(\mathbf{x}, t)(\rho - \rho_0)(\mathbf{x}, t + \tau)} = \frac{1}{16\pi^2 c_0^8 x^2} \int_{V(\mathbf{y})} \int_{V(\mathbf{z})} \partial_\tau^4 W_{(x)}(\mathbf{y}, \mathbf{z}, \tau + \frac{xz}{c_0}) d^3 \mathbf{z} d^3 \mathbf{y} \quad (3.27)$$

Substituint (3.27) a (3.26) i fent ús de les propietats de les transformades de Fourier per a derivades i translacions arribem a

$$\bar{I}_\omega = \frac{1}{32\pi^3 \rho_0 c_0^5 x^2} \omega^4 \int_{V(y)} \int_{V(z)} e^{i\omega \frac{xz}{xc_0}} \widehat{W}_{(x)}(\mathbf{y}, \mathbf{z}, \omega) d^3z d^3y . \quad (3.28)$$

A continuació ens definim la transformada  $(\mathbf{k}, \omega)$  del tensor  $W_{(x)}$  (veure eq (2.66))

$$\widehat{\widehat{W}}_{(x)}(\mathbf{y}, \mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{\tau} \int_{V(z)} W_{(x)}(\mathbf{y}, \mathbf{z}, \tau) e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{z} - \omega\tau)} d\mathbf{z} d\tau \quad (3.29)$$

on hem utilitzat el doble circumflex per remarcar que es tracta d'una transformada espacio-temporal. Fent ús de (3.29) podem obtenir el mòdul de la intensitat en un punt  $\mathbf{x}$  degut a una determinada freqüència  $\omega$  (3.28) com

$$\bar{I}_\omega = \frac{\pi}{2\rho_0 c_0^5 x^2} \omega^4 \int_{V(y)} \widehat{\widehat{W}}_{(x)}(\mathbf{y}, -\frac{\omega\mathbf{x}}{xc_0}, \omega) d^3y . \quad (3.30)$$

Novament podem veure l'integrand de (3.30) com la contribució a la intensitat d'un diferencial de volum de turbulència centrat a  $\mathbf{y}$ . Si anomenem  $i(\mathbf{x}, \omega)$  a aquesta contribució podem escriure:

$$I(\mathbf{x}, \omega) = \int_{V(y)} i(\mathbf{x}, \omega) d^3y \quad (3.31)$$

on ara

$$i(\mathbf{x}, \omega) = \frac{\pi}{2c_0^5 \rho_0 x^2} \omega^4 \widehat{\widehat{W}}_{(x)}(\mathbf{y}, -\frac{x\omega}{xc_0}, \omega) \quad (3.32)$$

Finalment la intensitat total deguda a la contribució de totes les freqüències es pot escriure com:

$$I(\mathbf{x}) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i(\mathbf{x}, \omega) d\omega = \frac{1}{4\pi c_0^5 \rho_0 x^2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^4 \widehat{\widehat{W}}_{(x)}(\mathbf{y}, -\frac{x\omega}{xc_0}, \omega) d\omega \quad (3.33)$$

Des del punt de vista físic és important veure la informació que ens aporta l'equació (3.32). Aquesta equació ens diu que la intensitat que rebem a  $\mathbf{x}$  d'una ona d'una determinada freqüència  $\omega$ , només pot haver estat generada per aquells elements de la font quadrupolar d'igual freqüència  $\omega$  i amb el vector del nombre d'ones, de mòdul  $\omega/c_0$ , apuntant en la direcció de  $\mathbf{x}$ . Això explica el fet que la turbulència sigui un procés extremadament ineficient com a generador de soroll: en efecte, del conjunt de remolins presents al flux, molt pocs tindran les característiques necessàries per tal de generar una determinada ona sonora en una determinada direcció de l'espai.

### 3.3.4 Anàlisi dimensional

Una primera idea de la dependència del soroll radiat en funció dels diferents paràmetres que caracteritzen un flux aperiòdic i/o turbulent ens la pot donar un anàlisi dimensional de l'equació (3.21).

Suposem que tenim un flux caracteritzat per remolins de grandària  $L$  i velocitat  $U$ . El soroll que aquests remolins generen tindrà una freqüència de l'ordre de  $U/L$  i la seva longitud d'ona serà de l'ordre de  $\lambda = 0(L/M)$ , on  $M$  és el nombre de Mach ( $M=U/c_0$ ). Al quocient  $\lambda/L \sim M^{-1}$  se l'anomena "factor de compacticitat" i per a valors petits de  $M$  (turbulència subsònica) té un valor elevat. Per tant, a nombres de Mach baixos els remolins apareixen "compactes" comparats amb l'escala de la longitud de l'ona acústica i els retards temporals,  $\frac{xz}{xc_0}$ , de l'equació (3.21) són aleshores negligibles. En efecte, l'escala de temps del flux és de l'ordre de  $L/U$  mentre que els retards temporals per un valor de  $|z|$  màxim,  $L$ , són de l'ordre de  $L/c_0$ . El quocient  $(L/c_0)/(L/U)=M$  i es pot negligir si  $M$  és prou petit.

Sota les hipòtesis anteriors podem aproximar els paràmetres de l'equació (3.21) de la següent manera:

$$\begin{aligned} (T_{ij})^2 &\sim \rho_0 U^4 \\ \partial_\tau &\sim U/L \\ dz &\sim L^3 \end{aligned} \quad (3.34)$$

La intensitat total en un punt  $x$  ens vindrà donada per:

$$I(x) \sim L^3 \dot{i}(x) \sim \frac{1}{\rho_0 c_0^5 x^2} \left(\frac{U}{L}\right)^4 \rho_0^2 U^4 L^6 \sim \rho_0 U^3 \frac{L^2}{x^2} M^5 \quad (3.35)$$

Si ara integrem la intensitat (3.35) per a una esfera de radi  $x$  obtindrem la potència acústica total radiada:

$$W_{ac} \sim x^2 I \sim \rho_0 U^3 L^2 M^5 = \frac{\rho_0}{c_0^5} U^8 L^2 \quad (3.36)$$

Per tant, la potència acústica radiada varia amb l'octava potència de la velocitat (índex de velocitat de Lighthill). Per altra banda, si observem que  $\rho_0 U^3 L^2$  és la potència mecànica del flux, l'equació (3.36) ens diu que només  $M^5$  d'aquesta es converteixen en potència acústica. Així doncs, a nombres de Mach baixos la turbulència és un procés força ineficaç com a font de soroll.

### 3.4 L'analogia de Powell-Howe

L'analogia de Powell-Howe [13,14] és vàlida per a nombres de Mach baixos, nombres de Strouhal moderats i nombres de Reynolds alts. En aquest cas la font de soroll es pot considerar incompressible i es compleix que  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ .

Sigui  $\omega$  la vorticitat del fluid i  $\mathbf{v}$  el camp de velocitats. Tenint en compte la identitat vectorial

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \omega \wedge \mathbf{v} + \nabla\left(\frac{1}{2}v^2\right) \quad (3.37)$$

i prenent la divergència a banda i banda de (3.37) ens queda:

$$\partial_i \partial_j (v_i v_j) = \nabla \cdot (\omega \wedge \mathbf{v}) + \nabla^2 \left(\frac{1}{2}v^2\right) \quad (3.38)$$

El terme de l'esquerra de l'equació (3.38) és el terme font de l'equació (3.11) i (3.1) pel cas isentròpic en què  $T_{ij} = \rho v_i v_j$ . Pel que fa al segon terme de la dreta és pot demostrar que és insignificant enfront el primer quan es busca la solució acústica en camp llunyà. Així doncs, l'equació d'ones corresponent a l'analogia de Powell-Howe, i equivalent a (3.11), es pot escriure com:

$$\square^2(\rho - \rho_0) = \nabla \cdot (\omega \wedge \mathbf{v}) \quad (3.39)$$

La solució a (3.39) en camp llunyà ve donada per la següent expressió (equivalent a l'equació (3.14) que hem trobat per l'analogia de Lighthill):

$$(\rho - \rho_0)_{\mathbf{x} \rightarrow \infty}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi c_0^4} \frac{\rho_0}{x^3} \partial_t^2 \int_{V(\mathbf{y})} (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) \mathbf{x} \cdot (\omega \wedge \mathbf{v})(\mathbf{y}, t - \frac{x}{c_0}) d^3 \mathbf{y} \quad (3.40)$$

Una avantatge que presenta (3.40) respecte (3.14) és que ara la integral només s'ha de fer per a aquelles zones de l'espai en que la vorticitat és diferent de zero. Tanmateix cal anar amb compte: l'equació (3.39) ens mostra la font de soroll com una distribució de dipols (tenim una divergència enlloc d'una doble divergència) i per tant, el caràcter quadrupolar que (3.11) ens diu que aquesta té s'ha de recuperar per cancel·lacions mútues de dipols. Això implica que les diferències en els retards temporals no es poden ignorar a l'hora d'avaluar (3.40), fet que té un cost computacional important.

### 3.5 L'analogia de Möhring

L'analogia de Möhring [15] s'aplica bàsicament sota les mateixes condicions que la de Powell-Howe però no presenta els seus problemes. En efecte, a la formulació de Möhring la vorticitat hi apareix com a única font de soroll (i per tant no cal integrar a les regions on aquesta sigui nul·la) i a més a més aquesta té un caràcter quadrupolar. Les fluctuacions de densitat en camp llunyà i lliure venen donades per:

$$(\rho - \rho_0)_{\mathbf{x} \rightarrow \infty}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{12\pi c_0^4} \frac{\rho_0}{x^3} \partial_t^3 \int_{V(\mathbf{y})} (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) \mathbf{y} \cdot (\omega \wedge \mathbf{x})(\mathbf{y}, t - \frac{x}{c_0}) d^3 \mathbf{y} \quad (3.41)$$

Cal assenyalar que l'analogia de Möhring es basa en l'existència d'una funció vectorial de Green  $\mathbf{G}(\mathbf{x}, t)$ , tal que  $\nabla \mathbf{G} = \nabla \wedge \mathbf{G}$ . De fet  $\mathbf{G}$  només pot existir si  $\nabla^2 \mathbf{G} = 0$  i això en general no és compleix, tot i que per a nombres de Mach baixos és



una aproximació acceptable [9, 15].

Computacions aeroacústiques basades en les analogies de Powell-Howe i Möhring han estat realitzades per alguns autors [16,17,18,19] per tal de resoldre problemes de caire més aviat acadèmic en que s'analitzen els camps acústics generats per la interacció de vòrtexs anulars en diverses situacions.

### 3.6 L'analogia de Ffowcs Williams - Hawkings (FW-H). Interacció amb superfícies sòlides.

L'equació (3.14) de l'apartat 3.2 ens ha permès avaluar les fluctuacions de densitat mitjançant la convolució de la font de soroll amb la funció de Green en camp lliure. Ara bé, si volguéssim resoldre el problema de calcular el soroll generat per un fluid interaccionant amb una superfície sòlida, la darrera no seria vàlida i hauríem d'obtenir la funció de Green de la geometria del nou problema per tal de seguir el mateix plantejament de 3.2.

Trobar funcions de Green analítiques per a geometries simples és possible i també calcular-les numèricament en alguns casos. Tanmateix això no sempre és fàcil, i un procediment alternatiu per evitar-nos aquest pas previ el constitueix l'equació FW-H [5,9,20,21]. L'equació FW-H ens permet seguir emprant la funció de Green en camp lliure a canvi de modificar el terme de les fonts de soroll.

Suposem que tenim una superfície S definida per una funció f tal que

$$\begin{aligned} f(x, t) &= 0 \quad \forall x \in S \\ f(x, t) &> 0 \quad \forall x \text{ del fluid} \\ f(x, t) &< 0 \quad \forall x \text{ interior a S} \end{aligned} \quad (3.42)$$

i.e f és positiva a tot l'espai ocupat pel fluid, zero a la superfície S i negativa a l'interior de S. Si la superfície S es mou amb velocitat V i tenim en compte que ve definida per f(x,t)=0 sempre es complirà que:

$$\partial_t f(x, t) + V_i \partial_i f(x, t) = 0 \quad (3.43)$$

Per altra banda, la funció de Heaviside H(f) pren per definició el valor unitat a tot el fluid i esdevé zero al volum englobat per la superfície S. El producte  $(\rho - \rho_0)H(f)$  està definit a tot l'espai i ens dóna per tant les fluctuacions de densitat a la zona ocupada pel fluid mentre que és nul a la resta de regions (i.e a l'interior de S).

Si a continuació multipliquem l'equació de continuïtat (3.2) per H(f) i entrem H(f) a l'interior del operador diferencials obtenim

$$\partial_t [(\rho - \rho_0)H(f)] + \partial_i [\rho u_i H(f)] = \rho_0 V_i \partial_i H(f) + \rho (u_i - V_i) \partial_i H(f) \quad (3.44)$$

Si fem el mateix amb l'equació NS (3.5) obtenim

$$\partial_t[\rho u_i H(f)] + \partial_i[(\rho \delta_{ij} + \rho u_i u_j)H(f)] = [\rho \delta_{ij} + \rho u_i(u_j - V_j)]\partial_j H(f) \quad (3.45)$$

A partir de (3.44) i (3.45) i seguint els mateixos passos que hem fet a l'apartat 3.2 per tal d'obtenir l'equació de Lighthill (3.8)-(3.11) arribem a

$$\square^2[(\rho - \rho_0)H(f)] = \partial_i \partial_j [T_{ij}H(f)] + \partial_i [F_i \delta(f)] + \partial_t [Q \delta(f)] \quad (3.46)$$

amb

$$\begin{aligned} T_{ij} &= \rho u_i u_j + [\rho - c_0^2(\rho - \rho_0)]\delta_{ij} \\ F_i &= -[\rho \delta_{ij} + \rho u_i(u_j - V_j)]\partial_j f \\ Q &= [\rho_0 V_i + \rho(u_i - V_i)]\partial_i f \end{aligned} \quad (3.47)$$

En el cas en que no hi hagi cap superfície present es complirà que  $H(f)=1$  i  $\delta(f)=0$  a qualsevol punt de forma que (3.46) passa a ser l'equació de Lighthill (3.11). Com podem veure, la diferència entre (3.46) i (3.11) és l'aparició de noves fonts de soroll a part de les quadrupolars  $\partial_i \partial_j T_{ij}$ . En efecte, el segon i tercer terme de la dreta de l'equació (3.46) representen respectivament concentracions de dipols i monopols a la superfície S.

A partir de (3.46) ja podem utilitzar la funció de Green en camp lliure per tal de trobar les fluctuacions de densitat en camp llunyà tal i com hem fet a (3.12)-(3.14). En aquest cas obtenim:

$$\begin{aligned} (\rho - \rho_0)(\mathbf{x}, t)H(f) &= \frac{x_i x_j}{x^3} \frac{1}{4\pi c_0^3} \delta(x - c_0 t) \star \partial_t^2 [T_{ij}H(f)] - \frac{x_i}{x^2} \frac{1}{4\pi c_0^2} \delta(x - c_0 t) \star \partial_t [F_i \delta(f)] + \\ &+ \frac{1}{x} \frac{1}{4\pi c_0} \delta(x - c_0 t) \star \partial_t [Q \delta(f)] \end{aligned} \quad (3.48)$$

L'equivalent a l'equació (3.14) en aquest cas és [9]:

$$\begin{aligned} (\rho - \rho_0)(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{4\pi c_0^4} \frac{x_i x_j}{x^3} \partial_t^2 \int_{V_f(\mathbf{y})} T_{ij}(\mathbf{y}, t - \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}{c_0}) d^3 \mathbf{y} + \\ &+ \frac{1}{4\pi c_0^3} \frac{x_i}{x^2} \partial_t \int_S \left[ \frac{l_i \rho + l_j \rho u_i (u_j - V_j)}{|1 - \mathbf{x} \cdot \mathbf{M}|} \right] (\mathbf{y}, t - \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}{c_0}) d^3 \mathbf{y} + \\ &+ \frac{1}{4\pi c_0^2} \frac{1}{x} \partial_t \int_S \left[ \frac{l_i \rho V_i + \rho (u_i - V_i)}{|1 - \mathbf{x} \cdot \mathbf{M}|} \right] (\mathbf{y}, t - \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}{c_0}) d^3 \mathbf{y} \end{aligned} \quad (3.49)$$

on  $\mathbf{M} := \frac{\mathbf{V}}{c_0}$  és el vector nombre de Mach,  $V_f(\mathbf{y})$  és el volum ocupat pel fluid (on  $f > 0$ ), S la superfície que l'engloba i  $\mathbf{l}$  la normal a aquesta. L'equació (3.49) es coneix amb el nom d'equació de Ffwocs Williams-Hawkings i pel cas particular d'una superfície de control estacionària ( $\mathbf{V}=0$ ) reb el nom d'equació de Curle. L'equació (3.49) és de fet una generalització de l'equació de Kirchoff-Helmholtz (2.29) de l'acústica lineal i s'ha utilitzat en diverses versions simplificades [22] per tal de calcular el soroll aerodinàmic generat per helicòpters, rotors, hèlixs, ventiladors, etc. (veure p.ex [23,24]).

### 3.7 Altres analogies

A més a més de les analogies que hem presentat als apartats anteriors, i que hem considerat les més adients de cara a resoldre problemes d'enginyeria esmentats a la introducció, n'existeixen d'altres alternatives, la formulació de les quals resumirem a continuació a títol informatiu [25].

#### 3.7.1 Analogia de Legendre

Equació:

$$\left(D_t \frac{1}{c^2} D_t - \nabla^2\right) \Theta = -D_t \left(\frac{1}{c^2} \nabla \mathbf{v} : \mathbf{v} \nabla - \frac{1}{c^2} \nabla \ln h D_t \mathbf{v}\right) - \frac{1}{c^2} \nabla^2 \mathbf{v} D_t \mathbf{v} - 2 \nabla \mathbf{v} : \nabla \left(\frac{1}{c^2} D_t \mathbf{v}\right) \quad (3.50)$$

essent  $h$  l'entalpia i  $\Theta = \nabla \cdot \mathbf{v}$  la dilatació.

#### 3.7.2 Analogia de Phillips

Equació:

$$(D_t^2 - \nabla \cdot c^2 \nabla) \ln p = \gamma \nabla \mathbf{v} : \mathbf{v} \nabla \quad (3.51)$$

on  $\gamma$  és el quocient de calors específics.

#### 3.7.3 Analogia de Lilley

Equació:

$$D_t (D_t^2 - \nabla \cdot c^2 \nabla) \ln p^\gamma + 2 \nabla \mathbf{v} : \nabla (c^2 \nabla \ln p^\gamma) = -\gamma \nabla \cdot \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{v} : \mathbf{v} \nabla \quad (3.52)$$

#### 3.7.4 Analogia de Ribner

Equació:

$$\begin{aligned} \square^2 p &= \frac{1}{c^2} \partial_t^2 p^{(0)} \\ \nabla^2 p^{(0)} &= \partial_i \partial_j \rho_0 u_i u_j \end{aligned} \quad (3.53)$$

#### 3.7.5 Analogia de Howe

Equació:

$$\left(\partial_t \frac{1}{c^2} D_t - \nabla^2\right) h_s = \partial_t \left(\frac{1}{c^2} D_t \frac{v^2}{2}\right) - \nabla \cdot (\mathbf{v} \wedge \boldsymbol{\omega}) \quad (3.54)$$

on  $h_s = h + v^2/2$  és l'entalpia d'estagnació.

## 4. AEROACÚSTICA COMPUTACIONAL DE FLUIXOS SUBSÒNICS

### 4.1 Introducció

Tot i que en un principi els avenços i desenvolupaments importants en aeroacústica i aeroacústica computacional es van realitzar en el camp de l'aeronàutica, on el rang típic de velocitats és pròxim o superior a la velocitat del so, l'aeroacústica computacional de fluxos subsònics ha rebut un fort impuls els darrers anys. Aquest fet es deu bàsicament als següents motius:

En primer lloc cal assenyalar que a no ser que la velocitat mitja del flux analitzat sigui unes dues vegades superior a la velocitat ambient del so, la radiació de soroll es deu bàsicament a la lenta evolució temporal dels remolins convectats. En aquest cas, fenòmens com la pròpia convecció de remolins, la refracció o l'apantallament es poden avaluar mitjançant correccions multiplicatives de la radiació de remolins subsònics.

Per altra banda cal destacar l'aparició de problemes de soroll característics del propi rang subsònic com poden ser el soroll generat per ventiladors, per apèndixs d'automòbils o per trens d'alta velocitat. En molts casos aquests fenòmens han adquirit importància degut als avenços en altres camps de l'acústica. Així doncs, el soroll aerodinàmic generat per les pales d'un ventilador pot resultar molest "gràcies" a que s'ha aconseguit disminuir notablement el soroll generat pel motor que les mou. El mateix passa amb el retrovisor o el sistema de ventilació d'un automòbil que no resultaven molestos fins que s'han aconseguit reduccions considerables del soroll generat pel motor.

Finalment, l'aeroacústica computacional o CAA (*CAA: Computational AeroAcoustics*) resulta interessant des d'un punt de vista científic ja que presenta nombrosos problemes numèrics que no solen aparèixer en altres camps de computació en enginyeria. Veurem aquest punt al pròxim apartat.

### 4.2 Dificultats que presenta l'aeroacústica computacional de fluxos subsònics

L'aeroacústica computacional s'ha d'enfrontar amb una sèrie de dificultats que no són habituals en camps com la mecànica, el càlcul d'estructures o l'aerodinàmica, on s'han desenvolupat una gran quantitat de tècniques computacionals avançades. Aquestes dificultats es deuen al següent [10]:

- El gran marge d'audibilitat de l'oïda humana que varia aproximadament entre els 0 dB i els 140 dB, i correspon per tant, a unes variacions d'intensitat de l'ordre de  $10^{14}$ .
- L'elevat rang de freqüències que pot percebre l'oïda i que varia entre els 20 Hz i els 20.000 Hz i.e unes 10 octaves, mentre que per exemple la vista

només en comprèn una. A més a més, l'oïda és especialment sensible entre els 1000 Hz i els 4000 Hz, freqüències que solen estar quatre o cinc octaves per damunt dels pics de soroll més intensos generats per algunes fonts aerodinàmiques.

- L'enorme disparitat d'escala entre l'energia del camp aerodinàmic i la del camp acústic que aquest genera. De fet aquest darrer sol ser de l'ordre de  $M^4$  ( $M$  = nombre de Mach) vegades el primer en el cas de fluxos subsònics. La debilitat del camp acústic fa que sovint el "soroll" propi de l'algorisme numèric (errors de difusió i dispersió) sigui superior al del propi camp que volem calcular.

El següent exemple ens pot donar una visió clara d'aquesta debilitat: Un Boeing 767 genera la mateixa intensitat sonora en enlairar-se que la que farien tots els habitants d'una gran ciutat cridant alhora de forma coherent. Tanmateix, el conjunt de tota l'energia sonora que aquest radia durant els aproximadament 45 segons que dura l'enlairament és totalment insuficient per fregir un sol ou ferrat !

- L'enorme disparitat entre l'escala dels remolins del flux i la longitud d'ona del so que generen (veure punt 3.3.4).
- L'anàlisi numèric ha de conservar el caràcter multipolar del camp acústic: el fet de substituir una font quadrupolar per una de dipolar (p.ex fer servir l'analogia acústica de Howe enlloc de la de Lighthill) pot conduir a greus errors en l'avaluació de la directivitat del camp acústic, a no ser que les integrals es calculin amb extrema precaució, tenint en compte totes les variacions en els retards temporals.
- Un altre problema, que no tractarem aquí de forma específica, és el de la propagació del so a grans distàncies (p. ex ~ 300 m) on poden tenir lloc importants efectes no-lineals com el steepening [26].

### 4.3 Alternatives de computació del soroll aerodinàmic

Per tal de computar el soroll aerodinàmic generat per fluxos no periòdics i/o turbulents i la seva interacció amb superfícies sòlides s'han seguit diferents camins [10, 23, 26, 27, 28] que resumim a continuació:

- Simulació Directa (DNS: Direct Numerical Simulation): La simulació directa, tal i com el seu propi nom indica, consisteix a resoldre directament les equacions de NS (fent servir p.ex. mètodes espectrals, diferències finites o elements finits) per a un fluid compressible de manera que el camp acústic apareix de forma natural en la solució obtinguda. Naturalment, el tipus de problemes resolubles mitjançant aquesta tècnica és certament limitat degut als punts esmentats a l'apartat anterior i tant sols s'obtenen resultats acceptables per nombres de Reynolds i freqüències baixes [19, 29, 30]. Tot i que l'opció DNS és útil per tal de comprovar la validesa d'algunes analogies

acústiques, no és aplicable als problemes típics d'enginyeria esmentats a la introducció.

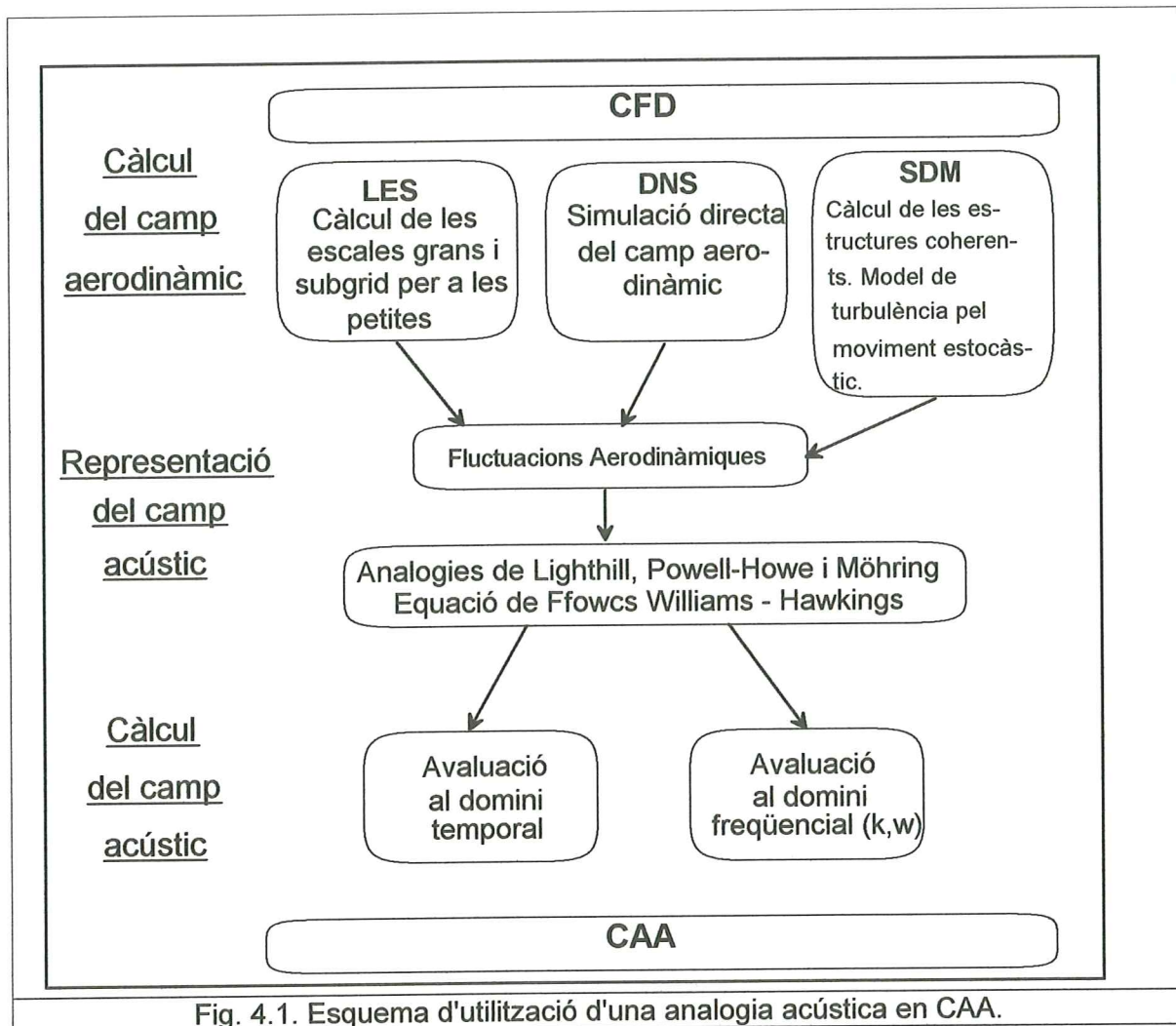
Finalment, cal dir que el nom de DNS aplicat a l'aeroacústica computacional condueix a algunes confusions ja que de vegades es fa referència a ell quan en una analogia s'obté el terme font,  $f(x,t)$  de (3.1), mitjançant una computació directa per CFD (*CFD: Computational Fluid Dynamics*), independentment de com es calculi posteriorment el camp acústic.

- Analogies acústiques: La utilització d'analogies acústiques juntament amb la funció de Green apropiada a la geometria del problema que intentem resoldre és sens dubte un dels mètodes més emprats per tal de computar soroll aerodinàmic. La idea és la de calcular el terme font de (3.1) mitjançant CFD i a continuació resoldre l'equació inhomogènia resultant al domini temporal o al freqüencial. En el pròxim apartat presentarem amb més detall aquesta opció.
- Integral de Kirchoff-Helmholtz: Una altra de les opcions per tal de computar soroll aerodinàmic és la d'utilitzar l'integral de Kirchoff-Helmholtz (2.29) (veure p.ex. [3, 4, 31] per a superfícies en moviment i [26,29,32] per alguns resultats de simulacions aeroacústiques). Tot i que aquest enfocament no està exempt de nombroses dificultats (per començar la d'escollir la posició de la superfície virtual S) el mètode ha estat emprat per al càlcul de soroll generat per capes límit i raigs amb bons resultats.
- Mescla asimptòtica quan  $M \rightarrow 0$  : La idea de la mescla asimptòtica és la d'enllaçar la solució interna d'un nucli rotacional de longitud d'escala pròpia  $l$ , (representant un remolí de tamany  $l$ ) amb un camp acústic extern de longitud d'escala pròpia  $lM^{-1}$ . La solució interna es podria calcular per CFD i després realitzar l'enllaç. Una discussió detallada sobre les avantatges i els problemes d'aquest enfocament es poden trobar a [33].

#### 4.4 Analogies acústiques en CAA

Tal i com hem comentat al llarg d'aquest escrit, l'opció més raonable, al nostre entendre, per tal de realitzar còmputos de CAA de fluxos subsònics aplicats als problemes d'enginyeria que ens interessin és la d'emprar les analogies acústiques. En el cas que no hi hagi presència de superfícies sòlides, les analogies de Lighthill (3.14), Powell-Howe (3.36) i Möhring (3.40) semblen a priori les més adients. En cas contrari, la utilització de l'equació FW-H (3.46)-(3.47) podria resultar l'opció adequada tenint en compte que els termes monopolars i dipolars de (2.35) solen dominar el camp acústic.

El procés computacional que l'ús d'una analogia acústica comporta es pot veure esquematitzat a la Fig 4.1.



Tal com podem veure a la Fig. 1 el procés consta de tres fases: Una primera en que es realitza una computació CFD del camp aerodinàmic fent servir la tècnica més adient al problema amb què ens trobem. En el cas de fluxos aperiòdics i/o turbulents es pot utilitzar tant una simulació directa DNS, els problemes de la qual ja hem comentat anteriorment, com una simulació semideterminista, SDM (*SDM: Semi-Deterministic Modelling*), en que es computen les estructures coherents del fluid i s'utilitza un model de turbulència pel moviment estocàstic de les escales menors, corresponents als remolins més petits de la cascada de Kolmogorov. També es poden utilitzar els diferents models  $k-\epsilon$  de clausura de les equacions o una simulació LES (*LES: Large Eddy Simulation*) en que es computen les escales més grans del fluid i s'utilitza un submodel per tal d'avaluar la influència de les petites. Aquesta darrera opció és certament esperançadora [27] ja que en principi ens permet ajustar el màxim nombre d'ona computable i saber per tant el límit a partir del qual els resultats obtinguts deixen de ser realistes. A més a més, amb un mallat prou fi seria possible capturar part de l'estructura interna dels remolins i calcular part de l'espectre d'alta freqüència radiat. La caracterització del soroll radiat per les escales no resoltes del moviment ha estat objecte de diversos estudis

[34, 35].

En una segona fase es fan servir els càlculs de CFD per tal d'obtenir les fluctuacions aerodinàmiques que constituïran el terme font de l'analogia acústica (3.1) que haguem escollit pel problema particular amb què estiguem tractant.

A la tercera i última fase haurem de resoldre l'equació d'ones inhomogènia (3.1). Això ho podem fer tant en el domini temporal com en el freqüencial, en el qual l'equació d'ones esdevé la coneguda equació de Helmholtz. L'elecció d'una o altra opció pot ser determinant a l'hora d'obtenir resultats acceptables. En efecte, tot i que les equacions (3.12), (3.14) i la seva transformada al domini freqüencial condueixen teòricament al mateix resultat (un cop feta la transformada de Fourier de les solucions de (3.12) i (3.14)), els valors obtinguts mitjançant els diferents algorismes numèrics poden discrepar notablement. Un exemple el podem trobar a [27]. En aquest article s'utilitza en primer lloc la formulació (3.12), amb la doble divergència del tensor de Reynolds instantani (aproximació isentròpica) com a terme font, per tal de calcular el soroll radiat per un raig pla en expansió, prèviament simulat amb SDM. A continuació s'utilitzen les formulacions basades en (3.14) i la seva transformada per resoldre el mateix problema. Tot i que aquestes darreres donen resultats força semblants, la formulació basada en (3.12) arriba a donar resultats que superen en més de 10 dB les anteriors.

## 5. CONCLUSIONS

En aquest escrit hem presentat una introducció a l'aeroacústica seguint el procediment de Lighthill, que fou el primer en establir el concepte d'analogia acústica. Les analogies acústiques han permès entendre una gran quantitat de fenòmens de generació de soroll aerodinàmic que romanien inexplicables abans de la seva formulació.

Amb l'objectiu d'escollir una metodologia útil per tal de poder realitzar simulacions numèriques del soroll generat per fluxos subsònics no periòdics i/o turbulents, i per la seva interacció amb contorns sòlids, hem presentat amb cert detall les analogies que a priori ens han semblat més adequades a tal efecte. Aquestes són les analogies de Lighthill, Powell-Howe, Möhring i l'equació de Ffowcs Williams - Hawkings.

A continuació hem vist, de forma bastant genèrica, quines són algunes de les dificultats amb què hom es pot trobar en el camp de l'aeroacústica computacional i quins són els enfocaments més importants que s'han seguit fins a l'actualitat en CAA.

Finalment, i de cara a poder fer simulacions del soroll generat pels apèndixs de trens d'alta velocitat, pels apèndixs d'automòbils o per ventiladors hem vist que una de les opcions més raonables fóra la de realitzar una simulació LES del camp aerodinàmic, i així obtenir els termes font d'una analogia acústica, possiblement la de Lighthill o la de Ffowcs Williams-Hawkings. A continuació caldria resoldre



aquestes darreres equacions al domini temporal o al freqüencial, fet que suposaria haver de resoldre una equació d'ones inhomogènia en el primer cas i una equació inhomogènia de Helmholtz en el segon.

## REFERÈNCIES

- [1] "Noise and Vibration Control Engineering: Principles and Applications". (ed. Beranek, L.L. & Vér, I.L.). John Wiley & Sons, Inc. 1992.
- [2] Bendat, J.S & Piersol, A.G. "Engineering applications of correlation and spectral analysis". John Wiley & Sons, Inc. 1980.
- [3] Morse, P.M. & Ingard, K.U. "Theoretical Acoustics". Princeton University Press 1968.
- [4] Pierce, A.D. "Acoustics: An introduction to its physical principles and applications". Mc. Graw-Hill 1981.
- [5] Goldstein, M.E. "Aeroacoustics". Mc Graw-Hill, Inc. 1976.
- [6] Williams, E.G. "Fourier Acoustics: Sound Radiation and Nearfield Acoustical Holography". Academic Press 1999.
- [7] Max, J. "Methodes et techniques de traitement du signal et applications aux mesures physiques". Masson et C<sup>ie</sup>. 1972.
- [8] Nelson, P.A. & Elliot, S.J. "Active Control of Sound". Academic Press. 1992.
- [9] Crighton, D.G., Dowling, A.P., Ffowcs Williams, J.E., Heckl, M. & Leppington, F.G. *Modern methods in analytical acoustics*. Springer-Verlag 1992.
- [10] Crighton, D.G. "Computational aeroacoustics for low Mach number flows". *A Computational Aeroacoustics* (ed. J.C. Hardin & M.Y. Hussaini) 1993. Pàgs. 50-68.
- [11] Lighthill, M.J. 1952, Proc. R. Soc. Lond. **A 211**, pàgs. 564-587 "On sound generated aerodynamically. I. General Theory."
- [12] Landahl, M.T. & Mollo-Christensen, E. "Turbulence and random processes in fluid mechanics". Cambridge University Press 1986.
- [13] Powell, A. 1964. "Theory of vortex sound". J. Acoust. Soc. Am. **36**. pàgs. 177-195.
- [14] Howe, M.S. 1975. "Contributions to the theory of aerodynamic sound, with application to excess jet noise and the theory of the flute". J. Fluid Mech **71**. pàgs 625-673.
- [15] Möhring, W.F. 1978. "On vortex sound at low Mach number". J. Fluid Mech. **85**. pàgs 685-691.
- [16] Kambe, T., Minota, T. & Ikushima, Y. 1985. "Acoustic wave emitted by a vortex ring passing near the edge of a half plane". J. Fluid Mech. **155**. pàgs 77-103.
- [17] Kambe, T. 1986. "Acoustic emissions by vortex motions" J. Fluid Mech. **173**. Pàgs 643-666.
- [18] Fedorchenko, A.T. 1986. "On vortex outflow through the permeable boundary of the computational domain of non-stationary subsonic flow". Zh. Vychisl. Mat i Mat. Fiz. (USSR Computational Maths. Math. Phys). **26**(1). pàgs 114-129.
- [19] Brian E. Mitchell, Sanjiva K. Lele & Parviz Moin. 1995 "Direct computation of the sound from compressible co-rotating vortex pair". J. Fluid Mech. **285** pàgs 181-202.
- [20] Ffowcs Williams, J.E. and Hawkings, D.L. 1969. "Sound generated by turbulence and surfaces in arbitrary motion". Phil. Trans. Roy. Soc. A **264**. pàgs. 321-342.
- [21] Ffowcs Williams, J.E. 1969. "Hydrodynamic Noise". Ann. Rev. Fluid Mech. **1**. pàgs 197-222.

- [22] Goldstein, M.E. 1974. "Unified approach to aerodynamic sound generation in the presence of solid boundaries". *J. Acoust. Soc. Am.* **56**. pàgs. 497-509.
- [23] Farassat, F. "The acoustic analogy as a tool of computational aeroacoustics". *A Computational Aeroacoustics* (ed. J.C. Hardin & M.Y. Hussaini) 1993. Pàgs. 133-151.
- [24] Guo, Y.P. 2000. "Application of the Ffowcs Williams / Hawkings equation to two-dimensional problems". *J. Fluid Mech.* **403**. pàgs 201-221.
- [25] Lilley, G.M. "On the noise radiated from a turbulence high speed jet". *A Computational Aeroacoustics* (ed. J.C. Hardin & M.Y. Hussaini) 1993. Pàgs. 85-115.
- [26] Wells, V.L. & Renaut, R.A. 1997. "Computing aerodynamically generated noise". *Ann. Rev. Fluid Mech.* **29**. pàgs 161-169.
- [27] Bastin, F., Lafon, P. & Candel, S. 1997. "Computation of jet mixing noise due to coherent structures: the plane jet case". *J. Fluid Mech.* **335**. pàgs 261-304.
- [28] Zorumski, W.E. "Classical theoretical approaches to computational aeroacoustics". *A Computational Aeroacoustics* (ed. J.C. Hardin & M.Y. Hussaini) 1993. Pàgs. 41-49.
- [29] Brian E. Mitchell, Sanjiva K. Lele & Parviz Moin. 1999 "Direct computation of the sound generated by vortex pairing in an axisymmetric jet". *J. Fluid Mech.* **383** pàgs 113-142.
- [30] "Computational Aeroacoustics". Ed. J.C. Hardin & M.Y. Hussaini. 1993. Cap. V: Direct Simulation.
- [31] Farassat, F. & Meyers, M.K. 1988, "Extension of Kirchoff's formula to radiation from moving surfaces". *J. Sound Vib.* **123** pàgs. 451-460.
- [32] Gennaretti, M., Luceri, L. & Morino, L. 1997, "A unified integral methodology for aerodynamics and aeroacoustics of rotors". *J. Sound Vib.* **200** pàgs. 467-489.
- [33] Crow, S.C. 1970. "Aerodynamic sound emission as a singular perturbation problem". *Stud. Appl. Math.* **49** pàgs. 21-44.
- [34] Rubinstein, R & Zhou, Y. October 1999. "Characterization of sound radiation by unresolved scales of motion in computational aeroacoustics". ICASE Report N°99-39. NASA Langley Research Center.
- [35] Bailly, C. & Juvé, D. 1999. "A stochastic approach to compute subsonic noise using linearized Euler equations". *AIAA Paper* **99** pàg 1872.

# **Principis d'acústica, d'aeroacústica i breu introducció a l'aeroacústica computacional de fluxos subsònics**

**O. Guasch i Fortuny**

# **Principis d'acústica, d'aeroacústica i breu introducció a l'aeroacústica computacional de fluxos subsònics**

**O. Guasch i Fortuny**

**Publicació CIMNE N°-220, Setembre 2002**



# ÍNDIX

1- INTRODUCCIÓ ...	2
2- DEFINICIONS I CONCEPTES BÀSICS D'ACÚSTICA ...	3
2.1 Introducció ...	3
2.2 L'equació d'ones ...	3
2.2.1 Les equacions fonamentals i l'equació d'ones ...	3
2.2.2 Solucions a l'equació d'ones ...	6
2.3 L'equació d'ones inhomogènia ...	7
2.3.1 Fonts monopolars ...	7
2.3.2 Resposta a l'impuls, funció de Green i integral de Kirchhoff - Helmholtz ...	7
2.3.3 Fonts dipolars i quadrupolars ...	9
2.3.4 Desenvolupament multipolar ...	10
2.4 Anàlisi de Fourier ...	11
2.4.1 Introducció ...	11
2.4.2 Funcions periòdiques ...	11
2.4.3 Funcions aperiòdiques que s'anul·len a l'infinit ...	12
2.4.4 Processos estocàstics ...	13
2.4.5 Transformades espacials i transformades conjuntes $k$ - $\omega$ ...	16
2.5 Intensitat i potència acústiques ...	18
2.5.1 Intensitat i potència instantànies ...	18
2.5.2 Intensitat i potència mitjanes ...	18
2.5.3 Nivells de pressió, intensitat i potència ...	19
3- AEROACÚSTICA ...	20
3.1 Introducció ...	20
3.2 La definició d'analogia acústica ...	21
3.3 L'analogia de Lighthill ...	21
3.3.1 L'equació de Lighthill ...	21
3.3.2 La solució temporal en camp llunyà ...	23
3.3.3 La solució al domini freqüencial en camp llunyà ...	25
3.3.4 Anàlisi dimensional ...	27
3.4 L'analogia de Powell-Howe ...	27
3.5 L'analogia de Möhring ...	28
3.6 L'analogia de Ffowcs Williams - Hawkings (FW-H). Interacció amb superfícies sòlides ...	29
3.7 Altres analogies ...	31
3.7.1 L'analogia de Legendre ...	31
3.7.2 L'analogia de Phillips ...	31
3.7.3 L'analogia de Lilley ...	31
3.7.4 L'analogia de Ribner ...	31
3.7.5 L'analogia de Howe ...	31
4- AEROACÚSTICA COMPUTACIONAL DE FLUIXOS SUBSÒNICS ...	32
4.1 Introducció ...	32
4.2 Dificultats que presenta l'aeroacústica computacional de fluxos subsònics ...	32
4.3 Alternatives de computació el soroll aerodinàmic ...	33
4.4 Analogies acústiques en CAA ...	34
5- CONCLUSIONS ...	36
REFERÈNCIES ...	38





# 1. INTRODUCCIÓ

En aquest escrit presentarem una breu introducció a l'aeroacústica computacional. L'aeroacústica és un camp sorgit de l'acústica i de la mecànica de fluids que s'encarrega de l'estudi del soroll generat per fluxos no-estacionaris i/o turbulents i per la seva interacció amb superfícies sòlides.

En primer lloc, i per a aquells lectors sense coneixements previs d'acústica, presentarem una recopilació de les definicions i conceptes bàsics d'aquesta ciència. Veurem les equacions fonamentals de les ones sonores, les equacions d'ones homogènies i els casos més típics d'equacions d'ones inhomogènies (presència de fonts monopolars, dipolars i quadrupolars). També farem un breu repàs de l'anàlisi de Fourier per a senyals deterministes i estocàstiques i finalment definirem els nivells de pressió, d'intensitat i de potència acústiques.

A continuació ens endinsarem en el camp de l'aeroacústica i veurem algunes de les diferents analogies acústiques existents, la primera de les quals fou establerta per Lighthill. Aquest mostrà com, per mitjà d'un reordenament de les equacions del moviment i continuïtat del fluid, es pot excitar un camp acústic lineal per mitjà d'un procés clarament no lineal com la turbulència. La idea subjacent a tota analogia acústica és la d'establir una separació entre la font de soroll (fluid no periòdic i/o turbulent) i la zona on es propaga el camp acústic. Tot i que això implica algunes limitacions, les analogies acústiques són d'una gran utilitat per tal d'entendre els mecanismes físics de generació de soroll aerodinàmic. Per altra banda, i pel que fa a l'aeroacústica computacional, cal assenyalar que l'ús de les diferents analogies acústiques ha estat i segueix essent una de les vies més exitoses a l'hora de calcular els camps acústics generats per fluxos subsònics.

Les analogies acústiques que presentarem amb cert detall són aquelles que, al nostre entendre, poden ser més útils de cara a resoldre els problemes d'enginyeria que aquí ens interessin, i que estan bàsicament centrats en el càlcul del soroll aerodinàmic generat per la interacció de fluxos subsònics amb superfícies sòlides. Alguns exemples d'aquests problemes poden ser el càlcul del soroll aerodinàmic generat per la carrosseria i pels apèndixs de trens d'alta velocitat, pels apèndixs d'automòbils o per diferents models de ventiladors.

Pel que fa a l'aeroacústica computacional esmentarem quines són les característiques dels camps acústics aerodinàmics que dificulten notablement la seva simulació numèrica i presentarem alguns dels mètodes que s'han seguit per tal de fer càlculs aeroacústics més o menys fiables. També comentarem breument quina és l'opció més vàlida, al nostre entendre, per tal d'intentar resoldre els problemes d'enginyeria del paràgraf anterior.

Finalment, i pel que fa a la notació, volem assenyalar que a les fórmules que apareixen al llarg del text s'ha fet ús del conveni d'Einstein sobre els índexs repetits i que per a les derivades parcials s'ha emprat la notació  $\partial_a \equiv \frac{\partial}{\partial x_a}$ ,  $\partial_a \partial_b = \partial_b \partial_a \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_a \partial x_b}$  i  $\partial_a^n \equiv \frac{\partial^n}{\partial x_a^n}$ . Les derivades materials s'han designat per  $D_t := \partial_t + v_i \partial_i \equiv \frac{D}{Dt} := \frac{\partial}{\partial t} + v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ . També emprarem  $d_x \equiv \frac{d}{dx}$ .

## 2. DEFINICIONS I CONCEPTES BÀSICS D'ACÚSTICA

### 2.1 Introducció

El so es pot definir com una vibració o pertorbació mecànica que es propaga per un medi elàstic, bé sigui un gas, un líquid o un sòlid. Les característiques d'aquesta vibració vénen donades, en cada cas, per les solucions de la corresponent "equació d'ones" que presentarem més endavant.

La definició anterior és molt general i inclou els casos de vibracions ultrasòniques, sòniques i infrasonsiques. Tanmateix, en aquest treball tan sols ens ocuparem d'aquelles pertorbacions capaces de ser captades pel sentit de l'oïda humà, i que de forma genèrica s'anomenen *soroll*.

El sentit de l'oïda és sensible a les variacions de pressió respecte la pressió atmosfèrica dins d'un determinat marge de freqüències. A aquestes variacions de pressió se les anomena *pressió acústica*. De fet, l'oïda no és directament sensible a la pressió acústica sinó que varia de forma logarítmica amb el seu flux d'energia o intensitat acústica, que definirem en els pròxims apartats. Per tant, un soroll que sigui dues vegades més intens que un altre tan sols ens produeix una sensació auditiva lleugerament superior, mentre que per doblar aquesta sensació l'hauríem d'intensificar cent vegades.

Una persona que gaudeixi d'un sentit de l'oïda sa és capaç de percebre sons que varien entre els 15 Hz i els 16.000 Hz. La resposta de l'oïda no és igual a totes les freqüències: és força insensible a baixes freqüències mentre que és especialment sensible entre els 1000 Hz i els 4000 Hz. La corba de la resposta en freqüència de l'oïda per a un soroll d'intensitat moderada, i espectre constant, s'anomena filtre A. Per a sorolls molt intensos l'oïda esdevé més sensible a baixes freqüències i la seva resposta s'ajusta amb corbes diferents (filtres C i D).

Els conceptes i definicions que presentarem als pròxims apartats es poden trobar a molts llibres d'acústica i mecànica, alguns dels quals s'han inclòs a les referències [1, 2, 3, 4, 5, 6 i 7].

### 2.2 L'equació d'ones homogènia

#### 2.2.1 Les equacions fonamentals i l'equació d'ones

A 2.1 hem definit la pressió acústica com les variacions de pressió respecte la pressió atmosfèrica per a un marge determinat de freqüències. Tanmateix, i per tal de poder parlar de pressió acústica, aquestes variacions no poden ser qualssevol sinó que han de ser solució de l'anomenada equació d'ones. Les pertorbacions de la pressió atmosfèrica que no compleixen aquest darrer requisit, però que poden ser captades per un micròfon (p.ex les variacions de pressió degudes a la convecció de remolins en un flux) s'acostumen a anomenar *pseudo-so*.

Si suposem que l'aire de l'atmosfera es pot aproximar per un flux ideal (flux en que s'ha negligit la viscositat i per tant no admet esforços tallants) el moviment d'una de les seves partícules, sotmesa a una força externa  $f_0$  independent del temps, ens ve descrit per l'equació d'Euler

$$\rho D_t \mathbf{v} + \nabla p = \mathbf{f}_0 \quad (2.1)$$

En el cas que l'atmosfera estigui en repòs i que la puguem caracteritzar per una pressió atmosfèrica  $p_0$  i per una densitat  $\rho_0$  (valors típics:  $p_0=10^5$  Pa i  $\rho_0=1.21$  kg/m<sup>3</sup>) l'equació (2.1) es redueix a

$$\nabla p_0 = \mathbf{f}_0 \quad (2.2)$$

Si ara pertorbem lleugerament l'aire, de manera que els valors de la pressió i de la densitat esdevinguin  $p=p_0+p'$  i  $\rho=\rho_0+\rho'$ , amb  $p' \ll p_0$  i  $\rho' \ll \rho_0$ , i els substituïm a (2.1) arribem a

$$\nabla p' = -\rho_0 \partial_t \mathbf{v} \quad (2.3)$$

on hem negligit totes les potències d'ordre superior a 1 de  $p'$ ,  $\rho'$ ,  $\mathbf{v}$  i les seves derivades, i a més a més hem emprat (2.2). Per tal de fer-nos una idea de l'ordre de magnitud de les pertorbacions p.ex.  $p'$  de què estem parlant, direm que l'oïda humana és capaç de percebre variacions de pressió de  $2 \cdot 10^{-5}$  Pa que són 10 ordres de magnitud inferiors a la pressió atmosfèrica de  $10^5$  Pa.

Per altra banda, l'equació de continuïtat en un flux on no hi ha fonts de flux té la següent expressió

$$D_t \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.4)$$

Substituint  $\rho$  per  $\rho=\rho_0+\rho'$  a (2.4) obtenim

$$\partial_t \rho' = -\rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \nabla \rho_0 \quad (2.5)$$

i si considerem la densitat a l'equilibri  $\rho_0$  pràcticament homogènia a tot l'espai, aleshores  $\nabla \rho_0 \sim 0$  i el segon terme de la dreta de (2.5) es pot ignorar.

Si a continuació suposem que l'equació d'estat del flux és tal que la densitat només depèn de la pressió, i.e.  $\rho=\rho(p)$ <sup>1</sup> podem expressar el coeficient de compressibilitat,  $B$ , del flux com

$$B := -\frac{1}{V} d_p V \Big|_m = -\frac{m}{V} d_p \left( \frac{V}{m} \right) \Big|_m = -\rho d_p \left( \frac{1}{\rho} \right) = -\rho \left( -\frac{1}{\rho^2} \right) d_p \rho = \frac{1}{\rho} d_p \rho \quad (2.6)$$

essent  $m$  la massa,  $V$  el volum,  $\rho$  la densitat i  $p$  la pressió.

Prenent novament  $p=p_0+p'$  i  $\rho=\rho_0+\rho'$  i aproximant  $d_p$  per  $p'$  i  $d\rho$  per  $\rho'$  arribem a

---

<sup>1</sup> Aproximació isentròpica.

$$\frac{\rho'}{\rho_0} = \frac{p'}{B} \quad (2.7)$$

expressió que podem aprofitar per eliminar  $p'$  o  $\rho'$  a partir de (2.3) o (2.5). Si eliminem  $\rho'$  de (2.5) ens queda

$$\partial_t p' = -B \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (2.8)$$

Les equacions (2.3) i (2.8) són les *equacions fonamentals de les ones sonores* i es poden utilitzar tant per trobar una expressió per a  $p'$  com per a  $\mathbf{v}$ . Les presentem conjuntament degut a la seva importància

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{v} &= -\frac{1}{\rho_0} \nabla p' \\ \partial_t p' &= -B \nabla \cdot \mathbf{v} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Prenent la divergència de la primera equació de (2.9) i permutant l'ordre de derivació ens queda

$$\partial_t (\nabla \cdot \mathbf{v}) = -\frac{1}{\rho_0} \nabla^2 p' \quad (2.10)$$

Finalment si derivem la segona equació de (2.9) respecte el temps i substituïm a (2.10) obtenim *l'equació d'ones homogènia* per a la pressió acústica

$$\partial_t^2 p' - c_0^2 \nabla^2 p' = 0 \quad (2.11)$$

on  $c_0 := \sqrt{B/\rho_0}$  és la velocitat de propagació de les ones acústiques que són solució de (2.11).

Tenint en compte la definició de l'operador d'Alambertià,  $\square^2 := \partial_a \partial_a$ , i prenent  $x_4 := ic_0 t$ , l'equació (2.11) és pot escriure com

$$\square^2 p' = 0 \quad (2.12)$$

Ja que la relació entre la pressió i la densitat és lineal, (2.7), i l'equació (2.12) també ho és, aquesta es complirà per a les pertorbacions de densitat. A través de les equacions fonamentals de les ones sonores podem demostrar que la velocitat  $\mathbf{v}$  també compleix una equació d'ones i també es possible demostrar que el potencial de velocitat  $\phi$ , amb  $\mathbf{v} = \nabla \phi$ , compleix (2.12):

$$\square^2 p' = 0, \quad \square^2 \phi = 0 \quad i \quad \partial_t^2 \mathbf{v} - c_0^2 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0 \quad (2.13)$$

Finalment, volem remarcar que les equacions (2.12) i (2.13) no són sinó un cas particular deduïble de les equacions dinàmiques linealitzades d'un gas [5]:

$$\left. \begin{aligned} \rho_0(\partial_t \mathbf{v}' + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \mathbf{v}' + \mathbf{v}' \cdot \nabla \mathbf{v}_0) + \rho' \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \mathbf{v}_0 &= -\nabla p' + \mathbf{f}_0 \\ \partial_t \rho' + \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}' + \rho' \mathbf{v}_0) &= \rho_0 Q \\ \partial_t S' + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla S' + \mathbf{v}' \cdot \nabla S_0 &= 0 \\ c_0^2(\partial_t \rho' + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \rho' + \mathbf{v}' \cdot \nabla \rho_0) + c_0'^2 \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \rho_0 &= \partial_t p' + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla p' + \mathbf{v}' \cdot \nabla p_0 \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

on les variables amb "prima" representen petites pertorbacions respecte el seu valor estacionari, i.e  $x'=x-x_0$  (on  $x$  representa qualsevol de les variables de (2.14)), i  $\rho$  és la densitat del gas,  $\mathbf{v}$  és la velocitat d'un element de flux,  $p$  és la pressió,  $c$  la velocitat de propagació de les pertorbacions,  $S$  és l'entropia,  $\mathbf{f}_0$  una força externa estacionària i  $Q$  una font de generació de flux de volum<sup>2</sup>.

L'equació (2.14) és una expressió general que descriu la propagació de petites pertorbacions en un flux estacionari i per tant no és aplicable en aquelles regions on aquestes, o els seus gradients, prenen valors elevats.

## 2.2.2 Solucions a l'equació d'ones

En el cas que la pressió  $p'$  de l'equació (2.11) sigui periòdica, s'anul·li quan  $t \rightarrow \pm \infty$ , o sigui estacionària, podem fer la transformada de Fourier de (2.11) i obtenir l'anomenada *equació de Helmholtz*:

$$(\nabla^2 + k^2)\widehat{p}' = 0 \quad (2.15)$$

on  $|k| = k := \frac{\omega}{c_0}$  és el mòdul del vector número d'ones  $\mathbf{k}$ ,  $\omega$  és la freqüència angular i  $\widehat{p}'$  és la transformada de Fourier de la pressió  $p'$ . Una solució ben simple de (2.15) ens ve donada per

$$\widehat{p}' = A e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad (2.16)$$

amb  $A = \text{constant}$ . Si suposem, a més a més, que  $p'$  és una funció harmònica del temps aleshores

$$p' = \widehat{p}' e^{-i\omega t} \quad (2.17)$$

i una solució senzilla de (2.11) serà l'ona plana

$$p' = A e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad (2.18)$$

Ja que l'equació (2.11) és lineal, qualsevol combinació lineal d'ones planes del tipus (2.18) també en serà solució (*principi de superposició*). Així doncs una solució general a l'equació d'ones ens vindrà donada per l'expressió

$$p'(\mathbf{x}, t) = \iint_{-\infty}^{\infty} A(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} d\mathbf{k}_u d\omega \quad (2.19)$$

<sup>2</sup> Suposem que ni  $\mathbf{f}_0$  ni  $Q$  produeixen entropia.

on  $k_u = k/k$  és el vector unitari en la direcció del vector nombre d'ones.

## 2.3 L'equació d'ones inhomogènia

### 2.3.1 Fonts monopolars

Amb les mateixes hipòtesis que ens han permès deduir l'equació d'ones (2.12) i (2.13) però suposant ara, que hi pot haver una font de flux de volum  $Q^3$  en un punt  $x_s$  del flux, es pot demostrar a partir de les equacions linealitzades dinàmiques d'un gas (2.14) que les pertorbacions de pressió generades compliran l'equació d'ones inhomogènia:

$$\square^2 p' = -\rho_0 \partial_t Q(t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) \quad (2.20)$$

on  $\delta$  és la delta de Dirac.

Per entendre millor el significat de (2.20) podem pensar en el camp acústic generat per una esfera polsant de radi  $a(t)$  i centrada a  $x_s$ , amb  $a(t) \ll T_p c_0$  i  $\frac{a'(t)}{a(t)} \ll 1$  on  $T_p$  és el període de pulsació de l'esfera. Sota aquestes condicions, les pertorbacions de pressió,  $p'$ , degudes a les oscil·lacions de l'esfera seran petites i compliran l'equació d'ones (2.12). Tenint en compte que el volum de flux a través d'una superfície petita, fixa i imaginària, que engloba l'esfera polsant, ens vindrà donat per  $Q(t) = 4\pi a^2(t) v_a$ , on  $v_a$  és la velocitat radial a la superfície de l'esfera, podem avaluar el camp acústic generat resolent (2.12) en coordenades esfèriques i imposant la condició que la velocitat de les partícules del flux siguin iguals a la de la superfície de l'esfera polsant,  $v_a$ , quan  $r = a$  (essent  $r$  la coordenada esfèrica radial). Seguint aquests passos s'obté la solució

$$p'(r, t) = \frac{\rho_0}{4\pi r} \partial_t Q\left(t - \frac{r}{c_0}\right). \quad (2.21)$$

Podem comprovar, per altra banda, que (2.21) també és solució de (2.20) si l'operador d'Alambertià s'expressa en coordenades esfèriques. Per tant, es pot concloure que el camp acústic generat per una esfera polsant de radi petit és el mateix que el generat per una font de flux de volum concentrada a  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_s$ . Això justifica, en part, el fet que puguem considerar els termes inhomogènics d'equacions semblants a (2.20) com a fonts de soroll.

El terme inhomogènic de (2.20), que representa una font puntual de soroll, s'anomena *monopol acústic* de força  $s(t) := (4\pi)^{-1} \rho_0 \partial_t Q(t)$ .

### 2.3.2 Resposta a l'impuls, funció de Green i integral de Kirchhoff-Helmholtz

La funció que representa el camp acústic, al domini temporal, generat per un monopol acústic de força instantània  $\delta(t - t_s)$  aplicada a l'instant  $t_s$ , s'acostuma a

<sup>3</sup> Tenint en compte que  $\rho_0$  és constant podem introduir-la dins de la derivada temporal a la dreta de (2.20) i pensar en termes de  $\rho_0 Q$  i.e de flux volúmic de massa.

anomenar *resposta a l'impuls*<sup>4</sup> i és solució de l'equació:

$$\square^2 G(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_s, t_s) = -4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s)\delta(t - t_s) \quad (2.22)$$

on la notació  $G(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_s, t_s)$  expressa el principi de reciprocitat, i.e, font i receptor es poden intercanviar sense modificar el resultat

$$G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_s, t_s) = G(\mathbf{x}_s, -t_s; \mathbf{x}, -t). \quad (2.23)$$

La resposta a l'impuls en camp lliure  $G^0(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_s, t_s)$  és

$$G^0(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_s, t_s) = \frac{1}{r}\delta(t - t_s + \frac{r}{c_0}) \quad (2.24)$$

on  $r$  és el mòdul de la distància entre  $\mathbf{x}$  i  $\mathbf{x}_s$ .

La transformada de Fourier de la resposta a l'impuls  $G^0$  és la *funció de Green* en camp lliure:

$$\widehat{G}_\omega^0(\mathbf{x} | \mathbf{x}_s) := \frac{1}{r}e^{i\omega \frac{r}{c_0}}. \quad (2.25)$$

Cal assenyalar que  $\widehat{G}_\omega^0$  també es pot obtenir com a solució de l'equació inhomogènia de Helmholtz en camp lliure

$$(\nabla^2 + k^2)\widehat{G}_\omega^0 = -4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s). \quad (2.26)$$

El coneixement de la funció de resposta a l'impuls i de la funció de Green ens permet calcular, utilitzant el principi de superposició, el camp acústic generat per una distribució arbitrària de monopols de forces  $s$ . En efecte, la pressió resultant en un punt  $\mathbf{x}$  de l'espai esdevé

$$p'(\mathbf{x}, t) = \iiint_{V_s} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_s, t_s) s(\mathbf{x}_s, t_s) dV_s dt_s = \iiint_{V_s} \frac{1}{r} s(\mathbf{x}_s, t - r/c_0) dV_s \quad (2.27)$$

on a la segona igualtat hem utilitzat  $G=G^0$  i (2.24) per tal d'obtenir el resultat en camp lliure. De forma equivalent, al domini freqüencial tindrem

$$\widehat{p}'_\omega(\mathbf{x}) = \iiint_{V_s} \widehat{G}_\omega(\mathbf{x} | \mathbf{x}_s) \widehat{s}(\mathbf{x}_s) dV_s = \iiint_{V_s} \frac{1}{r} e^{i\omega \frac{r}{c_0}} \widehat{s}(\mathbf{x}_s) dV_s \quad (2.28)$$

on a la segona igualtat també hem considerat  $\widehat{G}_\omega = \widehat{G}_\omega^0$ .

En el cas que a més a més d'una distribució de fonts acústiques tinguem contorns sòlids,  $S$ , que puguin reflectir, absorbir o fins i tot emetre so, podem utilitzar també el formalisme de la funció resposta a l'impuls i de la funció de Green

<sup>4</sup> La terminologia que aquí fem considerant la funció *resposta a l'impuls* com la solució a una excitació unitat al domini temporal i la *funció de Green* com la solució a una excitació unitat al domini freqüencial no s'acostuma a respectar en general a la literatura, i sovint es parla de la funció de Green al domini temporal i al freqüencial.

per tal d'obtenir el camp acústic total. La pressió acústica al domini freqüencial en un punt  $\mathbf{x}$  de l'espai esdevé [3,4]:

$$\begin{aligned} \widehat{p}'_{\omega}(\mathbf{x}) = & \iiint_{V_s} \widehat{G}_{\omega}(\mathbf{x} | \mathbf{x}_s) \widehat{s}(\mathbf{x}_s) dV_s + \\ & + \frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ \widehat{G}_{\omega}(\mathbf{x} | \mathbf{x}_s) \nabla \widehat{p}'(\mathbf{x}_s) - \widehat{p}'(\mathbf{x}_s) \nabla \widehat{G}_{\omega}(\mathbf{x} | \mathbf{x}_s) \right\} \cdot \mathbf{n}_s dS(\mathbf{x}_s) \end{aligned} \quad (2.29)$$

on  $\mathbf{n}_s$  representa la normal (dirigida cap a l'exterior) a la superfície  $S$  i  $\mathbf{x}_s$  és ara un punt de  $S$ . L'equació (2.29) ens diu per tant que el camp acústic total en un punt  $\mathbf{x}$  és la suma del camp directe produït per la distribució volúmica de fonts més el camp degut a les fonts superficials de  $S$ . La condició de radiació de Sommerfeld  $r(\partial_r p' - ikp') \rightarrow 0$  quan  $r \rightarrow \infty$  i  $r = |\mathbf{x}|$  evita les contribucions d'una integral de superfície a l'infinit.

Per altra banda, en el cas que no hi hagi fonts interiors a  $S$  el primer terme de la dreta de (2.29) s'anul·la, i si escollim novament  $\widehat{G}_{\omega} = \widehat{G}_{\omega}^0$ , l'equació (2.29) reb el nom de integral de Kirchoff-Helmholtz. Tant la integral de Kirchoff-Helmholtz com l'equació (2.29) tenen una gran quantitat d'aplicacions pràctiques i teòriques que tanmateix no discutirem aquí [2,3,9].

### 2.3.3 Fonts dipolars i quadrupolars

Un cas particular de distribució de monopols el constitueixen els dipols. Un dipol és un conjunt format per dos monopols de força oposada (oscil·lant en contrafase) i situats a molt curta distància l'un de l'altre.

En efecte, suposem que tenim un monopol de força  $s$  a  $\mathbf{x}_s + \frac{\mathbf{d}}{2}$  i un de força  $-s$  a  $\mathbf{x}_s - \frac{\mathbf{d}}{2}$  i prenem el límit  $d \rightarrow 0$  amb  $kd \ll 1$  i essent  $d = |\mathbf{d}|$  i  $k$  el mòdul del nombre d'ones. Aleshores, la funció de Green a  $\mathbf{x}_s \pm \frac{\mathbf{d}}{2}$  es pot aproximar mitjançant un desenvolupament de Taylor a primer ordre

$$G(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_s \pm \frac{\mathbf{d}}{2}, t_s) \approx G(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_s, t_s) \pm \frac{\mathbf{d}}{2} \cdot \nabla_s G(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_s, t_s) \quad (2.30)$$

on  $\nabla_s$  és el gradient respecte les coordenades de la font. El camp acústic en un punt de l'espai ens vindrà donat per (2.27)

$$p'(\mathbf{x}, t) = s(t) \mathbf{d} \cdot \nabla_s G(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_s, t_s) = \mathbf{D} \cdot \nabla_s G(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_s, t_s) \quad (2.31)$$

on hem aprofitat la darrera igualtat per definir el *moment dipolar*  $\mathbf{D} := s\mathbf{d}$ .

Finalment, l'equació d'ones i l'equació de Helmholtz inhomogènies que es compleixen en aquest cas són



$$\begin{aligned} \square^2 p' &= -\mathbf{D} \cdot \nabla \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) \\ (\nabla^2 + k^2) \hat{p}'_\omega &= 4\pi \hat{\mathbf{D}} \nabla \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) \end{aligned} \quad (2.32)$$

on hem tingut en compte que  $\nabla_s = -\nabla$  per una funció que només depèn de  $\mathbf{x} - \mathbf{x}_s$ .

En el cas que tinguem un conjunt de dipòls d'identíc moment dipolar, tals que la distància  $\mathbf{d}$  entre els seus monopòls constituents sigui molt inferior a la distància entre ells mateixos podem parlar d'una distribució de dipòls. Així doncs i de forma general, quan tinguem un terme inhomogèni de l'equació d'ones (2.32) de la forma  $\partial_i F_i(\mathbf{x}, t)$ , es podrà interpretar com una distribució de dipòls de força  $F_i(\mathbf{x}, t)$  per unitat de volum.

Si ara considerem un conjunt format per dos dipòls de moment dipolar oposat  $\mathbf{D}$ , i separats una distància  $\mathbf{d}$ , parlarem d'una font quadrupolar en el cas límit en que  $\mathbf{d} \rightarrow 0$  i  $kd \ll 1$ . Es pot demostrar, seguint un procés anàleg al que hem exposat pels dipòls, que el camp acústic en un punt de l'espai serà

$$\begin{aligned} p'(\mathbf{x}, t) &= (\mathbf{D} \cdot \nabla_s)(\mathbf{d} \cdot \nabla_s) G(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_s, t_s) = Q_{ij} \partial_i \partial_j G(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_s, t_s) \\ \hat{p}'_\omega(\mathbf{x}) &= (\mathbf{D} \cdot \nabla_s)(\mathbf{d} \cdot \nabla_s) \hat{G}_\omega(\mathbf{x} | \mathbf{x}_s) = \hat{Q}_{ij} \partial_i \partial_j \hat{G}_\omega(\mathbf{x} | \mathbf{x}_s) \end{aligned} \quad i, j=1 \div 3 \quad (2.33)$$

on  $\hat{Q}_{ij} := \hat{D}_i d_j$  i  $Q_{ij} := D_i d_j$ . Quan  $\mathbf{D}$  i  $\mathbf{d}$  siguin paral·lels parlarem de *quadrupòls longitudinals* i quan  $\mathbf{D}$  i  $\mathbf{d}$  siguin perpendiculars parlarem de *quadrupòls laterals*.

A l'igual que pels monopòls i pels dipòls, també és possible obtenir distribucions de quadrupòls. De fet, qualsevol terme inhomogèni de l'equació d'ones de la forma  $\partial_i \partial_j F_{ij}(\mathbf{x}, t)$  es pot interpretar com una distribució de quadrupòls de força  $F_{ij}(\mathbf{x}, t)$  per unitat de volum.

### 2.3.4 Desenvolupament multipolar

Hem vist a l'apartat 2.3.2 que el camp acústic generat per una distribució de monopòls d'igual freqüència ens ve donat per l'expressió (2.28). Si aquests monopòls es troben més o menys agrupats al voltant de l'origen de coordenades i dins d'un volum de radi  $d$ , de manera que  $kd \ll 1$ , podem desenvolupar en sèrie de Taylor la funció de Green en camp lliure  $r^{-1} e^{ikr}$  de (2.28). Aquesta convergirà ràpidament en el cas que  $r_0 \gg d$ , on  $r_0$  és la distància des del centre de coordenades (recordem que  $r$  és la distància des de la font situada a  $\mathbf{x}_s$  fins al punt receptor  $\mathbf{x}$ , i.e  $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_s|$ ). D'aquesta manera obtenim [4]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} e^{ikr} &= [e^{-\mathbf{x}_s \cdot \nabla}] \left( \frac{1}{r_0} e^{ikr_0} \right) \\ [e^{-\mathbf{x}_s \cdot \nabla}] &:= 1 - \mathbf{x}_s \cdot \nabla + \frac{1}{2!} (\mathbf{x}_s \cdot \nabla)(\mathbf{x}_s \cdot \nabla) - \dots \end{aligned} \quad (2.34)$$

i substituïnt a (2.28) arribem a

$$\begin{aligned}
\widehat{p}'_{\omega} &= \widehat{S} \frac{1}{r_0} e^{ikr_0} - \widehat{D} \cdot \nabla \left( \frac{1}{r_0} e^{ikr_0} \right) + \widehat{Q}_{ij} \partial_i \partial_j \left( \frac{1}{r_0} e^{ikr_0} \right) + \dots \\
\widehat{S} &:= \iiint_{V_s} \widehat{s}(\mathbf{x}_s) dV_s \\
\widehat{D} &:= \iiint_{V_s} \mathbf{x}_s \widehat{s}(\mathbf{x}_s) dV_s \\
\widehat{Q}_{ij} &:= \frac{1}{2} \iiint_{V_s} x_{si} x_{sj} \widehat{s}(\mathbf{x}_s) dV_s
\end{aligned} \tag{2.35}$$

Per tant hem aconseguit escriure el camp acústic resultant de la distribució de monopols com una suma d'un camp monopolar més un camp dipolar més un camp quadrupolar, etc. Al desenvolupament (2.35) se l'anomena *desenvolupament o expansió multipolar del camp acústic*.

Si es compleix clarament la condició  $kd \ll 1$  el camp acústic es podrà aproximar únicament amb el terme monopolar  $\widehat{S}$ . En el cas que aquest darrer s'anul·li per simetria, el camp acústic vindrà dominat pel terme dipolar,  $\widehat{D}$ , i el seu mòdul disminuirà en un factor d'ordre  $\sim kd$ . Si tant  $\widehat{S}$  com  $\widehat{D}$  s'anul·len, el terme quadrupolar serà el dominant i la seva amplitud disminuirà  $\sim (kd)^2$  vegades respecte al monopolar. La disminució de potència acústica (definida més endavant a l'apartat 2.5.1) serà respectivament de l'ordre de  $\sim (kd)^4$ .

## 2.4 Anàlisi de Fourier

### 2.4.1 Introducció

Als apartats anteriors hem utilitzat la transformada de Fourier d'algunes variables, com la pressió o la densitat, sense tenir massa cura de si aquestes complien els requisits necessaris per tal que aquesta existís.

En aquest apartat veurem quins són els tipus de senyals més habituals en acústica i quines estratègies podem seguir per tal de poder-los aplicar el formalisme de Fourier. També definirem algunes funcions de gran utilitat, i àmpliament utilitzades en el tractament de senyals, com les funcions d'autocorrelació, de correlació creuada, l'autoespectre o l'espectre creuat.

### 2.4.2 Funcions periòdiques

Una senyal periòdica  $f(t)$ , de període  $T$ , es pot representar com a superposició de funcions harmòniques simples mitjançant una sèrie de Fourier

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{-in\omega t} \tag{2.36}$$

on  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  és la *velocitat angular fonamental*,  $f = T^{-1}$  és la *frequència fonamental* i els termes amb  $n \neq 0$  s'anomenen *harmònics*. Cada *coeficient de Fourier*  $C_n$  es pot calcular a partir de

$$C_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{in\omega t} dt, \quad C_n \in \mathbb{C} \quad (2.37)$$

i el seu mòdul s'anomena *amplitud* de l'harmònic n-èssim mentre que el seu argument s'anomena *fase*.

La funció de *correlació creuada* (cross-correlation) de dues senyals  $f_1(t)$  i  $f_2(t)$  es defineix com

$$\overline{f_1^*(t)f_2(t+\tau)} := \frac{1}{T} \int_0^T f_1^*(t)f_2(t+\tau) dt \quad (2.38)$$

on el superíndex \* indica el complex conjugat.

Si  $f_1(t)$  i  $f_2(t)$  són periòdiques d'igual període T podem utilitzar (2.36) i obtenir

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{-in\omega t} \\ f_2(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n e^{-in\omega t} \end{aligned} \quad (2.39)$$

de manera que la correlació creuada entre ambdues esdevé

$$\overline{f_1^*(t)f_2(t+\tau)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n^* B_n e^{-in\omega\tau}. \quad (2.40)$$

Veiem per tant que  $A_n^* B_n$  és el coeficient de Fourier n-èssim de la funció de correlació creuada. Per altra banda de (2.40) és immediat veure que la funció de correlació creuada de dues senyals periòdiques és invariant sota translacions temporals, i.e.

$$\overline{f_1^*(t+t_0)f_2(t+t_0+\tau)} = \overline{f_1^*(t)f_2(t+\tau)}. \quad (2.41)$$

En el cas particular en què  $f_1(t)=f_2(t)$  definim la *funció d'autocorrelació* com

$$\overline{f_1^*(t)f_1(t+\tau)} := \frac{1}{T} \int_0^T f_1^*(t)f_1(t+\tau) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |A_n|^2 e^{-in\omega\tau} \quad (2.42)$$

on la darrera igualtat només és certa si  $f_1(t)$  és periòdica. El *valor quadràtic mitjà*  $\overline{|f_1(t)|^2}$  de  $f_1(t)$  serà per tant

$$\overline{|f_1(t)|^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |A_n|^2. \quad (2.43)$$

### 2.4.3 Funcions aperiòdiques que s'anul·len a l'infinit

Suposem ara que tenim una funció  $f(t)$  que no és periòdica però que s'anul·la de

forma prou ràpida quan  $t \rightarrow \pm \infty$ . Una condició suficient per tal que la seva transformada de Fourier existeixi és que  $f(t) \in L^2$ , on  $L^2$  és l'espai de funcions de quadrat integrable, i.e

$$L^2 := \left\{ f(t) \mid \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty \right\} \quad (2.44)$$

Aleshores  $f(t)$  es pot representar mitjançant la integral de Fourier o anti-transformada

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (2.45)$$

I la transformada de Fourier o espectre  $\hat{f}(\omega)$  de  $f(t)$  ens vindrà donada per

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt \quad (2.46)$$

L'equació (2.45) ens diu, per tant, que qualsevol funció de  $L^2$  es pot representar com una superposició de funcions harmòniques de totes les freqüències possibles  $\omega/2\pi$ .

La quantitat  $|\hat{f}(\omega)|^2$  s'anomena *densitat espectral de potència* de  $f(t)$  a la freqüència  $\omega/2\pi$ .

La funció de correlació creuada (2.38) de dues funcions  $f_1(t)$  i  $f_2(t)$  tals que

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_1(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \\ f_2(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_2(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \end{aligned} \quad (2.47)$$

és

$$\overline{f_1^*(t) f_2(t+\tau)} := 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_1^*(\omega) \hat{f}_2(\omega) e^{-i\omega\tau} d\omega \quad (2.48)$$

I ens mostra que l'*espectre creuat de potència* (cross-power spectrum)  $\hat{f}_1^*(\omega) \hat{f}_2(\omega)$  és la transformada de Fourier de la funció de correlació creuada. També podem veure fàcilment de (2.48) que aquesta darrera és invariant sota translacions temporals i que la densitat espectral de potència,  $|\hat{f}(\omega)|^2$ , és la transformada de Fourier de la funció d'autocorrelació  $\overline{f^*(t) f(t+\tau)}$ .

#### 2.4.4 Processos estocàstics

Considerem ara el cas d'un procés estocàstic caracteritzat per una funció  $f(t)$  d'una

variable contínua  $t$ , en aquest cas el temps. Per tal d'obtenir valors mitjans de  $f(t)$  podríem realitzar una seqüència de  $N$  experiments sota condicions idèntiques i obtenir  $N$  valors de  $f(t_d)$  per a un valor determinat del temps,  $t_d$ . Amb aquest *conjunt de realitzacions* de  $f(t_d)$  i repetint el procés per a qualsevol valor de  $t_d$ , podem definir un *valor mitjà de conjunt* de qualsevol funció  $F$  de  $f(t)$ , o de la pròpia  $f(t)$ , de la següent manera

$$\overline{F[f(t)]} := \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N F[f_m(t)] \quad (2.49)$$

on  $f_m$  són els diferents valors de  $f$  obtinguts a cada mesura. És a dir, el valor mitjà de conjunt és el límit de la mitjana aritmètica d'un conjunt infinit de realitzacions.

En el cas que restem el valor mitjà de  $f(t)$  de (2.49) tindrem  $\overline{f(t)} = 0$ . Podem definir aleshores paràmetres estadístics de  $f(t)$  com l'autocorrelació

$$P(t, t+\tau) \equiv \overline{f(t)f(t+\tau)} := \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N f_m(t)f_m(t+\tau) \quad (2.50)$$

o mitjanes d'ordre superior com la correlació triple, quàdruple, etc.,  
 $\overline{f(t)f(t+\tau_1)f(t+\tau_2)f(t+\tau_3)} \dots$

Direm que la funció aleatòria  $f(t)$  és *estacionària* si es compleix que

$$\overline{f(t)f(t+\tau_1)f(t+\tau_2)f(t+\tau_3)} \dots = \overline{f(t+\tau)f(t+\tau_1+\tau)f(t+\tau_2+\tau)f(t+\tau_3+\tau)} \dots \quad (2.51)$$

i.e els paràmetres estadístics es mantenen invariables sota translacions temporals. En aquest cas, i si la correlació de qualsevol ordre entre els valors de  $f(t)$  a temps diferents tendeix a zero de forma prou ràpida<sup>5</sup>, podem imaginar que el temps està dividit en diversos intervals seqüencials sense connexió estadística entre ells. Aleshores, enlloc d'haver d'obtenir un conjunt de  $N$  realitzacions repetint  $N$  vegades el mateix experiment, per tal de poder definir un valor mitjà, podem promitjar una sola realització al llarg del temps:

$$\overline{F[f(t)]} := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T F[f(t)] dt \quad (2.52)$$

Aquelles funcions tals que les seves mitjanes de conjunt (2.49) coincideixen amb les seves mitjanes temporals (2.52) s'anomenen processos *ergòdics*. D'ara en endavant suposarem que les funcions amb què treballarem compleixen el requisit d'ergodicitat i per això no hem utilitzat una notació diferent per tal de distingir els dos tipus de fer mitjanes.

Tal i com hem indicat a la introducció 2.4.1 el nostre objectiu és el d'aconseguir aplicar el formalisme de Fourier als diferents tipus de funcions que ens trobarem al treballar en acústica. Suposem ara que tenim una funció ergòdica  $f(t)$  tal que compleix

<sup>5</sup> És a dir  $\overline{f(t+\tau)f(t+\tau_1+\tau)f(t+\tau_2+\tau)f(t+\tau_3+\tau)} \dots \rightarrow 0$  quan  $\tau$  creix

$$\overline{|f(t)|^2} := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(t)|^2 dt < \infty. \quad (2.53)$$

En aquest cas la transformada de Fourier  $\lim_{T \rightarrow \infty} \hat{f}(\omega, T)$  amb

$$\hat{f}(\omega, T) := \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T f(t) e^{i\omega t} dt \quad (2.54)$$

en general no existeix a no ser que  $f(t)$  sigui periòdica o que  $f(t) \rightarrow 0$  prou ràpidament. Tanmateix, per a una parella de funcions  $f_1(t)$  i  $f_2(t)$ , l'espectre creuat de potència definit per

$$\hat{S}_{12}(\omega) := \lim_{T \rightarrow \infty} \pi \frac{\hat{f}_1^*(\omega, T) \hat{f}_2(\omega, T)}{T} \quad (2.55)$$

amb  $\hat{f}_n(\omega, T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T f_n(t) e^{i\omega t} dt; \quad n = 1, 2$

si que existeix c.f [5] i és igual a la transformada de Fourier de la correlació creuada

$$\overline{f_1^*(t) f_2(t + \tau)} := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f_1^*(t) f_2(t + \tau) dt \quad (2.56)$$

de manera que

$$\overline{f_1^*(t) f_2(t + \tau)} = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{S}_{12}(\omega) e^{-i\omega \tau} d\omega. \quad (2.57)$$

La funció d'autocorrelació satisfà la relació

$$\overline{f_1^*(t) f_1(t + \tau)} = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{S}_{11}(\omega) e^{-i\omega \tau} d\omega \quad (2.58)$$

i per  $\tau=0$  tindrem

$$\overline{|f_1(t)|^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{S}_{11}(\omega) d\omega \quad (2.59)$$

essent  $S_{11}(\omega)$  la densitat espectral de potència.

Les funcions (2.55)-(2.59) ens mostren que tot i que no sigui possible definir la transformada de Fourier de la funció ergòdica  $f(t)$ <sup>6</sup>, sí que és possible definir la seva autocorrelació i la seva correlació creuada amb una altra variable ergòdica, alhora que les seves transformades de Fourier respectives.

---

<sup>6</sup> i en general de cap funció a no ser que sigui periòdica o s'anul.li prou ràpid quan  $t \rightarrow \infty$ .

Una alternativa per tal de poder completar el procés i obtenir la transformada de Fourier de  $f(t)$  és la d'utilitzar una funció de tall. Ja que la integral (2.53) existeix per a un  $T$  finit podem introduir una funció de tall  $f(t, T)$  definida per

$$f(t, T) := \begin{cases} 0 & |t| > T \\ f(t) & |t| < T \end{cases} \quad (2.60)$$

Aleshores  $f(t, T)$  i  $\hat{f}(\omega, T)$  esdevenen parells transformats i els podem aplicar el formalisme de Fourier. Un cop finalitzat l'anàlisi podem calcular la densitat espectral de potència prenent el límit  $T \rightarrow \infty$  tal com s'indica a (2.55).

El truc d'analitzar  $f(t)$  durant un interval finit  $2T$  està relacionat amb el procés físic de mesura ja que, lògicament, a la pràctica no es pot mesurar durant intervals infinits de temps!. El fet que  $2T$  sigui finit ens comportarà limitacions en la resolució i el rang de freqüències de l'espectre de  $f(t)$ . De fet, quanta més resolució vulguem obtenir en freqüència, per tal de separar components en una banda d'amplada  $\Delta\omega/2\pi$ , més temps de mesura  $2T$  necessitarem<sup>7</sup>.

La finitud del temps d'anàlisi  $2T$  no només comporta limitacions en la resolució de l'espectre sinó que afecta la seva forma. Tanmateix, en aquest escrit no aprofundirem més en aquest aspecte del tractament i anàlisi de senyals [2, 7].

#### 2.4.5 Transformades espacials i transformades conjuntes $k-\omega$

Els conceptes que hem presentat als apartats anteriors utilitzant funcions dependents del temps es poden ampliar a espais  $N$ -dimensionals. En concret estarem interessats en les transformades respecte les variables espacials i en les transformades conjuntes respecte les variables espacio-temporals.

El parell transformada-antitransformada per una funció  $f(x)$  és el següent:

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ik \cdot x} dk \\ \hat{f}(k) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ik \cdot x} dx \end{aligned} \quad (2.61)$$

essent  $k$  el vector nombre d'ones. Fem notar que el conveni de signes que hem

<sup>7</sup> Per exemple, amb un  $2T$  típic de 80 ms tindrem una resolució de 12.5 Hz ( $1/T$ ); si volguéssim augmentar la resolució en freqüència hauríem d'augmentar el temps de mesura (160 ms  $\rightarrow$  6.25 Hz, etc.) i si volguéssim una resolució infinita en freqüència hauríem de mesurar durant un temps  $2T$  infinit. Per altra banda, la màxima freqüència que podem mesurar (*freqüència de tall de Nyquist*) depèn del *nombre de mostres (o línies)* que l'aparell de mesura pugui prendre durant el temps  $2T$ . Seguint l'exemple anterior, en el cas que per  $2T=80$  ms prenguem 1024 línies, la freqüència de Nyquist serà  $1/(80 \cdot 10^{-3}/1024/2.56)=5000$  Hz. Si mantenim  $2T=80$  ms i augmentem el nombre de línies aconseguirem mesurar freqüències superiors però amb la mateixa resolució de 12.5 Hz. Si en canvi augmentem  $2T$  mantenint constant el nombre de línies disminuirà la freqüència de Nyquist però tindrem una resolució major.

utilitzat és el contrari a l'emprat en el cas temporal.

Les funcions de correlació creuada, autocorrelació, espectre creuat i autoespectre per senyals periòdiques i aperiòdiques que pertanyen a  $L^2$  es defineixen de forma anàloga a com ho hem fet en el cas temporal tenint en compte (2.61).

En el cas de senyals estocàstiques ens trobem novament en la mateixa situació que en el cas temporal. Si els paràmetres estadístics d'una funció són invariants sota translacions espacials direm que aquesta és *homogènia* i podrem equiparar les mitjanes de conjunt amb les mitjanes espacials (ergodicitat).

La funció de correlació creuada entre dues funcions  $f_1(\mathbf{x})$  i  $f_2(\mathbf{x})$  serà

$$\overline{f_1^*(\mathbf{x})f_2(\mathbf{x}+\boldsymbol{\eta})} := \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \iiint_V f_1^*(\mathbf{x})f_2(\mathbf{x}+\boldsymbol{\eta})d\mathbf{x} \quad (2.62)$$

i es relaciona amb la densitat espectral creuada de potència

$$\hat{S}_{12}(\mathbf{k}) := \lim_{V \rightarrow \infty} (2\pi)^3 \frac{\hat{f}_1^*(\mathbf{k}, V)\hat{f}_2(\mathbf{k}, V)}{V} \quad (2.63)$$

amb  $\hat{f}_n(\mathbf{k}, V) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_V f_n(\mathbf{k})e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}d\mathbf{x}; n = 1, 2$

a través de la integral de Fourier

$$\overline{f_1^*(\mathbf{x})f_2(\mathbf{x}+\boldsymbol{\eta})} := \iiint_{-\infty}^{\infty} \hat{S}_{12}(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\eta}}d\mathbf{k} \quad (2.64)$$

Finalment podem estendre tot el formalisme anterior a funcions  $f(\mathbf{x}, t)$  que depenen alhora de l'espai i el temps. En el cas de processos homogenis i estacionaris podrem aplicar el principi d'ergodicitat i definir una densitat espectral de potència  $\hat{S}(\mathbf{k}, \omega)$  a partir de la funció d'autocorrelació espacio-temporal

$$P(\boldsymbol{\eta}, \tau) \equiv P(-\boldsymbol{\eta}, -\tau) = \overline{f^*(\mathbf{x}, t)f(\mathbf{x}+\boldsymbol{\eta}, t+\tau)} \quad (2.65)$$

en efecte

$$\hat{S}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^4} \iiint P(\boldsymbol{\eta}, \tau)e^{-i(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\eta}-\omega\tau)}d\boldsymbol{\eta}d\tau \quad (2.66)$$

i per tant

$$P(\boldsymbol{\eta}, \tau) = \iiint \hat{S}(\mathbf{k}, \omega)e^{i(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\eta}-\omega\tau)}d\mathbf{k}d\omega \quad (2.67)$$



## 2.5 Intensitat i potència acústiques

### 2.5.1 Intensitat i potència instantànies

El vector *d'intensitat acústica instantània* o flux d'energia ens ve donat per l'expressió

$$I(t) := p'(t)v(t) \quad (2.68)$$

i té unitats d'energia per unitat de superfície i per unitat de temps. La intensitat acústica es relaciona amb la densitat d'energia "e" mitjançant l'equació

$$\partial_t e = -\nabla \cdot I \quad (2.69)$$

amb

$$e = \frac{1}{2}\rho_0 v(t)^2 + \frac{1}{2}Bp'(t)^2. \quad (2.70)$$

La potència acústica instantània que travessa una determinada superfície S (oberta o tancada) ens ve donada per

$$\Pi(t) = \iint_S I \cdot n dS \quad (2.71)$$

on **n** és la normal a la superfície S.

### 2.5.2 Intensitat i potència mitjanes

La intensitat i la potència instantànies a la pràctica no tenen gaire interès i es sol treballar amb els seus valors mitjans al llarg d'un determinat interval de temps T. La *intensitat acústica mitjana* o simplement *acústica* a seques és per tant

$$\bar{I} = \frac{1}{T} \int_0^T p'(t)v(t) dt \quad (2.72)$$

En el cas d'ones planes (2.18) podem comprovar utilitzant (2.72) i (2.9) que el mòdul de la intensitat acústica es directament proporcional al quadrat de la pressió acústica

$$\bar{I} = \frac{\overline{p'^2}}{\rho_0 c_0} \quad (2.73)$$

En el cas d'una funció periòdica  $p'(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n(x)e^{-i\omega n t}$  tenim a partir de (2.73) i de (2.43)

$$\bar{I} = \frac{1}{\rho_0 c_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |P_n|^2. \quad (2.74)$$

Podem interpretar la quantitat

$$\bar{I}_n := \frac{1}{\rho_0 c_0} |P_n|^2 \quad (2.75)$$

com la intensitat acústica de l'harmònic n-èssim i per tant com l'espectre de la intensitat. A partir de (2.42) podem veure que  $\bar{I}_n$  es relaciona amb la funció d'autocorrelació de la pressió normalitzada

$$\Gamma(\tau) := \frac{\overline{p'(t)p'(t+\tau)}}{\rho_0 c_0} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{I}_n e^{-in\omega\tau} \quad (2.76)$$

En el cas de funcions aperiòdiques que pertanyen a  $L^2$  o de funcions ergòdiques, podem definir la intensitat emprant (2.73) i (2.59)

$$\bar{I} := \frac{1}{\rho_0 c_0} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{S}_{11}(\omega) d\omega = \Gamma(0) \quad (2.77)$$

on  $\hat{S}_{11}(\omega)$  és la transformada de Fourier de la funció d'autocorrelació de la pressió  $\overline{p'(t)p'(t+\tau)}$ . Per tant,

$$\bar{I}_\omega := \frac{\hat{S}_{11}(\omega)}{\rho_0 c_0} \quad (2.78)$$

es pot interpretar com el flux mitjà d'energia per unitat de freqüència i.e l'espectre de la intensitat. L'equació (2.58) estableix la relació entre la funció d'autocorrelació normalitzada de la pressió i l'espectre de la intensitat

$$\Gamma(\tau) := \frac{\overline{p'(t)p'(t+\tau)}}{\rho_0 c_0} = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{I}_\omega e^{-i\omega\tau} d\omega \quad (2.79)$$

Finalment, només ens resta definir la potència mitjana com

$$\bar{\Pi} = \iint_S \bar{I} \cdot n dS \quad (2.80)$$

### 2.5.3 Nivells de pressió, intensitat i potència

Tal i com hem comentat a la introducció 2.1, l'oïda humana és sensible al logaritme de la intensitat acústica que per (2.77) està directament relacionada amb el valor quadràtic mitjà de la pressió. És per això que en acústica s'acostuma a treballar amb els anomenats nivells de pressió, intensitat i potència que definirem a continuació.

El nivell de pressió acústica (sound pressure level) es defineix com

$$L_p \equiv SPL := 10 \log_{10} \left( \frac{p^2}{p_0^2} \right) \quad (2.81)$$

on  $p_0$  és una pressió de referència que en el cas de l'aire val  $2 \cdot 10^{-5}$  Pa<sup>8</sup>. La pressió  $p$  pot ser tant una pressió instantània com un valor mitjà i pot estar expressada tant al domini temporal com al freqüencial.

Les unitats del nivell de pressió  $L_p$  són els decibels<sup>9</sup>, dB, i el seu rang de variació per a l'oïda humana varia, en terme mitjà, entre els 0 dB del llindar auditiu i els 140 dB del llindar dolorós. Tot i que normalment se sol parlar de "x" decibels de soroll referint-se a un valor "x" de  $L_p$ , el correcte es parlar de "x" decibels de pressió acústica referits a  $p_0$ , per tal de poder fer la distinció amb decibels referits a diferents valors de  $p_0$  (p.ex  $p_0=10^{-6}$  Pa en acústica subacuàtica) o amb decibels d'altres variables com la intensitat o la potència.

El *nivell d'intensitat acústica* (sound intensity level) ve definit per l'expressió següent

$$L_I \equiv SIL := 10 \log_{10} \left( \frac{I}{I_0} \right) \quad (2.82)$$

on ara la intensitat de referència és  $I_0=10^{-12}$  W/m<sup>2</sup>. Les unitats són els decibels d'intensitat referits a  $I_0$ .

Finalment, el *nivell de potència acústica* (sound watt level) ve donat per

$$L_W \equiv SWL := 10 \log_{10} \left( \frac{\Pi}{\Pi_0} \right) \quad (2.82)$$

on la potència de referència és  $\Pi_0=10^{-12}$  W. Les unitats són en aquest cas, decibels de potencia referits a  $\Pi_0$ .

## 3 AEROACÚSTICA

### 3.1 Introducció

Tal i com hem comentat a la introducció d'aquest escrit, l'aeroacústica s'encarrega de l'estudi del soroll generat per fluxos no-estacionaris i/o turbulents i per la seva interacció amb contorns sòlids.

En contraposició a " l'acústica clàssica ", l'aeroacústica avalua el soroll generat per les forces aerodinàmiques o moviments que s'originen dins del propi flux on aquest es propaga. Així doncs, el soroll generat per plaques vibrants, altaveus, instruments, etc., és a dir per forces externes al flux, són objecte d'estudi de l'acústica clàssica, mentre que el soroll generat per les forces no estacionaries que actuen sobre les pales d'un ventilador o d'un helicòpter, el soroll produït per l'expansió d'un raig, o el soroll degut al flameig d'una bandera sota l'acció del vent

<sup>8</sup>  $p_0$  és el valor a partir del qual l'oïda humana comença a percebre la sensació de soroll a la freqüència de 1000 Hz.

<sup>9</sup> Notem que els decibels no són pròpiament unitats en el sentit físic de la paraula sinó una escala de mesura, ja que estàn definits mitjançant un quocient de pressions, intensitats o potències.

són problemes propis de l'aeroacústica.

L'aeroacústica és una disciplina relativament recent, sobretot si la comparem amb l'acústica. Els seus fonaments foren establerts per Lighthill [11] l'any 1952, en un treball innovador sobre el soroll de raigs en expansió. Lighthill, que introduí la terminologia encara vigent, de soroll aerodinàmic per referir-se a l'aeroacústica va idear el concepte d'analogia acústica. Les analogies acústiques han permès, al llarg de la segona meitat del segle XX, entendre una gran quantitat de fenòmens que romanien inexplicables i progressar notablement en el disseny d'elements silenciosos.

### 3.2 La definició d'analogia acústica

Definició: El terme "analogia acústica" es refereix al reordenament de les equacions del moviment d'un flux en forma d'equació d'ones inhomogènia (veure apartat 2.3) i de manera que en camp llunyà (i ignorant els efectes no-lineals de distorsió del paquet d'ones, "steepening") les pertorbacions de pressió es propaguen en un medi en repòs a la velocitat del so,  $c_0$ , característica d'aquest [10]. És a dir una analogia acústica té la forma

$$\square^2 h = f(\mathbf{x}, t) \quad (3.1)$$

on  $h$  en camp llunyà és equivalent a  $p' = p - p_0$  o a  $p' = p - p_0$ .  $f(\mathbf{x}, t)$  és el terme font de  $h$  i pot incloure tots els mecanismes de generació i propagació tals com el scattering per remolins turbulents, les inhomogeneïtats de temperatura, els efectes de refracció en els camps de temperatura i velocitat, etc. Les diferents eleccions de  $h$  i  $f$  donen lloc a les diverses analogies que presentarem en els següents apartats.

Per tal de clarificar la definició d'analogia acústica seguirem els passos de Lighthill [11] en el seu treball pioner sobre la generació de soroll aerodinàmic. Veurem amb detall l'anomenada "analogia de Lighthill" així com la seva solució formal en el domini temporal i freqüencial [5,9]. La resta d'analogies seran presentades de forma breu i tant sols n'esmentarem algunes característiques

### 3.3 L'analogia de Lighthill

#### 3.3.1 L'equació de Lighthill

El procés seguit per Lighthill amb l'idea d'obtenir una equació en la forma de (3.1) és el següent:

L'equació de continuïtat d'un flux ens ve donada per l'expressió

$$D_t \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \partial_t \rho + \partial_j (\rho v_j) = 0 \quad (3.2)$$

Per altra banda, sigui  $\tau_{ij}$  el tensor de tensions viscós del fluid donat per

$$\tau_{ij} = \mu(\partial_j v_i + \partial_i v_j - \frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{v} \delta_{ij}) \quad (3.3)$$

i  $\sigma_{ij}$  el tensor de tensions total del fluid donat per

$$\sigma_{ij} = p\delta_{ij} - \tau_{ij} \quad (3.4)$$

Aplicant la segona llei de Newton i tenint en compte (3.4) i (3.2) obtenim l'equació de Navier-Stokes pel moviment del fluid

$$\rho D_t v_i + \partial_i \sigma_{ij} = 0 \Leftrightarrow \partial_i(\rho v_i) + \partial_j(\rho v_i v_j + \sigma_{ij}) = 0 \quad (3.5)$$

Si a continuació fem  $\partial_i(3.2) - \partial_i(3.5)$  obtenim

$$\left. \begin{aligned} \partial_t(3.2) &= \partial_t^2 \rho + \partial_t \partial_i(\rho v_i) = 0 \\ \partial_i(3.5) &= \partial_i \partial_i(\rho v_i) + \partial_i \partial_j(\rho v_i v_j + \sigma_{ij}) = 0 \end{aligned} \right\} \partial_t \partial_i(3.2) - \partial_i(3.5) \Rightarrow \partial_t^2 \rho = \partial_i \partial_j(\rho v_i v_j + \sigma_{ij}) \quad (3.6)$$

i si restem  $c_0^2 \nabla^2 \rho$  a banda i banda de (3.6) i tenim en compte (3.4) ens queda

$$\partial_t^2 \rho - c_0^2 \nabla^2 \rho = \partial_i \partial_j(\rho v_i v_j + (p - c_0^2 \rho) \delta_{ij} - \tau_{ij}) = 0 \quad (3.7)$$

A continuació definim el tensor de components  $T_{ij}$  com

$$T_{ij} := \rho v_i v_j + (p - c_0^2 \rho) \delta_{ij} - \tau_{ij} \quad (3.8)$$

de manera que podem escriure (3.7) de la següent manera

$$\partial_t^2 \rho - c_0^2 \nabla^2 \rho = \partial_i \partial_j T_{ij} \quad (3.9)$$

o bé

$$\square^2 \rho = \partial_i \partial_j T_{ij} \quad (3.10)$$

Per tant, hem aconseguit escriure les equacions de moviment del flux en la forma (3.1) és a dir com l'equació de propagació de les ones sonores en presència d'una font de soroll.

Cal assenyalar que per arribar a l'equació (3.10) no hem fet cap aproximació i que aquesta no és sinó una forma alternativa d'escriure l'equació de Navier-Stokes (NS) fent ús de l'equació de continuïtat. Això vol dir que si admetem que NS és capaç de descriure qualsevol tipus de flux turbulent o no, l'equació (3.10) ens descriurà exactament quin és el camp acústic que aquest genera. És per això que es diu que l'analogia de Lighthill és una analogia exacta. Tanmateix, una primera aproximació que se sol fer és la de negligir el terme de viscositat i suposar que estem en el cas isentròpic. Aleshores obtenim  $T_{ij} = \rho v_i v_j$ , aproximació que s'utilitza freqüentment en els còmputos del soroll aerodinàmic generat per fluxos subsònics.

Per altra banda cal assenyalar que l'equació (3.9), o l'equivalent (3.10), també és vàlida per a les fluctuacions de densitat  $\rho' = \rho - \rho_0$  quan aquestes es propaguen en un flux subsònic ( $\square^2 \rho_0 \simeq 0$ ). Així doncs tindrem

$$\square^2(\rho - \rho_0) = \partial_i \partial_j T_{ij} \quad (3.11)$$

i comparant amb (3.1) ens queda per tant  $h = \rho' = \rho - \rho_0$  i  $f(\mathbf{x}, t) = \partial_i \partial_j T_{ij}$ .

### 3.3.2 La solució temporal en camp llunyà

La solució a l'equació de Lighthill (3.11) en camp llunyà generat per un volum finit de turbulència<sup>10</sup> estadísticament estacionària en un flux no convectiu<sup>11</sup> es pot expressar mitjançant la funció de Green tridimensional en camp lliure [5,9]. En efecte, per a les fluctuacions de densitat en un fluid sense condicions de contorn tindrem

$$(\rho - \rho_0)(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi c_0} \frac{\delta(\mathbf{x} - c_0 t)}{x} \star \partial_i \partial_j T_{ij} = \frac{1}{4\pi c_0} \partial_i \partial_j \left\{ \frac{\delta(\mathbf{x} - c_0 t)}{x} \right\} \star T_{ij} \quad (3.12)$$

on  $x = |\mathbf{x}|$  i  $\star$  representa el producte de convolució. Si ara tenim en compte que  $\partial_i x = \frac{x_i}{x}$ , que  $\partial_t A \star B = A \star \partial_t B$  i que les derivades de  $x^{-1}$  són negligibles enfront  $x^{-1}$  quan  $x \rightarrow \infty$ , podem escriure per a les variacions de densitat en camp llunyà

$$(\rho - \rho_0)_{x \rightarrow \infty}(\mathbf{x}, t) = \left\{ \frac{x_i x_j}{x^3} \frac{1}{4\pi c_0^3} \partial_t^2 \delta(\mathbf{x} - c_0 t) \right\} \star T_{ij} = \left\{ \frac{x_i x_j}{x^3} \frac{1}{4\pi c_0^3} \delta(\mathbf{x} - c_0 t) \right\} \star \partial_t^2 T_{ij} \quad (3.13)$$

que escrit explícitament i integrant en el temps esdevé

$$\begin{aligned} (\rho - \rho_0)_{x \rightarrow \infty}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{4\pi c_0^4} \frac{x_i x_j}{x^3} \int_{V(\mathbf{y})} \partial_t^2 T_{ij}(\mathbf{y}, t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}{c_0}) d^3 \mathbf{y} \\ &\simeq \frac{1}{4\pi c_0^4} \frac{x_i x_j}{x^3} \int_{V(\mathbf{y})} \partial_t^2 T_{ij}(\mathbf{y}, t + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{x c_0} - \frac{x}{c_0}) d^3 \mathbf{y} \end{aligned} \quad (3.14)$$

on al darrer pas hem utilitzat l'aproximació  $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = x - \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{x} + O(\frac{1}{x})$ ,  $d^3 \mathbf{y}$  representa l'element de volum tridimensional  $dV(\mathbf{y})$ , i  $V(\mathbf{y})$  és la regió on es troba la font de soroll (i.e el fluid turbulent).

La interpretació de l'equació (3.14) és la següent: el flux de fluid s'ha substituït per una distribució equivalent de fonts acústiques  $\partial_i \partial_j T_{ij}$  per unitat de volum, presents en una determinada regió  $V(\mathbf{y})$  immersa en un medi en repòs, on les perturbacions acústiques es propaguen a una velocitat constant,  $c_0$ . Per altra banda, i per tal que (3.14) tingui sentit hem de suposar que  $T_{ij}$  decau de forma prou

<sup>10</sup>La metodologia que veurem a continuació és aplicable a una gran varietat de fluxos no necessàriament turbulents.

<sup>11</sup>En aquest escrit no presentarem les equacions pel cas convectiu. Es pot demostrar que l'efecte de la convecció és el de multiplicar la intensitat del so en una direcció  $\theta$  per un factor  $(1 - M_c \cos \theta)^{-5}$ , essent  $M_c$  el nombre de Mach convectiu, i el de provocar un efecte Doppler a l'espectre del soroll radiat.

ràpida amb la distància de manera que la integral a  $V(\mathbf{y})$  sigui finita<sup>12</sup>. A més a més cal fer una altra aproximació: ja que la que la densitat  $\rho - \rho_0$  a (3.14) no només apareix a l'esquerra de l'equació sinó que està present a  $T_{ij}$  (veure (3.8)) hem de suposar que  $T_{ij}$  es pot obtenir en bona aproximació dels càlculs d'un flux equivalent on s'ha negligit el camp acústic. D'aquesta manera (3.14) no esdevé una equació integral i  $\rho - \rho_0$  es pot obtenir directament un cop conegudes les fonts de soroll  $T_{ij}$ .

Una mesura estadística del soroll radiat en camp llunyà ens ve donada per la intensitat  $\overline{I(\mathbf{x})}$  (veure apartat 2.5.2) que es proporcional a la fluctuació quadràtica mitjana de la densitat (2.77):

$$\overline{I(\mathbf{x})} = \Gamma(0) \frac{x}{x} = \frac{c_0^3 (\rho - \rho_0)^2}{\rho_0} \frac{x}{x} \quad (3.15)$$

on a la darrera igualtat hem utilitzat (2.7) i  $c_0 := \sqrt{B/\rho_0}$ . Per tal d'elevat (3.14) al quadrat la multiplicarem per ella mateixa utilitzant una nova variable  $\mathbf{z}$  amb origen a  $\mathbf{y}$

$$(\rho - \rho_0)(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi c_0^4} \frac{x_k x_l}{x^3} \int_{V(\mathbf{z})} \partial_t^2 T_{kl}(\mathbf{y} + \mathbf{z}, t + \frac{x \cdot \mathbf{y}}{x c_0} + \frac{x \cdot \mathbf{z}}{x c_0} - \frac{x}{c_0}) d^3 \mathbf{z} \quad (3.16)$$

de manera que el mòdul de la intensitat ens queda

$$\overline{I(\mathbf{x})} = \frac{x_i x_j x_k x_l}{16\pi^2 \rho_0 c_0^6 x^6} \int_{V(\mathbf{y})} \int_{V(\mathbf{z})} \overline{\partial_t^2 T_{ij}(\mathbf{y}, t + \frac{x \cdot \mathbf{y}}{x c_0} - \frac{x}{c_0}) \partial_t^2 T_{kl}(\mathbf{y} + \mathbf{z}, t + \frac{x \cdot \mathbf{y}}{x c_0} + \frac{x \cdot \mathbf{z}}{x c_0} - \frac{x}{c_0})} d^3 \mathbf{z} d^3 \mathbf{y} \quad (3.17)$$

Per a un procés estacionari (2.51) però no homogeni podem definir la funció de correlació creuada dels tensors  $T_{ij}$  i  $T_{kl}$  com

$$W_{ijkl}(\mathbf{x}, \eta, \tau) := \overline{T_{ij}(\mathbf{x}, t) T_{kl}(\mathbf{x} + \eta, t + \tau)}, \quad (3.18)$$

que en el nostre cas particular esdevé

$$W_{ijkl}(\mathbf{y}, \mathbf{z}, \frac{x \cdot \mathbf{z}}{x c_0}) = \overline{T_{ij}(\mathbf{y}, t + \frac{x \cdot \mathbf{y}}{x c_0} - \frac{x}{c_0}) T_{kl}(\mathbf{y} + \mathbf{z}, t + \frac{x \cdot \mathbf{y}}{x c_0} + \frac{x \cdot \mathbf{z}}{x c_0} - \frac{x}{c_0})} = \overline{T_{ij}(\mathbf{y}, t) T_{kl}(\mathbf{y} + \mathbf{z}, t + \frac{x \cdot \mathbf{z}}{x c_0})} \quad (3.19)$$

Si a més a més tenim en compte que per a un procés estacionari es compleix [5]

$$\partial_\tau^4 W_{ijkl} = \overline{\partial_t^2 T_{ij} \partial_t^2 T_{kl}} \quad (3.20)$$

podrem escriure finalment el mòdul de la intensitat com

$$\overline{I(\mathbf{x})} = \frac{x_i x_j x_k x_l}{16\pi^2 \rho_0 c_0^6 x^6} \int_{V(\mathbf{y})} \int_{V(\mathbf{z})} \partial_\tau^4 W_{ijkl}(\mathbf{y}, \mathbf{z}, \tau) \Big|_{\tau = \frac{x \cdot \mathbf{z}}{x c_0}} d^3 \mathbf{z} d^3 \mathbf{y} \quad (3.21)$$

<sup>12</sup> Aquest punt no és trivial en absolut i els passos per arribar a 3.14 requereixen alguns matissos. Per una breu discussió sobre el tema veure la referència [5]. Una anàlisi detallada de la convergència i validesa de l'aproximació de Lighthill pel mètode de la mescla de desenvolupaments asimptòtics (MAE: Matched Asymptotic Expansions) es pot trobar a [33].

L'equació (3.21) ens dona el mòdul de la intensitat en un punt del camp llunyà,  $\mathbf{x}$ , a través d'una integral sobre el volum de la regió on es troba la font de soroll, definit per la variable  $\mathbf{y}$ . Per tant podem interpretar l'integrand de (3.21) com la contribució a la intensitat d'un diferencial de volum de turbulència centrat a  $\mathbf{y}$ . Si anomenem  $i(\mathbf{x})$  a aquesta contribució podem escriure el mòdul de la intensitat com

$$I(\mathbf{x}) = \int_{V(\mathbf{y})} i(\mathbf{x}) d^3 \mathbf{y} \quad (3.22)$$

on

$$i(\mathbf{x}) = \frac{1}{16\pi^2 \rho_0 c_0^5 x^2} \int_{V(\mathbf{z})} \partial_\tau^4 W_{(x)}(\mathbf{y}, \mathbf{z}, \tau) \Big|_{\tau = \frac{xz}{c_0}} d^3 \mathbf{z} \quad (3.23)$$

i hem definit

$$W_{(x)} := \frac{x_i x_j x_k x_l}{x^4} W_{ijkl} \quad (3.24)$$

per tal de compactificar la notació.

### 3.3.3 La solució al domini freqüencial en camp llunyà

Generalment, la informació que ens és més útil a l'hora de tractar amb problemes d'acústica és el contingut espectral del soroll rebut. És per això que resulta interessant expressar els resultats de l'apartat anterior al domini freqüencial, per tal de conèixer quina és la contribució de cada un dels components espectrals al soroll total mesurat en un punt,  $\mathbf{x}$ , de l'espai.

L'equació (2.79) ens relaciona l'espectre de la intensitat amb la funció d'autocorrelació normalitzada. De fet, l'espectre de la intensitat  $\bar{I}_\omega$  és la seva transformada de Fourier

$$\bar{I}_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau = \frac{1}{\rho_0 c_0} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{p'(t)p'(t+\tau)} e^{i\omega\tau} d\tau \quad (3.25)$$

i utilitzant (2.7) i  $c_0 := \sqrt{B/\rho_0}$

$$\bar{I}_\omega = \frac{c_0^3}{\rho_0} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{(\rho - \rho_0)(\mathbf{x}, t)(\rho - \rho_0)(\mathbf{x}, t + \tau)} e^{i\omega\tau} d\tau \quad (3.26)$$

A l'apartat anterior hem calculat la intensitat a partir de la funció d'autocorrelació per a la densitat quan  $\tau=0$ . La funció d'autocorrelació de la densitat per un  $\tau \neq 0$  serà, seguint el procés de les eqs (3.16)-(3.21) amb lleugeres modificacions

$$\overline{(\rho - \rho_0)(\mathbf{x}, t)(\rho - \rho_0)(\mathbf{x}, t + \tau)} = \frac{1}{16\pi^2 c_0^8 x^2} \int_{V(\mathbf{y})} \int_{V(\mathbf{z})} \partial_\tau^4 W_{(x)}(\mathbf{y}, \mathbf{z}, \tau + \frac{xz}{c_0}) d^3 \mathbf{z} d^3 \mathbf{y} \quad (3.27)$$



Substituint (3.27) a (3.26) i fent ús de les propietats de les transformades de Fourier per a derivades i translacions arribem a

$$\bar{I}_\omega = \frac{1}{32\pi^3 \rho_0 c_0^5 \chi^2} \omega^4 \int_{V(\mathbf{y})} \int_{V(\mathbf{z})} e^{i\omega \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{z}}{c_0}} \widehat{W}_{(x)}(\mathbf{y}, \mathbf{z}, \omega) d^3\mathbf{z} d^3\mathbf{y} . \quad (3.28)$$

A continuació ens definim la transformada  $(\mathbf{k}, \omega)$  del tensor  $W_{(x)}$  (veure eq (2.66))

$$\widehat{\widehat{W}}_{(x)}(\mathbf{y}, \mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{\tau} \int_{V(\mathbf{z})} W_{(x)}(\mathbf{y}, \mathbf{z}, \tau) e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{z} - \omega\tau)} d\mathbf{z} d\tau \quad (3.29)$$

on hem utilitzat el doble circumflex per remarcar que es tracta d'una transformada espacio-temporal. Fent ús de (3.29) podem obtenir el mòdul de la intensitat en un punt  $\mathbf{x}$  degut a una determinada freqüència  $\omega$  (3.28) com

$$\bar{I}_\omega = \frac{\pi}{2\rho_0 c_0^5 \chi^2} \omega^4 \int_{V(\mathbf{y})} \widehat{\widehat{W}}_{(x)}(\mathbf{y}, -\frac{\omega\mathbf{x}}{c_0}, \omega) d^3\mathbf{y} . \quad (3.30)$$

Novament podem veure l'integrand de (3.30) com la contribució a la intensitat d'un diferencial de volum de turbulència centrat a  $\mathbf{y}$ . Si anomenem  $i(\mathbf{x}, \omega)$  a aquesta contribució podem escriure:

$$I(\mathbf{x}, \omega) = \int_{V(\mathbf{y})} i(\mathbf{x}, \omega) d^3\mathbf{y} \quad (3.31)$$

on ara

$$i(\mathbf{x}, \omega) = \frac{\pi}{2c_0^5 \rho_0 \chi^2} \omega^4 \widehat{\widehat{W}}_{(x)}(\mathbf{y}, -\frac{\mathbf{x}\omega}{c_0}, \omega) \quad (3.32)$$

Finalment la intensitat total deguda a la contribució de totes les freqüències es pot escriure com:

$$I(\mathbf{x}) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i(\mathbf{x}, \omega) d\omega = \frac{1}{4\pi c_0^5 \rho_0 \chi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^4 \widehat{\widehat{W}}_{(x)}(\mathbf{y}, -\frac{\mathbf{x}\omega}{c_0}, \omega) d\omega \quad (3.33)$$

Des del punt de vista físic és important veure la informació que ens aporta l'equació (3.32). Aquesta equació ens diu que la intensitat que rebem a  $\mathbf{x}$  d'una ona d'una determinada freqüència  $\omega$ , només pot haver estat generada per aquells elements de la font quadrupolar d'igual freqüència  $\omega$  i amb el vector del nombre d'ones, de mòdul  $\omega/c_0$ , apuntant en la direcció de  $\mathbf{x}$ . Això explica el fet que la turbulència sigui un procés extremadament ineficient com a generador de soroll: en efecte, del conjunt de remolins presents al flux, molt pocs tindran les característiques necessàries per tal de generar una determinada ona sonora en una determinada direcció de l'espai.

### 3.3.4 Anàlisi dimensional

Una primera idea de la dependència del soroll radiat en funció dels diferents paràmetres que caracteritzen un flux aperiòdic i/o turbulent ens la pot donar un anàlisi dimensional de l'equació (3.21).

Suposem que tenim un flux caracteritzat per remolins de grandària  $L$  i velocitat  $U$ . El soroll que aquests remolins generen tindrà una freqüència de l'ordre de  $U/L$  i la seva longitud d'ona serà de l'ordre de  $\lambda=0(L/M)$ , on  $M$  és el nombre de Mach ( $M=U/c_0$ ). Al quocient  $\lambda/L \sim M^{-1}$  se l'anomena "factor de compacticitat" i per a valors petits de  $M$  (turbulència subsònica) té un valor elevat. Per tant, a nombres de Mach baixos els remolins apareixen "compactes" comparats amb l'escala de la longitud de l'ona acústica i els retards temporals,  $\frac{xz}{xc_0}$ , de l'equació (3.21) són aleshores negligibles. En efecte, l'escala de temps del flux és de l'ordre de  $L/U$  mentre que els retards temporals per un valor de  $|z|$  màxim,  $L$ , són de l'ordre de  $L/c_0$ . El quocient  $(L/c_0)/(L/U)=M$  i es pot negligir si  $M$  és prou petit.

Sota les hipòtesis anteriors podem aproximar els paràmetres de l'equació (3.21) de la següent manera:

$$\begin{aligned}(T_{ij})^2 &\sim \rho_0 U^4 \\ \partial_\tau &\sim U/L \\ dz &\sim L^3\end{aligned}\tag{3.34}$$

La intensitat total en un punt  $x$  ens vindrà donada per:

$$I(x) \sim L^3 i(x) \sim \frac{1}{\rho_0 c_0^5 x^2} \left(\frac{U}{L}\right)^4 \rho_0^2 U^4 L^6 \sim \rho_0 U^3 \frac{L^2}{x^2} M^5\tag{3.35}$$

Si ara integrem la intensitat (3.35) per a una esfera de radi  $x$  obtindrem la potència acústica total radiada:

$$W_{ac} \sim x^2 I \sim \rho_0 U^3 L^2 M^5 = \frac{\rho_0}{c_0^5} U^8 L^2\tag{3.36}$$

Per tant, la potència acústica radiada varia amb l'octava potència de la velocitat (índex de velocitat de Lighthill). Per altra banda, si observem que  $\rho_0 U^3 L^2$  és la potència mecànica del flux, l'equació (3.36) ens diu que només  $M^5$  d'aquesta es converteixen en potència acústica. Així doncs, a nombres de Mach baixos la turbulència és un procés força ineficaç com a font de soroll.

## 3.4 L'analogia de Powell-Howe

L'analogia de Powell-Howe [13,14] és vàlida per a nombres de Mach baixos, nombres de Strouhal moderats i nombres de Reynolds alts. En aquest cas la font de soroll es pot considerar incompressible i es compleix que  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ .

Sigui  $\omega$  la vorticitat del fluid i  $\mathbf{v}$  el camp de velocitats. Tenint en compte la identitat vectorial

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \omega \wedge \mathbf{v} + \nabla\left(\frac{1}{2}v^2\right) \quad (3.37)$$

i prenent la divergència a banda i banda de (3.37) ens queda:

$$\partial_i \partial_j (v_i v_j) = \nabla \cdot (\omega \wedge \mathbf{v}) + \nabla^2 \left(\frac{1}{2}v^2\right) \quad (3.38)$$

El terme de l'esquerra de l'equació (3.38) és el terme font de l'equació (3.11) i (3.1) pel cas isentròpic en què  $T_{ij} = \rho v_i v_j$ . Pel que fa al segon terme de la dreta és pot demostrar que és insignificant enfront el primer quan es busca la solució acústica en camp llunyà. Així doncs, l'equació d'ones corresponent a l'analogia de Powell-Howe, i equivalent a (3.11), es pot escriure com:

$$\square^2(\rho - \rho_0) = \nabla \cdot (\omega \wedge \mathbf{v}) \quad (3.39)$$

La solució a (3.39) en camp llunyà ve donada per la següent expressió (equivalent a l'equació (3.14) que hem trobat per l'analogia de Lighthill):

$$(\rho - \rho_0)_{\mathbf{x} \rightarrow \infty}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi c_0^4} \frac{\rho_0}{x^3} \partial_t^2 \int_{V(\mathbf{y})} (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) \mathbf{x} \cdot (\omega \wedge \mathbf{v})(\mathbf{y}, t - \frac{x}{c_0}) d^3 \mathbf{y} \quad (3.40)$$

Una avantatge que presenta (3.40) respecte (3.14) és que ara la integral només s'ha de fer per a aquelles zones de l'espai en que la vorticitat és diferent de zero. Tanmateix cal anar amb compte: l'equació (3.39) ens mostra la font de soroll com una distribució de dipols (tenim una divergència enlloc d'una doble divergència) i per tant, el caràcter quadripolar que (3.11) ens diu que aquesta té s'ha de recuperar per cancel·lacions mútues de dipols. Això implica que les diferències en els retards temporals no es poden ignorar a l'hora d'avaluar (3.40), fet que té un cost computacional important.

### 3.5 L'analogia de Möhring

L'analogia de Möhring [15] s'aplica bàsicament sota les mateixes condicions que la de Powell-Howe però no presenta els seus problemes. En efecte, a la formulació de Möhring la vorticitat hi apareix com a única font de soroll (i per tant no cal integrar a les regions on aquesta sigui nul·la) i a més a més aquesta té un caràcter quadripolar. Les fluctuacions de densitat en camp llunyà i lliure venen donades per:

$$(\rho - \rho_0)_{\mathbf{x} \rightarrow \infty}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{12\pi c_0^4} \frac{\rho_0}{x^3} \partial_t^3 \int_{V(\mathbf{y})} (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) \mathbf{y} \cdot (\omega \wedge \mathbf{x})(\mathbf{y}, t - \frac{x}{c_0}) d^3 \mathbf{y} \quad (3.41)$$

Cal assenyalar que l'analogia de Möhring es basa en l'existència d'una funció vectorial de Green  $\mathbf{G}(\mathbf{x}, t)$ , tal que  $\nabla G = \nabla \wedge \mathbf{G}$ . De fet  $\mathbf{G}$  només pot existir si  $\nabla^2 G = 0$  i això en general no és complex, tot i que per a nombres de Mach baixos és

una aproximació acceptable [9, 15].

Computacions aeroacústiques basades en les analogies de Powell-Howe i Möhring han estat realitzades per alguns autors [16,17,18,19] per tal de resoldre problemes de caire més aviat acadèmic en que s'analitzen els camps acústics generats per la interacció de vòrtexs anulars en diverses situacions.

### 3.6 L'analogia de Ffowcs Williams - Hawkings (FW-H). Interacció amb superfícies sòlides.

L'equació (3.14) de l'apartat 3.2 ens ha permès avaluar les fluctuacions de densitat mitjançant la convolució de la font de soroll amb la funció de Green en camp lliure. Ara bé, si volguéssim resoldre el problema de calcular el soroll generat per un fluid interaccionant amb una superfície sòlida, la darrera no seria vàlida i hauríem d'obtenir la funció de Green de la geometria del nou problema per tal de seguir el mateix plantejament de 3.2.

Trobar funcions de Green analítiques per a geometries simples és possible i també calcular-les numèricament en alguns casos. Tanmateix això no sempre és fàcil, i un procediment alternatiu per evitar-nos aquest pas previ el constitueix l'equació FW-H [5,9,20,21]. L'equació FW-H ens permet seguir emprant la funció de Green en camp lliure a canvi de modificar el terme de les fonts de soroll.

Suposem que tenim una superfície S definida per una funció f tal que

$$\begin{aligned} f(x, t) &= 0 \quad \forall x \in S \\ f(x, t) &> 0 \quad \forall x \text{ del fluid} \\ f(x, t) &< 0 \quad \forall x \text{ interior a S} \end{aligned} \quad (3.42)$$

i.e f és positiva a tot l'espai ocupat pel fluid, zero a la superfície S i negativa a l'interior de S. Si la superfície S es mou amb velocitat V i tenim en compte que ve definida per f(x,t)=0 sempre es complirà que:

$$\partial_t f(x, t) + V_i \partial_i f(x, t) = 0 \quad (3.43)$$

Per altra banda, la funció de Heaviside H(f) pren per definició el valor unitat a tot el fluid i esdevé zero al volum englobat per la superfície S. El producte  $(\rho - \rho_0)H(f)$  està definit a tot l'espai i ens dóna per tant les fluctuacions de densitat a la zona ocupada pel fluid mentre que és nul a la resta de regions (i.e a l'interior de S).

Si a continuació multipliquem l'equació de continuïtat (3.2) per H(f) i entrem H(f) a l'interior del operadors diferencials obtenim

$$\partial_t [(\rho - \rho_0)H(f)] + \partial_i [\rho u_i H(f)] = \rho_0 V_i \partial_i H(f) + \rho (u_i - V_i) \partial_i H(f) \quad (3.44)$$

Si fem el mateix amb l'equació NS (3.5) obtenim

$$\partial_t[\rho u_i H(f)] + \partial_i[(\rho \delta_{ij} + \rho u_i u_j) H(f)] = [\rho \delta_{ij} + \rho u_i (u_j - V_j)] \partial_j H(f) \quad (3.45)$$

A partir de (3.44) i (3.45) i seguint els mateixos passos que hem fet a l'apartat 3.2 per tal d'obtenir l'equació de Lighthill (3.8)-(3.11) arribem a

$$\square^2[(\rho - \rho_0) H(f)] = \partial_i \partial_j [T_{ij} H(f)] + \partial_i [F_i \delta(f)] + \partial_t [Q \delta(f)] \quad (3.46)$$

amb

$$\begin{aligned} T_{ij} &= \rho u_i u_j + [\rho - c_0^2(\rho - \rho_0)] \delta_{ij} \\ F_i &= -[\rho \delta_{ij} + \rho u_i (u_j - V_j)] \partial_j f \\ Q &= [\rho_0 V_i + \rho (u_i - V_i)] \partial_i f \end{aligned} \quad (3.47)$$

En el cas en que no hi hagi cap superfície present es complirà que  $H(f)=1$  i  $\delta(f)=0$  a qualsevol punt de forma que (3.46) passa a ser l'equació de Lighthill (3.11). Com podem veure, la diferència entre (3.46) i (3.11) és l'aparició de noves fonts de soroll a part de les quadrupolars  $\partial_i \partial_j T_{ij}$ . En efecte, el segon i tercer terme de la dreta de l'equació (3.46) representen respectivament concentracions de dipols i monopols a la superfície S.

A partir de (3.46) ja podem utilitzar la funció de Green en camp lliure per tal de trobar les fluctuacions de densitat en camp llunyà tal i com hem fet a (3.12)-(3.14). En aquest cas obtenim:

$$\begin{aligned} (\rho - \rho_0)(\mathbf{x}, t) \underset{x \rightarrow \infty}{=} & \frac{x_i x_j}{x^3} \frac{1}{4\pi c_0^3} \delta(x - c_0 t) \star \partial_t^2 [T_{ij} H(f)] - \frac{x_i}{x^2} \frac{1}{4\pi c_0^2} \delta(x - c_0 t) \star \partial_t [F_i \delta(f)] + \\ & + \frac{1}{x} \frac{1}{4\pi c_0} \delta(x - c_0 t) \star \partial_t [Q \delta(f)] \end{aligned} \quad (3.48)$$

L'equivalent a l'equació (3.14) en aquest cas és [9]:

$$\begin{aligned} (\rho - \rho_0)(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{4\pi c_0^4} \frac{x_i x_j}{x^3} \partial_t^2 \int_{V_f(\mathbf{y})} T_{ij}(\mathbf{y}, t - \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}{c_0}) d^3 \mathbf{y} + \\ & + \frac{1}{4\pi c_0^3} \frac{x_i}{x^2} \partial_t \int_S \left[ \frac{l_i \rho + l_j \rho u_i (u_j - V_j)}{|1 - \mathbf{x} \cdot \mathbf{M}|} \right] (\mathbf{y}, t - \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}{c_0}) d^3 \mathbf{y} + \\ & + \frac{1}{4\pi c_0^2} \frac{1}{x} \partial_t \int_S \left[ \frac{l_i \rho V_i + \rho (u_i - V_i)}{|1 - \mathbf{x} \cdot \mathbf{M}|} \right] (\mathbf{y}, t - \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}{c_0}) d^3 \mathbf{y} \end{aligned} \quad (3.49)$$

on  $\mathbf{M} := \frac{\mathbf{v}}{c_0}$  és el vector nombre de Mach,  $V_f(\mathbf{y})$  és el volum ocupat pel fluid (on  $f > 0$ ), S la superfície que l'engloba i  $\mathbf{l}$  la normal a aquesta. L'equació (3.49) es coneix amb el nom d'equació de Ffwoocs Williams-Hawkings i pel cas particular d'una superfície de control estacionaria ( $\mathbf{V}=0$ ) reb el nom d'equació de Curle. L'equació (3.49) és de fet una generalització de l'equació de Kirchoff-Helmholtz (2.29) de l'acústica lineal i s'ha utilitzat en diverses versions simplificades [22] per tal de calcular el soroll aerodinàmic generat per helicòpters, rotors, hèlixs, ventiladors, etc. (veure p.ex [23,24]).

### 3.7 Altres analogies

A més a més de les analogies que hem presentat als apartats anteriors, i que hem considerat les més adients de cara a resoldre problemes d'enginyeria esmentats a la introducció, n'existeixen d'altres alternatives, la formulació de les quals resumirem a continuació a títol informatiu [25].

#### 3.7.1 Analogia de Legendre

Equació:

$$\left(D_t \frac{1}{c^2} D_t - \nabla^2\right) \Theta = -D_t \left(\frac{1}{c^2} \nabla \mathbf{v} : \mathbf{v} \nabla - \frac{1}{c^2} \nabla \ln h D_t \mathbf{v}\right) - \frac{1}{c^2} \nabla^2 \mathbf{v} D_t \mathbf{v} - 2 \nabla \mathbf{v} : \nabla \left(\frac{1}{c^2} D_t \mathbf{v}\right) \quad (3.50)$$

essent  $h$  l'entalpia i  $\Theta = \nabla \cdot \mathbf{v}$  la dilatació.

#### 3.7.2 Analogia de Phillips

Equació:

$$\left(D_t^2 - \nabla \cdot c^2 \nabla\right) \ln p = \gamma \nabla \mathbf{v} : \mathbf{v} \nabla \quad (3.51)$$

on  $\gamma$  és el quocient de calors específics.

#### 3.7.3 Analogia de Lilley

Equació:

$$D_t \left(D_t^2 - \nabla \cdot c^2 \nabla\right) \ln p^\gamma + 2 \nabla \mathbf{v} : \nabla \left(c^2 \nabla \ln p^\gamma\right) = -\gamma \nabla \cdot \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{v} : \mathbf{v} \nabla \quad (3.52)$$

#### 3.7.4 Analogia de Ribner

Equació:

$$\begin{aligned} \square^2 p &= \frac{1}{c^2} \partial_t^2 p^{(0)} \\ \nabla^2 p^{(0)} &= \partial_i \partial_j \rho_0 u_i u_j \end{aligned} \quad (3.53)$$

#### 3.7.5 Analogia de Howe

Equació:

$$\left(\partial_t \frac{1}{c^2} D_t - \nabla^2\right) h_s = \partial_t \left(\frac{1}{c^2} D_t \frac{v^2}{2}\right) - \nabla \cdot (\mathbf{v} \wedge \boldsymbol{\omega}) \quad (3.54)$$

on  $h_s = h + v^2/2$  és l'entalpia d'estagnació.

## 4. AEROACÚSTICA COMPUTACIONAL DE FLUIXOS SUBSÒNICS

### 4.1 Introducció

Tot i que en un principi els avenços i desenvolupaments importants en aeroacústica i aeroacústica computacional es van realitzar en el camp de l'aeronàutica, on el rang típic de velocitats és pròxim o superior a la velocitat del so, l'aeroacústica computacional de fluxos subsònics ha rebut un fort impuls els darrers anys. Aquest fet es deu bàsicament als següents motius:

En primer lloc cal assenyalar que a no ser que la velocitat mitja del flux analitzat sigui unes dues vegades superior a la velocitat ambient del so, la radiació de soroll es deu bàsicament a la lenta evolució temporal dels remolins convectats. En aquest cas, fenòmens com la pròpia convecció de remolins, la refracció o l'apantallament es poden avaluar mitjançant correccions multiplicatives de la radiació de remolins subsònics.

Per altra banda cal destacar l'aparició de problemes de soroll característics del propi rang subsònic com poden ser el soroll generat per ventiladors, per apèndixs d'automòbils o per trens d'alta velocitat. En molts casos aquests fenòmens han adquirit importància degut als avenços en altres camps de l'acústica. Així doncs, el soroll aerodinàmic generat per les pales d'un ventilador pot resultar molest "gràcies" a que s'ha aconseguit disminuir notablement el soroll generat pel motor que les mou. El mateix passa amb el retrovisor o el sistema de ventilació d'un automòbil que no resultaven molestos fins que s'han aconseguit reduccions considerables del soroll generat pel motor.

Finalment, l'aeroacústica computacional o CAA (CAA: *Computational AeroAcoustics*) resulta interessant des d'un punt de vista científic ja que presenta nombrosos problemes numèrics que no solen aparèixer en altres camps de computació en enginyeria. Veurem aquest punt al pròxim apartat.

### 4.2 Dificultats que presenta l'aeroacústica computacional de fluxos subsònics

L'aeroacústica computacional s'ha d'enfrontar amb una sèrie de dificultats que no són habituals en camps com la mecànica, el càlcul d'estructures o l'aerodinàmica, on s'han desenvolupat una gran quantitat de tècniques computacionals avançades. Aquestes dificultats es deuen al següent [10]:

- El gran marge d'audibilitat de l'oïda humana que varia aproximadament entre els 0 dB i els 140 dB, i correspon per tant, a unes variacions d'intensitat de l'ordre de  $10^{14}$ .
- L'elevat rang de freqüències que pot percebre l'oïda i que varia entre els 20 Hz i els 20.000 Hz i.e unes 10 octaves, mentre que per exemple la vista

només en comprèn una. A més a més, l'oïda és especialment sensible entre els 1000 Hz i els 4000 Hz, freqüències que solen estar quatre o cinc octaves per damunt dels pics de soroll més intensos generats per algunes fonts aerodinàmiques.

- L'enorme disparitat d'escala entre l'energia del camp aerodinàmic i la del camp acústic que aquest genera. De fet aquest darrer sol ser de l'ordre de  $M^4$  ( $M$  = nombre de Mach) vegades el primer en el cas de fluxos subsònics. La debilitat del camp acústic fa que sovint el "soroll" propi de l'algorisme numèric (errors de difusió i dispersió) sigui superior al del propi camp que volem calcular.

El següent exemple ens pot donar una visió clara d'aquesta debilitat: Un Boeing 767 genera la mateixa intensitat sonora en enlairar-se que la que farien tots els habitants d'una gran ciutat cridant alhora de forma coherent. Tanmateix, el conjunt de tota l'energia sonora que aquest radia durant els aproximadament 45 segons que dura l'enlairament és totalment insuficient per fregir un sol ou ferrat !

- L'enorme disparitat entre l'escala dels remolins del flux i la longitud d'ona del so que generen (veure punt 3.3.4).
- L'anàlisi numèric ha de conservar el caràcter multipolar del camp acústic: el fet de substituir una font quadripolar per una de dipolar (p.ex fer servir l'analogia acústica de Howe enlloc de la de Lighthill) pot conduir a greus errors en l'avaluació de la directivitat del camp acústic, a no ser que les integrals es calculin amb extrema precaució, tenint en compte totes les variacions en els retards temporals.
- Un altre problema, que no tractarem aquí de forma específica, és el de la propagació del so a grans distàncies (p. ex  $\sim 300$  m) on poden tenir lloc importants efectes no-lineals com el steepening [26].

### 4.3 Alternatives de computació del soroll aerodinàmic

Per tal de computar el soroll aerodinàmic generat per fluxos no periòdics i/o turbulents i la seva interacció amb superfícies sòlides s'han seguit diferents camins [10, 23, 26, 27, 28] que resumim a continuació:

- Simulació Directa (DNS: Direct Numerical Simulation): La simulació directa, tal i com el seu propi nom indica, consisteix a resoldre directament les equacions de NS (fent servir p.ex. mètodes espectrals, diferències finites o elements finits) per a un fluid compressible de manera que el camp acústic apareix de forma natural en la solució obtinguda. Naturalment, el tipus de problemes resolubles mitjançant aquesta tècnica és certament limitat degut als punts esmentats a l'apartat anterior i tant sols s'obtenen resultats acceptables per nombres de Reynolds i freqüències baixes [19, 29, 30]. Tot i que l'opció DNS és útil per tal de comprovar la validesa d'algunes analogies



acústiques, no és aplicable als problemes típics d'enginyeria esmentats a la introducció.

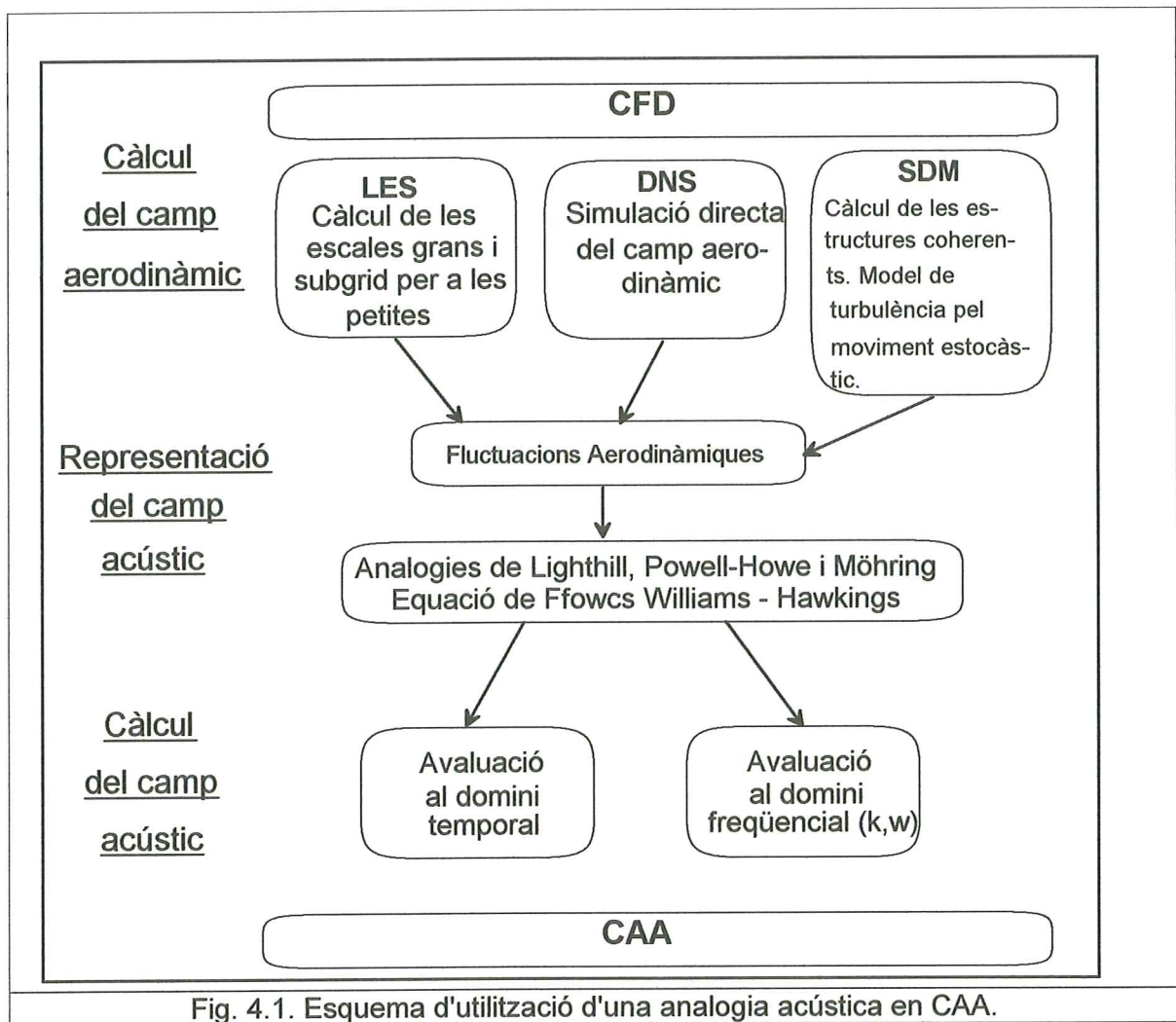
Finalment, cal dir que el nom de DNS aplicat a l'aeroacústica computacional condueix a algunes confusions ja que de vegades es fa referència a ell quan en una analogia s'obté el terme font,  $f(x,t)$  de (3.1), mitjançant una computació directa per CFD (*CFD: Computational Fluid Dynamics*), independentment de com es calculi posteriorment el camp acústic.

- Analogies acústiques: La utilització d'analogies acústiques juntament amb la funció de Green apropiada a la geometria del problema que intentem resoldre és sens dubte un dels mètodes més emprats per tal de computar soroll aerodinàmic. La idea és la de calcular el terme font de (3.1) mitjançant CFD i a continuació resoldre l'equació inhomogènia resultant al domini temporal o al freqüencial. En el pròxim apartat presentarem amb més detall aquesta opció.
- Integral de Kirchoff-Helmholtz: Una altra de les opcions per tal de computar soroll aerodinàmic és la d'utilitzar l'integral de Kirchoff-Helmholtz (2.29) (veure p.ex. [3, 4, 31] per a superfícies en moviment i [26,29,32] per alguns resultats de simulacions aeroacústiques). Tot i que aquest enfocament no està exempt de nombroses dificultats (per començar la d'escollir la posició de la superfície virtual  $S$ ) el mètode ha estat emprat per al càlcul de soroll generat per capes límit i raigs amb bons resultats.
- Mescla asimptòtica quan  $M \rightarrow 0$  : La idea de la mescla asimptòtica és la d'enllaçar la solució interna d'un nucli rotacional de longitud d'escala pròpia  $l$ , (representant un remolí de tamany  $l$ ) amb un camp acústic extern de longitud d'escala pròpia  $lM^{-1}$ . La solució interna es podria calcular per CFD i després realitzar l'enllaç. Una discussió detallada sobre les avantatges i els problemes d'aquest enfocament es poden trobar a [33].

#### 4.4 Analogies acústiques en CAA

Tal i com hem comentat al llarg d'aquest escrit, l'opció més raonable, al nostre entendre, per tal de realitzar còmputos de CAA de fluxos subsònics aplicats als problemes d'enginyeria que ens interessin és la d'emprar les analogies acústiques. En el cas que no hi hagi presència de superfícies sòlides, les analogies de Lighthill (3.14), Powell-Howe (3.36) i Möhring (3.40) semblen a priori les més adients. En cas contrari, la utilització de l'equació FW-H (3.46)-(3.47) podria resultar l'opció adequada tenint en compte que els termes monopolars i dipolars de (2.35) solen dominar el camp acústic.

El procés computacional que l'ús d'una analogia acústica comporta es pot veure esquematitzat a la Fig 4.1.



Tal com podem veure a la Fig. 1 el procés consta de tres fases: Una primera en que es realitza una computació CFD del camp aerodinàmic fent servir la tècnica més adient al problema amb què ens trobem. En el cas de fluxos aperiòdics i/o turbulents es pot utilitzar tant una simulació directa DNS, els problemes de la qual ja hem comentat anteriorment, com una simulació semideterminista, SDM (*SDM: Semi-Deterministic Modelling*), en que es computen les estructures coherents del fluid i s'utilitza un model de turbulència pel moviment estocàstic de les escales menors, corresponents als remolins més petits de la cascada de Kolmogorov. També es poden utilitzar els diferents models  $k-\epsilon$  de clausura de les equacions o una simulació LES (*LES: Large Eddy Simulation*) en que es computen les escales més grans del fluid i s'utilitza un submodel per tal d'avaluar la influència de les petites. Aquesta darrera opció és certament esperançadora [27] ja que en principi ens permet ajustar el màxim nombre d'ona computable i saber per tant el límit a partir del qual els resultats obtinguts deixen de ser realistes. A més a més, amb un mallat prou fi seria possible capturar part de l'estructura interna dels remolins i calcular part de l'espectre d'alta freqüència radiat. La caracterització del soroll radiat per les escales no resoltes del moviment ha estat objecte de diversos estudis

[34, 35].

En una segona fase es fan servir els càlculs de CFD per tal d'obtenir les fluctuacions aerodinàmiques que constituïran el terme font de l'analogia acústica (3.1) que haguem escollit pel problema particular amb què estiguem tractant.

A la tercera i última fase haurem de resoldre l'equació d'ones inhomogènia (3.1). Això ho podem fer tant en el domini temporal com en el freqüencial, en el qual l'equació d'ones esdevé la coneguda equació de Helmholtz. L'elecció d'una o altra opció pot ser determinant a l'hora d'obtenir resultats acceptables. En efecte, tot i que les equacions (3.12), (3.14) i la seva transformada al domini freqüencial condueixen teòricament al mateix resultat (un cop feta la transformada de Fourier de les solucions de (3.12) i (3.14)), els valors obtinguts mitjançant els diferents algorismes numèrics poden discrepar notablement. Un exemple el podem trobar a [27]. En aquest article s'utilitza en primer lloc la formulació (3.12), amb la doble divergència del tensor de Reynolds instantani (aproximació isentròpica) com a terme font, per tal de calcular el soroll radiat per un raig pla en expansió, prèviament simulat amb SDM. A continuació s'utilitzen les formulacions basades en (3.14) i la seva transformada per resoldre el mateix problema. Tot i que aquestes darreres donen resultats força semblants, la formulació basada en (3.12) arriba a donar resultats que superen en més de 10 dB les anteriors.

## 5. CONCLUSIONS

En aquest escrit hem presentat una introducció a l'aeroacústica seguint el procediment de Lighthill, que fou el primer en establir el concepte d'analogia acústica. Les analogies acústiques han permès entendre una gran quantitat de fenòmens de generació de soroll aerodinàmic que romanien inexplicables abans de la seva formulació.

Amb l'objectiu d'escollir una metodologia útil per tal de poder realitzar simulacions numèriques del soroll generat per fluxos subsònics no periòdics i/o turbulents, i per la seva interacció amb contorns sòlids, hem presentat amb cert detall les analogies que a priori ens han semblat més adequades a tal efecte. Aquestes són les analogies de Lighthill, Powell-Howe, Möhring i l'equació de Ffowcs Williams - Hawkings.

A continuació hem vist, de forma bastant genèrica, quines són algunes de les dificultats amb què hom es pot trobar en el camp de l'aeroacústica computacional i quins són els enfocaments més importants que s'han seguit fins a l'actualitat en CAA.

Finalment, i de cara a poder fer simulacions del soroll generat pels apèndixs de trens d'alta velocitat, pels apèndixs d'automòbils o per ventiladors hem vist que una de les opcions més raonables fóra la de realitzar una simulació LES del camp aerodinàmic, i així obtenir els termes font d'una analogia acústica, possiblement la de Lighthill o la de Ffowcs Williams-Hawkings. A continuació caldria resoldre

aquestes darreres equacions al domini temporal o al freqüencial, fet que suposaria haver de resoldre una equació d'ones inhomogènia en el primer cas i una equació inhomogènia de Helmholtz en el segon.

## REFERÈNCIES

- [1] "Noise and Vibration Control Engineering: Principles and Applications". (ed. Beranek, L.L. & Vér, I.L.). John Wiley & Sons, Inc. 1992.
- [2] Bendat, J.S & Piersol, A.G. "Engineering applications of correlation and spectral analysis". John Wiley & Sons, Inc. 1980.
- [3] Morse, P.M. & Ingard, K.U. "Theoretical Acoustics". Princeton University Press 1968.
- [4] Pierce, A.D. "Acoustics: An introduction to its physical principles and applications". Mc. Graw-Hill 1981.
- [5] Goldstein, M.E. "Aeroacoustics". Mc Graw-Hill, Inc. 1976.
- [6] Williams, E.G. "Fourier Acoustics: Sound Radiation and Nearfield Acoustical Holography". Academic Press 1999.
- [7] Max, J. "Methodes et techniques de traitement du signal et applications aux mesures physiques". Masson et C<sup>ie</sup>. 1972.
- [8] Nelson, P.A. & Elliot, S.J. "Active Control of Sound". Academic Press. 1992.
- [9] Crighton, D.G., Dowling, A.P., Ffowcs Williams, J.E., Heckl, M. & Leppington, F.G. *Modern methods in analytical acoustics*. Springer-Verlag 1992.
- [10] Crighton, D.G. "Computational aeroacoustics for low Mach number flows". A *Computational Aeroacoustics* (ed. J.C. Hardin & M.Y. Hussaini) 1993. Pàgs. 50-68.
- [11] Lighthill, M.J. 1952, Proc. R. Soc. Lond. A **211**, pàgs. 564-587 "On sound generated aerodynamically. I. General Theory."
- [12] Landahl, M.T. & Mollo-Christensen, E. "Turbulence and random processes in fluid mechanics". Cambridge University Press 1986.
- [13] Powell, A. 1964. "Theory of vortex sound". J. Acoust. Soc. Am. **36**. pàgs. 177-195.
- [14] Howe, M.S. 1975. "Contributions to the theory of aerodynamic sound, with application to excess jet noise and the theory of the flute". J. Fluid Mech **71**. pàgs 625-673.
- [15] Möhring, W.F. 1978. "On vortex sound at low Mach number". J. Fluid Mech. **85**. pàgs 685-691.
- [16] Kambe, T., Minota, T. & Ikushima, Y. 1985. "Acoustic wave emitted by a vortex ring passing near the edge of a half plane". J. Fluid Mech. **155**. pàgs 77-103.
- [17] Kambe, T. 1986. "Acoustic emissions by vortex motions" J. Fluid Mech. **173**. Pàgs 643-666.
- [18] Fedorchenko, A.T. 1986. "On vortex outflow through the permeable boundary of the computational domain of non-stationary subsonic flow". Zh. Vychisl. Mat i Mat. Fiz. (USSR Computational Maths. Math. Phys). **26**(1). pàgs 114-129.
- [19] Brian E. Mitchell, Sanjiva K. Lele & Parviz Moin. 1995 "Direct computation of the sound from compressible co-rotating vortex pair". J. Fluid Mech. **285** pàgs 181-202.
- [20] Ffowcs Williams, J.E. and Hawkings, D.L. 1969. "Sound generated by turbulence and surfaces in arbitrary motion". Phil. Trans. Roy. Soc. A **264**. pàgs. 321-342.
- [21] Ffowcs Williams, J.E. 1969. "Hydrodynamic Noise". Ann. Rev. Fluid Mech. **1**. pàgs 197-222.

- [22] Goldstein, M.E. 1974. "Unified approach to aerodynamic sound generation in the presence of solid boundaries". *J. Acoust. Soc. Am.* **56**. pàgs. 497-509.
- [23] Farassat, F. "The acoustic analogy as a tool of computational aeroacoustics". *A Computational Aeroacoustics* (ed. J.C. Hardin & M.Y. Hussaini) 1993. Pàgs. 133-151.
- [24] Guo, Y.P. 2000. "Application of the Ffowcs Williams / Hawkings equation to two-dimensional problems". *J. Fluid Mech.* **403**. pàgs 201-221.
- [25] Lilley, G.M. "On the noise radiated from a turbulence high speed jet". *A Computational Aeroacoustics* (ed. J.C. Hardin & M.Y. Hussaini) 1993. Pàgs. 85-115.
- [26] Wells, V.L. & Renaut, R.A. 1997. "Computing aerodinamically generated noise". *Ann. Rev. Fluid Mech.* **29**. pàgs 161-169.
- [27] Bastin, F., Lafon, P. & Candel, S. 1997. "Computation of jet mixing noise due to coherent structures: the plane jet case". *J. Fluid Mech.* **335**. pàgs 261-304.
- [28] Zorumski, W.E. "Classical theoretical approaches to computational aeroacoustics". *A Computational Aeroacoustics* (ed. J.C. Hardin & M.Y. Hussaini) 1993. Pàgs. 41-49.
- [29] Brian E. Mitchell, Sanjiva K. Lele & Parviz Moin. 1999 "Direct computation of the sound generated by vortex pairing in an axisymmetric jet". *J. Fluid Mech.* **383** pàgs 113-142.
- [30] "Computational Aeroacoustics". Ed. J.C. Hardin & M.Y. Hussaini. 1993. Cap. V: Direct Simulation.
- [31] Farassat, F. & Meyers, M.K. 1988, "Extension of Kirchoff's formula to radiation from moving surfaces". *J. Sound Vib.* **123** pàgs. 451-460.
- [32] Gennaretti, M., Luceri, L. & Morino, L. 1997, "A unified integral methodology for aerodynamics and aeroacoustics of rotors". *J. Sound Vib.* **200** pàgs. 467-489.
- [33] Crow, S.C. 1970. "Aerodynamic sound emission as a singular perturbation problem". *Stud. Appl. Math.* **49** pàgs. 21-44.
- [34] Rubinstein, R & Zhou, Y. October 1999. "Characterization of sound radiation by unresolved scales of motion in computational aeroacoustics". ICASE Report N°99-39. NASA Langley Research Center.
- [35] Bailly, C. & Juvé, D. 1999. "A stochastic approach to compute subsonic noise using linearized Euler equations". AIAA Paper **99** pàg 1872.