

FRANJA FINITA DE DIRECTRIZ CILINDRICA CIRCULAR

NOEMI A. SCHCLAR

*Instituto de Mecánica Aplicada y Estructuras.
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura.
Universidad Nacional de Rosario
Rosario - Argentina*

RESUMEN

En este artículo se presenta la formulación de una banda finita destinada al análisis de cáscaras cilíndricas simplemente apoyadas en sus extremos basada en funciones de interpolación que son solución de ecuaciones aproximadas de cáscaras. Se presentan algunos ejemplos que muestran el buen comportamiento del elemento para el análisis estático de cáscaras.

SUMMARY

In this paper a finite strip formulation used for the analysis of simply supported cylindrical shells is presented. It is based on interpolation functions which are solution of approximated equations of shells. Examples of the good performance of the element for static analysis of shells are presented.

INTRODUCCION

Las cáscaras cilíndricas han sido comunmente idealizadas o bien mediante elementos finitos estandar o, más eficientemente en el caso de extremos simplemente apoyados, mediante elementos semianalíticos.

Dentro de este último contexto y para el análisis estático de cáscaras cilíndricas, nos encontramos en primer lugar con el trabajo que Scordelis¹ presenta en 1964 destinado a resolver sistemas de cáscaras múltiples. En este trabajo, basado en el método de la rigidez en forma matricial, la matriz de rigidez de cada cáscara es determinada a partir de las soluciones que Gibson² propone para la teoría de cáscaras de Donnell. Durante la década siguiente, Cheung³ presenta la banda finita plana cuya formulación está basada en el método de los elementos finitos en desplazamientos, y, más recientemente, Giró⁴ presenta un método semianalítico basado en un procedimiento de separación de variables e integración numérica de las ecuaciones de cáscaras cilíndricas.

El objetivo de este trabajo es presentar una formulación de bandas finitas basada en la teoría de cáscaras de Koiter-Sanders que utilice como campo de desplazamiento aproximado las soluciones propuestas por Gibson y en donde la matriz de rigidez y

Recibido: Marzo 1989

el vector de cargas son obtenidos a partir del principio de los trabajos virtuales. De este modo se logra un elemento más confiable que el de Scordelis, que requiere menos elementos que las bandas planas y evita la integración numérica del elemento de Giró.

DESARROLLO DEL ELEMENTO

Funciones de desplazamiento

Consideremos una franja genérica de directriz cilíndrica circular a la que supondremos simplemente apoyada en $x = 0$ y $x = L$ (ver Figura 1). En cada línea nodal se definirán desplazamientos en las direcciones x , y , z y un giro alrededor del eje x , resultando cuatro grados de libertad por línea nodal y un total de ocho grados para la franja.

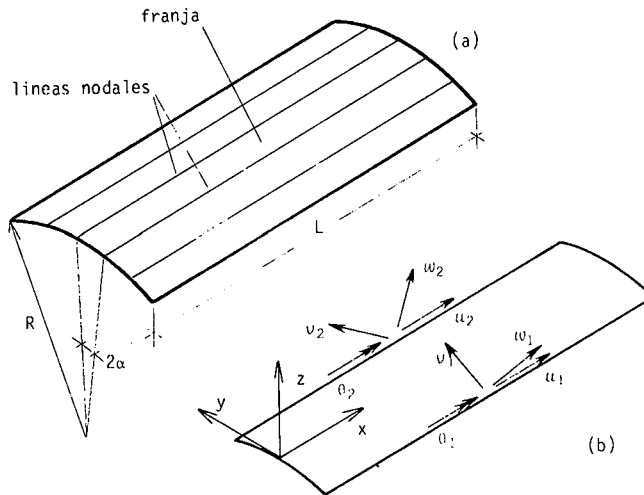


Figura 1. (a) Cáscara cilíndrica dividida en franjas finitas,
(b) Franja finita de directriz cilíndrica circular, parámetros de desplazamientos nodales.

Los desplazamientos podrán expresarse en la forma:

$$\begin{aligned}
 u &= \sum_{m=1}^r f_m^u(\phi) \frac{1}{k} X_m'(x) \\
 v &= \sum_{m=1}^r f_m^v(\phi) X_m(x) \\
 w &= \sum_{m=1}^r f_m^w(\phi) X_m(x) \\
 \theta &= \frac{1}{R} \left\{ -\frac{\partial w}{\partial \phi} + v \right\} = \sum_{m=1}^r f_m^\theta(\phi) X_m(x)
 \end{aligned} \tag{1}$$

donde:

$$X_m(x) = \text{sen}(kx) \quad k = m\pi/L$$

De acuerdo con las soluciones presentadas por Gibson las $f_m(\phi)$ tendrán alguna de las dos formas siguientes:

Funciones pares:

$$\begin{aligned} f_m(\phi) = & a(B_1 \cos \beta_1 \phi - B_2 \text{sen } \beta_1 \phi)e^{\alpha_1 \phi} - b(B_2 \cos \beta_1 \phi + B_1 \text{sen } \beta_1 \phi)e^{\alpha_1 \phi} \\ & + c(B_3 \cos \beta'_1 \phi - B_4 \text{sen } \beta'_1 \phi)e^{\alpha'_1 \phi} - d(B_4 \cos \beta'_1 \phi + B_3 \text{sen } \beta'_1 \phi)e^{\alpha'_1 \phi} \\ & + e(B_1 \cos \beta_1 \phi + B_2 \text{sen } \beta_1 \phi)e^{-\alpha_1 \phi} - f(B_2 \cos \beta_1 \phi - B_1 \text{sen } \beta_1 \phi)e^{-\alpha_1 \phi} \\ & + g(B_3 \cos \beta'_1 \phi + B_4 \text{sen } \beta'_1 \phi)e^{-\alpha'_1 \phi} - h(B_4 \cos \beta'_1 \phi - B_3 \text{sen } \beta'_1 \phi)e^{-\alpha'_1 \phi} \end{aligned}$$

Funciones impares:

$$\begin{aligned} f_m(\phi) = & a(B_1 \cos \beta_1 \phi - B_2 \text{sen } \beta_1 \phi)e^{\alpha_1 \phi} - b(B_2 \cos \beta_1 \phi + B_1 \text{sen } \beta_1 \phi)e^{\alpha_1 \phi} \\ & + c(B_3 \cos \beta'_1 \phi - B_4 \text{sen } \beta'_1 \phi)e^{\alpha'_1 \phi} - d(B_4 \cos \beta'_1 \phi + B_3 \text{sen } \beta'_1 \phi)e^{\alpha'_1 \phi} \\ & - e(B_1 \cos \beta_1 \phi + B_2 \text{sen } \beta_1 \phi)e^{-\alpha_1 \phi} + f(B_2 \cos \beta_1 \phi - B_1 \text{sen } \beta_1 \phi)e^{-\alpha_1 \phi} \\ & - g(B_3 \cos \beta'_1 \phi + B_4 \text{sen } \beta'_1 \phi)e^{-\alpha'_1 \phi} + h(B_4 \cos \beta'_1 \phi - B_3 \text{sen } \beta'_1 \phi)e^{-\alpha'_1 \phi} \end{aligned}$$

donde las constantes $\alpha_1, \alpha'_1, \beta_1, \beta'_1, B_1, B_2, B_3$ y B_4 dependen de las características de la cáscara y las constantes a, b, c, d, e, f, g y h son constantes indeterminadas.

A fin de facilitar la escritura, llamaremos:

$$f_m(\phi, B_1, B_2, B_3, B_4) = f_m(\phi) \text{ de funciones pares}$$

$$\hat{f}_m(\phi, B_1, B_2, B_3, B_4) = f_m(\phi) \text{ de funciones impares}$$

reemplazando en las (1) resulta:

$$u = \sum_{m=1}^r f_m(\phi, \xi_{11}, \xi_{12}, \xi_{13}, \xi_{14}) \cos(kx)$$

$$v = \sum_{m=1}^r \hat{f}_m(\phi, \xi_{21}, \xi_{22}, \xi_{23}, \xi_{24}) \text{sen}(kx)$$

$$w = \sum_{m=1}^r f_m(\phi, \xi_{31}, \xi_{32}, \xi_{33}, \xi_{34}) \text{sen}(kx)$$

$$\theta = \sum_{m=1}^r \hat{\mathbf{f}}_m(\phi, \xi_{41}, \xi_{42}, \xi_{43}, \xi_{44}) \operatorname{sen}(kx)$$

donde las ξ_{ij} son las constantes B_1, B_2, B_3 y B_4 para u, v, w y θ respectivamente y están dadas en la Tabla I.

Matricialmente podríamos escribir:

$$\begin{bmatrix} u / \cos(kx) \\ v / \operatorname{sen}(kx) \\ w / \operatorname{sen}(kx) \\ \theta / \operatorname{sen}(kx) \end{bmatrix}_m = [\hat{\Phi}]_m \{\alpha\}_m \quad (2)$$

donde la matriz $[\hat{\Phi}]_m$ contiene los términos correspondientes a las funciones $\mathbf{f}_m(\phi)$, por ejemplo:

$$\hat{\Phi}_{11} = (\xi_{11} \cos \beta_1 \phi - \xi_{12} \operatorname{sen} \beta_1 \phi) e^{\alpha_1 \phi}$$

y $\{\alpha\}_m$ es el vector de incógnitas:

$$\{\alpha\}_m^T = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}_m$$

Evalutando (2) en las líneas nodales, esto es para $\phi = \mp \alpha$, podremos expresar las incógnitas $\{\alpha\}_m$ en función de los parámetros de desplazamientos nodales:

$$\{\hat{u}\}_m = \begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{v}_1 \\ \hat{w}_1 \\ \hat{\theta}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{v}_2 \\ \hat{w}_2 \\ \hat{\theta}_2 \end{bmatrix}_m = [A]_m \{\alpha\}_m \quad \text{con} \quad [A]_m = \begin{bmatrix} [\hat{\Phi}]_{-\alpha} \\ [\hat{\Phi}]_{+\alpha} \end{bmatrix}_m$$

luego:

$$\{\alpha\}_m = [A]_m^{-1} \{\hat{u}\}_m \quad (3)$$

De este modo los desplazamientos en cualquier punto del interior de la franja estarán dados por:

γ/kR	$-\gamma[1 + \gamma(1 + v)]/kR$	$-\gamma/kR$	$-\gamma[1 - \gamma(1 + v)]/kR$
$\{-m_1 - n_1[1 - \gamma(1 + v)]\}/P$	$\{-n_1 + m_1[1 - \gamma(1 + v)]\}/P$	$\{m_2 - n_2[1 + \gamma(1 + v)]\}/P$	$\{n_2 + m_2[1 + \gamma(1 + v)]\}/P$
2	0	2	0
$(-2\alpha_1 + \xi_{31})/R$	$(-2\beta_1 + \xi_{22})/R$	$(-2\alpha'_1 + \xi_{23})/R$	$(-2\beta'_1 + \xi_{24})/R$

donde:

R = radio

L = longitud

t = espesor

v = coeficiente de Poisson

$k = m\pi/L$

$P = \sqrt[3]{3(1 - v^2)} \sqrt[3]{R/t} \sqrt{Rk}$

$\gamma = (kR/P)^2$

$\alpha_1 = Pm_1$

$\beta_1 = Pn_1$

$\alpha'_1 = Pm_2$

$\beta'_1 = Pn_2$

$$m_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{(1+\gamma)^2+1}+(1+\gamma)}{2}} ; n_1 = 1/2m_1$$

$$m_2 = \sqrt{\frac{\sqrt{(1-\gamma)^2+1}-(1-\gamma)}{2}} ; n_2 = 1/2m_2$$

Tabla I. Matriz $[\xi]_m$.

$$\begin{aligned}
\{u\} &= \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \sum_{m=1}^r [\Phi]_m \{\alpha\}_m \\
&= \sum_{m=1}^r [\Phi]_m [A]_m^{-1} \{\hat{u}\}_m \\
&= \sum_{m=1}^r [H]_m \{\hat{u}\}_m
\end{aligned} \tag{4}$$

donde la matriz $[\Phi]_m$ contiene elementos del tipo:

$$\Phi_{11} = (\xi_{11} \cos \beta_1 \phi - \xi_{12} \sin \beta_1 \phi) e^{\alpha_1 \phi} \cos(kx)$$

Deformaciones

Teniendo en cuenta las deformaciones y cambios de curvaturas de la teoría de Koiter-Sanders, el vector de deformaciones generalizadas $\{\varepsilon\}$ resulta:

$$\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma \\ \chi_1 \\ \chi_2 \\ \tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{R \partial \phi} + \frac{w}{R} \\ \frac{\partial u}{R \partial \phi} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial \theta}{R \partial \phi} \\ -\frac{\partial^2 w}{R \partial \phi \partial x} + \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{1}{2R} \left[\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{R \partial \phi} \right] \end{bmatrix} = \sum_{m=1}^r [B]_m \{\hat{u}\}_m \tag{5}$$

Haciendo las derivadas obtenemos:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \sum_{m=1}^r \mathbf{f}_m(\phi, \bar{\xi}_{11}, \bar{\xi}_{12}, \bar{\xi}_{13}, \bar{\xi}_{14}) \sin(kx) \\
\varepsilon_2 &= \sum_{m=1}^r \mathbf{f}_m(\phi, \bar{\xi}_{21}, \bar{\xi}_{22}, \bar{\xi}_{23}, \bar{\xi}_{24}) \sin(kx)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma &= \sum_{m=1}^r \hat{\mathbf{f}}_m(\phi, \bar{\xi}_{31}, \bar{\xi}_{32}, \bar{\xi}_{33}, \bar{\xi}_{34}) \cos(kx) \\
\chi_1 &= \sum_{m=1}^r \mathbf{f}_m(\phi, \bar{\xi}_{41}, \bar{\xi}_{42}, \bar{\xi}_{43}, \bar{\xi}_{44}) \sin(kx) \\
\chi_2 &= \sum_{m=1}^r \mathbf{f}_m(\phi, \bar{\xi}_{51}, \bar{\xi}_{52}, \bar{\xi}_{53}, \bar{\xi}_{54}) \sin(kx) \\
\tau &= \sum_{m=1}^r \hat{\mathbf{f}}_m(\phi, \bar{\xi}_{61}, \bar{\xi}_{62}, \bar{\xi}_{63}, \bar{\xi}_{64}) \cos(kx)
\end{aligned}$$

donde $\mathbf{f}$ y $\hat{\mathbf{f}}$ son las funciones dadas anteriormente, y los $\bar{\xi}_{ij}$ están dados en la Tabla II.

Resulta luego claro que podemos expresar a $[B]_m$ en la forma:

$$[B]_m = [E]_m [A]_m^{-1}$$

donde la matriz $[E]_m$ contiene elementos similares a los de la matriz $[\Phi]_m$, por ejemplo:

$$e_{11} = (\bar{\xi}_{11} \cos \beta_1 \phi - \bar{\xi}_{12} \sin \beta_1 \phi) e^{\alpha_1 \phi} \sin(kx)$$

Esfuerzos

Aplicando la ley de Hooke resulta:

$$\{\sigma\} = [D] \sum_{m=1}^r [B]_m \{\hat{u}\}_m \quad (6)$$

donde:

$$[D] = \begin{bmatrix} D_1 & \nu D_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nu D_1 & D_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_3 & \nu D_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nu D_3 & D_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_4 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} D_1 &= Et/(1-\nu^2) \\ D_2 &= Et/2(1+\nu) \\ D_3 &= Et^3/12(1-\nu^2) \\ D_4 &= Et^3/24(1+\nu) \end{aligned}$$

siendo E , ν y t el módulo de Young, coeficiente de Poisson y espesor respectivamente. Los convenios de signos para las tensiones resultantes pueden verse en la Figura 2.

$-\gamma/R$	$+\gamma[1+\gamma(1+v)]/R$	$+\gamma/R$	$+\gamma[1-\gamma(1+v)]/R$
$+v\gamma/R$	$-\gamma[v+\gamma(1+v)]/R$	$-v\gamma/R$	$-\gamma[v-\gamma(1+v)]/R$
$2n_1(1+v)(\sqrt{\gamma})^3/R$	$-2m_1(1+v)(\sqrt{\gamma})^3/R$	$-2n_2(1+v)(\sqrt{\gamma})^3/R$	$2m_2(1+v)(\sqrt{\gamma})^3/R$
$+2k^2$	0	$+2k^2$	0
$-[2(1+\gamma)P^2+(2-v\gamma)]/R^2$	$-\{2P^2+\gamma[v+\gamma(1+v)]\}/R^2$	$-[2(\gamma-1)P^2+(2+v\gamma)]/R^2$	$-\{2P^2+\gamma[v-\gamma(1+v)]\}/R^2$
$k[-2\alpha_1/R+\xi_{41}-(m_1+n_1)/PR]$	$k[-2\beta_1/R+\xi_{42}+(m_1-n_1)/PR]$	$k[-2\alpha'_1/R+\xi_{43}+(m_2-n_2)/PR]$	$k[-2\beta'_1/R+\xi_{44}+(m_2+n_2)/PR]$

Tabla II. Matriz $[\hat{\xi}]_m$

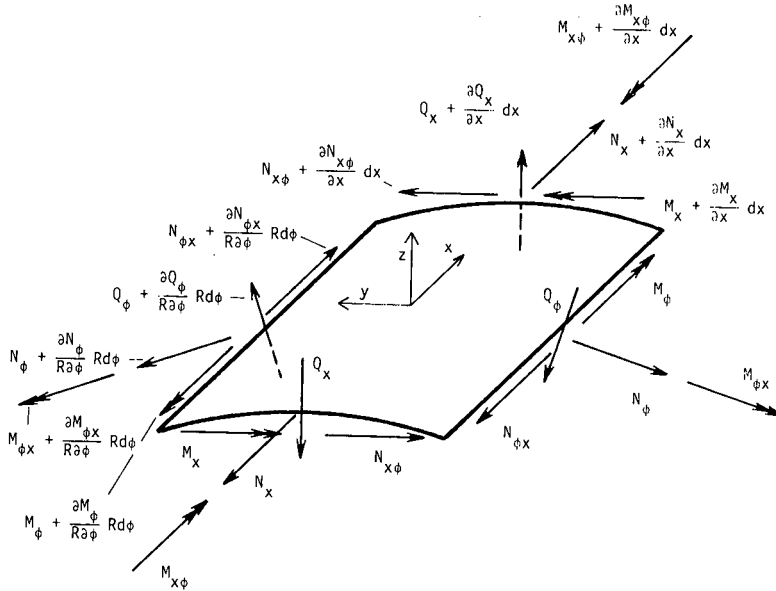


Figura 2. Convenios de signos de los esfuerzos generalizados.

Matriz de rigidez

Dadas las propiedades de ortogonalidad de la función $X_m(x)$ utilizada, se produce el desacople de los términos de la serie.

Luego:

$$[K]_{mm} = \int [B]_m^T [D] [B]_m dS \quad (7)$$

es la matriz de rigidez de la franja para el término m -ésimo de la serie. Reemplazando:

$$[K]_{mm} = [A]_m^{-1T} [S]_{mm} [A]_m^{-1}$$

donde:

$$[S]_{mm} = \int [E]_m^T [D] [E]_m dS = \frac{RL}{2} [\zeta]_m$$

con $[\zeta]_m$ calculada según la Tabla III, siendo:

$$\begin{aligned} c_{ij} = & D_1[\bar{\xi}_{1i}\bar{\xi}_{1j} + \bar{\xi}_{2i}\bar{\xi}_{2j} + \nu(\bar{\xi}_{1i}\bar{\xi}_{2j} + \bar{\xi}_{1j}\bar{\xi}_{2i})] + D_2\bar{\xi}_{3i}\bar{\xi}_{3j} + \\ & + D_3[\bar{\xi}_{4i}\bar{\xi}_{4j} + \bar{\xi}_{5i}\bar{\xi}_{5j} + \nu(\bar{\xi}_{4i}\bar{\xi}_{5j} + \bar{\xi}_{4j}\bar{\xi}_{5i})] + D_4\bar{\xi}_{6i}\bar{\xi}_{6j} \end{aligned}$$

para $i = 1, 2, 3, 4$ y $j = 1, 2, 3, 4$.

$$\begin{aligned} c_{ij} = & D_1[\bar{\xi}_{1i}\bar{\xi}_{1j} + \bar{\xi}_{2i}\bar{\xi}_{2j} + \nu(\bar{\xi}_{1i}\bar{\xi}_{2j} + \bar{\xi}_{1j}\bar{\xi}_{2i})] - D_2\bar{\xi}_{3i}\bar{\xi}_{3j} + \\ & + D_3[\bar{\xi}_{4i}\bar{\xi}_{4j} + \bar{\xi}_{5i}\bar{\xi}_{5j} + \nu(\bar{\xi}_{4i}\bar{\xi}_{5j} + \bar{\xi}_{4j}\bar{\xi}_{5i})] - D_4\bar{\xi}_{6i}\bar{\xi}_{6j} \end{aligned}$$

para $i = 5, 6, 7, 8$ y $j = 1, 2, 3, 4$.

$$\begin{aligned}
[\zeta] &= \begin{bmatrix} [\zeta]^{11} & [\zeta]^{12} \\ [\zeta]^{21} & [\zeta]^{22} \end{bmatrix} \\
[\zeta]^{11} &= \begin{bmatrix} \zeta_{11} & \zeta_{21} & \zeta_{31} & \zeta_{41} \\ \zeta_{22} & \zeta_{32} & \zeta_{42} \\ \text{sim.} & & \\ \zeta_{33} & \zeta_{43} & \zeta_{44} \end{bmatrix} = [\zeta]^{22} \\
[\zeta]^{21} &= \begin{bmatrix} \zeta_{51} & \zeta_{61} & \zeta_{71} & \zeta_{81} \\ \zeta_{62} & \zeta_{72} & \zeta_{82} \\ \text{sim.} & & \\ \zeta_{73} & \zeta_{83} & \zeta_{84} \end{bmatrix} = [\zeta]^{12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\zeta_{11} &= c_{11}I_1 + c_{22}I_2 - 2c_{12}I_3 \\
\zeta_{21} &= -[c_{12}(I_1 - I_2) + (c_{11} - c_{22})I_3] \\
\zeta_{31} &= c_{13}I_4 + c_{24}I_5 - c_{14}I_6 - c_{23}I_7 \\
\zeta_{41} &= -[c_{14}I_4 - c_{23}I_5 + c_{13}I_6 - c_{24}I_7] \\
\zeta_{22} &= c_{22}I_1 + c_{11}I_2 + 2c_{12}I_3 \\
\zeta_{32} &= -[c_{23}I_4 - c_{14}I_5 - c_{24}I_6 + c_{13}I_7] \\
\zeta_{42} &= c_{24}I_4 + c_{13}I_5 + c_{23}I_6 + c_{14}I_7 \\
\zeta_{33} &= c_{33}I_{14} + c_{44}I_{15} - 2c_{34}I_{16} \\
\zeta_{43} &= -[c_{34}(I_{14} - I_{15}) + (c_{33} - c_{44})I_{16}] \\
\zeta_{44} &= c_{44}I_{14} + c_{33}I_{15} - 2c_{34}I_{16} \\
\zeta_{51} &= c_{51}I_8 - c_{62}I_9 \\
\zeta_{61} &= -c_{52}(I_8 + I_9) \\
\zeta_{71} &= c_{53}I_{10} - c_{64}I_{11} + c_{54}I_{12} - c_{63}I_{13} \\
\zeta_{81} &= -[c_{54}I_{10} + c_{63}I_{11} - c_{53}I_{12} - c_{64}I_{13}] \\
\zeta_{62} &= c_{62}I_8 - c_{51}I_9 \\
\zeta_{72} &= -[c_{63}I_{10} + c_{54}I_{11} + c_{64}I_{12} + c_{53}I_{13}] \\
\zeta_{82} &= c_{64}I_{10} - c_{53}I_{11} - c_{63}I_{12} + c_{54}I_{13} \\
\zeta_{73} &= c_{73}I_{17} - c_{84}I_{18} \\
\zeta_{83} &= -c_{74}(I_{17} + I_{18}) \\
\zeta_{84} &= c_{84}I_{17} - c_{73}I_{18}
\end{aligned}$$

Matriz $[\zeta]$

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos^2 \beta_1 \phi e^{2\alpha_1 \phi} d\phi & I_{10} &= \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos \beta_1 \phi \cos \beta'_1 \phi e^{(\alpha_1 - \alpha'_1) \phi} d\phi \\
I_2 &= \int_{-\alpha}^{\alpha} \sin^2 \beta_1 \phi e^{2\alpha_1 \phi} d\phi & I_{11} &= \int_{-\alpha}^{\alpha} \sin \beta_1 \phi \sin \beta'_1 \phi e^{(\alpha_1 - \alpha'_1) \phi} d\phi \\
I_3 &= \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos \beta_1 \phi \sin \beta_1 \phi e^{2\alpha_1 \phi} d\phi & I_{12} &= \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos \beta_1 \phi \sin \beta'_1 \phi e^{(\alpha_1 - \alpha'_1) \phi} d\phi \\
I_4 &= \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos \beta_1 \phi \cos \beta'_1 \phi e^{(\alpha_1 + \alpha'_1) \phi} d\phi & I_{13} &= \int_{-\alpha}^{\alpha} \sin \beta_1 \phi \cos \beta'_1 \phi e^{(\alpha_1 - \alpha'_1) \phi} d\phi \\
I_5 &= \int_{-\alpha}^{\alpha} \sin \beta_1 \phi \sin \beta'_1 \phi e^{(\alpha_1 + \alpha'_1) \phi} d\phi & I_{14} &= \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos^2 \beta'_1 \phi e^{2\alpha'_1 \phi} d\phi \\
I_6 &= \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos \beta_1 \phi \sin \beta'_1 \phi e^{(\alpha_1 + \alpha'_1) \phi} d\phi & I_{15} &= \int_{-\alpha}^{\alpha} \sin^2 \beta'_1 \phi e^{2\alpha'_1 \phi} d\phi \\
I_7 &= \int_{-\alpha}^{\alpha} \sin \beta_1 \phi \cos \beta'_1 \phi e^{(\alpha_1 + \alpha'_1) \phi} d\phi & I_{16} &= \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos \beta'_1 \phi \sin \beta'_1 \phi e^{2\alpha'_1 \phi} d\phi \\
I_8 &= \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos^2 \beta_1 \phi d\phi = \alpha + \frac{1}{2\beta_1} \sin 2\beta_1 \alpha & I_{17} &= \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos^2 \beta'_1 \phi d\phi = \alpha + \frac{1}{2\beta'_1} \sin 2\beta'_1 \alpha \\
I_9 &= \int_{-\alpha}^{\alpha} \sin^2 \beta_1 \phi d\phi = \alpha - \frac{1}{2\beta_1} \sin 2\beta_1 \alpha & I_{18} &= \int_{-\alpha}^{\alpha} \sin^2 \beta'_1 \phi d\phi = \alpha - \frac{1}{2\beta'_1} \sin 2\beta'_1 \alpha
\end{aligned}$$

Tabla III.

siendo:

$$\int \cos y\phi \cos z\phi e^{(w+x)\phi} d\phi = \frac{e^{(w+x)\phi}}{2} \left\{ \frac{(w+x) \cos(y-z)\phi + (y-z) \operatorname{sen}(y-z)\phi}{(w+x)^2 + (y-z)^2} + \right. \\ \left. + \frac{(w+x) \cos(y+z)\phi + (y+z) \operatorname{sen}(y+z)\phi}{(w+x)^2 + (y+z)^2} \right\}$$

$$\int \operatorname{sen} y\phi \operatorname{sen} z\phi e^{(w+x)\phi} d\phi = \frac{e^{(w+x)\phi}}{2} \left\{ \frac{(w+x) \cos(y-z)\phi + (y-z) \operatorname{sen}(y-z)\phi}{(w+x)^2 + (y-z)^2} - \right. \\ \left. - \frac{(w+x) \cos(y+z)\phi + (y+z) \operatorname{sen}(y+z)\phi}{(w+x)^2 + (y+z)^2} \right\}$$

$$\int \operatorname{sen} y\phi \cos z\phi e^{(w+x)\phi} d\phi = \frac{e^{(w+x)\phi}}{2} \left\{ \frac{(w+x) \operatorname{sen}(y-z)\phi - (y-z) \cos(y-z)\phi}{(w+x)^2 + (y-z)^2} + \right. \\ \left. + \frac{(w+x) \operatorname{sen}(y+z)\phi - (y+z) \cos(y+z)\phi}{(w+x)^2 + (y+z)^2} \right\}$$

Tabla III. (cont.)

Vector de cargas

El vector de cargas de la franja para el término m -ésimo de la serie será:

$$\{R\}_m = \int [H]_m^T \{f\} dS \quad (8)$$

siendo $\{f\}$ las fuerzas de superficie, luego:

$$\{R\}_m = [A]_m^{-1T} \int [\Phi]_m^T \{f\} dS$$

EJEMPLOS NUMERICOS

Ejemplo 1: Cilindro con cargas radiales concentradas ("Pinched Cylinder"). El cilindro simplemente apoyado mostrado en la Figura 3, está sometido a dos cargas radiales opuestas a mitad de su longitud. Utilizando la simetría del problema solamente es necesario descretizar un cuarto del cilindro. La Tabla IV muestra el comportamiento del desplazamiento radial bajo la carga y a 90° de ella cuando la malla es refinada. Se puede ver que con sólo dos franjas la respuesta es ampliamente satisfactoria.

Ejemplo 2: Bóveda de cañón. Esta cáscara cilíndrica simplemente apoyada en sus extremos y libre en sus bordes longitudinales está sometida a su peso propio. Dada la

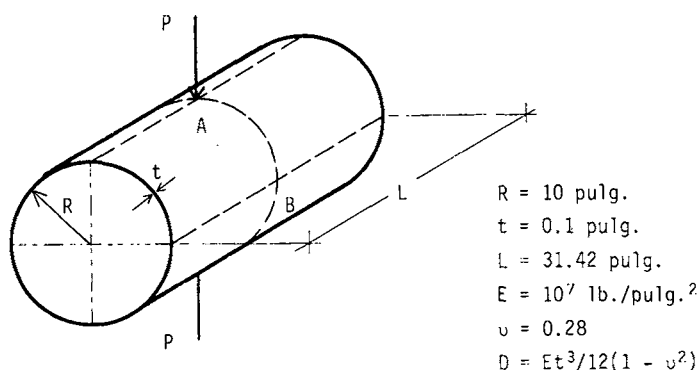


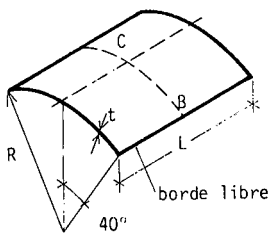
Figura 3. Cilindro con cargas radiales concentradas.

MALLA	NUMERO DE ITERACIONES *	w_A		w_B	
		α_A	ERROR	α_B	ERROR
2 (8 g.l.)	18	1.197×10^{-2}	1.48%	2.00×10^{-3}	0.00%
10 (40 g.l.)	18	1.197×10^{-2}	1.48%	2.00×10^{-3}	0.00%
40 (160 g.l.)	24	1.205×10^{-2}	0.82%	2.00×10^{-3}	0.00%

* se calculan sólo los términos impares.

TABLA IV. Desplazamiento radial bajo la carga y a 90° , comparación con la solución exacta [5] $\alpha_A = 1.215 \times 10^{-2}$, $\alpha_B = 2.0 \times 10^{-3}$, con $\alpha = \frac{2D L w}{R^3}$.

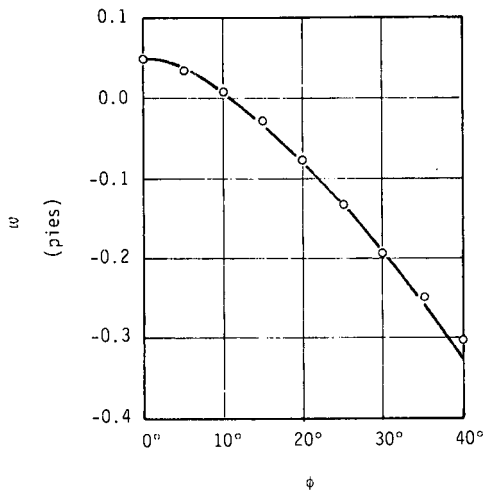
simetría geométrica y de carga es posible analizar simplemente un medio de la misma. En las Figuras 4 y 5 se comparan algunos resultados obtenidos con una malla de 8 franjas y la solución teórica⁶. En la referencia [7] la misma bóveda fue analizada, la Figura 6 es una reproducción de las curvas de convergencia obtenidas con varios elementos triangulares junto a los resultados obtenidos con la presente franja finita. Entre paréntesis se indica el número de franjas y el número de iteraciones. Si bien el número de incógnitas fue determinado como el producto del número de grados de libertad por el número de iteraciones, se debe tener en cuenta que el orden de la matriz de rigidez ensamblada en cada iteración coincide con el número de grados de libertad, esto es, 18 grados para el primer punto y 34 grados para el segundo. Esto último confirma que para un mismo nivel de exactitud el método de la banda finita



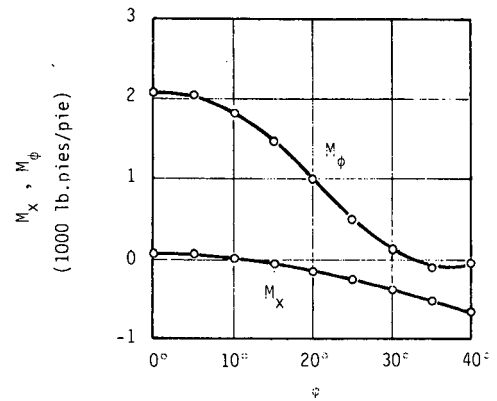
$R = 25$ pies
 $t = 3$ pulg.
 $L = 50$ pies
 $E = 3 \times 10^6$ lb./pulg.²
 $\nu = 0$
 $g = 90$ lb./pie²

(a)

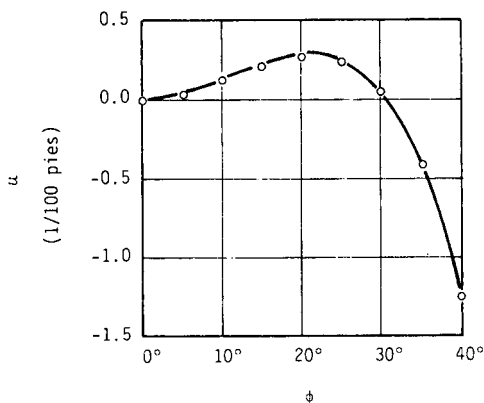
— analítica
 o franja cilíndrica



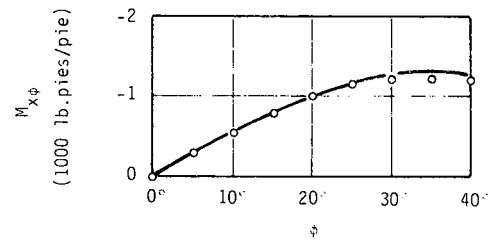
(b)



(a)



(c)



(b)

Figura 4. (a) Bóveda de cañón.
 (b) Desplazamiento vertical de la sección central.
 (c) Desplazamiento longitudinal del apoyo.

Figura 5. (a) M_ϕ = momentos transversales, M_x = momentos longitudinales en la sección central.
 (b) $M_{x\phi}$ = momento torsor en el apoyo.

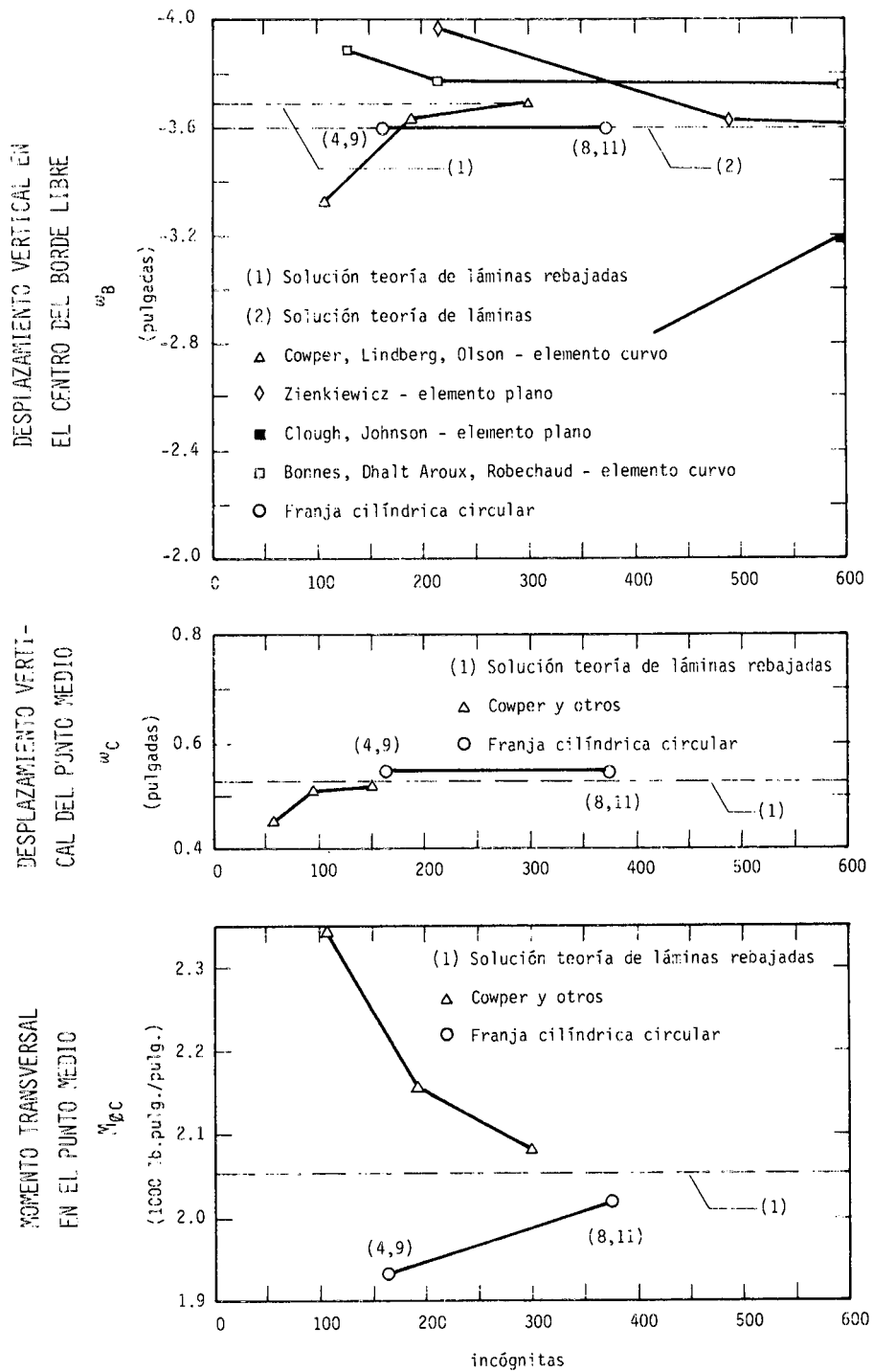


Figura 6. Comparación con elementos triangulares (ver referencia [7]).

tiene una demanda de capacidad computacional notablemente inferior a los elementos convencionales. Se adiciona además, para este caso particular de carga, el hecho de que del número total de iteraciones señaladas sólo se debieron calcular los términos impares.

CONCLUSIONES

La utilización de las soluciones de Gibson ofrece la ventaja de conservar la misma forma general tanto en las funciones de forma de desplazamientos como de deformaciones, a la vez que permite encontrar una forma explícita de la matriz de rigidez. Por otro lado, los ejemplos analizados muestran el excelente comportamiento del elemento desarrollado.

REFERENCIAS

1. A.C. Scordelis, K.S. Lo, "Computer Analysis of Cylindrical Shells", *J.ACI*, Vol. 61, No 5, pp. 539-561, (1964).
2. J.E. Gibson, "The Design of Cylindrical Shell Roofs", 2nd. ed. London E. & F.N. Spon, (1961).
3. Y.K. Cheung, "*Finite Strip Method in Structural Analysis*", Pergamon Press, (1976).
4. J.F. Giró, C.A. Prato y L.A. Godoy, "Análisis de Estructuras Celulares Cilíndricas por Integración Numérica", En: Idelsohn, S.R., ed. *Mecánica Computacional*, Vol. 2, pp. 58-72, (1985).
5. S.W. Key y Z.E. Beisinger, "The Analysis of Thin Shells by the Finite Element Method", En: Fraeijs de Veubeke, B. ed., *IUTAM Symposium on the High Speed Computing of Elastic Structures*, Université de Liege, pp. 209-252, (1971).
6. O.C. Zienkiewicz, "*El Método de los Elementos Finitos*", Editoriales Reverté S.A., España, (1980).
7. K. Forsberg y R. Hartung, "An Evaluation of Finite Diference and Finite Element Techniques for Analysis of General Shells", Fraeijs de Veubeke, B. ed., *IUTAM Symposium on the High Speed Computing of Elastic Structures*, Université de Liege, pp. 837-859, (1971).