

# **Desarrollos y Aplicaciones de Modelos de Fractura en la Escuela de Ingenieros de Caminos de Barcelona**

**E. Oñate**

**Publicación CIMNE N°-201, Diciembre 2000**

# DESARROLLOS Y APLICACIONES DE MODELOS DE FRACTURA EN LA ESCUELA DE INGENIEROS DE CAMINOS DE BARCELONA

Eugenio Oñate

Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos  
Universidad Politécnica de Cataluña  
08034 Barcelona, España

## RESUMEN

El artículo es una panorámica de los aspectos teóricos y algunas aplicaciones prácticas de los modelos de fractura desarrollados por diversos grupos en la Escuela de Ingenieros de Caminos de Barcelona (EICB) durante los últimos quince años para el análisis no lineal de estructuras. La motivación fundamental para el desarrollo de estos modelos se centra en el análisis de la seguridad de estructuras de hormigón en masa y armado. La mayor parte de los modelos se basan en la teoría de daño continuo y utilizan el método de los elementos finitos para la solución numérica. Los modelos de daño se han extendido y aplicado también con éxito al análisis de diversas estructuras de edificios históricos. Los desarrollos más recientes de estos modelos en la EICB incluyen la predicción de fenómenos de localización en estructuras de hormigón y el análisis del comportamiento no lineal de estructuras con materiales compuestos. De todos estos modelos se presentan en el artículo unas breves pinceladas, las aplicaciones más relevantes y las referencias donde pueden encontrarse los detalles sobre cada caso.

## ABSTRACT

The present paper is an overview of some theoretical aspects and practical applications of fracture models developed in the last fifteen years at the School of Civil Engineering of Barcelona for non linear analysis of structures. The main motivation for the development of the models is the failure analysis of plain concrete and reinforced concrete structures. Most of the models are based on a simple continuum damage model and the finite element method. The damage models have been successfully extended and applied to the analysis of historical constructions. Recent developments of damage models at Barcelona include the analysis of localization phenomena in concrete structures and the non linear analysis of structures with composite materials. This paper presents a summary of the main features of the models and some relevant applications. Further information can be found in the references listed in the paper.

## 1. INTRODUCCIÓN

Las primeras motivaciones para el desarrollo de modelos de fractura en la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Barcelona surgen en el año 1985 con motivo de la necesidad de analizar el comportamiento no lineal de la presa de Mequinenza. Esta presa de gravedad de hormigón presentaba numerosas patologías,

caracterizadas por un estado de fisuración muy extendido en el cuerpo central de la presa, y unos movimientos aguas abajo excepcionales. El primer modelo de fractura desarrollado para este análisis fue el denominado modelo de fisura distribuida fija. Este método se basa, en esencia, en modificar las propiedades isotropas iniciales del hormigón a medida que se van produciendo fisuras, y transformarlas en las de un material ortótropo de menor resistencia [1-8]. El modelo se aplicó con éxito al estudio por elementos finitos bidimensionales de la presa de Mequinenza por Oñate, Oliver y Bugeda [9]. Las dificultades conceptuales del método de fisura distribuida motivaron el desarrollo de modelos de fractura del hormigón más consistentes desde el punto de vista termodinámico. Así, Oñate *et al.* [10] y Oller [11] sugirieron formular el comportamiento no lineal del hormigón a tracción y compresión dentro del marco de la teoría de la plasticidad clásica. Estas ideas se amplian en el trabajo de Lubliner *et al.* [12] donde se incorpora el concepto de daño como una medida de la pérdida de resistencia del hormigón (a tracción o a compresión) fuera del rango elástico. Los trabajos posteriores de Oliver *et al.* [13-23] y Cervera *et al.* [24-27] perfeccionaron el modelo de daño incorporando el concepto de longitud característica para garantizar la objetividad de la solución con la malla de elementos finitos, distinguiendo el efecto del daño por compresión y tracción y modelando de forma correcta el efecto de discontinuidades fuertes (fracturas) en cualquier tipo de malla. La extensión y aplicaciones del modelo de daño al análisis de estructuras de hormigón armado se desarrollan en los trabajos de Barbat *et al.* [28-31] y Hanganu *et al.* [32-35]. Las aplicaciones de este modelo se han centrado fundamentalmente en el estudio de edificios y estructuras civiles de hormigón armado y edificios históricos [28-38].

Carol *et al.* [39-44] y Prat y Bazant [45,46] han extendido el modelo de daño al análisis de multifracturas incluyendo la posibilidad de apertura y cierre de fisuras. Otra extensión de interés es la inclusión de elementos junta insertados en el continuo elástico para representar múltiples trayectorias de fisuras [47,48]. Estos modelos se han aplicado a estructuras de hormigón y al análisis de la resistencia de hueso trabecular poroso [49,50].

En el campo de los materiales compuestos Oller *et al.* [51-57] y Car *et al.* [58-60] han desarrollado un modelo constitutivo de daño y plasticidad, basado en la combinación de la teoría de mezclas con una transformación adecuada de espacios, para analizar el comportamiento hasta rotura de materiales compuestos anisótropos.

En los apartados siguientes explicamos las bases conceptuales de algunos de los desarrollos anteriores. En particular, se explican someramente los modelos de fisura discreta y distribuida. Se describe con algo más de detalle el modelo de daño isotropo y su implementación en un programa de elementos finitos. Finalmente se describen las bases del modelo para análisis no lineal de materiales compuestos. En cada caso se hace especial énfasis en los desarrollos más recientes llevados a cabo en la Escuela de Ingenieros de Caminos de Barcelona. En la parte final del trabajo se presentan, a título de ejemplos, diferentes aplicaciones de los modelos al estudio de la propagación de fracturas en estructuras de hormigón y colapso de suelos, al análisis de una presa, un edificio de viviendas, un edificio de contención de una central nuclear y un edificio histórico y al estudio de la rotura de una probeta de material compuesto.



## 2. CONCEPTOS BÁSICOS SOBRE MODELOS DE FRACTURA EN ESTRUCTURAS DE HORMIGÓN

Existen fundamentalmente cuatro procedimientos para modelar el comportamiento no lineal de estructuras de hormigón armado y en masa, prediciendo la aparición y evolución de las fisuras y la carga última de colapso: a) *el modelo de fisura discreta* [61-63], *el modelo de fisura distribuida* [1-9], *modelos de daño* [10-50] y *modelos de barras* [68]. En esta última clase de modelos el continuo se sustituye a priori por una malla de elementos de barras articuladas o reticuladas. Tras ello se asignan a dichas barras propiedades de la microestructura del material, dependiendo si cada barra representa un árido o una zona de mortero. Los modelos de barras son útiles, por tanto, para investigar sobre el origen del proceso de fisuración a nivel detallado.

En los modelos de fisura discreta se supone que aparece una fisura tan pronto como la fuerza nodal normal a los contornos de un elemento finito excede la máxima tensión de tracción que resiste el hormigón en un ensayo uniaxial. Tras ello se añaden nuevos grados de libertad en la posición de dicho nodo y se crea una discontinuidad geométrica entre el nodo antiguo y el nuevo. En la Figura 1 se muestra un esquema sencillo del modelo de fisura discreta. Las dos desventajas obvias de este método es que requiere un cambio en la topología de la malla y que restringe la propagación de las fisuras a líneas nodales. Esta técnica puede mejorarse utilizando remallado [63] y mediante el uso de elementos de interfaz como fisuras predefinidas en las zonas donde se espera la propagación de aquellas [3,47,48].

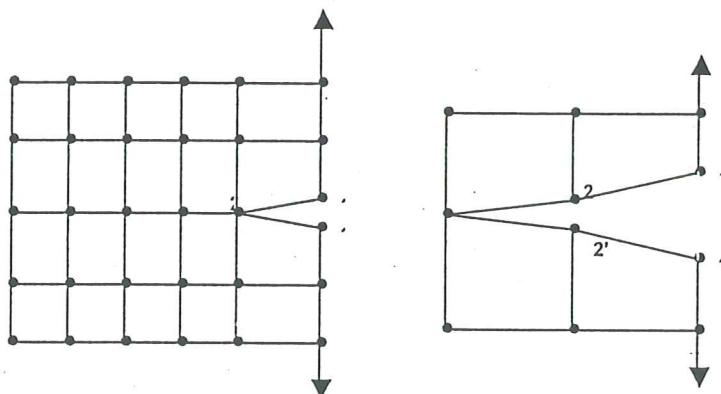


Fig. 1. Modelo de fisura discreta.

La alternativa al modelo de fisura discreta es el de fisura distribuida, en el que el sólido se mantiene como un continuo. Una vez que se inicia la fisuración se supone que el comportamiento isotrópico elástico inicial cambia por uno ortótropo que es función de la dirección de la fisuración. Como consecuencia se preserva la topología inicial de la malla. Esto explica la gran popularidad del modelo de fisura distribuida para aplicaciones prácticas [1-9,69,70].

Dentro de los modelos de fisura distribuida puede distinguirse entre los de fisura fija y fisura giratoria. En los primeros se supone que la dirección de la normal a la fisura es fija después de iniciarse esta. Los modelos de fisura giratoria admiten que la dirección normal a la fisura



puede girar durante el proceso de fisuración, siguiendo las direcciones de los ejes de tensiones o deformaciones principales [3].

En la Figura 2 se muestra un esquema de la base del modelo de fisura distribuida más simple. Una vez que la tensión principal mayor supera la tensión de tracción límite se supone que aparece una fisura en la dirección normal. En ese momento se modifica la matriz constitutiva en ejes locales, de manera que se anula la resistencia en la dirección normal a la fisura, manteniéndose intacta la resistencia en la dirección de ésta. Asimismo, suele admitirse un módulo de rigidez por cortante reducido por un coeficiente  $\beta$  (es usual tomar  $\beta \cong 0,2$ ). La nueva relación constitutiva ortótropa en ejes locales se escribe en ejes globales mediante una transformación estándar por medio de la matriz de rotación  $\mathbf{T}$  que depende de la dirección de la fisura [3,4].

En los apartados siguientes se describen con más detalle las bases de los modelos de daño.

#### Comportamiento Elástico

$$\sigma_1 < f'_t, \quad \sigma_2 < f'_t$$

$$\mathbf{s} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{D}\mathbf{e}$$

#### Comportamiento fisurado

$$\sigma_1 > f'_t, \quad \sigma_1 \geq \sigma_2$$

$$\mathbf{s}' = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & \beta G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \mathbf{D}'\mathbf{e}$$

#### Transformación a ejes globales

$$\mathbf{s} = \bar{\mathbf{D}}\mathbf{e} \quad \text{con} \quad \bar{\mathbf{D}} = \mathbf{T}\mathbf{D}'\mathbf{T}$$

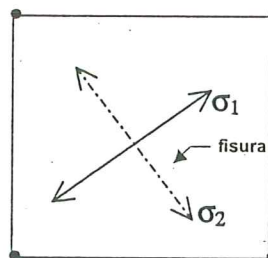


Fig. 2. Modelo de fisura distribuida para un elemento de tensión plana.

### 3. ANALISIS NO LINEAL DE ESTRUCTURAS CON MODELOS DE DAÑO

La mecánica de daño es una rama de la mecánica del continuo que incorpora cambios a nivel microestructural del material a través de un número de variables internas escalares o tensoriales [11-12,15,16,64-67]. En ese sentido es similar a conceptos de plasticidad donde la influencia de la historia del material en la evolución de las tensiones se incorpora en la teoría del continuo a través de un conjunto de variables. En el modelo de daño elástico más sencillo la descarga sigue una trayectoria secante hasta el origen, donde se llega con un estado libre de tensiones y deformaciones.

Es sabido que la microfisuración en el hormigón y la mampostería ocurre a niveles de carga bajos debido a la pérdida de cohesión entre las partículas de mortero y el árido o por

fisuración del mismo mortero. La fisuración progresa siguiendo caminos no homogéneos que combinan los mecanismos arriba mencionados con el crecimiento y la conexión de las microfisuras en varias direcciones. Los experimentos sobre mortero han evidenciado que la distribución de las microfisuras es altamente discontinua con orientaciones arbitrarias. Este hecho está demostrado por muchos experimentos que muestran que la microfisuración puede ser considerada un fenómeno no direccional y que la propagación de las fisuras sigue caminos aleatorios que dependen del tamaño de las partículas del árido. De esta manera, las direcciones de fisuración dominantes pueden interpretarse como el lugar geométrico de las trayectorias de los puntos dañados del material (véase la Figura 3).

Los conceptos anteriores apoyan la idea de que el comportamiento no lineal del hormigón y la mampostería pueden modelizarse utilizando la teoría del daño, si se define una función de daño adecuada que tenga en cuenta la diferencia de respuesta de estos materiales en tracción y compresión [11,12,15,16]. La fisuración se interpreta en este caso como un efecto de daño local, definido por la evolución de parámetros conocidos del material y de una o varias funciones que controlan la aparición y evolución del daño.

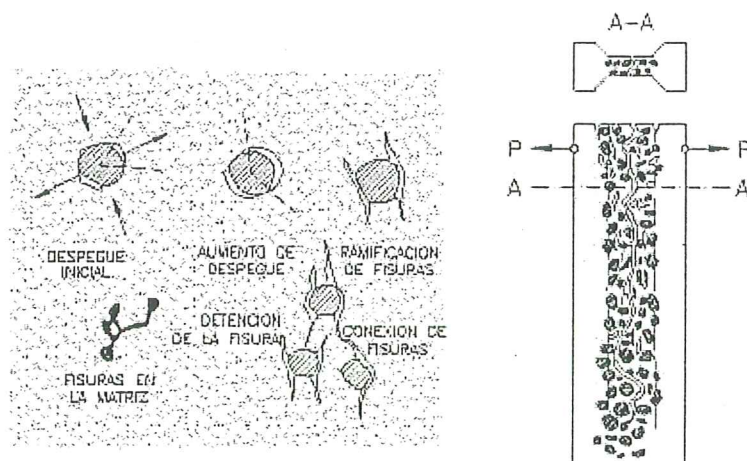


Fig. 3. Mecánica del daño y propagación de una fisura macroscópica en hormigón en masa.

Una de las ventajas de un modelo de este tipo es la independencia del análisis de las direcciones de fisuración que pueden identificarse "a posteriori" una vez se haya obtenido la solución no lineal. El modelo de daño puede tener en cuenta todos los aspectos importantes que deben considerarse en un análisis no lineal de estructuras de hormigón y mampostería, tales como la diferencia de comportamiento en tracción y compresión, el efecto de la degradación de la rigidez debido a causas mecánicas y la objetividad de la respuesta con respecto a diferentes mallas de elementos finitos.

### 3.1 El concepto de daño isótropo

Para aclarar mejor el concepto de daño, se considera una superficie elemental en un volumen de material degradado. Dicha superficie es suficientemente grande para tener un número representativo de defectos, pero al mismo tiempo puede todavía considerarse como perteneciente a un punto del material específico. En la Figura 4,  $S_n$  es el área de toda la

sección,  $\bar{S}_n$  el área resistente efectiva (siendo  $S_n - \bar{S}_n$  el área ocupada por los huecos) y, como consecuencia, el índice de daño  $d_n$  asociado a esta superficie es

$$d_n = \frac{S_n - \bar{S}_n}{S_n} = 1 - \frac{\bar{S}_n}{S_n} \quad (1)$$

En la relación anterior  $d_n$  representa la densidad de los defectos del material y toma el valor cero en el estado inicial no dañado. A medida que la fisuración avanza  $d_n$  tiende hacia un valor crítico cercano a la unidad que corresponde a la completa desaparición del área resistente  $\bar{S}_n$ . En la mayoría de los casos es suficiente una representación escalar del daño ( $d_n = d$ ) para asegurar la modelización realista del material. En este caso las microfisuras no tienen una dirección particular y la fractura macroscópica se define posteriormente como el lugar geométrico de los puntos dañados.

Un concepto útil para entender el efecto del daño es el de tensión efectiva. La relación de equilibrio entre la tensión de Cauchy estándar  $\sigma$  y la tensión efectiva  $\bar{\sigma}$  en el caso de la probeta dañada de la Figura 4 es

$$\sigma S = \bar{\sigma} \bar{S} \quad (2)$$

Utilizando (1) y (2) se obtiene

$$\sigma = (1-d)\bar{\sigma} = (1-d)E\varepsilon \quad (3)$$

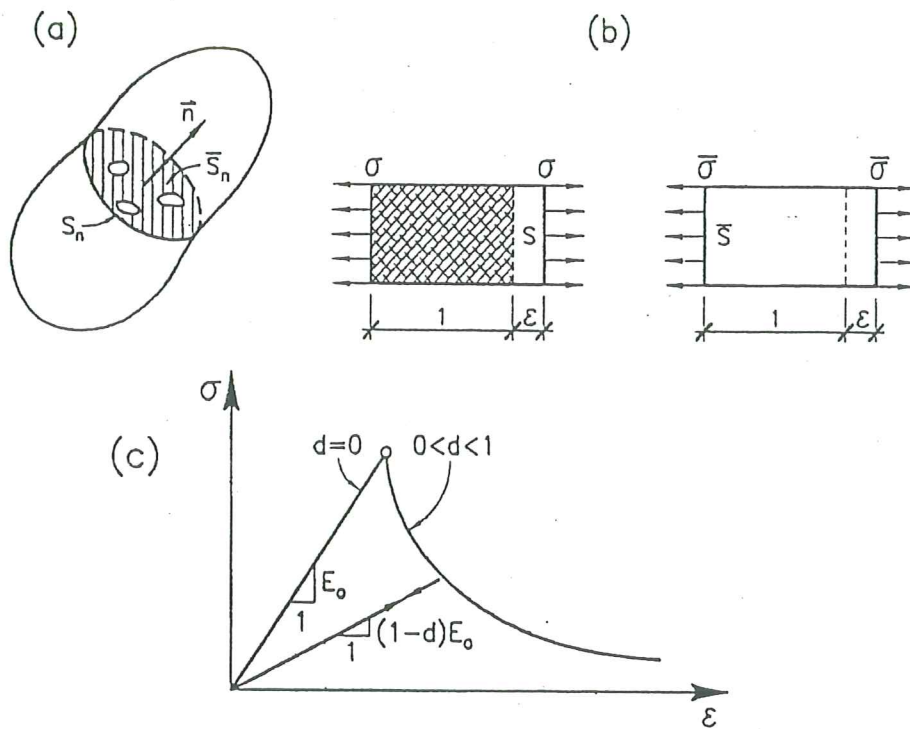


Fig. 4. (a) Superficie dañada. (b) Tensión de Cauchy  $\sigma$  y tensión efectiva  $\bar{\sigma}$ . (c) Evolución de la curva uniaxial tensión-deformación.



Durante un proceso de degradación,  $\bar{s}$  es el área efectiva que soporta la carga exterior y, por este motivo,  $\bar{\sigma}$  es una tensión más representativa físicamente que  $\sigma$ . La ecuación (3) puede extenderse al caso tridimensional como

$$\mathbf{s} = (1-d)\bar{\mathbf{s}} = (1-d)\mathbf{D}\mathbf{e} \quad (4)$$

donde  $\mathbf{D}$  es la matriz constitutiva elástica y  $\mathbf{s}$  y  $\mathbf{e}$  son los vectores de tensión y deformación usuales.

El modelo de daño requiere el conocimiento de la variable de daño  $d$  en cada instante de la historia de la deformación de la estructura. Para ello debe definirse:

- a) *Una norma adecuada*  $\tau$  del tensor de deformaciones (o alternativamente del vector de tensiones no dañadas). Una expresión de dicha norma, muy utilizada para hormigón y mampostería, es

$$\tau = \left( \theta + \frac{1-\theta}{n} \right) \left[ \bar{\mathbf{s}}^T \mathbf{D}^{-1} \bar{\mathbf{s}} \right]^{1/2}, \quad \bar{\mathbf{s}} = \mathbf{D}_0 \mathbf{e} \quad (5)$$

donde  $n = \frac{f'_c}{f'_t}$  es el cociente entre las tensiones límites

de compresión y tracción y

$$\theta = \frac{\sum_{i=1}^3 \langle \bar{\sigma}_i \rangle}{\sum_{i=1}^3 |\bar{\sigma}_i|} \text{ con } \langle \pm \bar{\sigma}_i \rangle = \frac{1}{2} (|\sigma_i| \pm \sigma_i), \quad \bar{\mathbf{s}} = \mathbf{D}\mathbf{e} \quad (6)$$

La expresión (6) tiene en cuenta el diferente comportamiento del material a tracción y compresión.

- b) *Un criterio de daño* formulado en el espacio de deformaciones o de tensiones no dañadas. La forma más sencilla de este criterio puede escribirse como

$$F(\tau, r) = \tau - r \leq 0 \quad (7)$$

donde  $\tau$  es la norma definida en la ec.(5) y  $r$  es un parámetro que indica el límite del daño. El daño crece cuando la norma  $\tau$  excede el valor actual del parámetro  $r$ . En particular, el daño se inicia cuando  $\tau$  excede por primera vez el valor  $r^0$ . Típicamente se toma  $r^0 = f'_t / \sqrt{E}$ .

La Figura 5 muestra la forma de la superficie  $\tau - r^0 = 0$  que define el inicio del daño para la expresión de  $\tau$  dada por la ec.(5).

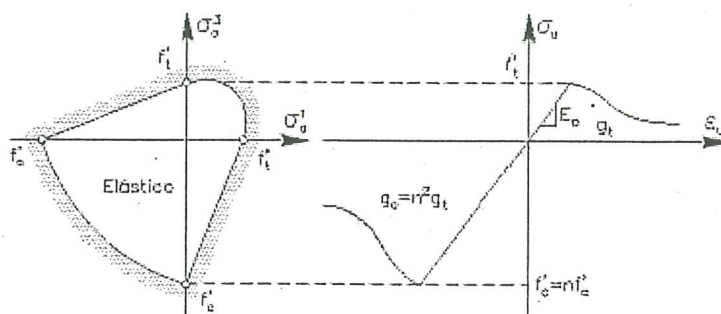


Fig. 5. Superficie de límite de daño  $\tau = r^0$  y curva de tensión-deformación uniaxial para el modelo de las ecs.(4-7).

c) *Leyes de evolución* para la variable de daño  $r$ . Estas leyes pueden escribirse como

$$d = G(r) \quad , \quad r = \max\{r^o, \tau\} \quad (8)$$

donde  $G$  es una función escalar monótona definida por

$$G(r) = 1 - \frac{r^o}{r} \exp\left\{A\left(1 - \frac{r}{r^o}\right)\right\} \quad (9)$$

Adviértase que  $G(r^o) = 0$  y  $G(8) = 1$  como podía esperarse. El parámetro  $A$  se determina de la energía disipada en ensayo de fractura en una probeta. La expresión de  $A$  es

$$A = \left( \frac{G_f E}{l(f_t')^2} - 1/2 \right)^{-1} \quad (10)$$

donde  $G_f$  es la energía de fractura específica por unidad de área,  $l$  es la longitud característica del dominio fracturado. Esta longitud define el tamaño máximo de un elemento finito [15]. De la condición que  $A$  tiene que ser positivo se deduce el límite superior de  $l$  como

$$l \leq \frac{2G_f E}{(f_t')^2} \quad (11)$$

El modelo de daño presentado es muy sencillo y se ha utilizado con éxito para el análisis no lineal de estructuras de hormigón y otros materiales friccionales [12-35]. En el Apartado 4 se describen las etapas básicas para implementar el modelo en un programa de elementos finitos estándar.

### 3.2 Contribuciones de tracción y compresión en el modelo de daño

Faria y Oliver [15] han extendido el sencillo modelo de daño anterior separando las contribuciones de tensiones de compresión y tracción en el daño. Para ello se definen dos variables de daño  $d^+$  y  $d^-$  asociadas a las tensiones de tracción y compresión, respectivamente. Ello exige definir también una ley de evolución diferente para cada variable de daño. Este modelo es útil para reproducir con precisión el comportamiento no lineal del hormigón bajo altas tensiones de compresión y bajo cargas cíclicas que provocan estados de tensiones de tracción y compresión alternados. Situaciones prácticas de este tipo se encuentran en el análisis no lineal de estructuras de hormigón bajo cargas dinámicas [24-27].

## 4. ANÁLISIS NO LINEAL DE ESTRUCTURAS POR EL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS CON UN MODELO DE DAÑO ISÓTROPICO

El modelo de daño isótropo es extremadamente simple en comparación con modelos no lineales más sofisticados. La implementación en un programa de elementos finitos sigue el proceso general [72-73]:

a) Discretización en elementos finitos de la estructura. Interpolación del campo de desplazamientos  $u$  dentro de cada elemento en función de los desplazamientos nodales  $a$

$$u = N a \quad (12)$$

donde  $N$  es la matriz de funciones de forma.

b) Discretización de los campos de deformaciones y tensiones por

$$e = Lu = LNa = Ba \quad (13)$$

$$s = (1-d)De = (1-d)DBa \quad (14)$$

donde  $L$  es el operador de deformaciones apropiado y  $B$  es la matriz de deformaciones [72,73].

c) Obtención de las ecuaciones (no lineales) de la discretización. Sustituyendo las ecs.(12)-(14) en el principio de los trabajos virtuales

$$\int_V \delta e^T s \, dV = \int_V \delta u^T b \, dV + \int_S \delta u^T t \, dS \quad (15)$$

conduce tras operar a

$$? = p - f \quad (16)$$

$$p = \int_V B^T s \, dV \quad (17)$$

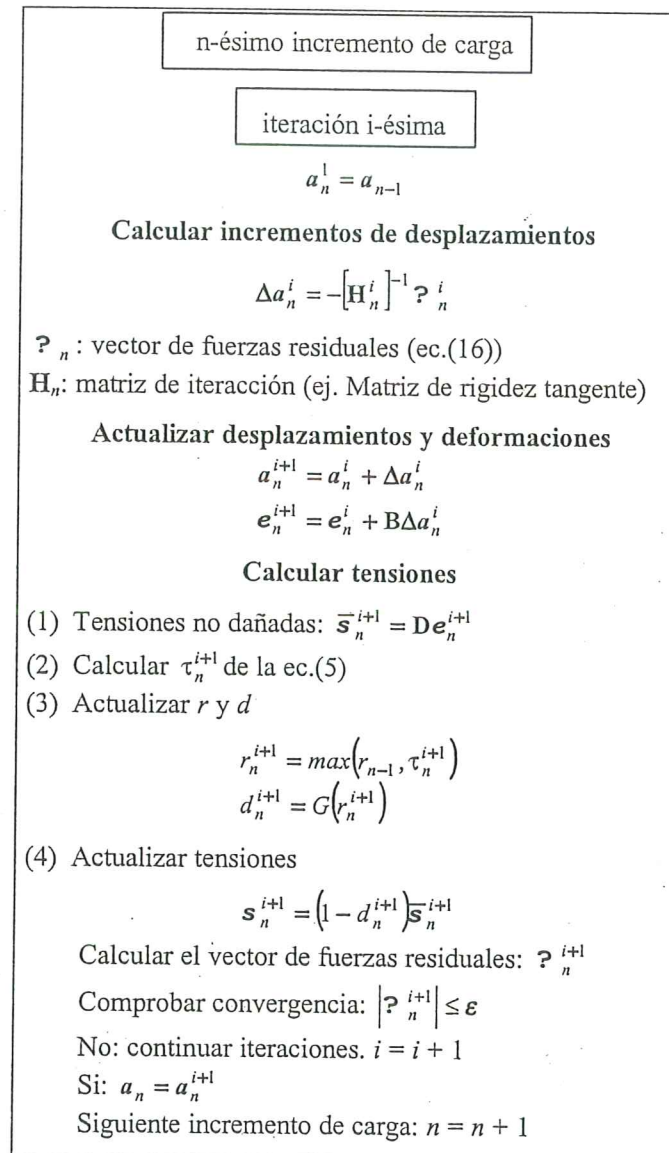
$$f = \int_V N^T b \, dV + \int_S N^T t \, dS \quad (18)$$

En las ecuaciones anteriores  $b$  y  $t$  son los vectores de fuerzas másicas y de superficie, respectivamente,  $\delta e$  y  $\delta u$  son los vectores de deformaciones y desplazamientos virtuales y  $?$  es el vector de fuerzas residuales que expresa el equilibrio entre el vector de fuerzas exteriores  $f$  e interiores  $p$ .

El sistema de ecuaciones (16) es no lineal debido a la dependencia de las tensiones con el parámetro de daño. La solución del sistema puede hacerse mediante un proceso iterativo incremental tipo Newton-Raphson [73]. En el Cuadro 1 se presentan las etapas básicas de la solución del problema no lineal con el modelo de daño.

Uno de los aspectos a destacar en la formulación de daño es que no se requiere de un algoritmo especial para integración de la ecuación constitutiva como ocurre en los modelos elato-plásticos, y las tensiones se calculan directamente en función del nivel de deformación y del parámetro de daño por la ecuación (14).





Cuadro 1. Esquema de solución cuasiestática no lineal por el método de elementos finitos con un modelo de daño isótropo.

## 5. CONCEPTO DE DAÑO GLOBAL

La capacidad resistente global de una estructura puede evaluarse mediante un índice de *daño global*  $D$ . Una posible definición de este índice es la siguiente [34,35]

$$D = 1 - \frac{U}{\bar{U}} \quad (19)$$

donde  $U$  y  $\bar{U}$  son las energías de deformación de la estructura dañada y la estructura intacta, respectivamente, definidas por

$$\begin{aligned} U &= a^T \int_V B^T s \, dV = a^T \int_V B^T (1-d) \bar{s} \, dV \\ \bar{U} &= a^T \int_V B^T \bar{s} \, dV \end{aligned} \quad (20)$$

Las integrales anteriores se obtienen por suma de las contribuciones elementales en la forma usual.

Adviértase que la pérdida total de la capacidad resistente de la estructura corresponde a un valor de  $D = 1$ . Este valor se alcanza cuando se produce una pérdida de rigidez en una zona o zonas de la estructura por acumulación de daño local, de manera que se produce el colapso de esa zona (que puede coincidir o no con toda la estructura) a través de un mecanismo de rotura que absorbe toda la deformación de la estructura. Es importante remarcar que el índice de daño global puede calcularse para una parte de la estructura (una planta, un conjunto de pilares, etc.), así como para la estructura completa. De esta forma puede evaluarse la influencia de dicha parte en el comportamiento no lineal de toda la estructura.

El cálculo de los índices de daño local y global proporciona unos indicadores muy útiles para seguir en detalle la evolución de la pérdida de rigidez de la estructura, a nivel de cada punto y a nivel general, hasta la ruina total.

## 6. INCLUSIÓN DEL EFECTO DE LAS ARMADURAS

Para el acero de las armaduras es usual aceptar un comportamiento elasto-plástico clásico con una ley de endurecimiento obtenida de ensayos experimentales. Si se utiliza un modelo estructural de lámina, el efecto de las armaduras puede incluirse a través de una formulación de capas en la que a cada capa que discretiza el espesor se le asignan las propiedades del hormigón o del acero, como si se tratara de un material compuesto laminado. El modelo de capas es también aplicable en piezas prismáticas, si bien en este caso es más preciso utilizar un modelo de celdas para discretizar la sección transversal. Si se utilizan sólidos tridimensionales el efecto del acero se incluye también a través de capas con la cuantía de acero equivalente. Dichas capas se asignan a superficies interiores al elemento, sobre las que se efectúa integración numérica dentro del proceso del cálculo de la matriz de rigidez sobre el volumen del elemento. Para más detalles consultar las referencias [4-8,34,35,70].

## 7. ACOPLAMIENTO DE EFECTOS DE DEGRADACIÓN AMBIENTAL EN LOS MODELOS DE DAÑO

Además de los mecanismos de deterioro de naturaleza mecánica, en estructuras de hormigón y mampostería suelen ocurrir otros tipos de mecanismos de daño de origen físico-químico-biológico. Estos últimos se deben generalmente a la interacción entre el medio ambiente y el material construido.

El acoplamiento entre los efectos ambientales y las características resistentes del hormigón pueden tenerse en cuenta en el modelo de daño, modificando la ec.(3) como

$$\sigma = \beta (1-d) E \varepsilon \quad (21)$$

donde  $\beta$  es un parámetro de daño ambiental (físico-químico-biológico) tal que  $\beta_c < \beta < 1$ . El valor de  $\beta$  se aproxima al valor inferior límite  $\beta_c$  cuando el proceso de degradación ambiental alcanza su nivel máximo.

Claramente el efecto de  $\beta$  es el de reducir la resistencia del material. La evolución de  $\beta$  depende de la humedad, la temperatura y las especies agresivas dentro del material poroso. Los parámetros físicos en este proceso de difusión dependen también del nivel de degradación



del material a través de la variable de daño  $d$  y el problema está totalmente acoplado. Un estudio completo requiere el análisis por elementos finitos de las ecuaciones diferenciales que gobiernan la difusión de las especies agresivas, con las ecuaciones que gobiernan la resistencia de la estructura. En las referencias [37,38] se pueden encontrar algunas aplicaciones preliminares de este modelo de daño mecánico-ambiental al análisis de estructuras de hormigón y edificios históricos.

## 8. PROBLEMAS DE LOCALIZACIÓN DE DEFORMACIONES EN ANÁLISIS DE FRACTURAS EN SÓLIDOS

Oliver *et al.* [16-23] han desarrollado modelos teóricos y numéricos para el análisis de discontinuidades por formación de bandas de localización de deformaciones en sólidos. El modelo de localización discontinuo se describe mediante la cinemática de discontinuidad fuerte, caracterizada por la presencia de una superficie de discontinuidad en la que el campo de deformaciones compatible no está acotado. Este modo de localización discontinuo se considera como el límite del modo continuo, caracterizado por una banda de localización de ancho finito que tiende a cero a medida que se localiza la discontinuidad. La cinemática de discontinuidad fuerte impone restricciones adicionales al estado de tensión-deformación en los puntos de la discontinuidad, de tal forma que las relaciones constitutivas convencionales entre tensiones y deformaciones se transforman en relaciones de tipo discreto entre tracciones y saltos de desplazamientos en la interfaz de la discontinuidad.

El modelo de localización discontinuo y su implementación en un código de elementos finitos general, permiten representar el proceso de colapso estructural por localización, sin necesidad de utilizar técnicas de remallado adaptable o mallas pre-diseñadas "a priori". En las referencias [22,23,69] se describen con detalle las bases teóricas del modelo, así como diversos ejemplos de aplicación en el estudio de problemas de colapso de suelos y estructuras de hormigón.

## 9. MODELO DE MEZCLAS PARA ANÁLISIS DE FRACTURA EN MATERIALES COMPUESTOS

Oller *et al.* [51-57] han desarrollado una metodología para análisis del comportamiento no lineal de materiales compuestos. Para ello formularon primeramente un modelo para reproducir el comportamiento de materiales anisótropos fuera del rango lineal. El modelo se basa en establecer una relación entre el comportamiento anisótropo del material real con el de un material isótropo ficticio. Todas las expresiones del modelo se formulan para el material isótropo, utilizando principios de la teoría clásica de la elasto-plasticidad, e incluyendo efectos de degradación a través de la teoría de daño. Las ecuaciones del modelo anisótropo se obtienen por transformación de las expresiones en el espacio isótropo. El modelo anisótropo se combina con la teoría de mezclas para caracterizar materiales compuestos. El modelo de mezclas no lineal resultante se ha desarrollado por Car *et al.* [58-60] para el análisis del comportamiento no lineal hasta la rotura de estructuras con materiales compuestos.

## 10. EJEMPLOS

Los ejemplos siguientes muestran algunas aplicaciones de los modelos descritos en los apartados anteriores.



### 10.1 Placa plana bajo cargas diagonales

Este ejemplo muestra la capacidad del modelo de daño del Apartado 3 combinado con la técnica de análisis de discontinuidad fuertes [16-23], para el estudio de propagación de fracturas en el hormigón.

En la Figura 6 se muestra la geometría de la placa sometida a dos fuerzas diagonales  $F_1$  y  $F_2$ . Inicialmente se incrementa la fuerza diagonal  $F_2$  monótonamente hasta el valor de 3.78 KN. El valor de  $F_1$  se incrementa también en esta fase de manera que el cociente  $F_1/F_2=0.6$ . Tras ello se mantiene  $F_2$  constante y se aumenta la apertura de la fisura en la entalla de manera controlada. En la Figura 6 se muestra la malla de análisis formada por elementos triangulares de 3 nodos en tensión plana. Asimismo se muestra el mapa de desplazamientos que indica claramente el camino de evolución de la fisura. Finalmente se presenta el valor de la fuerza horizontal  $F_1$  con la apertura de la fisura. Los resultados comparan bien con los experimentales. Los detalles se presentan en la ref. [23].

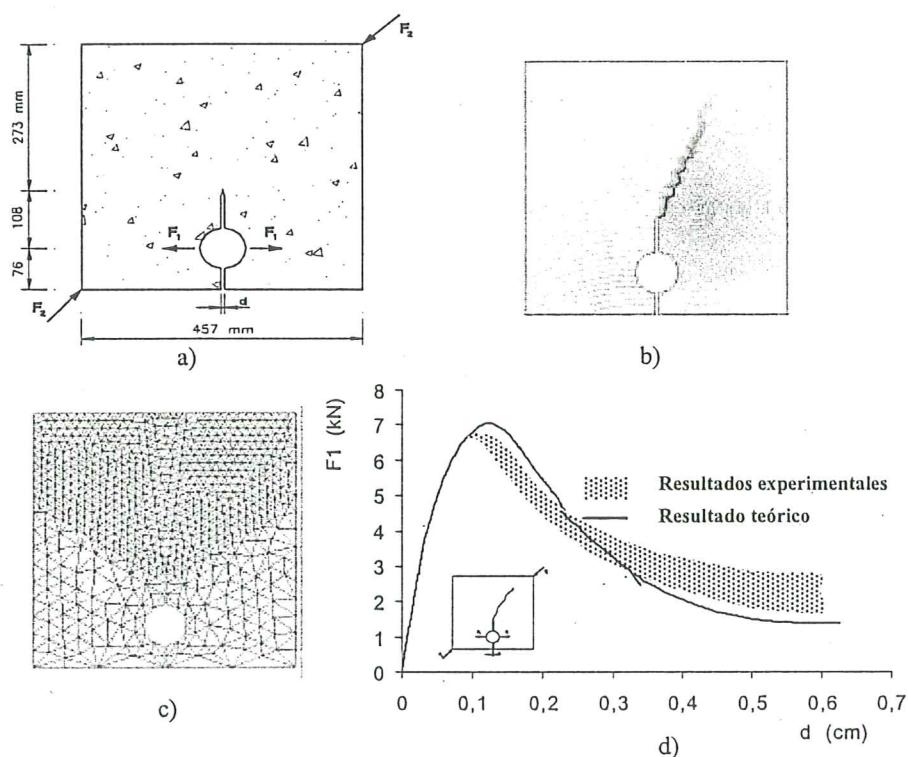


Fig. 6. Rotura de una placa bajo cargas diagonales. a) Geometría; b) Líneas de igual desplazamiento; c) Malla de elementos finitos; d) Curva  $F_1$ - $d$  (apertura de la entalla)

### 10.2 Flexión de viga entallada sometida a fuerzas en cuatro puntos

El modelo de daño del ejemplo anterior se aplicó por Manzoli [22,69] el ensayo de flexión de la viga entallada sometida a fuerzas aplicadas en cuatro puntos, como ilustra la Figura 7. Los datos elegidos para el estudio del modelo corresponden al ensayo experimental realizado por Arrea y Ingraffea [74]. Se ha empleado una malla no estructurada formada por elementos finitos triangulares lineales de tensión plana. Se ha considerado que las piezas de acero

utilizadas para transferir la carga a la viga se comportan elásticamente, presentado un módulo de elasticidad cien veces superior al de la viga.

Los resultados experimentales se obtuvieron mediante el control del desplazamiento vertical relativo  $\delta$  entre los labios de la entalla (Figura 7). El análisis numérico se ha llevado a cabo mediante el control de la componente vertical del desplazamiento del labio derecho de la entalla. Se ha considerado una ley de ablandamiento exponencial. Los detalles pueden encontrarse en [22,69].

En la Figura 8 se exponen los resultados experimentales y numéricos correspondientes a la evolución de carga  $P$  aplicada en función del desplazamiento relativo  $\delta$ , donde se puede apreciar la satisfactoria concordancia de la predicción numérica con los resultados experimentales.

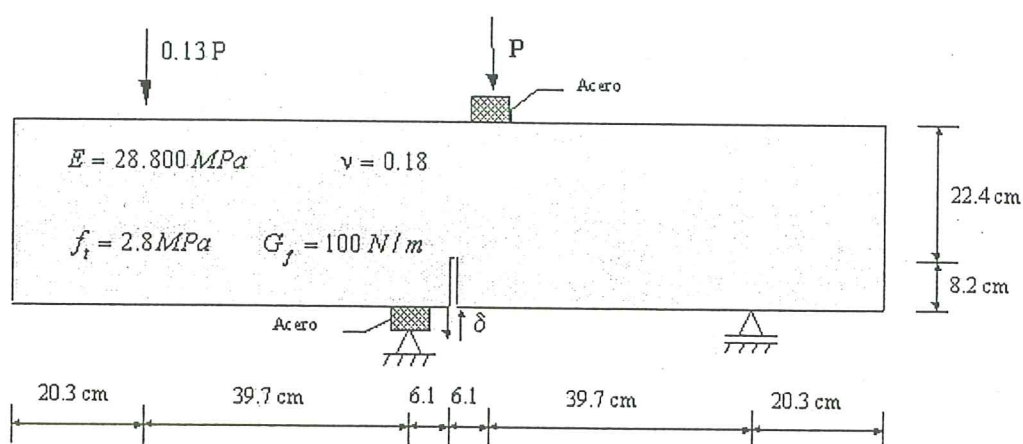


Fig. 7. Ensayo de fractura en modo mixto

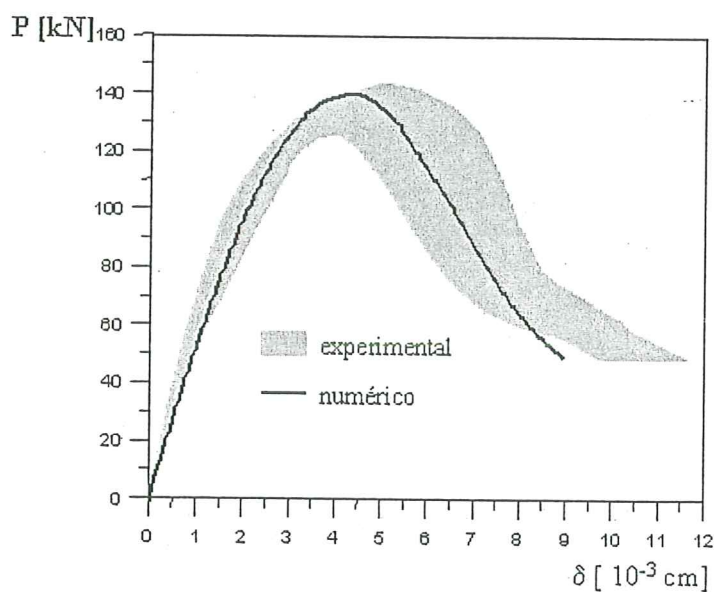


Fig. 8. Viga entallada. Curvas de carga versus desplazamiento obtenidas experimental y numéricamente.

La Figura 9 muestra las líneas de discontinuidad obtenidas experimentalmente y mediante la formulación numérica propuesta, donde se puede observar la excelente predicción numérica de la posición de la línea de discontinuidad.

En la Figura 10 se muestra la malla de elementos finitos deformada en la etapa final del proceso de carga. Asimismo se presentan los contornos de iso-desplazamientos horizontales en la malla deformada.

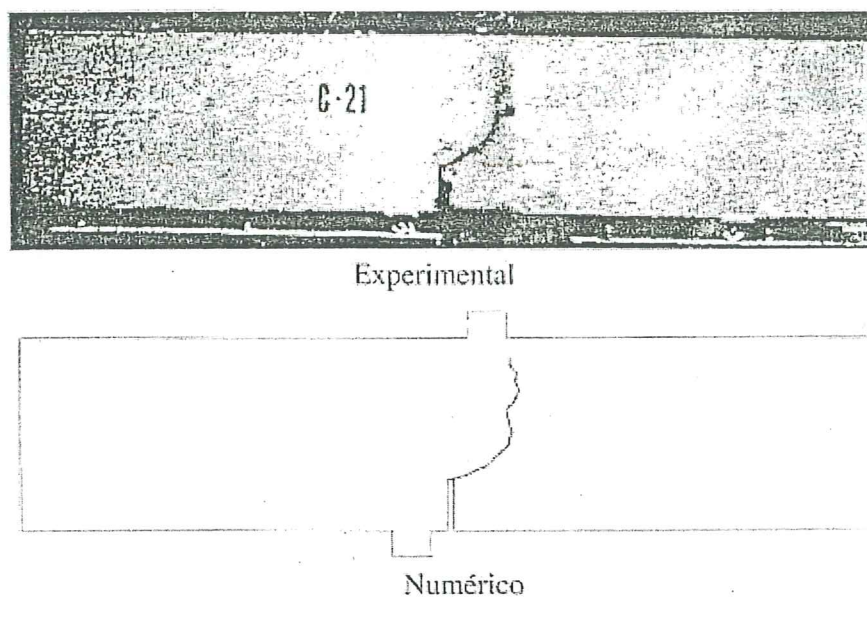


Fig. 9. Trayectoria de la línea de discontinuidad: a) resultado experimental. b) Predicción numérica.

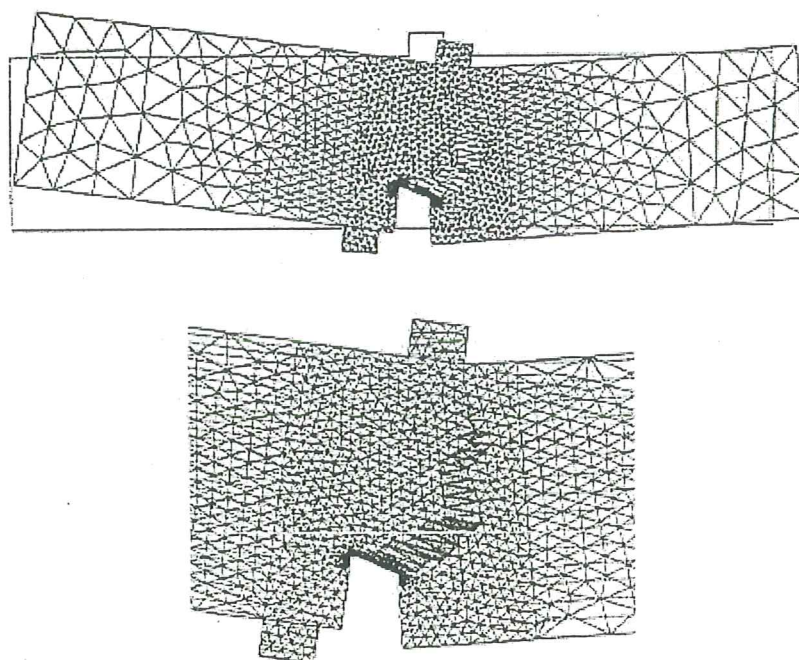


Fig. 10. Resultados numéricos del ensayo de fractura en modo mixto.



### 10.3 Capa de suelo no drenado sometido a la presión ejercida por una zapata rígida

En este ejemplo el modelo de daño con la técnica de localización de discontinuidades se aplica al problema geotécnico clásico de una capa de suelo no drenada sometida a la presión vertical ejercida por una zapata rígida [22,69]. Se consideran impedidos los desplazamientos relativos en la interfaz zapata-suelo. Se analizan las situaciones de carga simétrica y no simétrica (Figuras 11 y 12). Zienkiewicz, Huang y Pastor [75] analizaron este ejemplo mediante la estrategia de remallado adaptable para capturar la formación de líneas de deslizamiento, considerando plasticidad perfecta.

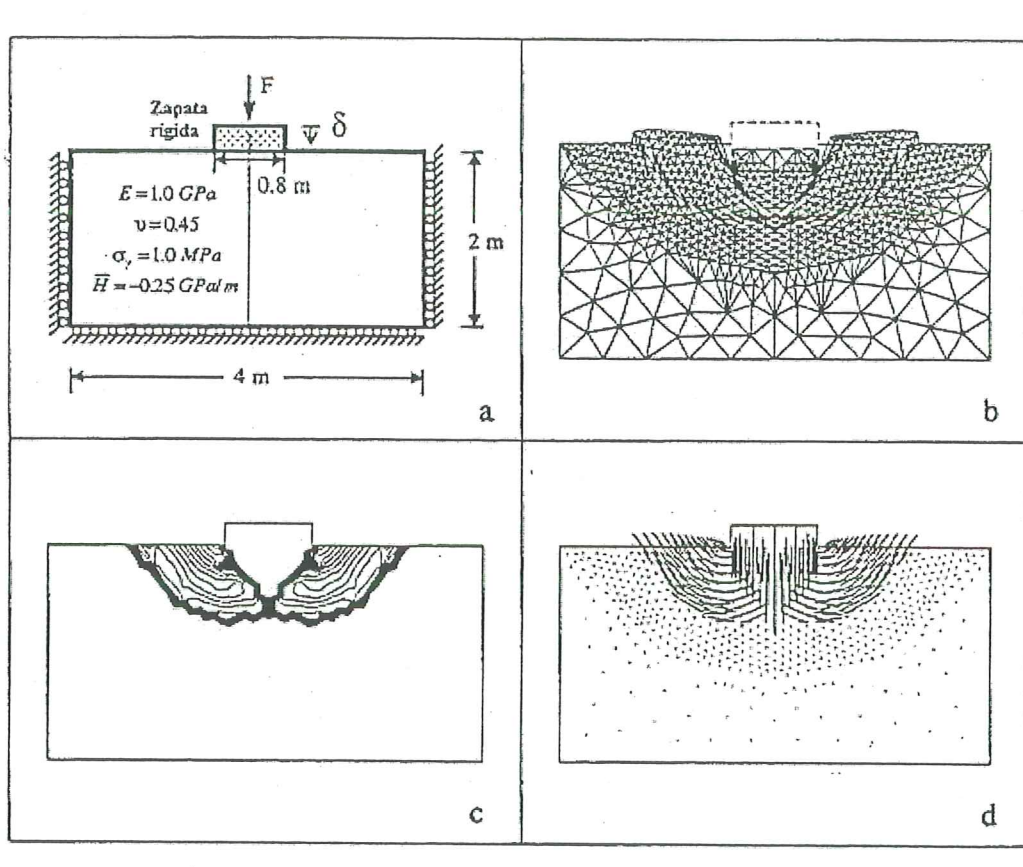


Fig. 11. Colapso de una capa de suelo. Resultados del caso no drenado simétrico.

En el presente análisis se considera la condición de deformación plana, eligiendo el desplazamiento vertical  $\delta$  del punto de aplicación de la carga como variable de control del proceso de carga. Se ha adoptado  $\nu = 0.45$  para simular la respuesta elástica y el modelo elasto-plástico de von Mises para describir el comportamiento no lineal del suelo no drenado. Con objeto de obtener grandes deformaciones plásticas antes de la formación de la discontinuidad, se ha empleado el modelo de localización del Apartado 8, definiendo una rama de plasticidad perfecta para representar el comportamiento en la fase *pre-bifurcación* e imponiendo bifurcación cuando la deformación plástica equivalente alcanza un valor límite. La zapata se considera elástica con un módulo de Young  $10^4$  veces superior al del suelo.

Se han empleado elementos finitos triangulares cuadráticos en estado de deformación plana.

La Figura 11a muestra la geometría, la carga y los datos del material que se han considerado en el análisis. Se ha supuesto que los desplazamientos horizontales de los nodos pertenecientes a la línea de simetría están prescritos, evitando, de este modo, posibles mecanismos de colapso no simétricos que este tipo de carga puede generar. La Figura 11b muestra la malla de elementos finitos en la fase final del proceso de carga y la Figura 11c muestra los contornos de iso-desplazamiento, donde se puede apreciar la existencia de dos líneas de deslizamiento que se inician en las esquinas de la zapata y se cruzan en un punto del eje de simetría. En la Figura 11d, mediante los vectores de desplazamientos nodales, se puede observar el mecanismo de colapso del problema. La cuña triangular de suelo bajo la zapata se desplaza verticalmente de modo solidario con ésta, induciendo el movimiento de expulsión de las dos cuñas laterales, que deslizan con respecto al resto del sólido que permanece prácticamente indeformado.

La Figura 12 corresponde al caso de carga excéntrica. La geometría y los parámetros del material son los mismos utilizados anteriormente. Las Figuras 12b, 12c y 12d muestran la configuración deformada de la malla, los contornos de iso-desplazamiento y los vectores de desplazamientos nodales, respectivamente, en la fase final. En este caso se desarrolla sólo una línea de discontinuidad, permaneciendo solidaria la zapata a una cuña de suelo con forma aproximada de un semi-círculo, la cual experimenta una rotación respecto al resto del suelo que permanece casi indeformado.

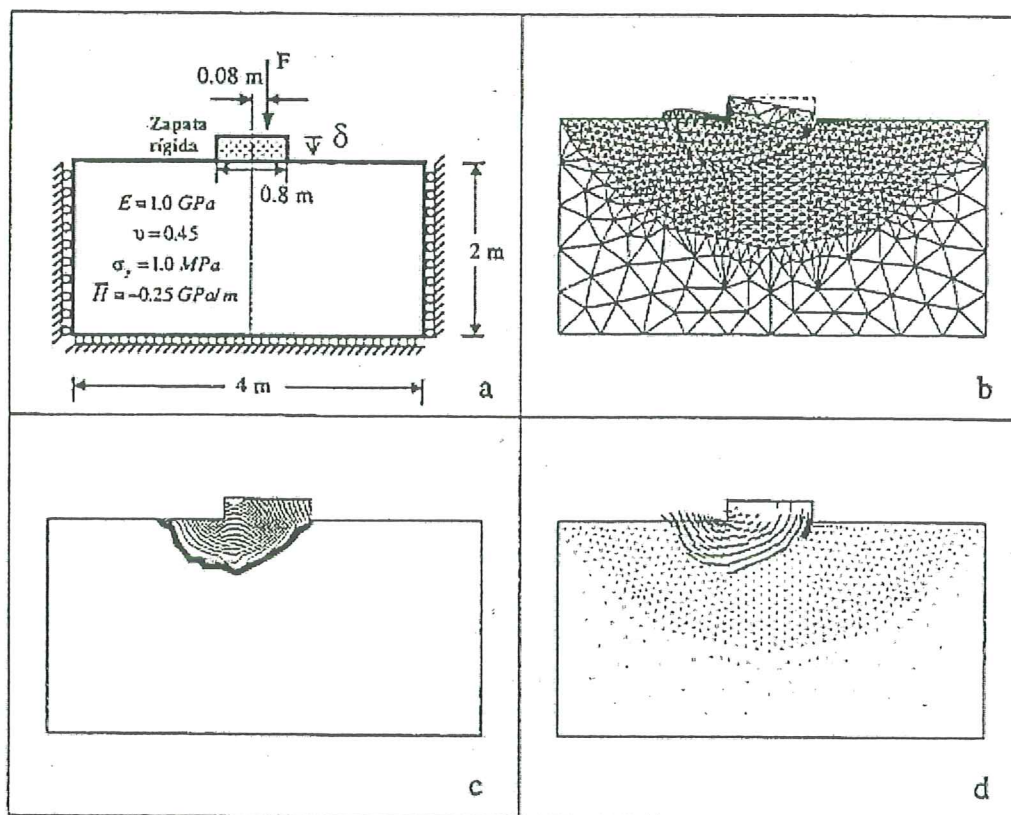


Fig. 12. Colapso de una capa de suelo. Resultados del caso no drenado asimétrico.

La figura 13 ilustra las curvas fuerza *versus* desplazamiento vertical  $\delta$  para las dos situaciones de carga. En el caso simétrico, la carga crítica  $F_{cr} = 2300$  KN es ligeramente inferior a la carga crítica  $F_{cr} = 2374$  KN, predicha por Prandtl en 1921 (ver Chen 1975). La carga máxima correspondiente al caso excéntrico es aproximadamente un 25% inferior a la que se obtiene para el caso simétrico. Para más detalles sobre este ejemplo, consultar las referencias [22,69].

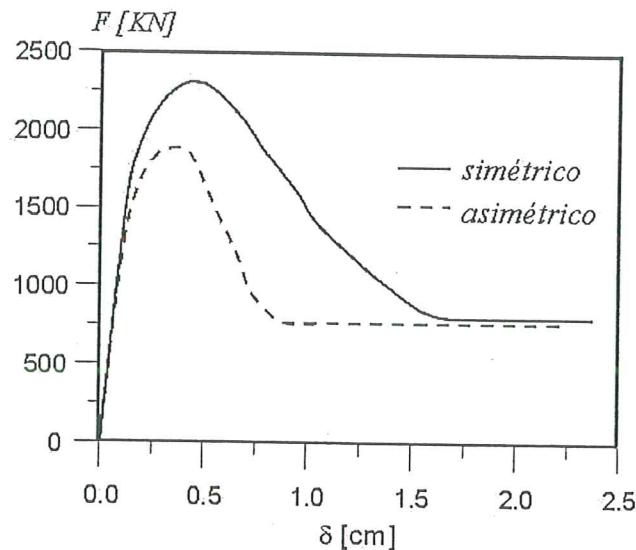


Fig 13. Colapso de una capa de suelo no drenado. Evolución de la carga en los casos simétricos y asimétrico.

#### 10.4. Pórtico plano sometido a acciones estáticas

Este ejemplo estudia la evolución del daño en el pórtico plano de hormigón armado de la Figura 14a sometido a cargas estáticas y sísmicas. En este problema se utilizó el sencillo modelo de daño isótropo para el hormigón, combinado con un modelo elasto-plástico para el acero siguiendo lo explicado en los Apartados 2-6 [30,34,35]. El pórtico tiene una altura de 9 metros, un ancho de 6 metros y es de 3 niveles. Los pilares tienen una sección transversal de 30 cm por 30cm de hormigón armado con una cuantía de 4.35% de acero. Las vigas tienen un canto de 40cm y un ancho de 30cm con una cuantía de armado de 5.3%. Los materiales utilizados tienen las siguientes propiedades:

Acero	Hormigón
$E = 2.1 \cdot 10^6$ daN/cm <sup>2</sup>	$E = 2.0 \cdot 10^5$ daN/cm <sup>2</sup>
$\sigma^o = 4200$ daN/cm <sup>2</sup>	$\sigma^o = 300$ daN/cm <sup>2</sup>
$\nu = 0.25$	$\nu = 0.17$
$\rho = 8$ g/cm <sup>3</sup>	$\rho = 2.5$ g/cm <sup>3</sup>



Título:  
From AutoCAD Drawing "C:\Dibujos\CIMNE\OÑATE\Oñate14.dwg"  
Autor:  
AutoCAD  
Vista previa:  
No se guardó esta imagen EPS  
incluyendo una vista previa.  
Comentario:  
Esta imagen EPS se imprimirá en una  
impresora PostScript, pero no en  
otros tipos de impresora.

Fig. 14. (a) Geometría del pórtico. (b) Curva fuerza- desplazamiento. (c) Evolución de los índices globales de daño de los tres pisos y de la estructura entera. (d) Evolución de los índices globales de daño del primer piso y de sus tres pilares. Curvas: A Pórtico entero. B: Primer piso; C: Segundo piso y D: Tercer piso.

La estructura se discretiza en 45 elementos finitos cuadráticos de pieza de Timoshenko de tres nodos. Cada elemento finito tiene una longitud de 1.0m y su sección está dividida en 20 capas de igual espesor. La segunda y la decimonovena capa son de acero y las demás son de hormigón. La cuantía de acero se controla variando el ancho de las capas de acero. El estado del material se verifica en los puntos de contacto entre capas, de manera separada en cada capa y luego se interpola linealmente sobre el espesor de la capa.

El análisis realizado ha sido estático, tratando de simular un ensayo típico de empuje lateral aplicando un desplazamiento horizontal en el extremo superior izquierdo del pórtico hasta un

valor de 4% de la altura total del mismo, que es el rango admisible de variación en una prueba de este tipo. En este estudio se considera para el acero un comportamiento elasto-plástico perfecto.

La Figura 14b muestra la evolución de la fuerza aplicada sobre el pórtico en función del desplazamiento del punto de aplicación de la carga. La evolución de los índices globales de daño de los pisos y del pórtico entero se presenta en la Figura 14c. El estudio conjunto de estos dos gráficos permite observar que hay dos tramos donde la reducción brusca de la fuerza aplicada se corresponde con aumentos instantáneos de los índices globales de daño total y del primer piso y, en mucho menor medida, de los demás pisos. La explicación se encuentra en la historia de degradación del pórtico que puede verse detalladamente en la Figura 14d.

Los pilares del primer piso son evidentemente las zonas donde ocurrirá el fallo estructural, puesto que el momento flector alcanza su máximo en la unión con la base de sustentación. Sin embargo, los pilares no fallarán a la vez, ya que el más solicitado es el primero por la izquierda, que soporta además del momento flector el mayor esfuerzo axial de tracción. Los esfuerzos de tracción son relevantes aquí debido a la menor resistencia del hormigón a este tipo de sollicitación. El primer pilar es el más solicitado y, a medida que va cediendo, el segundo pilar va absorbiendo su carga. A partir de cierto nivel de carga, el hormigón cede con fragilidad en estos dos pilares con la consiguiente transferencia de carga hacia el tercero, que sufre una degradación paulatina. Este es el momento de la primera discontinuidad en la curva fuerza-desplazamiento. La segunda discontinuidad ocurre algo más tarde, cuando el hormigón del tercer pilar sufre el mismo fenómeno y prácticamente desaparece a efectos de rigidez. El análisis efectuado permite destacar la capacidad del índice global de daño propuesto de describir adecuadamente el estado estructural. Se observa que dicho índice sigue de cerca la evolución del índice del primer piso que es el que define el estado de fallo global de la estructura. Este resultado demuestra que el índice global de daño de la estructura se comporta como si tuviera asignados pesos en función de la importancia de las distintas zonas estructurales.

En la Figura 15 se presentan dos deformadas con sus correspondientes distribuciones de daño elemental, es decir, de los índices globales de daño de un elemento finito. La primera deformada recoge el momento anterior al primer salto en la curva fuerza-desplazamiento, cuando todavía se mantiene la forma característica al estado elástico y una distribución casi uniforme del daño. La segunda deformada corresponde al momento final, donde pueden apreciarse las rótulas plásticas en las extremidades de los tres pilares del primer piso. Las distribuciones de daño elemental muestran máximos en los elementos que contienen dichas rótulas.

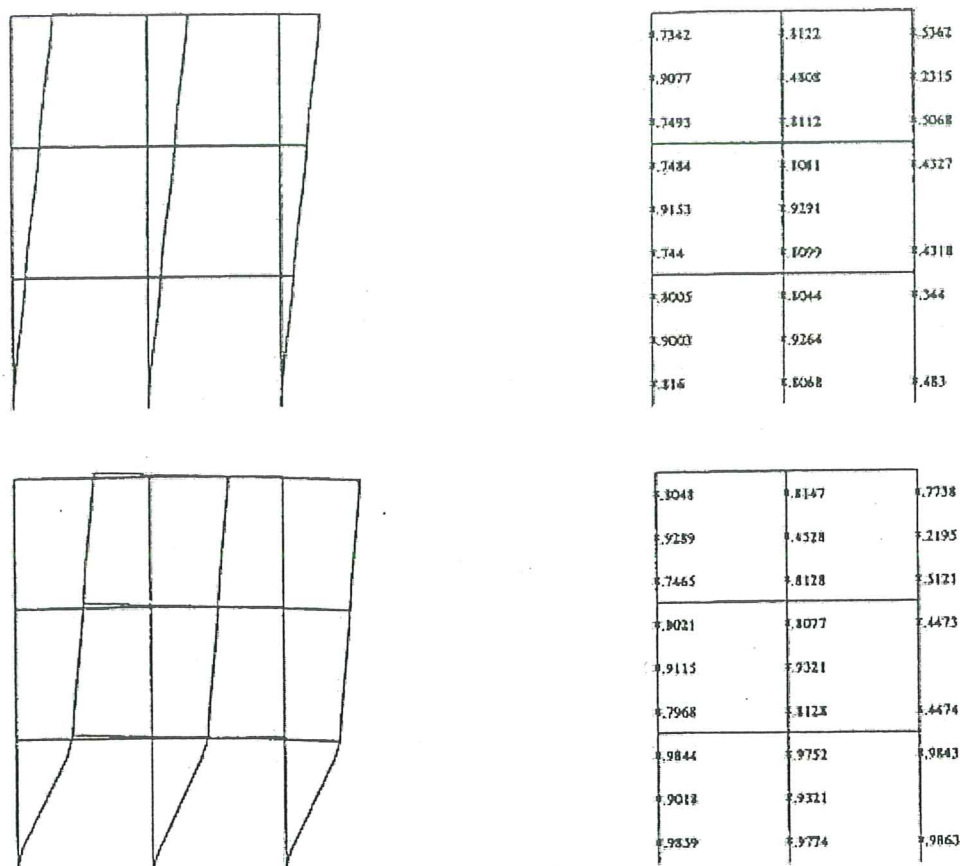


Fig. 15. Deformada y distribución de daño en dos momentos característicos de la historia de carga.

### 10.5 Análisis de una planta de un edificio de viviendas

El mismo modelo de daño del ejemplo anterior se utilizó para analizar la estructura de un edificio del polígono Marina Besós de Sant Adrià del Besós, ciudad cercana a Barcelona. La estructura está formada por 5 plantas, con 2 viviendas simétricas por escalera. La Figura 16 muestra la discretización en elementos finitos hexahédricos de 20 nodos de la planta analizada [34,35].

La sección del forjado que define la estructura resistente de hormigón armado condiciona la malla de elementos finitos representada en la Figura 16, de manera que hay un esqueleto resistente formado por viguetas de 15 cm de ancho alternando con elementos de relleno (entreviguetas) de 55 cm de ancho. Los elementos estructurales armados son dichas viguetas junto con las vigas planas contenidas en el forjado de 28 cm de altura y entre 50 y 80 cm de ancho y los pilares cuyas secciones son de 50 x 50 cm.



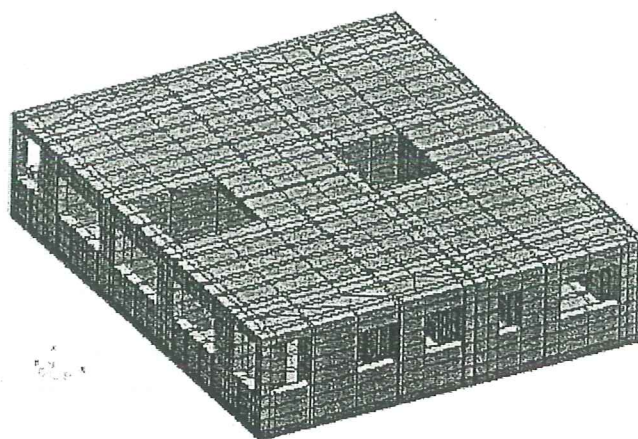


Fig. 16. Planta de un edificio de viviendas. Discretización en elementos finitos.

La problemática de este edificio es que poco tiempo después de acabarse su construcción y siendo ya habitado aparecieron fisuras que han ido aumentando hasta que en el momento del estudio se habían transformado en grietas importantes. Este hecho ha motivado un estudio de la estructura en su totalidad que se realizó en dos etapas: reconocimiento y observación del estado de la estructura y modelización de la estructura para poder simular numéricamente su comportamiento. La carga aplicada en la simulación numérica ha consistido del peso propio de la estructura más una presión de  $100\text{kg/m}^2$  sobre el forjado y el techo. Dicha presión corresponde a un factor de carga de 1 y ha sido aumentada hasta producirse el fallo estructural.

Para las grietas más importantes que se han producido en los tabiques se ha obtenido una excelente correlación entre los resultados del cálculo y las observaciones (Figuras 17a y 17b), identificándose las fisuras en la misma zona que la observada, pero para un factor de carga de 4 veces la carga de servicio. Esto significa que el forjado de la planta es mucho más flexible de lo esperado, ya que los tabiques interiores no están sostenidos por ninguna columna. Dado que la carga última ha sido de 5.9 veces el peso propio, puede concluirse que la estructura tiene de un índice de seguridad de 1.45 y que el estado real y las rigideces de los elementos estructurales son los correspondientes a la configuración calculada para 4 veces el peso propio.

Basándose en este resultado se inició una campaña de verificación del estado del forjado y sobre todo de las viguetas que son su principal elemento de rigidez. Los resultados del muestreo entre las viguetas han mostrado importantes desviaciones con respecto las prescripciones de proyecto sobre distancia entre armaduras, lo que disminuye la rigidez de las viguetas de manera importante.

La Figura 17c muestra la deformada obtenida en el ensayo numérico. Puede notarse que los mayores desplazamientos se producen en el centro del forjado, con un gradiente muy importante a lo largo de los tabiques, lo que provoca una solitación importante de cortante en estos últimos con la rotura característica a  $45^\circ$  (ver también la Figura 17b).

La evolución de los índices de daño globales de toda la planta y de sus componentes se muestra en Figura 17d. Se resalta que los elementos de hormigón armado (vigas, viguetas y pilares) tienen índices de daño globales mucho más bajos y el índice de toda la estructura se

ve fuertemente influido por las zonas sin armar (tabiques y entreviguetas). Esto demuestra que estos últimos elementos estructurales tienen un papel fundamental en el comportamiento del conjunto y de su estado depende la funcionalidad de la vivienda estudiada.

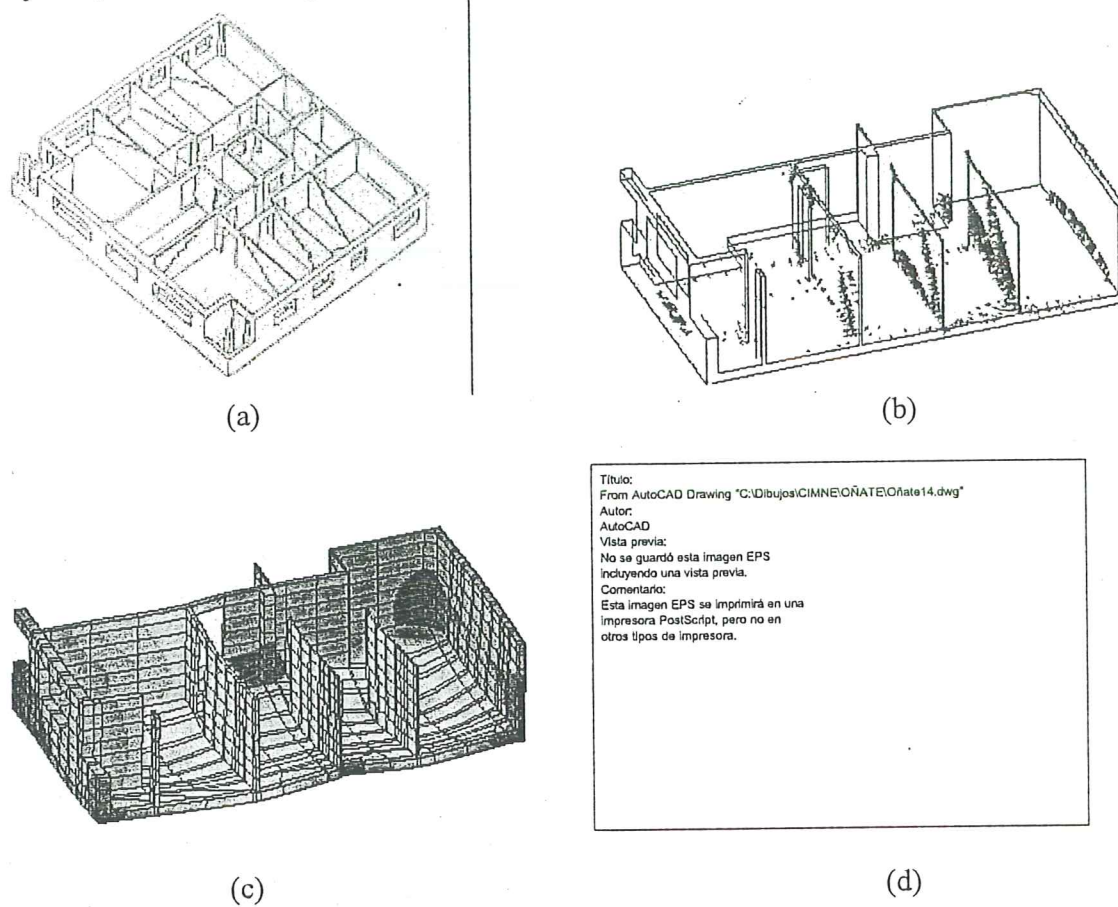


Fig. 17. a) Fisuras detectadas visualmente. b) Puntos dañados calculados. c) Deformada de la estructura. d) Evolución de varios índices globales de daño. Curvas: A: Estructura entera; B: Viguetas; C: Entreviguetas; D: Pilares; E: Vigas y F: Tabiques.

### 10.6 Análisis de la fisuración progresiva en una presa de gravedad por entumecimiento del hormigón

El estudio se realizó sobre la presa de gravedad de Mequinenza en España de 461 m de longitud y 79 m de altura. La construcción de la presa se inició en 1962 y finalizó en 1967. Desde el inicio de las operaciones hidráulicas en 1967, se detectaron movimientos aguas abajo inesperados, acompañados de una intensa fisuración en el cuerpo de presa. De la instrumentación y control se concluyó que la razón de ese comportamiento anómalo era el alto entumecimiento (expansión) del hormigón en presencia de agua, lo que condujo a un efecto progresivo de fisuración y entrada de agua en el cuerpo de la presa (Figura 18a). En 1984 se inició un estudio en la Escuela de Ingenieros de Caminos de Barcelona para modelar el comportamiento no lineal de la presa y predecir el futuro de la estructura. El estudio consistió en dos etapas. En primer lugar se realizó un análisis bidimensional (2D) de la zona de la presa más dañada utilizando un modelo de fisura distribuida fija [9]. Tras ello, se llevó a cabo un estudio tridimensional incluyendo la interacción de los diferentes bloques de hormigón a través de las juntas de construcción utilizando un modelo de daño isótropo [24-27].



La sección escogida para el análisis 2D se muestra en la Figura 18b. La sección se divide en dos zonas: la zona C (correspondiente a los apoyos del aliviadero) se consideró en estado de tensión plana, mientras que el resto de la sección se analizó en deformación plana. En la sección se incluyó el efecto de una junta de construcción vertical, cerca del plano de drenaje. El hormigón situado aguas abajo de dicho plano se supuso libre del efecto del entumecimiento, al permanecer seco. La Figura 18c muestra la sencilla malla de elementos finitos cuadriláteros de ocho nodos utilizada para el análisis. Para este estudio se utilizó un modelo de fractura de hormigón basado en el modelo de fisura distribuida fija explicado en el Apartado 2.

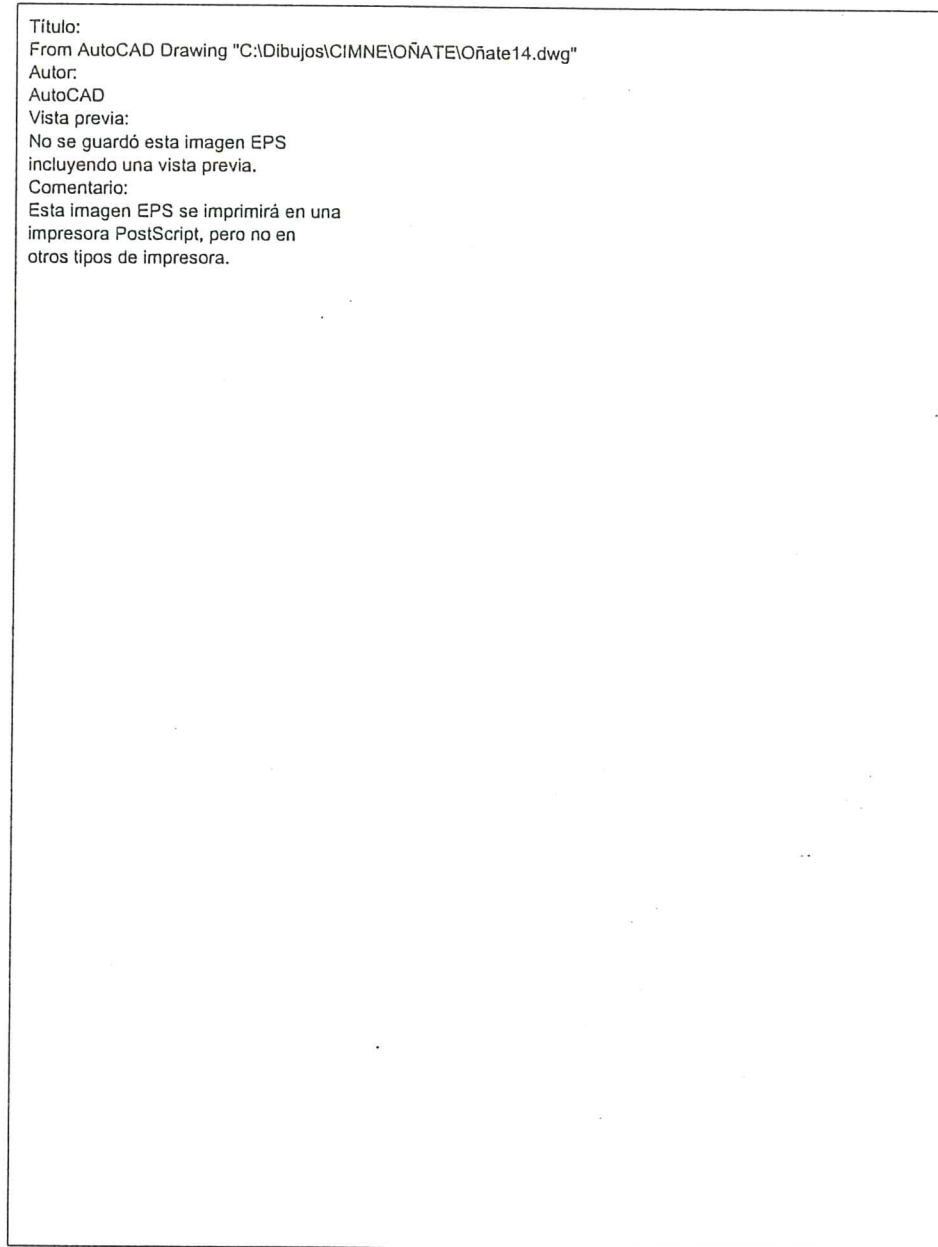


Fig. 18. Análisis 2D de la presa de Mequinenza. a) Mecanismo de fisuración y entrada del agua progresiva por entumecimiento del hormigón; b) Zonas de extracción de testigos; c) Curvas de entumecimiento del hormigón extraído de las zonas de la figura (b); d) Malla de elementos finitos cuadriláteros de 8 nodos utilizada para el análisis; e) Resultados numéricos y experimentales del desplazamiento horizontal en diversos puntos.



En la Figura 18c se muestran las curvas de expansión libre del hormigón obtenidas de ensayos en probetas extraídas del cuerpo de la presa. La máxima expansión se detectó en la zona A (Figura 18b) con un máximo de 0.125%, lejos del valor usual de 0.03% que se detectó en otras zonas. En la Figura 18e se muestran gráficos de las medidas experimentales a lo largo de 25 años de la evolución del desplazamiento horizontal de puntos cerca de la coronación. Los valores experimentales se comparan con resultados del análisis por el MEF teniendo en cuenta y despreciando el efecto de la presión del agua en los poros. La oscilación en las curvas se debe a las variaciones estacionales de la temperatura. La comparación de los resultados experimentales y los numéricos en las zonas críticas es excelente.

Las Figuras 19 muestran la distribución de tensiones y la fisuración en diferentes tiempos durante el análisis (al cabo de 1, 2 y 20 años). En las figuras se ha dibujado también la deformación de la sección en esas fechas (se han amplificado los movimientos 50 veces). Al final del primer año la situación es similar a la que resulta de aplicar el peso propio y la presión hidrostática. El entumecimiento y la fisuración solo afectan a la parte superior de la presa. Los resultados obtenidos en años posteriores muestran que la expansión del hormigón crea tensiones de tracción en una zona que se origina cerca del parámetro aguas arriba y que progresa con el tiempo hacia el interior de la presa. Esto origina una deformación del cuerpo de la presa en forma de estiramiento y giro hacia aguas abajo. Al crecer la zona mojada en el interior de la presa, avanza también la fisuración produciéndose un efecto de cierre de fisuras al pasar de un estado de tracción a otro de compresión. La distribución final de tensiones corresponde al de una presa aligerada con dos grandes zonas comprimidas, cerca de cada uno de los parámetros aguas arriba y abajo, y una zona central muy fisurada, prácticamente libre de tensiones [9].

La experiencia del análisis 2D fue muy útil para el estudio 3D en el que se utilizó el modelo de daño isótropo descrito en el Apartado 3. En la Figura 20 se muestra la geometría y la malla de 1065 hexaedros de 20 nodos utilizados en el análisis. Este estudio permitió capturar el efecto de los desplazamientos a lo largo de la coronación de la presa. En la Figura 18b se compara el desplazamiento aguas abajo a lo largo de la línea AB sobre la coronación con medidas experimentales. Se advierte el salto de casi 10 cm en el desplazamiento debido al efecto del aliviadero. Los resultados de la evolución de los movimientos con el tiempo fueron concordantes con los obtenidos en el análisis 2D. En la Figura 18 se muestra la distribución del índice de daño sobre los parámetros de la presa al cabo de 20 años de su puesta en servicio.

En las referencias [9,24-27] puede encontrarse más información sobre este análisis. En la ref.[25] se describen otras aplicaciones del modelo de daño al estudio no lineal de otras presas de hormigón bajo cargas estáticas y dinámicas.

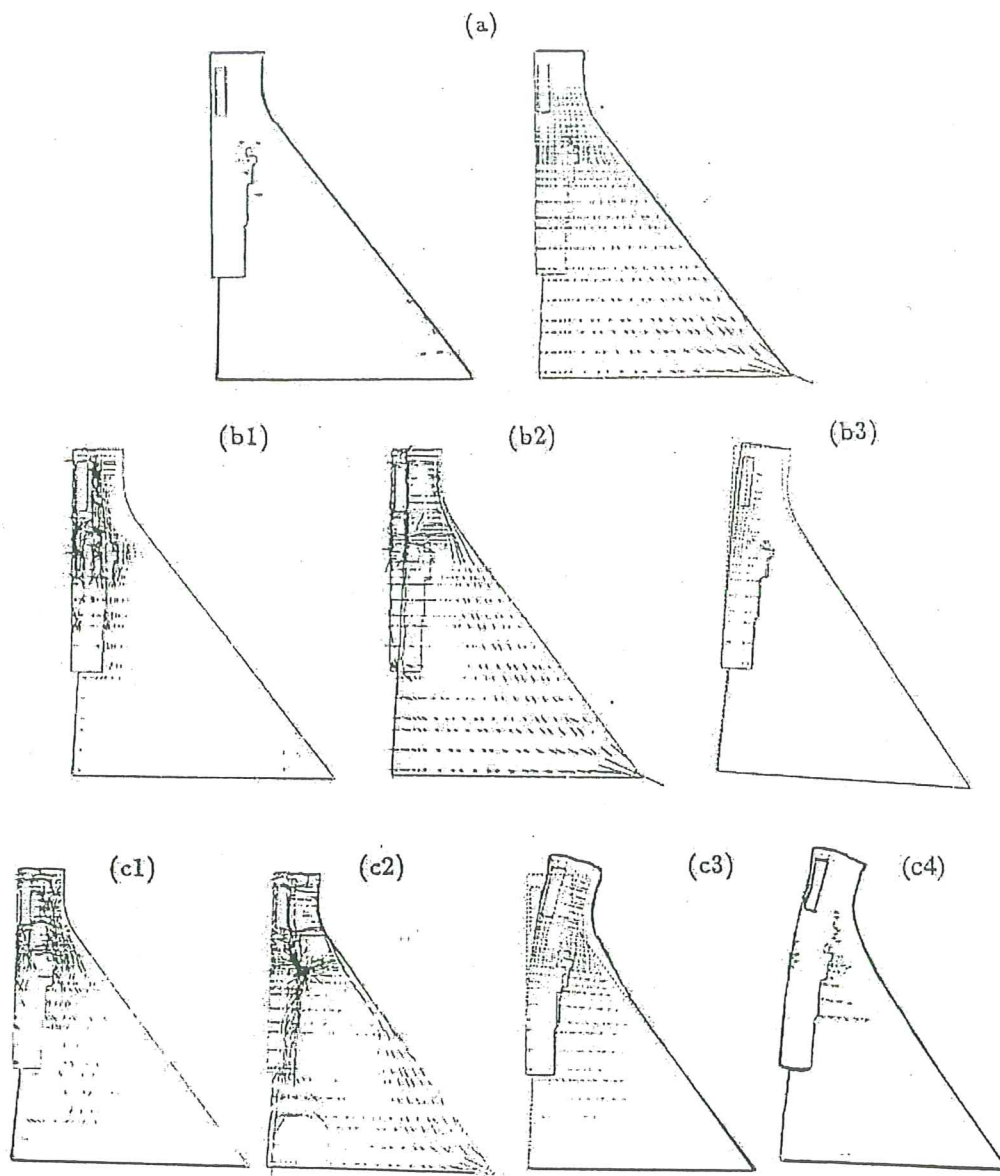


Fig. 19. Presa de Mequinenza. Evolución del campo de tensiones y del nivel de fisuración en varios instantes del análisis. A) Microfisuración y tensiones principales (compresión) bajo peso propio y carga hidrostática; b) Tensiones principales de tracción (b1) y compresión (b2) y microfisuras (b3) después de 2 años. Tensión principal de tracción (c1), compresión (c2), microfisuras (c3) y fisuras de mayor tamaño (c4) después de 20 años. La deformada en c3 y c4 se ha aplicado 50 veces.



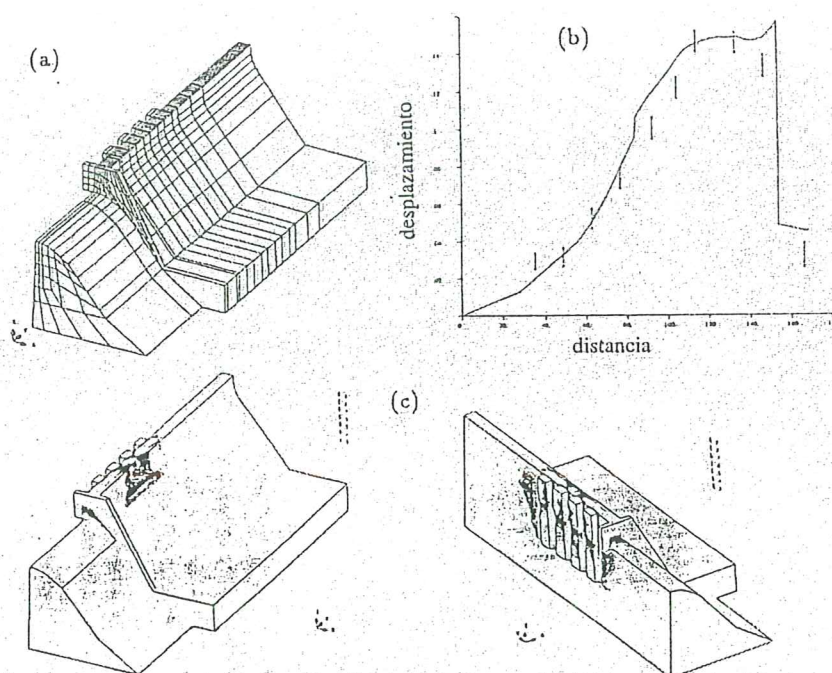


Fig. 20. Presa de Mequinenza. a) Malla de elementos finitos hexaedros de 20 nodos utilizada para el análisis; b) Desplazamiento horizontal a lo largo de la coronación; c) Mapas de daño sobre el paramento al cabo de 20 años de la puesta en servicio de la presa.

### 10.7 Evaluación de la presión de rotura en un edificio de contención de una central nuclear

En la Figura 21 se muestra el edificio de hormigón armado que protege las instalaciones del reactor y el sistema de refrigeración. El edificio se compone de una cimentación rígida y una lámina cilíndrica cerrada por una cúpula esférica. La pared cilíndrica y la cúpula están pretensadas con tendones no adherentes y su interior está protegido por una plancha de acero.

Para el análisis se utilizó el modelo de daño isotrópico para el hormigón y un modelo elastoplástico para las armaduras [34,35]. La utilización de elementos finitos tridimensionales permite considerar en el análisis las características que rompen la simetría de revolución del edificio de contención que están descritas en la primera parte del artículo. Estas son: los tres contrafuertes, las penetraciones, la falta de simetría de revolución de las fuerzas de postesado y la armadura adicional existente en las zonas donde se encuentran penetraciones. Como criterio de fallo del acero se ha considerado en ambos modelos que las armaduras pasivas y tendones de postesado se agotan ("rompen") al alcanzar una deformación del 1%. El algoritmo de cálculo simula la rotura de la armadura eliminando completamente la rigidez de la barra o del grupo de barras que haya alcanzado dichos límites. Esto genera fuerzas adicionales que se redistribuyen a los componentes adyacentes, que reciben de esta manera una carga adicional. El proceso de fallo continúa desarrollándose en cadena, hasta el momento en que dichas fuerzas no pueden equilibrarse. Este es el instante en que se considera que la estructura ha fallado.

En la Figura 22a se muestra la distribución del parámetro de daño local en el momento de la rotura. En la Figura 22b se han resaltado las armaduras rotas en el momento del fallo estructural global. En dichas barras la deformación ha superado el límite del 1% prefijado.



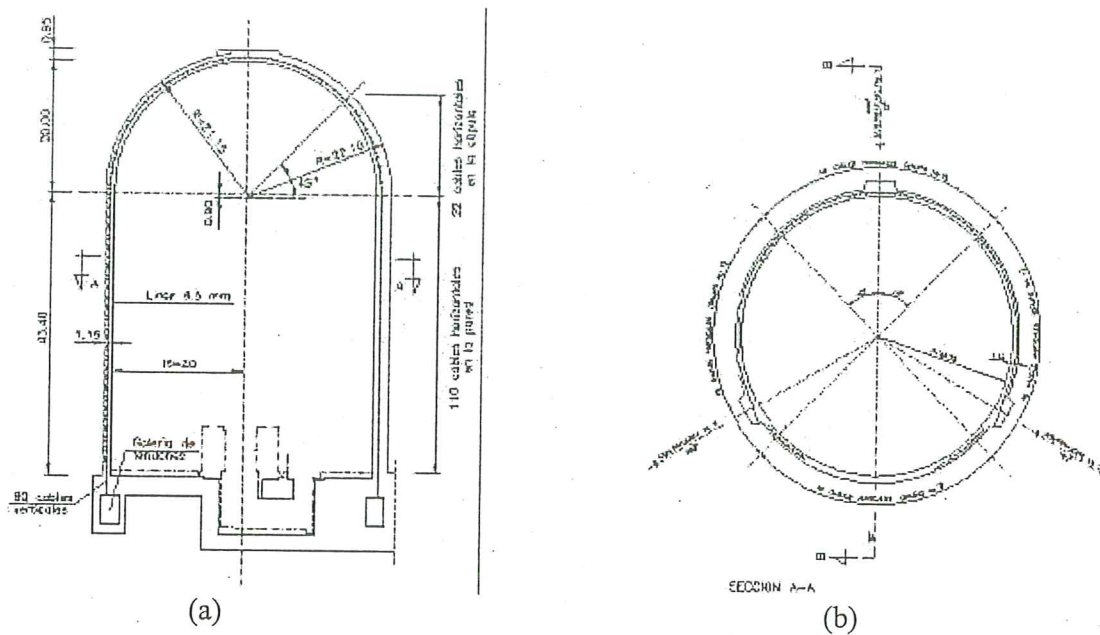


Fig. 21. Edificio de contención de una central nuclear. (a) Sección vertical. (b) Sección horizontal.

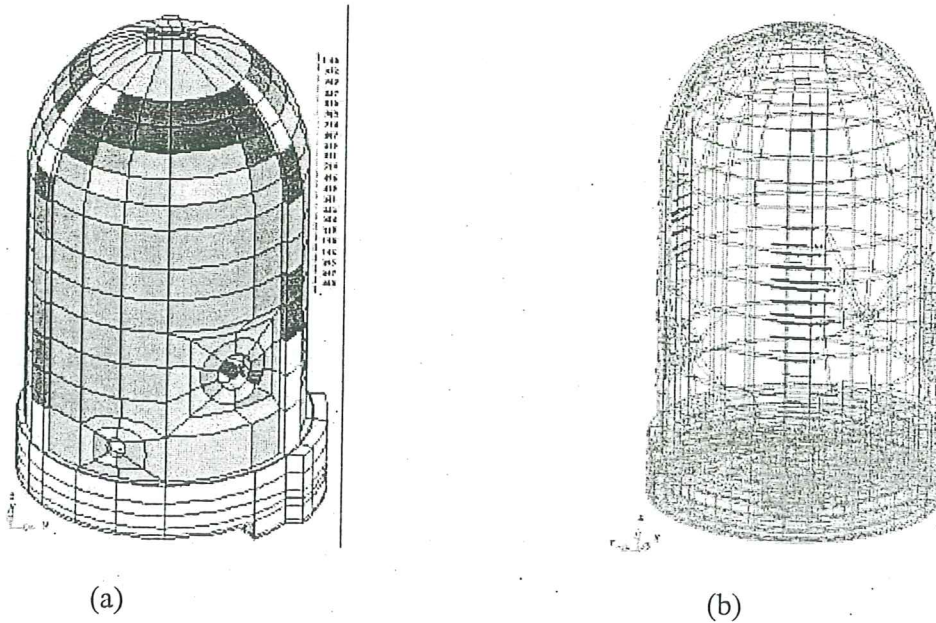


Fig. 22. a) Distribución del parámetro de daño local en el momento de la rotura; b) Armaduras rotas en el instante del fallo global de la estructura.

La Figura 23 muestra la evolución del desplazamiento radial en función de la presión interior en el punto de mayor deformación. Se observa una perfecta concordancia en el rango elástico de comportamiento, hasta las 6 atmósferas aproximadamente. A partir de dicha presión, el hormigón comienza a fisurarse y la pendiente de las curvas es algo distinta debido a la extensiva fisuración que se produce en la zona de contacto pared-losa (ver las Figuras 21a y 21b). Este fenómeno afecta en mayor grado al modelo en que también fisura la losa. A partir de las 10 atmósferas

aproximadamente, las pendientes de las curvas vuelven a acercarse, debido a la generalización de la fisuración en ambos problemas. En los dos casos, la presión de fallo obtenida es prácticamente la misma, con una ligera diferencia en los desplazamientos máximos.

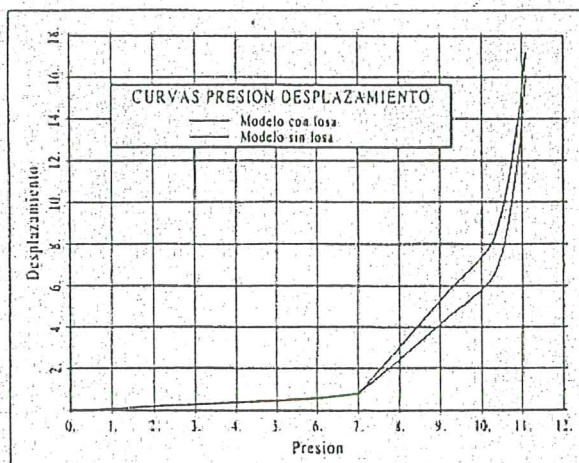


Fig. 23. Curva presión-desplazamiento para el punto del edificio de contención que sufre mayor desplazamiento.

Se ha comprobado, asimismo, que en los dos casos se mantiene la misma localización del fallo estructural y el mismo estado de fisuración del edificio.

En la Figura 24 se dibuja la evolución del índice de daño global para la estructura completa y varias de sus partes. De esta manera se puede apreciar la contribución de los diferentes elementos resistentes en la resistencia última de la estructura. En este caso se ha considerado como elementos independientes la pared cilíndrica, cada uno de los tres anillos que la forman (cada uno de altura igual a 1/3 de la altura de la pared) y la cúpula. Se aprecia la relevancia de la cúpula y el 2º y 3er anillo en el índice de daño global.

Este mismo problema se analizó con el modelo de fisura distribuida fija para el hormigón, obteniéndose resultados muy similares para la presión de rotura y el modo de fallo. Los detalles pueden encontrarse en [69,70].

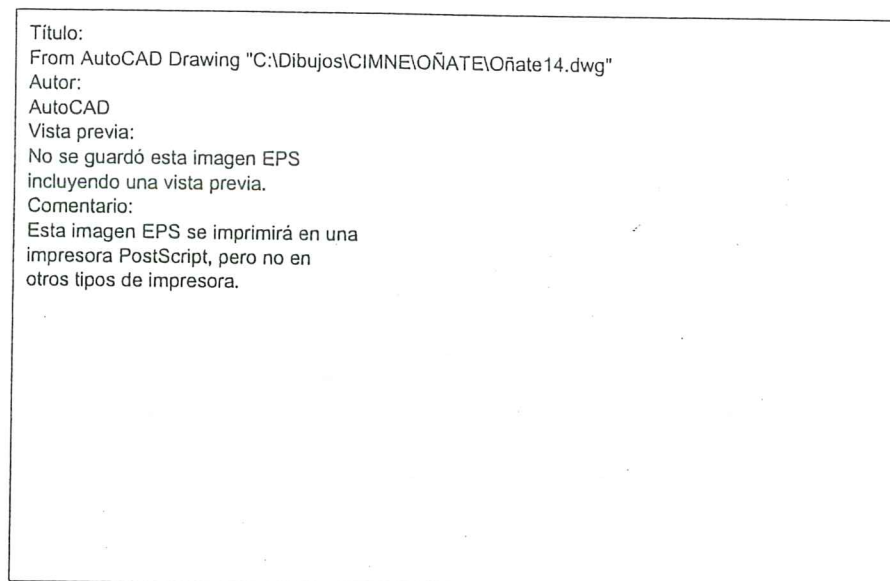


Fig. 24. Evolución del índice de daño global. Curvas: A: Estructura completa; B: Cúpula; C: Cilindro; D: 1er anillo; E: 2º anillo; F: 3er. anillo; G: Placa cimentación.

### 10.8 Análisis de la Basílica de San Marcos de Venecia

El modelo de daño se ha aplicado por Oñate *et al.* [37] al análisis de la capacidad resistente de la Basílica de San Marcos en Venecia.

En la Figura 25 se muestra la discretización de las cinco cúpulas de la Basílica incluyendo 7676 hexaedros de 20 nodos y 2265 prismas triangulares de 15 nodos. Las propiedades de la piedra se tomaron como  $E=600.000 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\nu = 0.15$ , límite de compresión:  $400 \text{ kg/cm}^2$  y límite de tracción:  $40 \text{ kg/cm}^2$ . Para las paredes de ladrillo se tomó un módulo de elasticidad igual a  $30.000 \text{ kg/cm}^2$  y diferentes valores de los límites de tracción y compresión. La Figura 26 muestra la influencia de estos límites en el coeficiente de seguridad a rotura bajo peso propio.

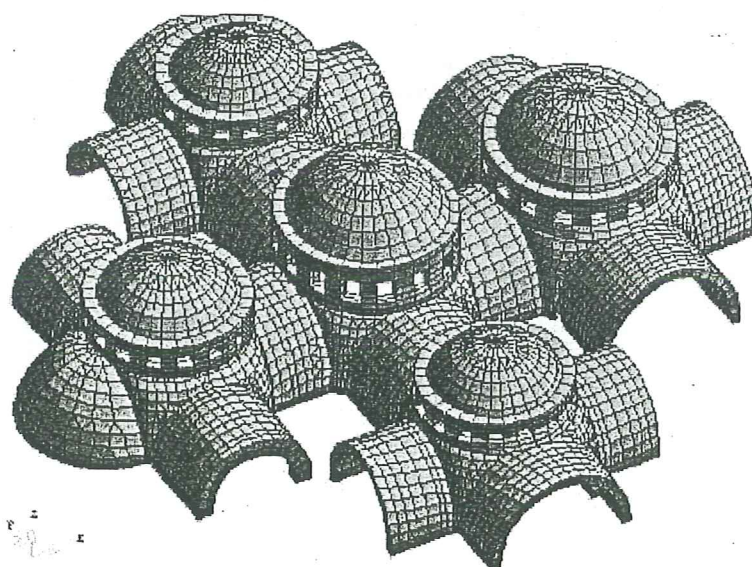


Fig. 25. Discretización de las cinco cúpulas de la Basílica.



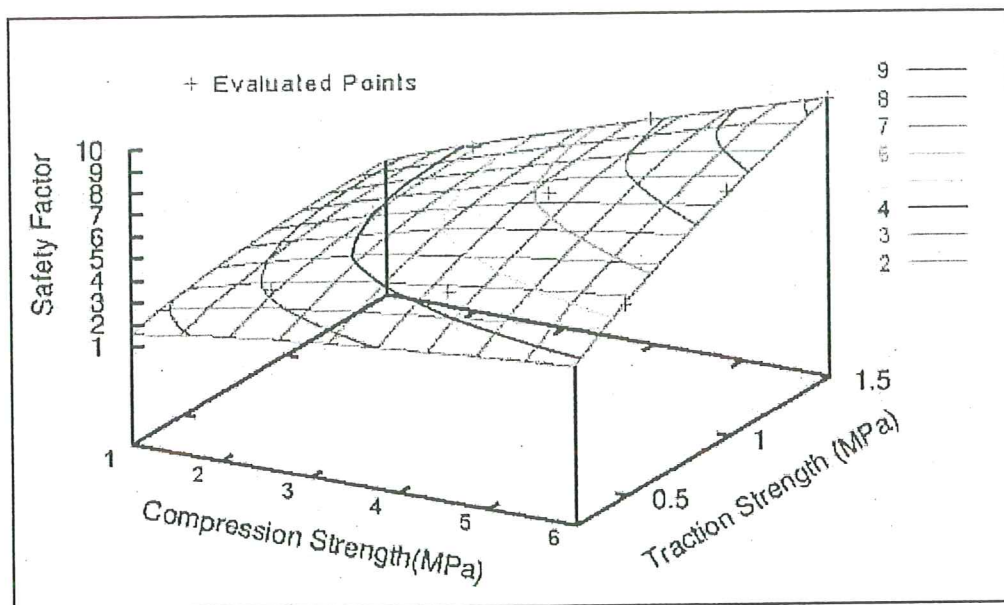
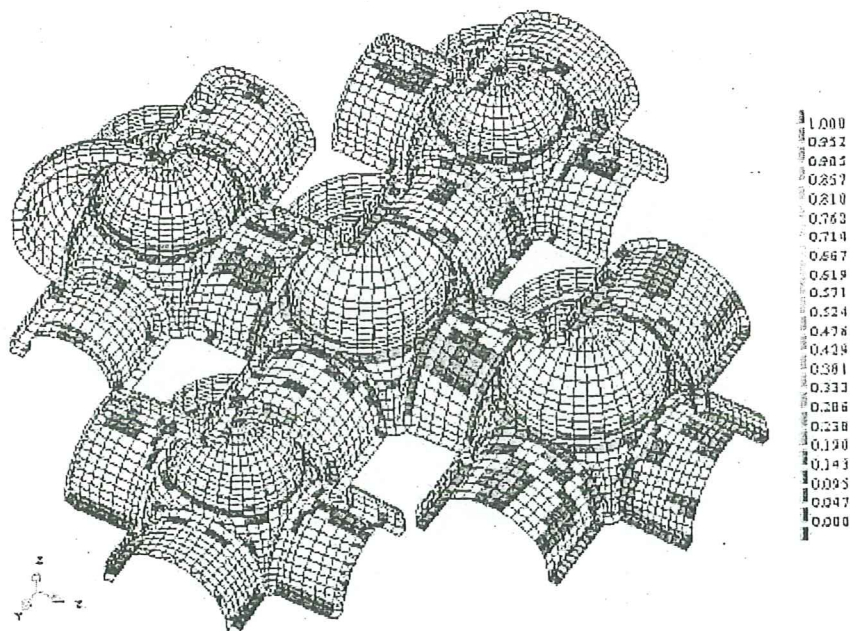


Fig. 26. Coeficiente de seguridad a rotura bajo peso propio para diversos valores de las tensiones límites de la mampostería.

En la Figura 27 se muestran las distribuciones del parámetro de daño en diferentes momentos de aplicación del peso propio multiplicado por un factor de carga. Para una información más detallada sobre este ejemplo se recomienda consultar la ref. [37].



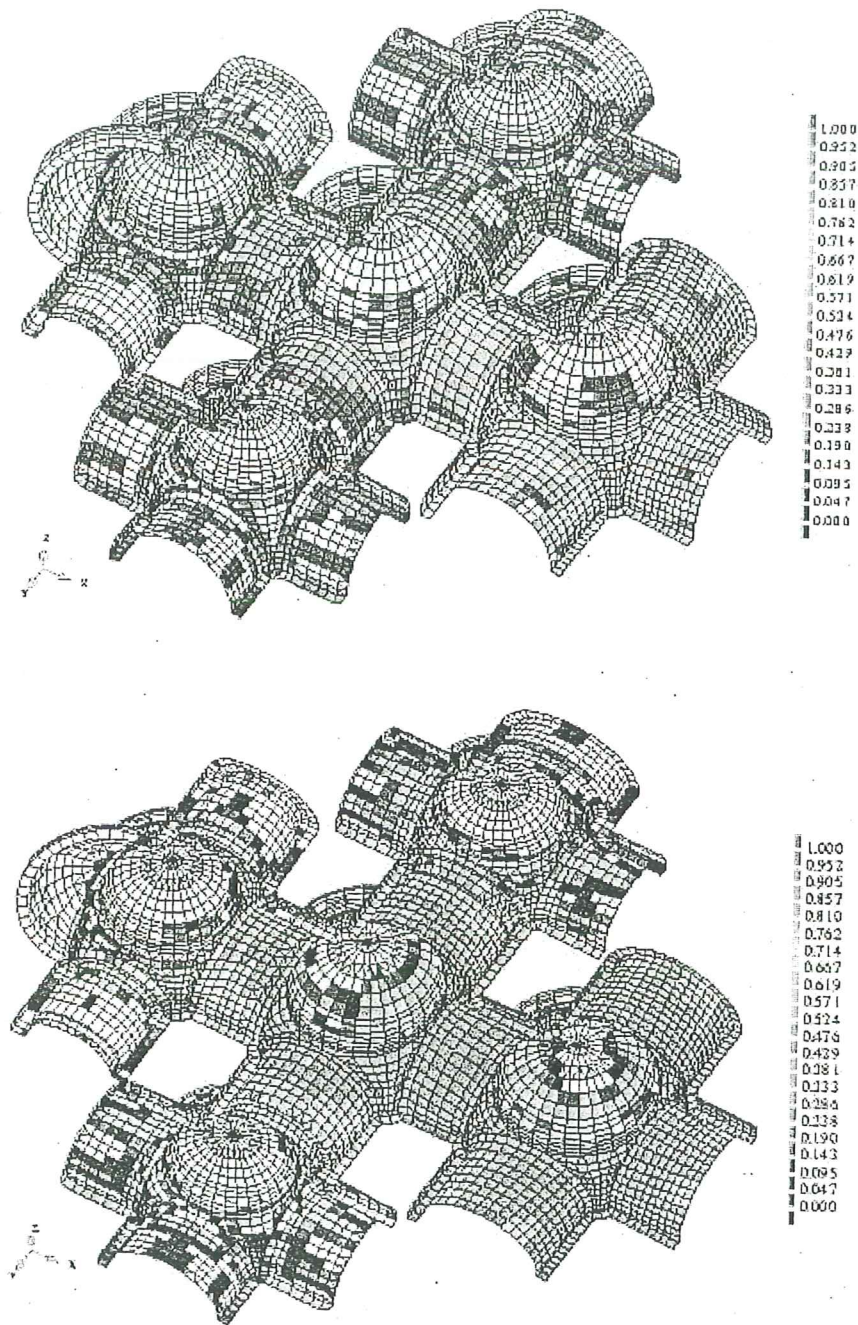


Fig. 27. Mapas del daño sobre la estructura en diferentes estados de carga bajo peso propio creciente.

### 10.9 Análisis de una probeta de material compuesto

Este ejemplo muestra las posibilidades del modelo de mezclas desarrollado por Oller *et al.* [51-57] y Car *et al.* [58-60] para análisis no lineal de estructuras con materiales compuestos. El ejemplo consiste en simular numéricamente un ensayo de una probeta de material compuesto laminado multidireccional de 30 capas con una secuencia de apilamiento  $(45^{\circ}-45^{\circ})_{SS}$ , sometidas a un estado de corte plano. El ensayo se ejecuta de acuerdo con la norma ASTM D425. El material compuesto



está constituido por una resina RS-3 Policinato y el refuerzo está constituido por fibra de carbono XN-50 con participaciones volumétricas del 40% y 60% respectivamente.

La resina se comporta como un material isótropo con una ley de comportamiento elastoplástico, mientras que las fibras se comportan como un material elastoplástico anisótropo.

Las propiedades mecánicas de la resina RS-3 Policinato y de la fibra de refuerzo XN-50 utilizados en la simulación numérica se pueden observar en las Tablas 1 y 2.

Módulo de Young	3170 Mpa
Coefficiente de Poisson	0,35
Tensión de fluencia	75,53 Mpa
Ley de comportamiento posterior a la fluencia	Exponencial con ablandamiento
Energía de fractura	1,47N/m
$V_m$	40%

Tabla 1. Propiedad de la resina RS-3 Policinato.

Módulo de Young	507.177 Mpa
Coefficiente de Poisson	0,0
Tensión de fluencia	3183.34 Mpa
Ley de comportamiento posterior a la fluencia	lineal con endurecimiento
$V_f$	60%

Tabla 2. Propiedad de la fibra de refuerzo XN-50

En la Figura 28 se observa la geometría de la pieza y su posición en la máquina de ensayos. El ensayo consiste en someter a la pieza a un desplazamiento impuesto aplicado en los orificios de la misma induciendo un estado de corte plano. Para determinar el módulo a cortante del material se colocan “galgas de deformación” en la zona central de la pieza formando un ángulo de 45° con el eje longitudinal.

Las simulaciones se han realizado empleando una malla de elementos finitos triangulares de 3 nodos con un total de 2074 elementos, 1144 nodos y 2228 grados de libertad. En la Figura 29 se observa la malla de elementos finitos empleada.



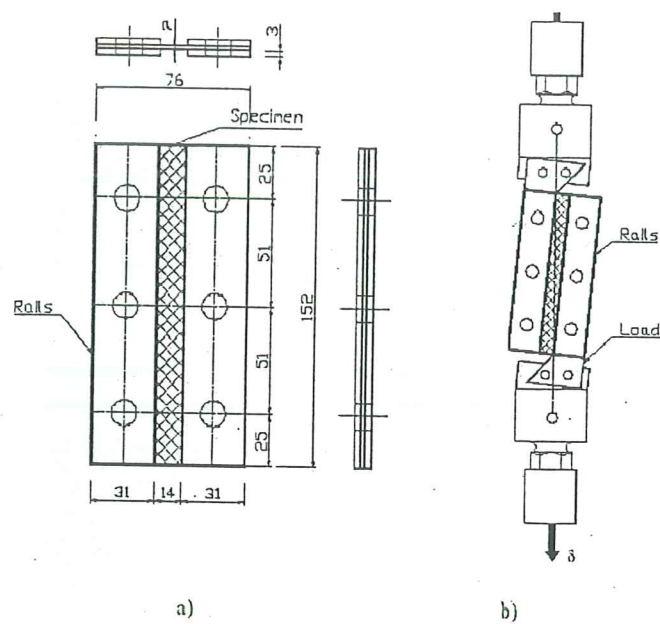


Fig. 28. Geometría de la pieza a estudiar.

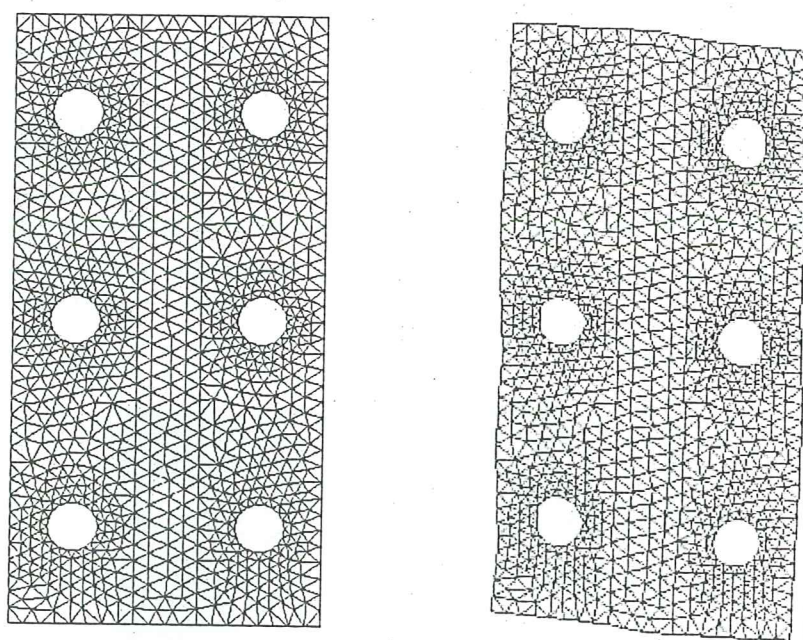


Fig. 29. Malla de elementos Triangulares lineales.

Deformada de la malla obtenida en el análisis.

En la Figura 29 se muestra también la deformada de la malla en el estado final (amplificada tres veces). Se observa en la misma figura los efectos locales que se producen en cada orificio y la desviación que sufre la probeta durante el ensayo

En la Figura 30 se dibujan los mapas del módulo del vector de desplazamiento y de la deformación plástica efectiva. Se aprecia la alta localización de deformaciones en algunas zonas.

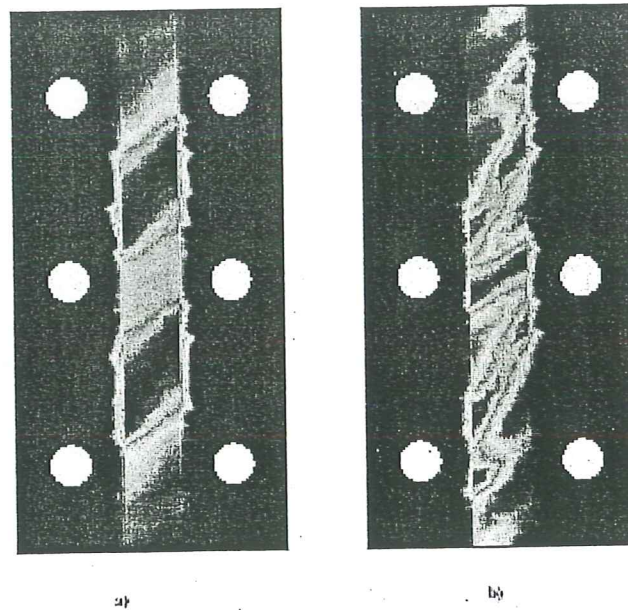


Fig. 30. Mapas del módulo del vector de desplazamientos (a) y de la deformación plástica efectiva (b).

En la Figura 31 se observa una comparación entre la simulación numérica y la probeta ensayada. Se observa la existencia de dos fisuras inclinadas a  $45^\circ$  aproximadamente respecto del eje longitudinal de la probeta. La zona central presenta una rotura generalizada. Las zonas en blanco representan las regiones de fractura detectadas por acumulación de la deformación plástica efectiva. Al igual que en la fotografía de la probeta se observan dos zonas inclinadas aproximadamente a  $45^\circ$  respecto del eje longitudinal y una zona de mayor tamaño en la zona central de la probeta donde se detectan las máximas deformaciones plásticas efectivas. La Figura 32a muestra un detalle de la zona central de la probeta y la Figura 32b muestra un detalle de una de las fisuras producidas por un efecto de delaminación. Para más detalles consultar [59-60].

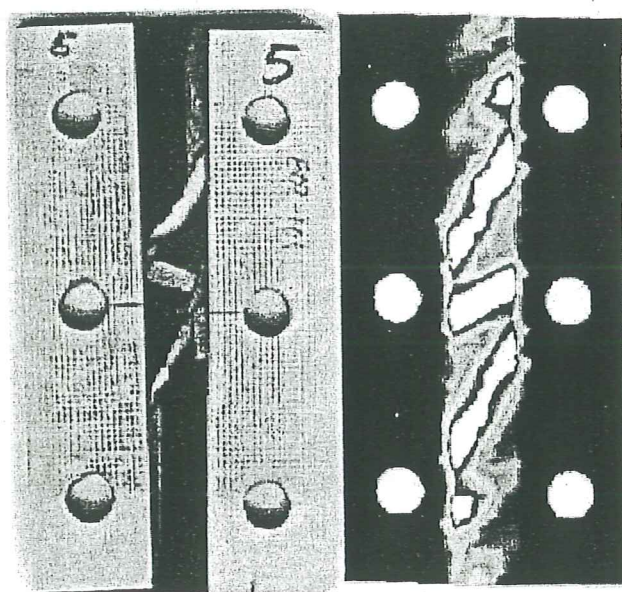


Fig. 31. Líneas de rotura detectadas en el ensayo y resultados de la simulación numérica.



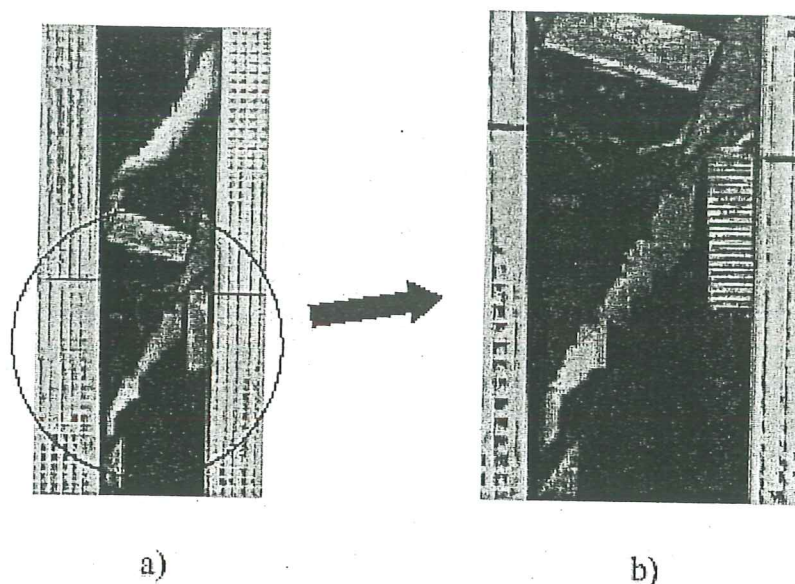


Fig. 32. Amplificación de las zonas de rotura detectadas experimentalmente.

## CONCLUSIONES

El artículo ha presentado una sucinta panorámica de la investigación llevada a cabo en los últimos quince años por diversos grupos en el Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Barcelona. El centro de gravedad de los desarrollos son los modelos de daño continuo, que con diferentes variantes se han aplicado con éxito al análisis de estructuras de hormigón en masa y armado, colapso de suelos, construcciones históricas y estructuras con materiales compuestos.

## AGRADECIMIENTOS

El autor agradece el material cedido por profesores e investigadores de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Barcelona para realizar este trabajo. Asimismo, pide disculpas por las omisiones de trabajos que inadvertidamente no han sido incluidos en esta reseña.

## REFERENCIAS

1. Hofstetter, G. and Mang, H.A., *Computational Mechanics of Reinforced Concrete Structures*, Vieweg, 1995.
2. Owen, D.R.J. and Figueiras, J.A., "Ultimate analysis of reinforced concrete plate and shells including geometrical non linear effects", *Finite Element Software for Plates and Shells*, E. Hinton and D.R.J. Owen (Eds.), Pineridge Press, 1984.
3. Rots, J.G., "Smearred and discrete representations of localized fracture", *Int. J. Fracture*, 51, 45-59, 1991.



4. Oñate, E., *Lectures on non linear analysis of concrete shells*, Monografía CIMNE, N° 7, Barcelona 1992.
5. M. Cervera y E. Hinton, "Non-linear Analysis of Reinforced Plates and Shells using a Three Dimensional Model", en *Computational Modelling of Reinforced Concrete Structures*, Pineridge Press, 1986.
6. Cervera, M., Hinton, E. y Hassan, O, "Nonlinear analysis of reinforced concrete plate and shell structures using 20-noded isoparametric brick elements", *Computers and Structures*, 25(6), 1987.
7. M. Cervera, E. Hinton y N. Bicanic, "Non-linear Transient Dynamic Analysis of Three Dimensional Reinforced Concrete Structures", en *Numerical Methods in Transient and Coupled Analysis*, John Wiley, 1987.
8. M. Cervera, E. Hinton, N. Bicanic y J. Bonet, "Non-linear Transient Analysis of Three Dimensional Structures -- A Finite Element Program for Steel and Reinforced Concrete Materials", en *Numerical Methods and Software for Dynamic Analysis of Plates and Shells*, Pineridge Press, 1988.
9. Oñate, E., Oliver, J. and Bugeda, G., "Finite element analysis of nonlinear response of concrete dams subject to internal loads", *Europe-US Symposium on Finite Element Methods for Nonlinear Problems*, (Edited by Bergan, Bathe and Wunderlich) Springer Verlag, 1986.
10. Oñate, E., Oller, S., Oliver, J. and Lubliner, J., "A constitutive model for cracking of concrete based on the incremental theory of plasticity", *Engng. Comput.*, 5, pp. 309-20, 1988.
11. Oller, S., *Modelización numérica de materiales friccionales*, Monografía CIMNE, Barcelona, 1991.
12. Lubliner, L., Oller, S., Oliver, J. and Oñate, E., "A plastic damage model for nonlinear analysis of concrete", *Int. J. Solid Struct.*, Vol. 25, 3, pp. 299-326, 1989.
13. Oliver, J., "A consistent characteristic length for smeared cracking models", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 28, 461-474, 1989.
14. Oliver, J. Cervera, M., Oller, S. and Lubliner, J., "Isotropic damage models and smeared crack analysis of concrete", *Proc. 2d Int. Conf. on Comp. Aided Analysis of Concrete Struct.*, Zell am See, Austria, pp. 445-57, N. Bicanic et al. (Eds.), Balkema 1990.
15. Faria, R. and Oliver, J., *A rate dependent plastic-damage constitutive model for large scale computation in concrete structures*, Monografía CIMNE N° 17, Barcelona January 1993.
16. Oliver, J., "Continuum modelling of strong discontinuities in solid mechanics using damage models", *Computational Mechanics*, 17 (1/2), 49-61, 1995a.
17. Oliver, J., "Continuum modelling of strong discontinuities in solid mechanics", in D. Owen, E. Oñate and H.E. (Eds.), *Proc. International Conference on Computational Plasticity IV*, pages 455-479, CIMNE, Barcelona, 1995b.

18. Oliver, J., "Modelling strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations. Part I: Fundamentals", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, **39** (21), 3575-3600, 1996a.
19. Oliver J., "Modelling strong discontinuities in solids mechanics via strain softening constitutive equations. Part II: Numerical simulation", *Int. J. Num. Met. Eng.* Vol. **39**, 3601-3623, 1996.
20. Oliver, J., Cervera, M. and Manzoli, O., "On the use of j2 plasticity models for the simulation of 2D strong discontinuities in solids", in D. Owen, E. Oñate and H.E. (Eds.), *Proc. International Conference on Computational Plasticity V*, pages 38-55, CIMNE, Barcelona, 1997.
21. Oliver, J. and Pulido, M.D.G., "On the use of strain-softening damage constitutive equations to model cracking of concrete", *Computational Modelling of Concrete Structures*, Euro-C 1998 Conference, Badgastein, Austria, 31 March- 3 April, 1998.
22. Manzoli, O., Oliver, X. y Cervera, M., *Localización de deformaciones. Análisis y simulación numérica en mecánica de sólidos*, Monografía 44, CIMNE, Barcelona, Diciembre 1998.
23. Oliver, X, Huespe, A.E., Pulido, M.D.G. y Chaves, E., "Modelação de fissuras em estruturas de concreto mediante una aproximação de descontinuidades fortes", *VI Congreso de Mecánica Aplicada e Computational*. P.M.M. Vila Real y José Grácio (Eds.), Univ. de Aveiro, Portugal, 17-19 Abril, 2000.
24. Cervera, M., Oliver, J., Herrero, E. and Oñate, E., "A computational model for progressive cracking in large dams due to swelling of concrete", *Engng. Fracture Mechanics*, **35**, N° 1,2,3, 575-85, 1990.
25. Cervera, M., Oliver, J. and Galindo, M., "Simulación Numérica de Patologías en Presas de Hormigón", Monografía CIMNE no. 4, Barcelona, June 1991.
26. Cervera, M., Oliver, J. and Galindo, M., "Numerical Analysis of Dams with Extensive Cracking Resulting from Concrete Hydration: simulation of a real case", *Dam Engineering*, Vol. **3**, Issue 1, 1992.
27. Galindo, M., Oliver, J. and Cervera, M., *Simulación numérica de presas de hormigón frente a acciones sísmicas*, Monografía CIMNE, N° IS-3, Barcelona 1993.
28. Barbat, A.H., Oller, S., Oñate, E. and Hanganu, A., "Simulation of damage phenomena in reinforced concrete buildings subjected to seismic actions", *Numerical Methods in Engn. and Applied Sciences*, H. Alder *et al.* (Eds.), CIMNE, Barcelona 1992.
29. Barbat, A., "Failure pressure evaluation of containment building of a large dry nuclear power plant", *Nuclear Engineering and Design*, **180**, 251-270, 1998.
30. Barbat, A.H., Oller, S., Oñate, E. and Hanganu, A., "Viscous Damage Model for Timoshenko Beam Structures", *Int. J. Solids Structures*, Vol. **34**, 30, pp. 3953-3976, 1997.
31. Barbat, A.H., Cervera, M., Hanganu, A., Cirauqui, C. and Oñate, E., "Failure pressure evaluation of the containment building of a large dry nuclear plant", *Nuclear Engng. and Design*, Vol. **180**, Issue 3, pp. 251-270, 1998.



32. Hanganu, A., Oller, S., Oñate, E. and Barbat, A., "Evaluación del daño sísmico en modelos 3D de edificios de hormigón armado", *Métodos Numéricos de Ingeniería*, F. Navarrina and M. Casteleiro (Eds.), SEMNI, Barcelona 1993.
33. A. Hanganu, S. Oller, E. Oñate y A. H. Barbat, "A Finite Element Model for Damage Analysis of Nuclear Reactor Containment Shells", *2nd National Conference on Boundary and Finite Elements*, Sibiu, Romania, 1993.
34. Hanganu, A., *Análisis no lineal estático y dinámico de estructuras de hormigón armado mediante modelos de daño*, Tesis Doctoral, Univ. Politécnica de Cataluña, 1997.
35. Hanganu, A., Barbat, A. y Oñate, E., *Metodología de evaluación del deterioro en estructuras de hormigón armado*, Monografía CIMNE M-39, 1997.
36. Oñate, E., *Reliability analysis of concrete structures. Numerical and experimental studies*, Publication CIMNE No. 107, Barcelona 1997.
37. Oñate, E., Hanganu, A., Barbat, A., Oller, S., Vitaliani, R., Saetta, A. y Scotta, R., "Structural analysis and durability assessment of historical constructions using a finite element damage model", in *Structural Analysis in Historical Construction*, Edited by P. Roca, J.L. González, A.R. Marí y E. Oñate, CIMNE, Barcelona, 1997.
38. Greazza, G., Saetta, A., Scotta, R., Vitaliani, R. y Oñate, E., "Mathematical simulation of structural damage in historical buildings", *Structural Studies of Historical Buildings*, C.A. Brebbia y B. Leftheris (Eds.), Vol. 1, *Comput. Mech. Publicat.*, 1995.
39. I. Carol and P. Prat, "A multicroack model based on the theory of multisurface plasticity and two fracture energies", *Proc. COMPLAS 4*, D.R.J.Owen, E. Oñate and E. Hinton (Eds.), Pineridge Press, Vol. 2, pp.1583-1594, 1995.
40. E. Rizzi, I. Carol and K. Willam, "Localization analysis of elastic degradation with application to scalar damage", *J. of Engineering Mechanics ASCE*, Vol. 121, no.4, pp.541-554, 1995.
41. I. Carol and K. Willam, "Spurious energy dissipation/generation in modelling of stiffness recovery for elastic degradation and damage", *Int. J. of Solids and Structures*, Vol. 33, no.20-22, pp.2939-2957, 1996.
42. I. Carol, P. Prat and Z.P. Bazant, "New explicit microplane model for concrete: theoretical aspects and numerical implementation", *Int. J. of Solids and Structures*, Vol. 29, no.9, pp.1173-1191, 1992.
43. I. Carol and Z.P. Bazant, "Damage and plasticity in microplane theory", *Int. J. of Solids and Structures*, Vol. 34, no.29, pp. 3807-3835, 1997.
44. I. Carol, M. Jirasek and Z.P. Bazant, "A thermodynamically consistent approach to microplane theory. I: free energy and consistent microplane stresses", *Int J. of Solids and Structures* (in press), 2000.



45. Prat, P.C. y Bazant, Z.P., "Tangential stiffness of elastic materials with systems of growing and closing cracks", *J. of the Mechanics and Physics of Solids*, 45(4), 611-636. Addendum with errata 45(8), 1419-1420, 1967.
46. Bazant, Z.P. y Prat, P.C., "Stress-strain relation for elastic material with many growing microcracks", *Proceedings FRAMCOS-3*, Vol. 2, 1055-1064, 1998.
47. Gens, A., I. Carol and E. Alonso, "An interface element formulation for the analysis of soil-reinforcement interaction", *Computers and Geotechnics*, Vol. 7, pp.133-151, 1988.
48. Carol, I. and C.M. López, "Failure analysis of quasi-brittle materials using interface elements", en *Mechanics of Quasi-Brittle Materials and Structures*, G. Pijaudier-Cabot et al. (Eds.), Hermès Publications (Paris), pp. 298-305, 1997.
49. M. Pini, C.M. López, I. Carol and R. Contro, "Microstructural analysis of cancellous bone using interface elements", en *Damage and Failure of Interfaces -- (DFI-1)*, H.P. Rossmannith (Ed.), Balkema, pp.431-437, 1997.
50. O. Roa, C.M. Lopez, P. Pisoni, M. Pini, I. Carol and R. Contro, "Microstructural analysis of cancellous bones taking into account geometrically non-linear effects", *Proc. ECCOMAS/COMPLAS 2000*, E. Oñate et al. (Eds.). In press, 2000.
51. Oller, S., *Modelización numérica de materiales friccionales*, Monografía nº. 3, CIMNE., Barcelona, 1991.
52. Oñate, E., Oller, S., Botello, S., and Canet, J., *Métodos para análisis de estructuras con materiales compuestos*, Publicación nº 11, CIMNE, Barcelona, 1991.
53. Oller, S., Botello, S., Miquel, J., and Oñate, E., "An anisotropic elastoplastic model based on an isotropic formulation", *Engineering Computations*, 12(3), 245-262, 1995a.
54. Oller, S., Neamtu, L., and Oñate, E., "Una generalización de la teoría de mezclas clásica para el tratamiento de compuestos en serie/paralelo", *Congreso Nacional de Materiales Compuestos*, pages 433-438, 1995b.
55. Oller, S., Oñate, E., and Miquel, J., "Simulation of anisotropic elastic-plastic behaviour of materials by means of an isotropic formulation", In *2nd. US Nat. Congr. Comput. Mech.*, Washington DC, 1993a.
56. Oller, S., Oñate, E., Miquel, J., and Botello, S., "A finite element model for analysis of multiphase composite materials", In Miravete, A. (Ed.), *Ninth International Conferences on Composite Materials*, Zaragoza - Spain. Woodhead Publishing Limited, 1993b.
57. Oller, S., Oñate, E., Miquel, J., and Botello, S., "A plastic damage constitutive model for composite materials", *Int. J. Solids and Structures*, 33(17), 2501-2518, 1996.
58. Car, E., Oller, S., and Oñate, E., "Un modelo constitutivo elasto plástico acoplado con daño mecánico e higrométrico. Aplicación a pavimentos flexibles", *Revista Internacional de Ingeniería de Estructuras*, 3(1), 19-37, 1998.

59. Car, E., *Modelo constitutivo continuo para el estudio del comportamiento mecánico de los materiales compuestos*, Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Cataluña, 2000.
60. Car, E., Oller, S., and Oñate, E., "An anisotropic elastoplastic constitutive model for large strain analysis of fiber reinforced composite materials", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **185(2)**, 245-277, 2000.
61. Ngo, D. and Scordelis, A.C., "Finite element analysis of reinforced concrete beams", *J. Amer. Concrete Inst.*, **64**, 152--163, 1967.
62. Rashid, Y.R., "Analysis of prestressed concrete pressure vessels", *Nuclear Eng. Des.*, **7**, 334--344, 1986.
63. Ingraffea, A.R. and Saouma V., "Numerical modelling of discrete crack propagation in reinforced and plain concrete", in *Fracture Mechanics of Concrete* (eds. G.c. Sih and A. DiTomasso), Martinus Nijhoff, Dordrecht, 171-225, 1985.
64. Kachanov, L.M., "Continuum Model of Medium with Cracks", *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, Vol. **106**, N° EM5, 1039-1051, 1980.
65. Simó, J.C. and Ju, J.W., "Strain and Stress Based Continuum Damage Models-I. Formulation", *International Journal Solids & Structures*, Vol. **23**, 821-840, 1987.
66. Simó, J.C. and Ju, J.W., "Strain and Stress Based Continuum Damage Models-II. Computational Aspects", *International Journal Solids & Structures*, Vol. **23**, 841-869, 1987.
67. Lemaitre, J. and Chaboche, J.L., *Mechanics of Solid Materials*, Cambridge University Press, 1990.
68. van Mier, J.G.M., Vervuurt, A. and Schlangen, E., "Boundary and size effects in uniaxial tensile tests: a numerical and experimental study", in *Fracture and Damage in Quasibrittle Structures* (eds. Z.P. Bazant, J. Mazars, Z. Bittnar and M. Jirasek), E & FN Spon, London, 289-302, 1994.
69. Manzoli, O., *Localización de deformaciones. Análisis y simulación numérica en mecánica de sólidos*, Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Cataluña, Barcelona, 1998.
70. Cervera, M., Barbat, A.H., Hanganu, A., Oñate, E. y Cirauqui, C., "Evaluación de la Presión de Fallo del Edificio de Contención de una Central Nuclear Tipo PWR-W Tres Lazos. Parte I: Metodología", *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, Barcelona, **11(2)**, 271-293, 1995.
71. Barbat, A. H., Cervera, M., Cirauqui, C., Hanganu, A. y Oñate, E., "Evaluación de la Presión de Fallo del Edificio de Contención de una Central Nuclear Tipo Pwr-W Tres Lazos. Parte II: Simulación Numérica", *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, Barcelona, **11(3)**, 451-475, 1995.
72. Oñate, E., *Análisis de estructuras por el método de elementos finitos*, CIMNE, Barcelona, 1992.

73. Zienkiewicz, O.C. y Taylor R.L., *El Método de los Elementos Finitos*, CIMNE-McGraw Hill, Vol. I (1993), Vol. II (1994).
74. Arrea, M. and Ingraffea, A.R., *Mixed-mode crack propagations in mortar and concrete*, Cornell Univ., Dept. of Structural Engng., Report n° 81-13, Ithaca, New York, 1982.
75. Zienkiewicz, O.C., Huang, M. and Pastor, M., "Localization problems in plasticity using finite elements with adaptive remeshing", *Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech.*, **19**, 127-148, 1995.



