

# Diagrama geométrico y subdivisión híbrida de triángulos

José P. Suárez

Departamento de Cartografía y Expresión Gráfica en la Ingeniería  
Universidad de Las Palmas de Gran Canaria  
35017-Las Palmas de Gran Canaria, España  
Tel.: 34-928-457268; Fax: 34-928-451872  
e-mail: jsuarez@dcegi.ulpgc.es

Ángel Plaza

Departamento de Matemáticas  
Universidad de Las Palmas de Gran Canaria  
35017-Las Palmas de Gran Canaria, España  
e-mail: aplaza@dmat.ulpgc.es

Graham F. Carey

Institute for Computational Engineering and Sciences (ICES)  
The University of Texas at Austin, Austin, Texas  
e-mail: carey@cfdlab.ae.utexas.edu

## Resumen

En este trabajo se presenta un diagrama geométrico para el estudio de la calidad geométrica de los triángulos generados por la aplicación reiterada de la partición en cuatro triángulos por el lado mayor (4TLE). El diagrama proporciona una herramienta gráfica de utilidad para visualizar la evolución de los triángulos generados en mallas triangulares. Se usan funciones de variable compleja para hallar las curvas frontera de las diferentes clases de triángulos generadas en el diagrama.

Asimismo, se presenta un método de subdivisión para mallas de triángulos que combina la partición 4TLE y la partición semejante (4TSS) en una nueva partición híbrida denominada 4TLE-SS. Se resaltan los beneficios de este nuevo método, al comprobar que el número de triángulos de ‘buena’ calidad generados con el algoritmo es mayor que con el método 4TLE.

El trabajo que se aborda es de interés en el campo de generación y refinamiento de mallas triangulares.

**Palabras clave:** Diagrama Geométrico, mejora de la malla, calidad de malla, partición de triángulos

## A GEOMETRIC DIAGRAM AND HYBRID SCHEME FOR TRIANGLE SUBDIVISION

## Summary

In this work we introduce a geometrical diagram to study the geometric quality of triangles generated by iterative application of the four Triangles Longest Edge (4TLE) partition. The diagram provides a convenient graphic tool to visualize the evolution and migration of element shapes leading to a better understanding of the improvement process and the effect of recursive subdivision schemes. A complex variable mapping analysis supports the diagram and similarity class specifications.

In addition, it is introduced a mesh subdivision method (hybrid 4TLE-SS) that combines the four Triangles Longest Edge (4TLE) subdivision pattern and the self-similar 4TSS. It is showed that the number of triangles of superior quality is greater than in the 4TLE method.

The presented work is of interest in mesh generation and refinement for triangle meshes.

**Keywords:** Geometrical diagram, mesh improvement, mesh quality, triangle partitions.

## INTRODUCCIÓN

En la última década, el Procesamiento de Mallas Poligonales se ha convertido en un área de investigación activa y muy productiva. Tal es así, que puede identificarse un campo de trabajo concreto dentro del CAGD (Computer Aided Geometric Design), que puede denominarse Diseño y Modelado Geométrico mediante Mallas.

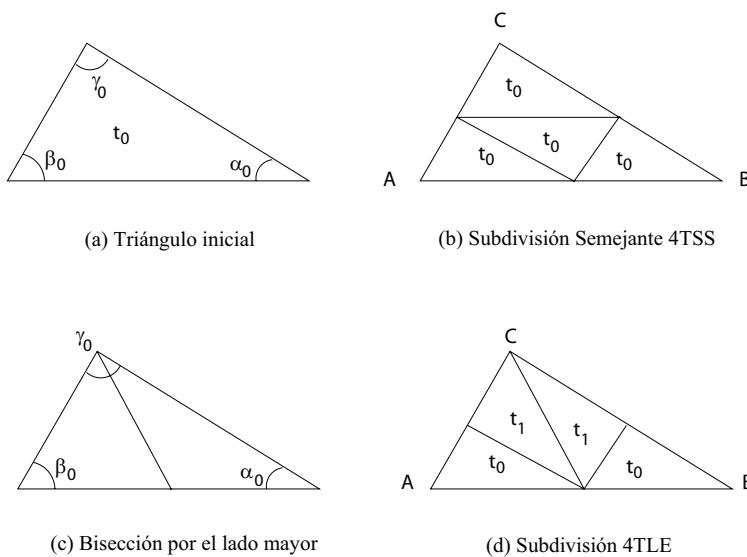
La generación de mallas y en particular la obtención de mallas con triángulos de ‘buena’ calidad es un problema importante tanto en Modelado Geométrico<sup>1,3,4,5,6</sup> como en la solución de problemas de simulación en ingeniería<sup>7,8,9,28,29</sup>. Algunas estrategias de optimización y suavizado de mallas se describen en<sup>10,11,12</sup> y además, en los últimos años, se han propuesto distintas medidas de calidad de la malla<sup>13</sup>. En los métodos de elementos finitos y volúmenes finitos se prefieren triángulos agudos y con formas cercanas al equilátero<sup>14</sup>, antes que los obtusos. De forma general, se puede afirmar que los triángulos degenerados tienen el lado menor mucho menor que su circunradio, y en base a esto se puede hacer una clasificación en triángulos tipo ‘gorra’ -*cap*-, que son aquellos que tienen un ángulo próximo a 180° o ‘tipo afilado’ -*needle*-, los que tienen el lado mayor mucho mayor que su lado menor. Hay que señalar que para estos triángulos degenerados, el área de la superficie que abarca puede ser casi cero o despreciable y por ello no proporcionan información geométrica relevante en la mayoría de los casos, por ejemplo para el cálculo del vector normal. En los algoritmos de refinamiento de mallas, tanto local o global, se persiguen, entre otros aspectos, evitar la no degeneración de la forma de los triángulos.

El interés de la línea de investigación de Diseño y Modelado Geométrico mediante Mallas puede atribuirse al desarrollo:

1. Los modernos dispositivos de adquisición de geometría, como escanners, o Imágenes de Resonancia Magnética (MRI), los cuales producen mallas poligonales de gran tamaño y complejidad.
2. Herramientas de análisis, por ejemplo para imágenes médicas.
3. Las tarjetas gráficas en equipos informáticos, las cuales utilizan estructuras de datos basadas en mallas para visualizar y/o acelerar gráficos en la pantalla del ordenador.
4. CAD/CAM, controles numéricos y prototipado rápido.
5. Simulación Numérica, métodos de discretización espacial como de Elementos Finitos, Elementos de Contorno, de Volúmenes Finitos, de Diferencias Finitas, o métodos espectrales.
6. Visualización y Gráficos por Ordenador, Realidad Virtual, Visualización de Terrenos, Niveles de Detalle, compresión de imágenes, etc.

En este trabajo consideramos dos esquemas de partición de triángulos particulares: la partición auto-semejante (4TSS) o simplemente semejante y la partición en cuatro triángulos por el lado mayor (4TLE). Ambas estrategias son bien conocidas en la literatura<sup>15,16,17,18</sup>. En el esquema 4TSS el triángulo *padre* se divide en cuatro triángulos congruentes con el original. De esta forma un triángulo agudo genera 4 triángulos semejantes al mismo. Del mismo modo, un triángulo obtuso genera 4 triángulos obtusos semejantes. La Figura 1b ilustra el esquema de partición 4TSS.

Sin embargo si para la 4TSS cambiamos la arista interna paralela al lado mayor se obtiene la partición 4TLE (y recíprocamente, cambiando la arista mediana del lado mayor en el esquema 4TLE se obtiene la partición SS). La partición 4TLE se suele presentar primero uniendo el punto medio del lado mayor con el vértice opuesto, ver Figura 1c, y después con los puntos medios de los otros dos lados. De esta forma, los dos subtriángulos con aristas sobre el lado mayor original son semejantes al original. Los otros dos triángulos



**Figura 1.** Esquemas de subdivisión de triángulos: bisección por el lado mayor, 4TLE y 4TSS

son semejantes entre sí, pero en general no con el original. En ese caso decimos que se ha generado un nuevo triángulo no semejante con el original. En el caso de un triángulo rectángulo inicial, los 4 triángulos generados por la partición 4TLE son, como en la partición SS, semejantes al inicial, y éste es el único caso en que ocurre esto para la partición 4TLE. La Figura 1d ilustra el esquema para la partición 4TLE.

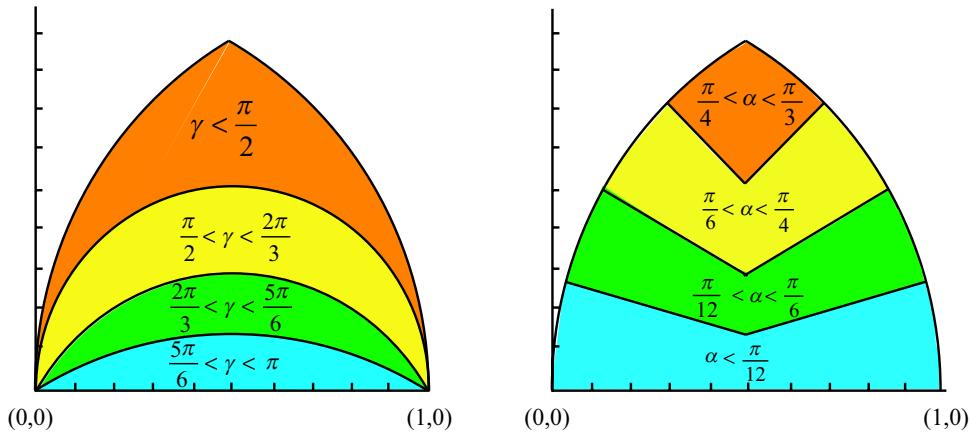
Nótese que la partición 4TLE de un triángulo agudo produce dos triángulos agudos y dos obtusos, mientras que la división 4TLE de un triángulo obtuso puede producir dos triángulos obtusos y dos agudos, o incluso cuatro triángulos obtusos. La subdivisión reiterada de los triángulos mediante el esquema 4TLE contiene siempre una cantidad significativa de triángulos obtusos. Sin embargo, se ha demostrado<sup>16</sup> que la partición reiterada de un triángulo obtuso mejora sistemáticamente los triángulos generados en el siguiente sentido: la sucesión de los ángulos más pequeños crece monótonamente mientras que la sucesión de los ángulos mayores decrece en una cantidad al menos igual al ángulo más pequeño en cada iteración. Además, se han obtenido cotas ajustadas de los valores de los ángulos generados y el número exacto de triángulos generados distintos en la referencia<sup>6</sup>.

En este trabajo se presenta un diagrama geométrico que permite visualizar la evolución de la forma geométrica de los triángulos generados por estas particiones de triángulos. El número de triángulos distintos se visualiza de forma inmediata en este diagrama. Para estudiar las curvas fronteras entre las diversas regiones que originan diferente número de triángulos se utilizan dos funciones de variable compleja. Por último, se desarrolla un esquema de partición híbrido que combina las particiones 4TLE y la SS y mediante el que se obtienen mejores triangulaciones. Se cierra el trabajo mostrando ejemplos de mallas refinadas en distintos ámbitos de aplicación.

## EL DIAGRAMA GEOMÉTRICO

El diagrama propuesto se construye como sigue: (1) Todo triángulo o subtriángulo es escalado para que su nuevo lado mayor tenga longitud unidad. El lado mayor forma la base del diagrama, en el segmento definido por los puntos  $(0, 0)$  y  $(1, 0)$ . (2) En esa situación el conjunto de todos los triángulos está acotado por ese segmento horizontal (el lado mayor)

y dos arcos circulares de radio unidad y centro los puntos extremos del lado mayor. Ver Figura 2.



**Figura 2.** Diagrama para la representación de los triángulos. Se muestran distintas regiones correspondientes al ángulo mayor ( $\gamma$ ) y al ángulo más pequeño ( $\alpha$ )

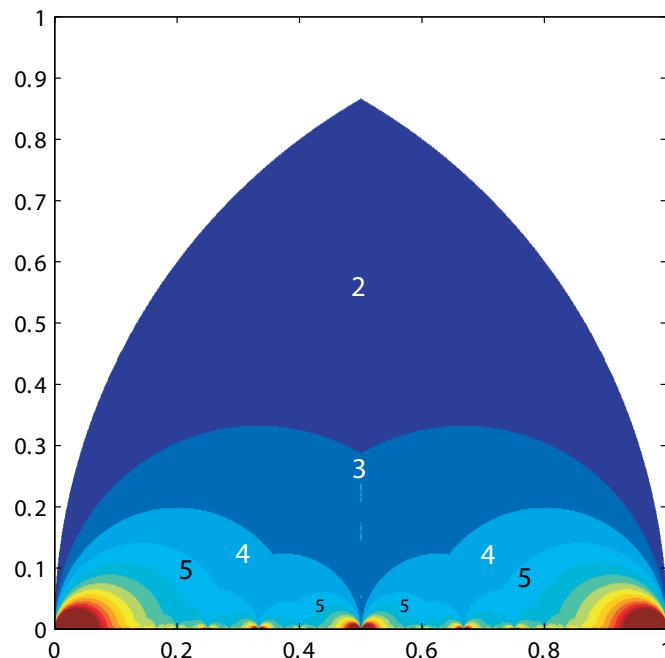
En el diagrama de la izquierda en la Figura 2 se han coloreado las regiones clasificando los triángulos según rangos de variación de *ángulo mayor*  $\gamma$ . Dichas regiones están limitadas por arcos de circunferencia. Por ejemplo la región inferior en esa figura corresponde a triángulos obtusos con el ángulo mayor  $\gamma \in [\frac{5\pi}{6}, \pi]$ . Por otro lado, la región superior, exterior al semicírculo de radio  $\frac{1}{2}$  centrado en el punto medio de la base, corresponde al conjunto de triángulos agudos. El triángulo equilátero corresponde al punto  $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ .

De manera semejante, en el diagrama de la derecha de la Figura 2 se han señalado las subregiones correspondientes a los triángulos con el ángulo mínimo en ciertos rangos. La región superior corresponde a triángulos con el ángulo mínimo  $\alpha$  verificando  $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{3}$ . La región en forma de ‘v’ justo debajo es para aquellos triángulos en los que  $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{4}$  y así sucesivamente. Al observar las distintas regiones en estos diagramas se deduce que los triángulos con ángulos cercanos al ángulo plano están en la parte central del diagrama cerca de la base. Triángulos con sólo un ángulo muy pequeño estarán localizados cerca de los extremos inferiores del diagrama. Finalmente, los triángulos casi-equiláteros corresponden a vértices cercanos al vértice superior del diagrama. Podemos utilizar este diagrama para estudiar la evolución de la forma de los triángulos generados por aplicación de una cierta partición. Concretamente aquí estudiamos primero la partición 4TLE.

## CLASES DE TRIÁNGULOS Y CURVAS FRONTERA

Los triángulos rectángulos corresponden a los puntos situados en el semicírculo de radio  $\frac{1}{2}$  centrado en la base del diagrama:  $|z - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$ . Los puntos por encima de ese semicírculo corresponden a triángulos agudos y los que están por debajo a triángulos obtusos. Queremos estudiar el número de triángulos generados mediante la partición 4TLE. En el esquema 4TLE, como ya se ha dicho aparecen subtriángulos semejantes al original y otros que no lo son. Nos planteamos clasificar los triángulos de acuerdo con el número de triángulos distintos en cuanto a semejanza generados por esta partición. Con este objetivo definimos la clase  $C_n$  como el conjunto de triángulos para los cuales la aplicación reiterada de la partición 4TLE produce exactamente  $n$  triángulos distintos.

De acuerdo con este planteamiento empezamos describiendo un experimento computacional tipo Monte Carlo que se puede usar para distinguir visualmente las clases de triángulos definidas de esta forma. Este experimento nos dará la clave para distinguir las distintas regiones que se producen en el diagrama, como resultado de aplicar la partición de triángulos 4TLE. Procedemos como sigue: (1) Seleccionamos un punto del dominio de nuestro diagrama geométrico. Este punto  $(x, y)$  define el ápice del triángulo objetivo, siendo los otros dos vértices los puntos  $(0, 0)$  y  $(1, 0)$ . (2) Aplicamos sucesivas veces la partición 4TLE a este triángulo y sus sucesores, siempre que el nuevo triángulo generado sea distinto de los anteriores. El proceso termina cuando el nuevo triángulo generado tiene la misma forma que alguno de los anteriores. (3) El número de refinamientos necesario para terminar el proceso define el número de triángulos no semejantes generados. Asociamos este número al punto inicial  $(x, y)$ . (4) Se aplica este proceso progresivamente a un gran número de puntos (triángulos) de nuestro diagrama, uniformemente distribuidos sobre el dominio. (5) Finalmente, representamos los valores obtenidos asignando distinto color a cada valor, obteniéndose el resultado de la Figura 3.



**Figura 3.** Subregiones para las clases de triángulos no semejantes generadas por una simulación Monte Carlo

Para mayor claridad, en la figura, se ha añadido en cada región el número de triángulos distintos que se generan. Por ejemplo, el número 2 corresponde a dos triángulos no semejantes y está asociado a la región situada sobre el par de arcos que se cortan en el eje de simetría vertical en el punto de ordenada  $y = \frac{\sqrt{3}}{6}$ . La región inmediatamente inferior corresponde a 3 triángulos no semejantes, y así a medida que nos acercamos a la base del diagrama el número de triángulos distintos generados aumenta. Visto de otra forma, triángulos de tipo afilado y en general triángulos cerca de la base necesitarán muchos refinamientos antes de que dejen de aparecer nuevos triángulos no semejantes. Más adelante exploraremos este punto de vista y representaremos las trayectorias correspondientes al proceso de migración de los nuevos triángulos.

Por simple inspección de la Figura 3, se deduce que la frontera entre las clases 2 y 3 viene dada por dos arcos circulares de radio  $\frac{1}{3}$  centrados respectivamente en  $x = \frac{1}{3}$  y en  $x = \frac{2}{3}$ . Estas curvas tienen por ecuaciones  $|z - \frac{1}{3}| = \frac{1}{3}$  y  $|z - \frac{2}{3}| = \frac{1}{3}$ . La siguiente frontera entre las clases 3 y 4 tiene una forma un poco más complicada. Parece evidente al observar el diagrama, que la forma de esta nueva frontera es la misma que la anterior a escala más pequeña y repetida dos veces. El patrón parece que se repite de forma fractal según es mayor el valor de las clases que estamos separando. Sin embargo, en lugar de estudiar las fronteras de forma recursiva como sugieren los comentarios anteriores, utilizaremos funciones de variable compleja y el concepto de *antecedente* de un triángulo para la partición 4TLE. El objetivo entonces es determinar la expresión analítica de estas curvas frontera en el diagrama, y delimitar entonces las distintas regiones en el mismo.

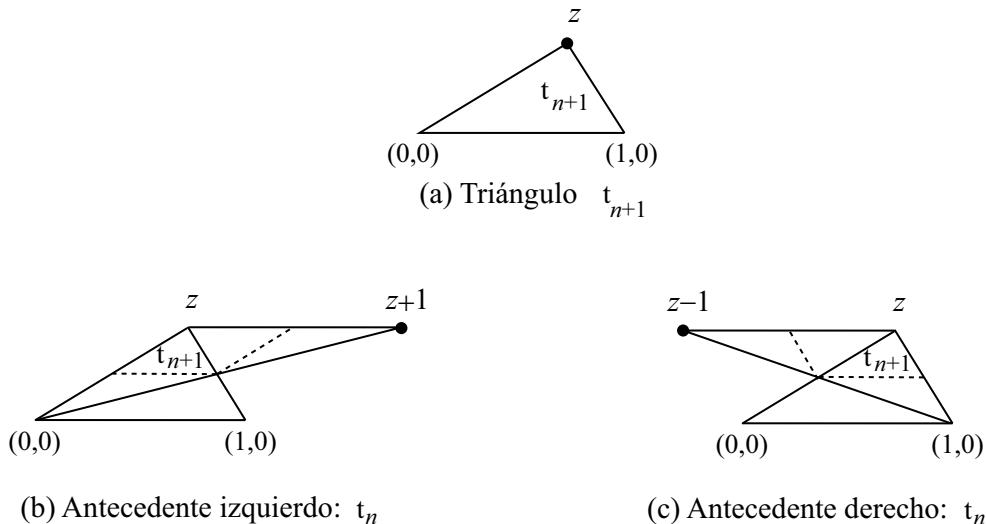
## CURVAS FRONTERA: ANÁLISIS DE LAS TRANSFORMACIONES PARA LA PARTICIÓN 4TLE

Empezaremos dando la definición de antecedente izquierdo y derecho de un triángulo:

**Definición 1** (*Antecedente izquierdo y derecho de un triángulo*)

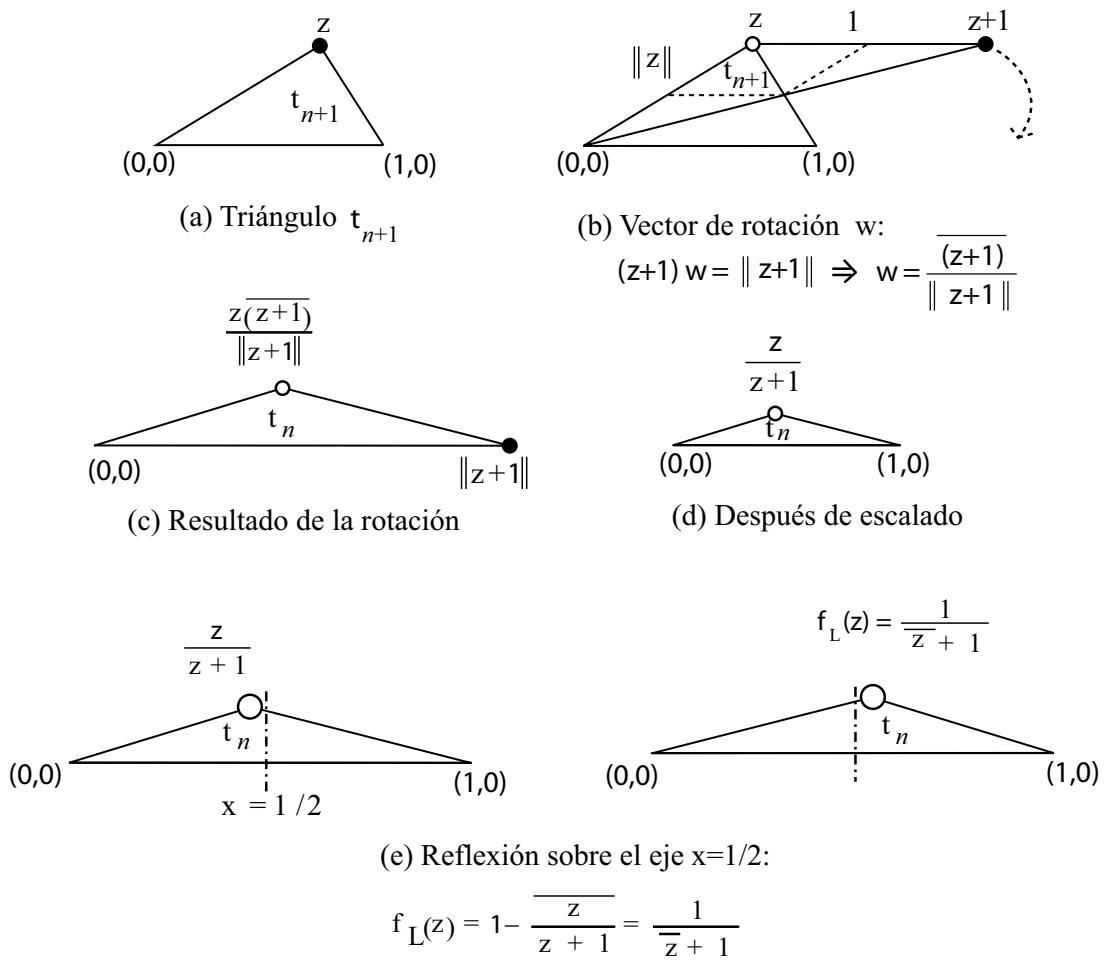
Dado un triángulo  $t_{n+1}$ , existen dos triángulos (diferentes) que llamaremos antecedentes izquierdo y derecho,  $t_n$ , para los cuales la partición 4TLE produce el triángulo  $t_{n+1}$ .

Por ejemplo, el triángulo  $t_{n+1}$  con vértices  $(0,0)$ ,  $(1,0)$  y  $z$  en la Figura 4a, tiene antecedente izquierdo  $t_n$  con vértices  $z$ ,  $(0,0)$ , y  $z+1$  (ver Figura 4b), y antecedente derecho  $t_n$  de vértices  $z$ ,  $(1,0)$ , y  $z-1$  (ver Figura 4c).



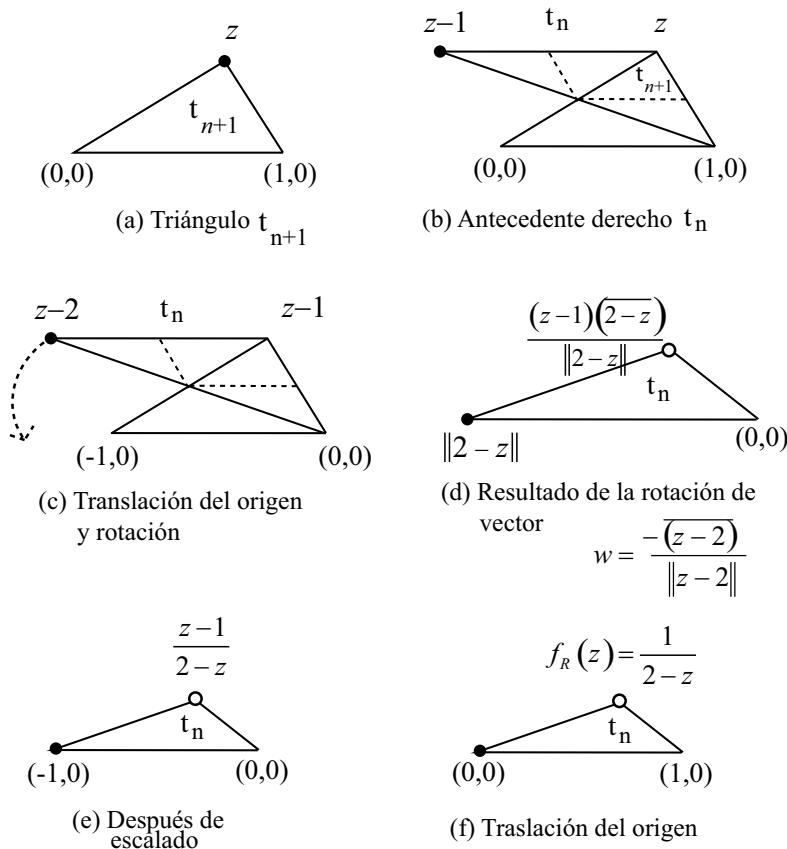
**Figura 4.** Los dos antecedentes del triángulo  $t_n$  para la partición 4TLE

**Teorema 2** La relación entre el ápice de un triángulo dado  $z$  en la mitad derecha del diagrama y los ápices de sus antecedentes izquierdo y derecho se puede expresar mediante las aplicaciones de variable compleja:  $f_L(z) = \frac{1}{\bar{z} + 1}$ , y  $f_R(z) = \frac{1}{2 - z}$ .



**Figura 5.** Transformaciones geométricas para la construcción del triángulo antecedente izquierdo  $t_n$  de  $t_{n+1}$ :  $f_L(z)$  con  $\operatorname{Re}(z) \geq \frac{1}{2}$

**Demostración** Sea  $t_{n+1}$  un triángulo determinado por su ápice  $z = (x, y)$  con  $x = \operatorname{Re}(z) \geq \frac{1}{2}$  y los vértices  $(0, 0)$  y  $(1, 0)$ . Su antecedente izquierdo  $t_n$  viene dado por los vértices  $(0, 0)$ ,  $z$  y la translación  $z + 1$  de  $z$ . Mediante las transformaciones geométricas mostradas en la Figura 5,  $f_L(z)$  se puede deducir como sigue: el ápice  $z$  es girado mediante el vector  $\vec{w} = \frac{z+1}{\|z+1\|}$  de forma que el triángulo  $t_n$  queda horizontal, ver Figura 5b-c, y es escalado para tener el lado mayor de longitud unidad, ver Figura 5d. Por último se emplea una reflexión con eje la recta vertical de ecuación  $x = \frac{1}{2}$  lo que produce que el triángulo antecedente buscado tenga el ápice en la parte derecha del diagrama, es decir  $\operatorname{Re}(z) > \frac{1}{2}$ , Figura 5e. La aplicación para el antecedente izquierdo es por tanto composición de las transformaciones anteriores, resultando la función de variable compleja  $f_L(z) = \frac{1}{\overline{z} + 1}$ . La aplicación de variable compleja  $f_R(z) = \frac{1}{2 - z}$  para el antecedente derecho de un triángulo inicial con ápice  $z$  se construye de forma análoga como muestra la Figura 6.



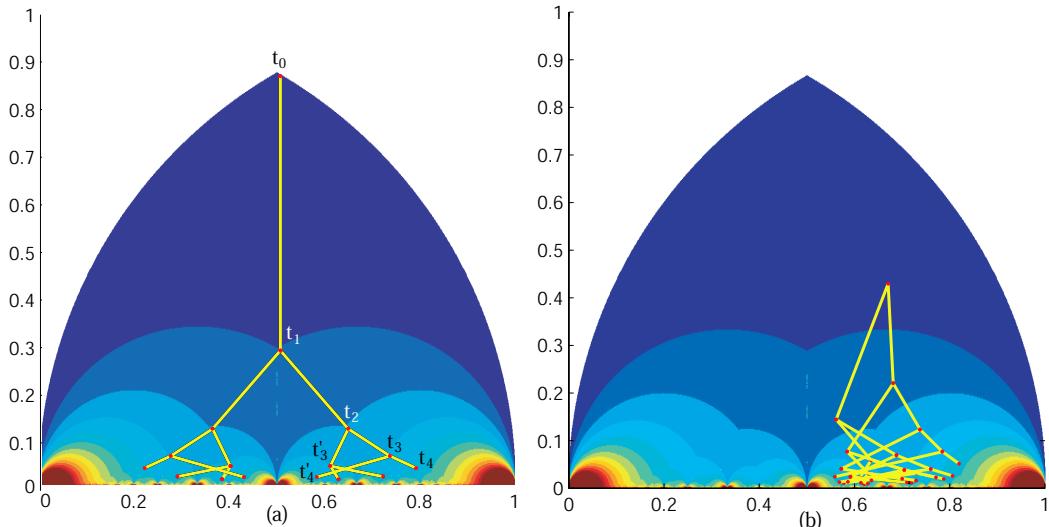
**Figura 6.** Transformaciones geométricas para la construcción del triángulo antecesor derecho  $t_n$  de  $t_{n+1}$ :  $f_R(z)$  con  $\operatorname{Re}(z) \geq \frac{1}{2}$

**Observación:** Nótese que para un punto  $z$  cumpliendo  $\frac{1}{2} \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1$  entonces  $\operatorname{Re}(f_L(z)) \leq \operatorname{Re}(f_R(z))$  (lo que explica la nomenclatura izquierdo o *left*/ derecho o *right* que hemos empleado para estas funciones complejas).

### ÁRBOL GENEALÓGICO DE TRIÁNGULOS EN EL DIAGRAMA GEOMÉTRICO

Para ilustrar el uso de las funciones  $f_L$  y  $f_R$ , la Figura 7a muestra la traza de los sucesivos antecesores para el triángulo equilátero  $t_0$  inicial, con el ápice  $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ . El vértice  $z$  de este triángulo está en la intersección de las curvas frontera exteriores del dominio. Obsérvese que este triángulo tiene un mismo antecesor izquierdo y derecho, es decir que en este caso  $f_L(z) = f_R(z)$  que es el ápice del triángulo  $t_1$  en la Figura 7a. El triángulo  $t_1$  es un triángulo obtuso con ápice en la intersección de las curvas frontera que cortan al eje de simetría del dominio en el punto de ordenada  $y = \frac{\sqrt{3}}{6}$ . Este triángulo obtuso es el resultado de la partición de sus antecesores izquierdo y derecho (denotado  $t_2$  en la figura). De nuevo para este triángulo  $t_2$ , sus triángulos antecesores se localizan en la intersección de dos curvas frontera (en la parte derecha del diagrama). Notamos estos antecesores por  $t'_3$  y

$t_3$  respectivamente. Como anteriormente,  $t'_3$  y  $t_3$  están situados en las intersecciones de las respectivas curvas frontera que limitan el cambio en las clases de triángulos según el número de triángulos generados. Este proceso continua en el diagrama hacia abajo con los respectivos antecedentes aproximándose progresivamente al caso degenerado de triángulos planos con el ápice cada vez más cerca de la línea horizontal.



**Figura 7.** Traza que muestra los antecedentes en las sucesivas regiones del diagrama geométrico: (a) para un triángulo equilátero inicial los antecedentes están en las curvas frontera y (b) para un triángulo agudo inicial los antecedentes se encuentran en el interior de las regiones de las clases de triángulos

Por razón de simetría se ha representado en la figura de la izquierda también los triángulos simétricos de los que aparecen en la parte derecha del diagrama, en la parte izquierda. Nótese, sin embargo, que las funciones de variable compleja explicadas anteriormente verifican que sus imágenes corresponden a la parte derecha del diagrama. Para hallar las respectivas funciones de variable compleja para puntos iniciales y finales en la parte izquierda se pueden usar la reflexión de las funciones dadas respecto del eje de simetría vertical del dominio.

En la Figura 7b, se muestra otro ejemplo de árbol genealógico de un triángulo con ápice el punto  $(0,67, 0,43)$ . (Se representa únicamente el árbol en la parte derecha del diagrama).

**Teorema 3** *Las curvas frontera de las clases de triángulos, mostradas en la Figura 3, se pueden generar matemáticamente de forma recursiva mediante la composición de las aplicaciones izquierda y derecha  $f_L(z)$ , y  $f_R(z)$ .*

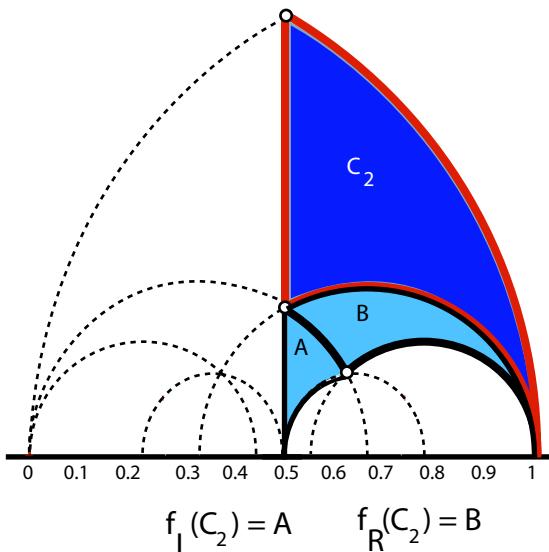
**Demostración** Las transformaciones  $f_L$  y  $f_R$  se pueden usar para determinar las ecuaciones de las curvas frontera de las clases de triángulos determinadas por el número de triángulos no semejantes generados por la partición 4TLE del siguiente modo. Empezamos con las curvas frontera del dominio, y consideramos los arcos de circunferencia de ecuaciones  $|z| = 1$  para  $x > \frac{1}{2}$  en la parte derecha del diagrama. La sucesiva aplicación de la transformación

$f_R$  produce la siguiente sucesión de arcos de circunferencia:

$$\left|z - \frac{2}{3}\right| = \frac{1}{3}; \left|z - \frac{4}{5}\right| = \frac{1}{5}; \dots; \left|z - \frac{2n}{2n+1}\right| = \frac{1}{2n+1}$$

todas ellas pasando por el punto  $(1, 0)$  y con radio decreciente. Nótese también que mediante la aplicación de la transformación  $f_L$  a la sucesión de arcos anterior, aparecen los arcos reflejados :

$$\left|z - \frac{5}{8}\right| = \frac{1}{8}; \left|z - \frac{9}{16}\right| = \frac{1}{16}; \dots; \left|z - \frac{4n+1}{8n}\right| = \frac{1}{8n}$$



**Figura 8.** Curvas frontera para  $\mathcal{C}_2$  y  $\mathcal{C}_3 = A \cup B$

Estamos especialmente interesados en buscar la expresión analítica de las curvas frontera de las clases de triángulos. Sea  $C_n$  el conjunto de triángulos que generan exactamente  $n$  triángulos no semejantes, y  $\partial\mathcal{C}_n$  su frontera. Como  $\mathcal{C}_{n+1} = f_L(\mathcal{C}_n) \cup f_R(\mathcal{C}_n)$ , la frontera  $\partial\mathcal{C}_{n+1}$  se obtiene mediante la aplicación de las transformaciones  $f_L$  y  $f_R$  a  $\partial\mathcal{C}_n$ :  $\partial\mathcal{C}_{n+1} = \partial(f_L(\mathcal{C}_n) \cup f_R(\mathcal{C}_n)) \subset f_L(\partial\mathcal{C}_n) \cup f_R(\partial\mathcal{C}_n)$ . Este resultado está representado en el diagrama en la Figura 8 para  $n = 2$  con la región correspondiente a 2 triángulos no semejantes. La clase de equivalencia  $\mathcal{C}_2$ , en oscuro. La aplicación de las funciones  $f_R$  y  $f_L$  produce una nueva región en color claro. Esta región corresponde a la clase de equivalencia  $\mathcal{C}_3$  y está compuesta de dos partes:  $f_L(\mathcal{C}_2) = A$  y  $f_R(\mathcal{C}_2) = B$ . El conjunto sucesivo de regiones y curvas frontera se obtiene de forma similar mediante:

$$\mathcal{C}_2 = \{z / \frac{1}{2} \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1; |z| \leq 1; |z - \frac{2}{3}| \geq \frac{1}{2}\}$$

$$\mathcal{C}_3 = f_L(\mathcal{C}_2) \cup f_R(\mathcal{C}_2)$$

⋮

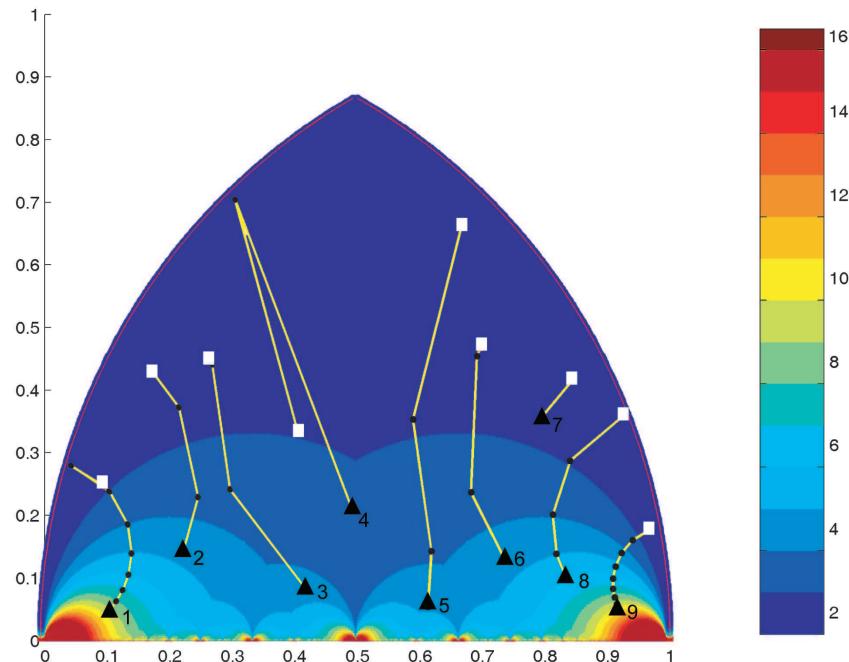
$$\mathcal{C}_n = f_L(\mathcal{C}_{n-1}) \cup f_R(\mathcal{C}_{n-1})$$

Por tanto, el conjunto  $\mathcal{C}_n$  (y su correspondiente frontera  $\partial\mathcal{C}_n$ ) se obtiene por la aplicación reiterada de  $n - 1$  aplicaciones  $f_L$  y  $f_R$  a  $\mathcal{C}_2$ .

De esta manera, gracias a las transformaciones  $f_L$  y  $f_R$  se han determinado las expresiones para las curvas frontera del diagrama geométrico.

## TRAYECTORIAS DEL REFINAMIENTO 4TLE EN EL DIAGRAMA

En el diagrama presentado, cada triángulo es identificado por su ápice (un punto en el diagrama). Si unimos los sucesivos ápices de los triángulos obtenidos consecutivamente por la partición 4TLE (refinamiento) se obtiene una trayectoria o camino, el cual representa la evolución de la forma de los triángulos generados. De esta manera, estas trayectorias permiten visualizar la mejora de la calidad de la malla producida por la partición. La Figura 9 muestra las trayectorias para 9 triángulos iniciales. El comienzo de cada trayectoria, que representa el triángulo inicial para el refinamiento, está representado por un pequeño triángulo en negro y una etiqueta numérica. Cada nuevo triángulo está marcado en esa trayectoria con un pequeño círculo y el último triángulo no semejante obtenido se señala con un pequeño cuadrado. Queda manifiesto en el diagrama, cómo las trayectorias que parten de las posiciones bajas del diagrama (triángulos con mala calidad) evolucionan, tras el refinamiento, a las partes altas del mismo (triángulos con mejor calidad), produciéndose de forma general un efecto de mejora de calidad en la generación de triángulos.



**Figura 9.** Trayectorias para un conjunto de triángulos iniciales distintos

Se aprecia en la figura que el esquema 4TLE tiende a generar mejores triángulos como indica el hecho de que las trayectorias se dirijan a la parte superior del diagrama. Esto se puede expresar formalmente como sigue:

Consideremos un triángulo obtuso inicial. La aplicación reiterada de la subdivisión 4TLE a este triángulo y sus sucesores produce una lista finita de triángulos mejores que cumplen

las propiedades representadas a continuación, hasta que el triángulo  $t_N$  se convierte en no obtuso<sup>6,16</sup>:

$$\begin{array}{ccccccc} t_0 & \rightarrow & t_1 & \rightarrow & t_2 & \rightarrow \dots \rightarrow & t_N \\ (\text{obtuso}) & & (\text{obtuso}) & & (\text{obtuso}) & & (\text{no obtuso}) \\ \alpha_0 & & \alpha_1 > \alpha_0 & & \alpha_2 > \alpha_1 & & \alpha_N > \alpha_{N-1} \\ \beta_0 & & \beta_1 > \beta_0 & & \beta_2 > \beta_1 & & \beta_N > \beta_{N-1} \\ \gamma_0 & & \gamma_1 \leq \gamma_0 - \alpha_1 & & \gamma_2 \leq \gamma_1 - \alpha_2 & & \gamma_N \leq \gamma_{N-1} - \alpha_N \end{array}$$

donde  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$ , y  $\gamma_i$  son los tres ángulos del triángulo  $t_i$  en orden creciente. La flecha que va del triángulo  $t_i$  al triángulo  $t_{i+1}$  significa que la primera aplicación de la partición 4TLE al triángulo  $t_i$  produce el nuevo triángulo  $t_{i+1}$ . El triángulo  $t_{i+1}$  se llama sucesor del triángulo  $t_i$ , mientras que  $t_i$  lo llamaremos antecesor del  $t_{i+1}$ . La mejora en la forma de los triángulos generados partiendo de un triángulo obtuso inicial  $t_0$  se puede también representar mediante las trayectorias como muestra la Figura 9. Además el proceso descrito en la sucesión anterior, termina en una de las tres situaciones siguientes<sup>16</sup>:

- (1)  $t_{N-1} \rightleftharpoons t_N$   $\gamma_{N-1} + \gamma_N = \pi$
- (2)  $t_{N-1} \rightarrow t_N \circlearrowleft$   $\gamma_N = \pi/2$
- (3)  $t_{N-1} \rightarrow t_N \rightleftharpoons t_{N+1}$   $\gamma_N + \gamma_{N+1} = \pi$

Este comportamiento es confirmado visualmente en las trayectorias de nuestro diagrama. Por ejemplo, nótese en la Figura 9 que la situación (1)  $t_{N-1} \rightleftharpoons t_N$  aparecen para las trayectorias 2, 5, 8 y 9; la situación (2)  $t_{N-1} \rightarrow t_N \circlearrowleft$  ocurre al final de las trayectorias 3 y 6. Finalmente, las *vueltas atrás* al final de las trayectorias, situación expresada en la ecuación (3), se dan en el resto de ejemplos mostrados en la Figura 9 (ver trayectorias 1 y 4). En realidad estas vueltas atrás son bucles cerrados no deseables en la generación de los dos últimos triángulos. No deseables ya que siempre se seguirá generando el triángulo obtuso. Para evitar esta situación, se presenta en la siguiente sección un nuevo método de refinamiento que combina la propia 4TLE y la partición semejante SS. Este método tiene la característica de mejorar la calidad en los triángulos generados en comparación con el enfoque visto hasta ahora de la 4TLE.

## NUEVO MÉTODO DE REFINAMIENTO: SUBDIVISIÓN HÍBRIDA 4TLE/SS

La subdivisión SS no genera triángulos nuevos en cuanto a semejanza, y por tanto la aplicación asociada a la evolución de la forma para la partición SS en nuestro diagrama geométrico es la identidad. Como los triángulos agudos son preservados bajo la partición SS, podemos utilizar una estrategia híbrida 4TLE-SS que utiliza la partición 4TLE sobre los triángulos obtusos y la SS en los triángulos agudos. Obviamente esta estrategia genera un refinamiento distinto de la triangulación que no corresponde ni a la partición SS ni a la 4TLE. Con este esquema híbrido, la partición de los triángulos agudos se hace con la partición SS y su refinamiento reproduce el mismo punto en el diagrama. El final de todas las trayectorias para este esquema están en la región superior del diagrama correspondiente a los triángulo agudos. Por otro lado, la partición de un triángulo obtuso se hace mediante la partición 4TLE y puede generar bien un triángulo agudo, o bien uno obtuso (de mejor calidad, menos obtuso que el anterior) resultando en este caso la misma trayectoria creciente que para la partición 4TLE mientras el triángulo es obtuso. Por tanto, bajo el esquema híbrido no hay camino de vuelta en las trayectorias de migración de los triángulos, como aparecen en la Figura 9.

Como la partición 4TLE de un triángulo agudo produce dos triángulos obtusos, se deduce inmediatamente que el esquema híbrido es ventajoso respecto del esquema 4TLE

en el sentido de que produce triangulaciones con mayor número de triángulos agudos que el esquema 4TLE. Esto lo mostramos de forma numérica seleccionando un ejemplo de un triángulo obtuso inicial de aquellos mostrados en la Figura 9. En cada iteración los triángulos de nuestro ejemplo son divididos reiteradamente hasta nueve niveles de división usando los esquemas 4TLE y el híbrido respectivamente. El porcentaje de triángulos agudos en cada nivel se compara fácilmente. Se puede observar el crecimiento en el número de triángulos agudos con el nivel de refinamiento. Estos porcentajes para 3 triángulos iniciales, marcados 3, 4, 5 en los puntos iniciales de las trayectorias de la Figura 8 aparecen en la Tabla I. El nivel  $N = 1$  corresponde al primer refinamiento del triángulo inicial en 4 subtriángulos, el nivel 2 es para el siguiente nivel de refinamiento que contiene 16 triángulos, y así sucesivamente, donde aparecerán  $4^N$  triángulos en el nivel de refinamiento  $N$ . Nótese que siempre habrá *al menos*  $2^N$  triángulos obtusos sobre la base del triángulo inicial incluso si se usa el esquema híbrido. Por tanto *una cota superior* del porcentaje de triángulos agudos resulta trivialmente:  $\left[1 - \frac{2^N}{4^N}\right] \cdot 100\%$ . Este dato se confirma con los resultados numéricos.

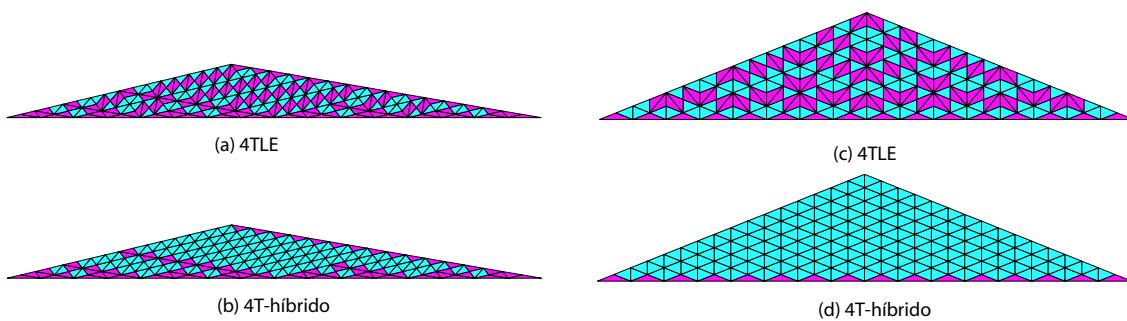
Refin.	Triángulo $t_3$		Triángulo $t_4$		Triángulo $t_5$	
	nivel $N$	híbrido	4TLE	híbrido	4TLE	híbrido
1	0,0	0,0	50,0	50,0	0,0	0,0
2	25,0	25,0	75,0	50,0	0,0	0,0
3	50,0	37,5	87,5	50,0	12,5	12,5
4	68,7	43,7	93,7	50,0	31,1	25,0
5	81,2	46,8	96,9	50,0	50,0	34,4
6	89,0	48,4	98,4	50,0	65,6	40,6
7	93,7	49,3	99,2	50,0	77,3	44,5
8	96,4	49,6	99,6	50,0	85,5	46,9
9	98,0	49,8	99,8	50,0	91,0	48,2

**Tabla I.** Porcentaje de triángulos agudos para un triángulo obtuso inicial y 9 etapas de refinamiento

Vemos en la tabla que el porcentaje triángulos agudos para el esquema 4TLE se va aproximando al 50 % a media que el número de etapas de refinamiento  $N$  crece, mientras que para el esquema híbrido el porcentaje rápidamente se acerca al 100 %. Para un el triángulo obtuso e isósceles  $t_3$  en el nivel 4 de refinamiento, la simple observación confirma que los triángulos obtusos permanecen sólo en la base de triángulo original cuando se aplica el esquema híbrido. Por otro lado, para el esquema 4TLE siempre aparecen triángulos obtusos también en el interior del triángulo original. (Observación: Es relativamente directo mejorar la estrategia de división en este caso de un triángulo obtuso e isósceles como el triángulo  $t_3$ . Basta utilizar primero una bisección por el lado mayor (2TLE). En general esa sencilla solución no es posible. Otros esquemas involucran inserción de nuevos nodos o cambio de aristas, o bien técnicas de suavizado (ver por ejemplo<sup>10,19,20,21</sup>. Sin embargo, estos aspectos de la mejora de la triangulación no son objeto de este trabajo.

## EJEMPLOS DE APLICACIÓN DEL REFINAMIENTO DE MALLAS 4TLE/4TSE

En esta sección, a modo de ilustrar sólo algunas de aplicaciones de los algoritmos de refinamiento basados en estas particiones se describen tres ejemplos en el campo de la Aproximación de Superficies, Modelado geométrico Mediante Mallas y Análisis por Elementos Finitos.



**Figura 10.** Mallas después de 4 refinamientos para el triángulo  $t_3$  (izquierda) y el triángulo  $t_4$  (derecha). Los triángulos agudos aparecen en color cian y los obtusos en magenta

### Aproximación de Superficies

En la Figura 11 se muestran los resultados de la aplicación del algoritmo de refinamiento y desrefinamiento (también conocido como simplificación) en la aproximación adaptativa de mallas RTIN (Right Triangulated Irregular Network)<sup>22,23,24,25</sup>.

El refinamiento trabaja uniformemente o de forma local en las triangulaciones. El algoritmo de desrefinamiento reduce la complejidad de la triangulación eliminando los puntos menos significativos con un criterio de error. La figura compara las triangulaciones resultantes de una herramienta de simplificación de terrenos comercial, el *Rational Reducer*, con las obtenidas por nuestros algoritmos. Más detalles pueden encontrarse en las referencias<sup>26,27</sup>.

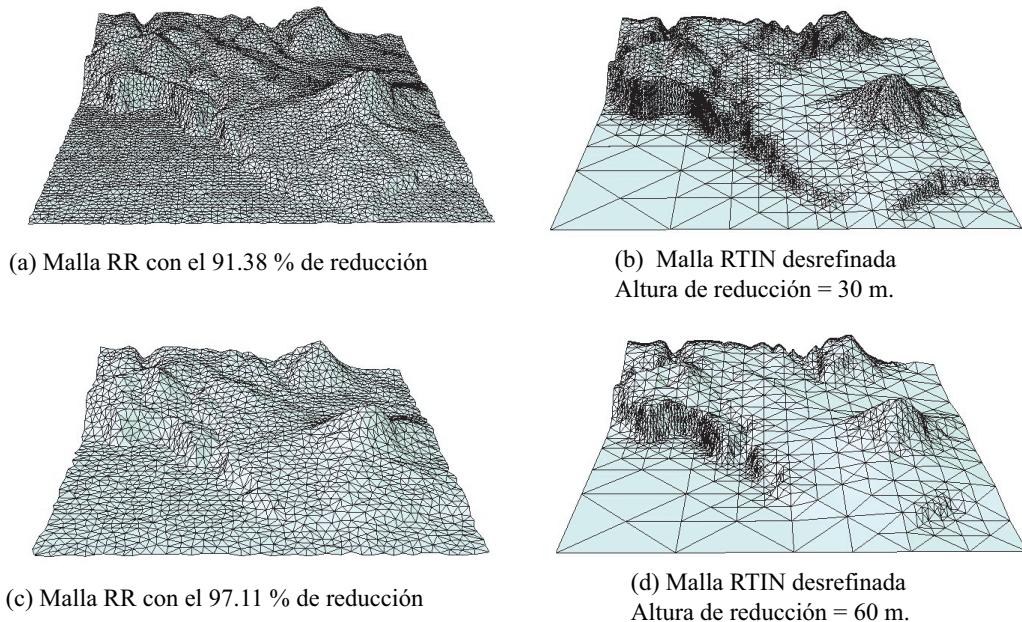
Los algoritmos de refinamiento de mallas triangulares, en combinación con los de desrefinamiento son herramientas versátiles en la aproximación de superficies, por ejemplo, de terrenos. Los esquemas 4TLE/SS permiten obtener mallas con calidad que pueden ser usadas en Visualización, Análisis de superficies, aplicaciones GIS etc.

### Modelado Geométrico Mediante Mallas

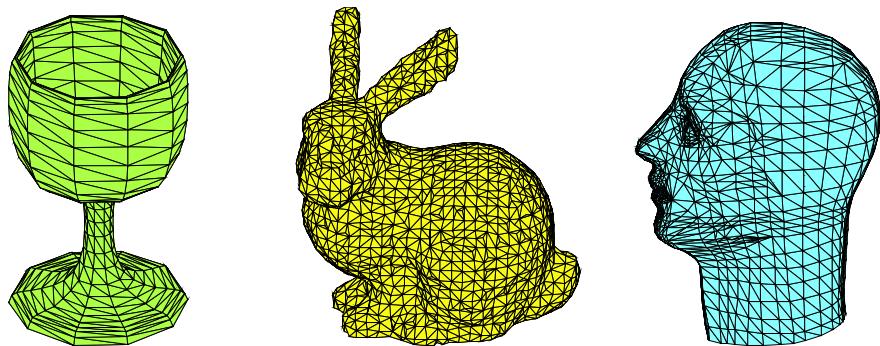
Los algoritmos de refinamiento y desrefinamiento de mallas triangulares también pueden ser aplicados en el modelado geométrico mediante mallas, el cual permite disponer de modelos de superficies malladas. La Figura 12 muestra tres ejemplos de triangulaciones de superficies. En la primera se ha usado un algoritmo basado en la biseción de triángulos, mientras que en las otras dos se ha utilizado un algoritmo refinamiento basado en la partición 4TLE. Estos modelos mediante mallas pueden usarse en aplicaciones de CAD/CAM cuyo tratamiento permita estructuras de datos basadas en mallas.

### Análisis por Elementos Finitos

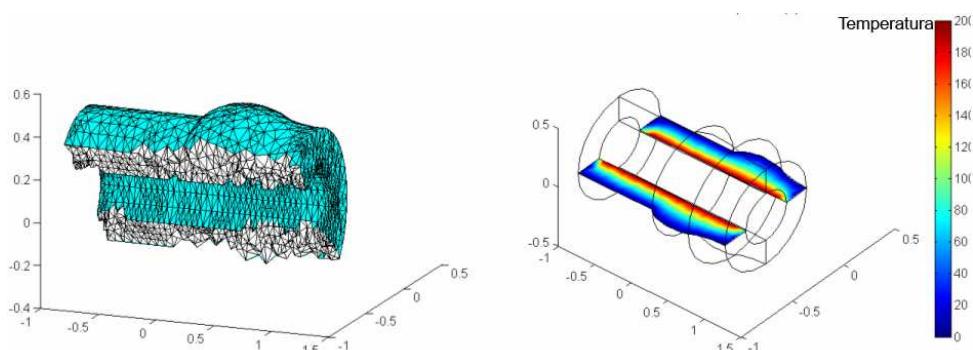
El Método de Elementos Finitos, ampliamente utilizado en la simulación de productos y piezas industriales se puede usar con mallas obtenidas por la extensión a 3D de nuestros algoritmos de refinamiento. Por ejemplo, en la Figura 13 se muestra un tramo de tubo de acero con agujero interior, en el cual se le aplica una fuente de calor de 200°C, estando inicialmente el tubo a 18°C. El diagrama en la figura representa la difusión del calor. Se usa la ecuación estándar del calor en 3D con refinamiento adaptativo en tres iteraciones que usa el residuo de la solución en la barra de acero. Más detalles pueden encontrarse en el trabajo publicado<sup>2</sup>.



**Figura 11.** Triangulación de una zona de Gáldar (Gran Canaria) mediante Rational-Reducer (izquierda) y mediante la combinación de los algoritmos de refinamiento y desrefinamiento locales basados en la partición 4TLE (derecha)



**Figura 12.** Triangulación de algunas superficies



**Figura 13.** Corte del tubo, que aproxima el elemento con 69838 tetraedros y diagrama de temperaturas

## CONCLUSIONES

Este trabajo contribuye con un diagrama gráfico y un método de subdivisión, ambos de utilidad en el campo de la generación de mallas. Se ha presentado un nuevo diagrama que facilita el estudio de la evolución de la forma de los triángulos cuando se utilizan estrategias de subdivisión o refinamiento de triángulos. Mediante un proceso Monte Carlo se hallan experimentalmente las regiones del diagrama correspondientes a triángulos que generan distinto número de triángulos en cuanto a semejanza. Esto ha motivado el uso de dos funciones de variable compleja para hallar de forma recursiva las ecuaciones de las curvas frontera de esas clases de equivalencia de triángulos descritas en el diagrama. Como añadido al diagrama, se estudian y definen las trayectorias que describen la migración de los triángulos generados bajo el esquema de refinamiento utilizado.

Por otro lado, se ha propuesto un nuevo esquema de subdivisión híbrido para el refinamiento de mallas triangulares. Con ayuda del diagrama descrito, hemos comparado el comportamiento de los esquemas de partición 4TLE e híbrido 4TLE-SS. En el esquema híbrido los triángulos agudos tienden a ocupar el total de la triangulación cuando el nivel de refinamiento aumenta. Esto confirma que la estrategia híbrida es mucho más ventajosa para hallar triangulaciones más agudas, ya que genera triángulos de mejor calidad que con la estrategia 4TLE.

El trabajo finaliza presentando algunos ejemplos de aplicación que demuestran que los algoritmos de refinamiento de mallas triangulares son herramientas de utilidad en el en distintas áreas como la Aproximación de superficies, Modelado geométrico mediante mallas y Análisis por Elementos Finitos.

## AGRADECIMIENTOS

Este trabajo de investigación ha sido parcialmente financiado por los Proyectos con referencias MTM2005-08441-C02-02 y MTM2008-05866-C03-02/MTM del Ministerio de Educación y Ciencia de España. El primer autor agradece al Gobierno de Canarias y a los centros ICES y CFDLab de la Universidad de Tejas, Austin, por financiar su estancia en dicha universidad en el año 2005.

## REFERENCIAS

- 1 J.P. Suárez y A. Plaza, "Block-balanced meshes in iterative uniform refinement", *Comp. Aid. Geom. Design*, Vol. **23**, N° 9, pp. 684–697, (2006).
- 2 J.P. Suárez P. Abad, A. Plaza y M.A. Padrón, "Computational aspects of the refinement of 3D tetrahedral meshes", *Journal of Computational Methods in Sciences and Engineering*, Vol. **5**, N° 4, pp. 1-10, (2005).
- 3 A. Plaza, J.P. Suárez y G.F. Carey, "A geometric diagram and hybrid scheme for triangle subdivision", *Comp. Aid. Geom. Design*, Vol. **24**, N° 1, 19–27, (2007).
- 4 Y. Zhang, G. Xy y C. Bajaj, "Quality meshing of implicit solvation models of biomolecular structures", *Comp. Aid. Geom. Design*, Vol. **23**, N° 6, pp. 510–530, (2006).
- 5 H. Spellers, P. Dierckx y S. Vandewalle, "Local subdivision of Powell-Sabin splines", *Comp. Aid. Geom. Design*, Vol. **23**, N° 5, pp. 446–462, (2006).
- 6 A. Plaza, J.P. Suárez, M.A. Padrón, S. Falcón y D. Amieiro, "Mesh quality improvement and other properties in the four-triangles longest-edge partition", *Comp. Aid. Geom. Design*, Vol. **21**, N° 4, pp. 353–369, (2004).

- 7 G.F. Carey, "Computational Grids: Generation, Refinement and Solution Strategies", Taylor and Francis, (1997).
- 8 R. Schneiders y R. Bünten, "Automatic generation of hexahedral finite element meshes", *Comp. Aid. Geom. Design*, Vol. **12**, N° 7, pp. 693–707, (1995).
- 9 P.M. Knupp y S. Steinberg, "The Fundamentals of Grid Generation", CRC Press, Boca Raton, FL, (1994)
- 10 L.A. Freitag y P. Plassman, "Local optimization-based simplicial mesh untangling and improvement", *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, Vol. **49**, N° 1, pp. 109–125, (2000).
- 11 R.V. Garimella, M. J. Shashkov y P. M. Knupp, "Triangular and Quadrilateral Surface Mesh Quality Optimization using Local Parametrization", *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engrg.*, Vol. **193**, N° 9-11, pp. 913–928, (2004).
- 12 L. Branets y G.F. Carey, "A local cell quality metric and variational grid smoothing algorithm", *Engrg. Compt.*, Vol. **21**, N° 1, pp. 19–28, (2005).
- 13 P.M. Knupp, "Algebraic mesh quality metrics", *SIAM J. Sci. Comput.*, Vol. **23**, pp. 193–218, (2001).
- 14 I. Babuška, y A.K. Aziz, "On the angle condition in the finite element method", *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol. **13**, N° 2, pp. 214–226, (1976).
- 15 M.C. Rivara, "Algorithms for refining triangular grids suitable for adaptive and multigrid techniques", *Inter. J. Num. Meth. Engrg.*, Vol. **20**, pp. 745–756, (1984).
- 16 M.C. Rivara y G. Iribarren, "The 4-triangles longest-side partition of triangles and linear refinement algorithms", *Math. Comp.*, Vol. **65**, N° 216, pp. 1485–1502, (1996).
- 17 L. Velho, "Quasi 4-8 subdivision", *Comp. Aid. Geom. Design*, Vol. **18**, N° 5, pp. 345–357, (2001).
- 18 L. Velho y D. Zorin, "Quasi 4-8 subdivision", *Comp. Aid. Geom. Design*, Vol. **18**, N° 5, pp. 397–427, (2001).
- 19 H. Edelsbrunner y N. Shah, "Incremental topological flipping works for regular triangulations", *Proceedings of the 8th ACM Symposium on Computational Geometry*, pp. 43–52, (1992).
- 20 S. Canann, M. Stephenson y T. Blacker, "Optismoothing: an optimization-driven approach to mesh smoothing", *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. **13**, N° 2-3, pp. 185–190, (1993).
- 21 Y. Ohtake, A. Belyaev y I. Bogaevski, "Mesh regularization y adaptive smoothing", *Computer Aided Design*, Vol. **33**, N° 11, pp. 789—800, (2001).
- 22 L. De Floriani, B. Falcidieno, G. Nagy y C. Pienovi, "Hierarchical structure for surface approximation", *Comp. & Graph.*, Vol. **8**, N° 2), pp. 183–193, (1984).
- 23 L. De Floriani, P. Magillo y E. Puppo, "Applications of computational geometry to geographic information systems", in *Handbook of Computational Geometry*. Sack, J.R. and Urrutia, J. (Eds.), Elsevier, pp. 333–388, (2000).
- 24 W. Evans, D. Kirkpatrick y G. Townsend, "Right-Triangulated Irregular Networks", *Algorithmica: Special Issue on Algorithms for Geographical Information Systems*, Vol. **30**, N° 2, pp. 264–286, (2001).
- 25 R. Pajarola, "Large scale Terrain Visualization using the Restricted Quadtree Triangulation", *Proc. IEEE Visualization'98*, pp. 19–26 & 515, (1998).
- 26 J.P. Suárez y A. Plaza, "Refinement and hierarchical coarsening schemes for triangulated surfaces", *Journal of WSCG*, Vol. **11**, N° 3, pp. 440–447, (2003).
- 27 J.P. Suárez y A. Plaza, "Four-Triangles adaptive algorithms for the representation of RTIN terrain meshes", *Math. Comp. Model.*, Vol. **49**, pp. 1012–1020, (2009).

- 28 J.P. Suárez, A. Plaza Y G.F. Carey, "Estructuras de datos geométricas para algoritmos de refinamiento basados en el esqueleto", *Rev. Int. de Mét. Num. Cál. Dis. Ing.*, Vol. **19**, N° 1, pp. 89–109, (2003).
- 29 J.P. Suárez, A. Plaza y M.A. Padrón, "El problema de propagación del refinamiento en cuatro triángulos por la arista mayor", *Rev. Int. Mét. Num. Cál. Dis. Ing.*, **22**, N° 1, pp. 3–17, (2006).