

# Uma compara o de esquemas de estabiliza o para a simula o por elementos finitos de escoamentos imiscíveis bi-f sicos em meios porosos

Alvaro L.G.A. Coutinho

Programa de Engenharia Civil, COPPE  
Universidade Federal do Rio de Janeiro  
Caixa Postal 68506, Rio de Janeiro, Brasil, CEP 21945-970  
Tel.: 55-21-2562 8077/8080 ; Fax: 55-21-2562 8081  
e-mail: alvaro@nacad.ufrj.br

Arlenes Silvino da Silva

Departamento de Ciências da Computa o  
Universidade Federal de Mato Grosso  
Mato Grosso, Av. Fernando Correa da Costa, s/n  
Cuiabá, Mato Grosso, Brasil, CEP 78.060-900,  
Tel.: 55-65-615 8791; Fax: 55-65-615 8704  
e-mail: arlenes@dcc.ufmt.br

Philippe R.B. Devloo

Departamento de Engenharia Civil  
Universidade Estadual de Campinas  
UNICAMP, Av. Albert Einstein, 951, Cidade  
Universitária "Zeferino Vaz", Caixa Postal 6021  
Campinas, São Paulo, Brasil, CEP 13083-970,  
Tel.: 55-19-3788 2329; Fax: 55-19-3788 2411  
e-mail: phil@fec.unicamp.br

## Resumen

Este trabalho apresenta uma compara o numérica de formula es estabilizadas Streamline-Upwind/Petrov-Galerkin (SUPG) com operador de captura de descontinuidades aplicadas a problemas de escoamentos bi-f sicos de fluidos imiscíveis ligeiramente compressíveis em meios porosos, onde os efeitos da gravidade e pressão capilar são considerados. O conjunto acoplado de equa es diferenciais parciais resultantes o approximado no espaço pelo método dos elementos finitos. A integra o no tempo do sistema semi-discreto e feita através de um algoritmo bloco-iterativo preditor-multicorretor, onde os sistemas lineares resultantes são resolvidos através de técnicas iterativas elemento-por-elemento. As diferentes formula es são avaliadas do ponto de vista de preciso  e desempenho computacional.

## Summary

This work presents a numerical comparison of Streamline-Upwind/Petrov-Galerkin formulations with shock-capturing applied to slightly compressible immiscible two-phase flows in porous media, considering gravity and capillary pressure effects. The governing coupled system of partial differential equations is approximated in space by the finite element method. The resulting semi-discrete nonlinear system is advanced in time by a block-iterative predictor-multicorrector scheme, where the linear equation system are solved by iterative element-by-element techniques. Numerical examples show the accuracy and computer performance of the different formulations.

## INTRODU O

A existência de estruturas geológicas com geometrias complexas, tais como falhas e estratifica es, e a presença de heterogeneidades podem influenciar decisivamente o escoamento dos fluidos através destas forma es. Os simuladores de reserv torios comerciais

geralmente não possuem grande flexibilidade para o tratamento de geometrias complexas, devido principalmente ao emprego de métodos de diferenças finitas como a técnica principal de discretização espacial. Métodos de discretização espacial voltados para malhas não estruturadas por outro lado, são extremamente atraentes para a simulação de escoamentos na presença de cenários complexos. Em sua grande maioria, os simuladores voltados para malhas não estruturadas empregam técnicas híbridas de discretização espacial. Por exemplo, elementos finitos mistos para pressão e velocidade e volumes finitos, métodos de características ou acompanhamento de frentes para saturação de água, Durlofsky<sup>6</sup>, Pereira *et al.*<sup>16</sup>, Chavent e Jaffre<sup>2</sup>, Dahle *et al.*<sup>5</sup>, Glimm *et al.*<sup>9</sup>, e métodos de volumes de controle/elementos finitos, Fung *et al.*<sup>7</sup>. O emprego de estratégias baseadas somente na utilização do método dos elementos finitos iniciou-se ainda na década de 70<sup>17</sup>, mas estas estratégias ainda não são populares. As maiores dificuldades estão associadas aos seguintes fatos: (i) o campo de velocidades é determinado pela equação de Darcy, o que requer a diferenciação do campo de pressão, (ii) a presença de elevados gradientes de saturação, (iii) a existência de fortes não-linearidades, provenientes de relações empíricas (permeabilidades relativas, pressões capilares, etc.).

As equações que governam o deslocamento imiscível de dois fluidos (água e óleo, por exemplo), em um meio poroso rígido apresentam todas as dificuldades acima<sup>15</sup>. O modelo matemático é geralmente expresso como duas equações acopladas, a equação da pressão e a equação da saturação. A equação da pressão, que descreve a evolução do campo de pressão no reservatório, é uma equação diferencial parcial não-linear com coeficientes variáveis do tipo parabólica. A equação da saturação, que descreve a evolução do campo de saturação do fluido injetado é uma lei de conservação não-linear essencialmente hiperbólica. Lewis *et al.*<sup>12</sup> discutiram as dificuldades de solução encontradas por formulações implícitas de elementos finitos baseadas no método de Galerkin na solução de deslocamento imiscíveis bi-fásicos incompressíveis. Também para este modelo matemático Langtangen<sup>11</sup> mostrou que as dificuldades provenientes da existência de elevados gradientes de saturação poderiam ser ultrapassadas com a utilização de formulação Petrov–Galerkin com operador de captura de descontinuidades. Além disso Langtangen<sup>11</sup> também discute esquemas de discretização temporal totalmente implícitos e implícitos sequenciais. Loula *et al.*<sup>13</sup> apresentam uma técnica de pós-processamento para aumentar a qualidade da aproximação do campo de velocidades, também para deslocamentos imiscíveis incompressíveis, permitindo que pressão, velocidade e saturação fossem aproximadas por elementos finitos Lagrangeanos de mesma ordem. Coutinho *et al.*<sup>13</sup> discutiram a utilização de métodos com implicitude variável para a equação da saturação. Nos trabalhos de Louta *et al.*<sup>13</sup> e Coutinho *et al.*<sup>3</sup> a equação da pressão era aproximada no espaço pelo método de Galerkin, as velocidades avaliadas por técnicas de pós-processamento e a equação da saturação aproximada no espaço através de formulações estabilizadas de Petrov–Galerkin. Já Deb *et al.*<sup>4</sup> discutiram para o caso de deslocamentos imiscíveis bi-fásicos ligeiramente compressíveis a utilização de adaptatividade  $h - p$ . Naquele trabalho métodos de elementos finitos de Galerkin foram empregados para a aproximação da equação da pressão e formulações estabilizadas de Petrov–Galerkin foram usadas para a equação da saturação.

Neste trabalho discutiremos o emprego de formulações estabilizadas do tipo Streamline-Upwind/Petrov–Galerkin (SUPG)<sup>1</sup> com operador de captura de descontinuidade tipo CAU, desenvolvido por Galeão e Dutra do Carmo<sup>8</sup>, para a aproximação espacial da equação da saturação no caso de escoamentos bi-fásicos imiscíveis ligeiramente compressíveis, considerando-se ainda, efeitos do campo gravitacional e de pressão capilar. O restante deste artigo é organizado como segue. A sessão seguinte apresenta o modelo matemático para o problema em questão. Em seguida, apresenta-se a formulação semi-discreta de elementos finitos, que envolve uma aproximação de Galerkin para a equação da pressão e formulações estabilizadas para a equação da saturação. Discute-se ainda um esquema implícito bloco-

iterativo preditor-multicorretor para o avanço temporal obtido através de uma simplificação de uma aproximação totalmente implícita. Mostra-se ainda a necessidade de se introduzir um esquema de pós-processamento do campo de velocidades. Na seção 4, apresentam-se diversos experimentos numéricos, onde se evidenciam os méritos relativos das formulações estabilizadas discutidas anteriormente. Finalmente o artigo se encerra com uma discussão das contribuições principais deste trabalho.

## MODELO MATEMÁTICO

O modelo matemático para o deslocamento imiscível de dois fluidos moderadamente compressíveis, água e óleo, por exemplo, através de um meio poroso rígido, pode ser descrito considerando-se a lei de Darcy e as equações de conservação de massa para cada fluido. Estas são dadas por

$$-\nabla(\rho_j v_j) + q_j = \frac{\partial}{\partial t}(\phi\rho_j s_j), \quad j = o, w \quad (1)$$

onde os subscritos  $o$  e  $w$  se referem respectivamente as fases óleo e água,  $q_j$  é a vazão volumétrica de cada fase do fluido,  $s_j$  é a saturação de cada fluido e  $v_j$  representa a velocidade superficial dos fluidos. A velocidade superficial é dada pela lei de Darcy, ou seja,

$$v_j = -\lambda_j \mathbf{K}(\nabla p_j - \rho_j g \nabla z), \quad j = o, w \quad (2)$$

onde  $p_j$  é a pressão de cada fase,  $\rho_j$  é a massa específica das fases,  $g$  é a força da gravidade e  $\nabla z$  é um vetor que aponta a direção de atuação da gravidade. Considera-se que o tensor de permeabilidade  $\mathbf{K}$  depende da posição somente e que o material seja anisotrópico, ou seja,

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_x & k_{xy} \\ k_{yx} & k_y \end{bmatrix} \quad (3)$$

sendo  $k_x$ ,  $k_y$ ,  $k_{xy}$  e  $k_{yx}$  as permeabilidades absolutas em relação aos eixos cartesianos. Admite-se que  $k_{xy} = k_{yx}$ . As mobilidades de cada fase são dadas pela relação

$$\lambda_j = \frac{k_{rj}}{\mu_j} \quad (4)$$

onde  $k_{rj} = k_{rj}(s_w)$  é a permeabilidade relativa e  $\mu_j$  a viscosidade.

Após uma manipulação algébrica destas equações, conforme descrito por Peaceman<sup>15</sup>, chega-se a uma equação parabólica descrevendo a evolução do campo de pressões no meio poroso e a uma equação predominantemente convectiva descrevendo a evolução da frente de saturação de água. Estas, para um domínio  $\Omega \in R^2$ , de contorno  $\Gamma$  em um intervalo de tempo  $[0, T]$ , podem ser escritas como

$$\phi c_t \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot v_T = Q_t \text{ em } \Omega \times [0, T] \quad (5)$$

$$-\nabla \cdot [f_w v_T + h_w \mathbf{K} \nabla s_w + \lambda_o f_w (\rho_w - \rho_o) \mathbf{K} g \nabla z] - Q_w = \phi \frac{\partial s_w}{\partial t} \text{ em } \Omega \times [0, T] \quad (6)$$

Na equação (5)  $p$  é a pressão média das fases,  $v_T = (v_o + v_w)$  é a velocidade total do sistema,  $Q_t = Q_o + Q_w$  é a vazão volumétrica total de injeção,  $\phi$  é a porosidade,  $c_t$  é a

compressibilidade total do sistema rocha-fluido e  $t \in [0, T]$  o tempo. A função de fluxo fracionário da água é dada por

$$f_w = \frac{\lambda_w}{\lambda_w + \lambda_o} \quad (7)$$

e a função  $h_w$  é definida como

$$h_w = -\frac{\lambda_o \lambda_w}{\lambda_o + \lambda_w} \frac{dp_c}{ds_w} \quad (8)$$

onde  $p_c = p_o - p_w$  é a pressão capilar, dependente somente da saturação da água, isto é,  $p_c = p_c(s_w)$ .

De forma a simplificar as expressões (5) e (6), podemos definir os tensores,

$$\mathbf{D} = \lambda_o f_w \frac{dp_c}{ds_w} \mathbf{K} \quad (9)$$

$$\Lambda_p = \mathbf{K} (\lambda_o + \lambda_w) \quad (10)$$

$$\Lambda_m = \frac{1}{2} \mathbf{K} (\lambda_o - \lambda_w) \quad (11)$$

e a velocidade aparente de transporte do fluido,

$$v_a = f_w [v_T + \lambda_o (\rho_w - \rho_o) \mathbf{K} \mathbf{g}] \quad (12)$$

onde  $\mathbf{g} = g \nabla z$ . Substituindo estas expressões em (5) e (6), o sistema resultante de equações diferenciais parciais é

$$\phi c_t \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot v_T = Q_t \text{ em } \Omega \times [0, T] \quad (13)$$

$$v_T = -\Lambda_p \nabla p - \Lambda_m \frac{dp_c}{ds_w} \nabla s_w + (\rho_o \lambda_o + \rho_w \lambda_w) \mathbf{K} \mathbf{g} \quad (14)$$

$$\phi \frac{\partial s_w}{\partial t} + \nabla \cdot v_a + \nabla \cdot [\mathbf{D} \nabla s_w] + Q_w = 0 \text{ em } \Omega \times [0, T] \quad (15)$$

O conjunto de equações acima descreve o modelo matemático para escoamentos bifásicos ligeiramente compressíveis através de meios porosos. O único termo que leva em consideração os efeitos da compressibilidade é a derivada temporal da pressão na equação (13). Como evidenciado por Durlofsky<sup>6</sup>, este modelo matemático só é válido se  $c_t \ll 1,0$ . Entretanto, para escoamentos de óleo e água em reservatórios de petróleo,  $c_t \approx 10^{-6} \text{ psi}^{-1}$ , portanto dentro das condições de validade do modelo. Para completar a descrição do problema condições de contorno adequadas devem ser especificadas. A fronteira  $\Gamma$  do domínio  $\Omega$  pode ser particionada de tal forma que  $\Gamma = \Gamma_i \oplus \Gamma_p \oplus \Gamma_d \oplus \Gamma_n$ , onde  $\Gamma_i$  e  $\Gamma_p$  denotam, respectivamente a fronteira nos poços injetor e produtor,  $\Gamma_d$  denota a fronteira onde a pressão é prescrita e  $\Gamma_n$  a parte da fronteira onde a condição de escoamento nulo é especificada. Portanto as condições de contorno são:

Para a equação da pressão,

$$v_T \cdot \mathbf{n} = Q_1 \text{ em } \Gamma_i \times [0, T] \quad (16)$$

$$v_T \cdot \mathbf{n} = Q_p \text{ em } \Gamma_p \times [0, T] \quad (17)$$

$$v_T \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ em } \Gamma_n \times [0, T] \quad (18)$$

$$p(\mathbf{x}, t) = \bar{p} \text{ em } \Gamma_d \times [0, T] \quad (19)$$

e para a equação da saturação,

$$s_w(\mathbf{x}, t) = \bar{s} \text{ em } \Gamma_i \times [0, T] \quad (20)$$

$$\mathbf{D}\nabla s_w \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ em } \Gamma_n \times [0, T] \quad (21)$$

As condições iniciais para pressão e saturação são respectivamente

$$p(\mathbf{x}, 0) = p^0 \text{ em } \Omega \quad (22)$$

$$s(\mathbf{x}, 0) = s^0 \text{ em } \Omega \quad (23)$$

onde  $\mathbf{n}^T = (n_x, n_y)$  é o vetor normal unitário externo à  $\Gamma$ . Note que  $\Gamma_i$  pode se reduzir a uma função ou um conjunto de funções Delta de Dirac no caso de uma ou várias fontes pontuais.

O sistema formado pelas equações (13) e (15) pode ser adimensionalizado identificando-se valores característicos para cada variável. Segundo Durlofsky<sup>6</sup>, as equações adimensionais resultantes dependem de dois números adimensionais. O primeiro, designado por  $G_d$ , quantifica a relação entre os efeitos gravitacionais e convectivos, isto é,

$$G_d = \frac{\mathbf{K}_c \Delta \rho \| \mathbf{g} \|}{\mu_c (v_T)_c} \quad (24)$$

onde  $\mathbf{K}_c$  é a permeabilidade característica do reservatório, avaliada como a média geométrica das permeabilidades do reservatório,  $v_c$  é a velocidade característica total,  $\Delta \rho = \rho_o - \rho_w$ . O segundo número adimensional representa a relação entre os termos convectivos e os termos relacionados à pressão capilar. Este número, designado por  $Pe$  é dado por

$$Pe = \frac{\mu_o (v_T)_c L}{\bar{p}_c \mathbf{K}_c} \quad (25)$$

onde  $L$  é um comprimento característico do reservatório e  $\bar{p}_c$  a pressão capilar característica. O número  $Pe$  pode ser entendido como um tipo de número de Peclet. Nas formulações de elementos finitos apresentadas adiante o conjunto completo de equações será considerado. Entretanto, é instrutivo considerarmos formas simplificadas destas equações. Como de forma geral os termos envolvendo a pressão capilar na equação (13) são inferiores aos

termos de pressão e, se desprezarmos ainda os efeitos gravitacionais e os termos fonte, a equação da pressão se simplifica para

$$\phi c_t \frac{\partial p}{\partial t} + (\lambda_w + \lambda_o) \nabla \cdot (\mathbf{K} \nabla p) = 0 \quad (26)$$

Se desprezarmos ainda os termos relacionados à pressão capilar na equação da saturação, pois estes são geralmente menos importantes que os termos convectivos, além dos termos gravitacionais e termos fonte, temos,

$$\phi \frac{\partial s_w}{\partial t} + \nabla \cdot (f_w v_T) = 0 \quad (27)$$

Pode-se notar que a equação (26) é uma equação parabólica não-linear, já que  $\lambda_w$  e  $\lambda_o$  dependem da saturação, enquanto que a equação (27) é uma equação hiperbólica também não-linear, pois  $f_w$  também depende de  $\lambda_w$  e  $\lambda_o$ . As maiores dificuldades para a solução numérica das equações (26) e (27) ou (13) e (15) se originam de seu acoplamento, das não linearidades envolvidas e da natureza hiperbólica da equação da saturação.

## FORMULAÇÃO DE ELEMENTOS FINITOS

### Discretização espacial

Para a aproximação de elementos finitos do conjunto acoplado de equações diferenciais parciais (13) e (15), consideramos o domínio espacial  $\Omega$  dividido em  $nel$  elementos  $\Omega_e$ ,  $e = 1, 2, \dots, nel$  tal que  $\Omega = \cup_{e=1}^{nel} \Omega_e$  e  $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$ . Sejam os conjuntos das funções teste para pressão  $\mathbb{P}^h$  e saturação  $\mathbb{S}^h$  e o espaço das variações admissíveis  $\mathbb{W}^h$ , definidos respectivamente por

$$\mathbb{P}^h = \left\{ p^h / p^h \in H^h(\Omega), p^h \in P^1(\Omega_e), p^h(t) = \bar{p} \text{ em } \Gamma_d \right\} \quad (28)$$

$$\mathbb{S}^h = \left\{ s_w^h / s_w^h \in H^h(\Omega), s_w^h \in P^1(\Omega_e), s_w^h(t) = \bar{s}_i^h \text{ em } \Gamma_i \right\} \quad (29)$$

$$\mathbb{W}^h = \left\{ w^h / w^h \in H^h(\Omega), w^h \in P^1(\Omega_e), w^h = 0 \text{ em } \Gamma \right\} \quad (30)$$

sendo  $H^h(\Omega)$  um espaço de dimensão finita sobre o domínio  $\Omega$ , e  $P^1(\Omega_e)$  representam os polinômios de 1ª ordem em  $\Omega_e$ . Portanto a formulação semi-discreta é dada por

Ache  $p^h \in \mathbb{P}^h$ ,  $s_w^h \in \mathbb{S}^h$  e  $\forall w_p^h, w_s^h \in \mathbb{W}^h$ , tal que

$$\int_{\Omega} w^h \phi c_t \frac{\partial p}{\partial t} d\Omega - \int_{\Omega} \nabla w^h \cdot v_T d\Omega = \int_{\Omega} w^h Q_T d\Omega \quad \text{em } \Omega \times [0, T] \quad (31)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} w^h \left( L^h(s_w^h, v_a^h) \right) d\Omega + \sum_{e=1}^{Nel} \int_{\Omega_e} \tau_1 \frac{v_a^h}{\|v_a^h\|} \cdot \nabla w^h L^h(s_w^h, v_a^h) d\Omega \\ & + \sum_{e=1}^{Nel} \int_{\Omega_e} \tau_2 \frac{|L^h(s_w^h, v_a^h)|}{\|\nabla s_w^h\|} \nabla w^h \cdot \nabla s_w^h d\Omega = 0 \quad \text{em } \Omega \times [0, T] \end{aligned} \quad (32)$$

$$L(s_w^h, v_a^h) = \phi \frac{\partial s_w^h}{\partial t} + \nabla \cdot v_a^h + \nabla \cdot [\mathbf{D} \nabla s_w^h] + Q_w \quad (33)$$

onde a equação da pressão foi aproximada pelo método de Galerkin. A primeira integral na equação (32) representa o termo de Galerkin, o primeiro somatório de integrais nos elementos é o termo Streamline-Upwind/ Petrov–Galerkin (SUPG)<sup>1</sup> e o segundo somatório o operador de captura de descontinuidades tipo CAU<sup>8</sup>. Note que sendo  $v_a$  a velocidade efetiva de transporte e considerando as simplificações presentes na equação (27), podemos admitir a utilização de  $v_a$  na construção da função peso da formulação SUPG.

Os parâmetros  $\tau_1$  e  $\tau_2$  são avaliados através das expressões:

$$\tau_1 = \frac{\delta_1^e}{2 \|v_a^e\|} \min \left( \frac{Pe^e}{3}, 1 \right) \quad (34)$$

$$Pe^e = \delta_1^e \frac{\|v_a^e\|^3}{(v_a^e)^T \cdot \mathbf{D} v_a^e} \quad (35)$$

$$\tau_2 = \frac{\delta_2^e}{\|v_{a//}^e\|} \min (Pe//^e, 0, 7) \quad (36)$$

$$Pe//^e = \delta_2^e \frac{\|v_{a//}^e\|^3}{(v_{a//}^e)^T \cdot \mathbf{D} v_{a//}^e} \quad (37)$$

$$v_{a//}^e = \left( v_a^e \cdot \frac{\nabla s_w^e}{\|\nabla s_w^e\|^2} \right) \nabla s_w^e \quad (38)$$

onde  $\delta_1^e$  e  $\delta_2^e$  são parâmetros que dependem da malha e o superíndice  $e$  indica que a variável foi calculada no interior dos elementos.

## DESCRETIZAÇÃO TEMPORAL

Introduzindo-se a separação de variáveis

$$p^h(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^{nnos} N_A p_A(t) \quad (39)$$

$$s^h(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^{nnos} N_A s_A(t) \quad (40)$$

onde  $p_A$  e  $s_A$  são respectivamente os valores nodais de  $p^h$  e  $s^h$ ,  $N_A = N_A(\mathbf{x})$ ,  $A = 1, 2, \dots, nnos$  as funções de interpolação,  $nnos$  o número de nós da malha de elementos

finitos e  $\mathbf{x}^T = (x, y)$  o vetor posição, a formulação variacional resulta no seguinte sistema não-linear de equações semi-discretas:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_p(p, \dot{p}, s, t) \\ \mathbf{F}_s(s, \dot{s}, p, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_p \\ \mathbf{Q}_s \end{bmatrix} \quad (41)$$

onde os termos  $\mathbf{Q}_p$  e  $\mathbf{Q}_s$  levam em conta os termos fonte e condições de contorno. As derivadas em relação ao tempo de  $p$  e  $s$  são indicadas respectivamente por  $\dot{p}$  e  $\dot{s}$ .

Um algoritmo de integração no tempo baseado no método trapezoidal generalizado<sup>10</sup> será utilizado neste trabalho para discretizar no tempo o sistema (41). A solução no tempo  $n + 1$  é calculada como segue:

Dado  $p_0$  e  $s_0$  calcule

$p_n, s_n, n \in \{0, 1, 2, \dots, Nsteps\}$  tal que:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_p(p_{n+1}, \dot{p}_{n+1}, s_{n+1}, t_{n+1}) \\ \mathbf{F}_s(p_{n+1}, s_{n+1}, \dot{s}_{n+1}, t_{n+1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_p \\ \mathbf{Q}_s \end{bmatrix} \quad (42)$$

$$\mathbf{p}_{n+1} = \mathbf{p}_n + (1 - \alpha) \Delta t \dot{\mathbf{p}}_n + \alpha \Delta t \dot{\mathbf{p}}_{n+1}$$

$$\mathbf{s}_{n+1} = \mathbf{s}_n + (1 - \alpha) \Delta t \dot{\mathbf{s}}_n + \alpha \Delta t \dot{\mathbf{s}}_{n+1}$$

onde  $Nsteps$  é o número de passos de tempo e  $\Delta t$  é o intervalo de tempo especificado. Adota-se  $\alpha = \frac{1}{2}$  o que corresponde ao método implícito de Crank–Nicolson. Eliminando-se  $\dot{p}_{n+1}$  e  $\dot{s}_{n+1}$  em  $\mathbf{F}_p$  e  $\mathbf{F}_s$  chega-se a uma equação não linear a ser resolvida a cada passo de tempo, que pode ser escrita como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_p(p_{n+1}, s_{n+1}) \\ \mathbf{F}_s(p_{n+1}, s_{n+1}) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_p \\ \mathbf{Q}_s \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (43)$$

Para resolver o sistema não linear (43) utiliza-se o método de Newton–Raphson, o que nos leva a

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}^{(i)} \begin{bmatrix} \Delta \dot{\mathbf{p}}^{(i)} \\ \Delta \dot{\mathbf{s}}^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_p - \mathbf{F}_p(p_{n+1}^{(i)}, s_{n+1}^{(i)}) \\ \mathbf{Q}_s - \mathbf{F}_s(p_{n+1}^{(i)}, s_{n+1}^{(i)}) \end{bmatrix} \quad (44)$$

onde  $i$  é o contador de iterações do método de Newton–Raphson e as submatrizes

$$\mathbf{A}_{11} = \partial \mathbf{F}_p^{(i)} / \partial \mathbf{p} \quad (45)$$

$$\mathbf{A}_{12} = \partial \mathbf{F}_p^{(i)} / \partial \mathbf{s} \quad (46)$$

$$\mathbf{A}_{21} = \partial \mathbf{F}_s^{(i)} / \partial \mathbf{p} \quad (47)$$

$$\mathbf{A}_{22} = \partial \mathbf{F}_s^{(i)} / \partial \mathbf{s} \quad (48)$$

são as componentes da matriz jacobiana e  $\Delta \dot{\mathbf{p}}^{(i)}$ ,  $\Delta \dot{\mathbf{s}}^{(i)}$  são os incrementos das variáveis nodais das derivadas temporais da pressão e saturação. A matriz jacobiana é normalmente

não simétrica e esparsa. A experiência indica que a resolução iterativa destes sistemas é dominada pelos termos provenientes da equação da pressão. Sendo assim, observa-se na solução iterativa dos mesmos um comportamento típico de problemas quasi-elípticos uma vez que a compressibilidade é baixa. Uma forma de se tentar otimizar os procedimentos de solução é desprezar os termos de acoplamento, isto é, resolver o problema de forma bloco-iterativa

$$\mathbf{A}_{11}\Delta\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{Q}_p - \mathbf{F}_p^{(i)} \left( p_{n+1}^{(i-1)}, s_{n+1}^{(i-1)} \right) \quad (49)$$

$$\dot{\mathbf{p}}_{n+1}^{(i)} = \dot{\mathbf{p}}_{n+1}^{(i-1)} + \Delta\dot{\mathbf{p}}_{n+1}^{(i)} \quad (50)$$

$$\mathbf{p}_{n+1}^{(i)} = \mathbf{p}_{n+1}^{(i-1)} + \alpha\Delta t\Delta\dot{\mathbf{p}}^{(i)} \quad (51)$$

$$\mathbf{A}_{22}\Delta\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{Q}_s - \mathbf{F}_s^{(i)} \left( p_{n+1}^i, s_{n+1}^{(i-1)} \right) \quad (52)$$

$$\dot{\mathbf{s}}_{n+1}^{(i)} = \dot{\mathbf{s}}_{n+1}^{(i-1)} + \Delta\dot{\mathbf{s}}_{n+1}^{(i)} \quad (53)$$

$$\mathbf{s}_{n+1}^{(i)} = \mathbf{s}_{n+1}^{(i-1)} + \alpha\Delta t\Delta\dot{\mathbf{s}}^{(i)} \quad (54)$$

Os vetores  $\mathbf{F}_p^{(i)}$ ,  $\mathbf{F}_s^{(i)}$  e a matriz  $\mathbf{A}_{22}$  dependem da velocidade  $v^h$ , que depende de  $\nabla p^h$  e  $\nabla s_w^h$ . De forma a manter a ordem de aproximação do campo  $v^h$ , Malta *et al.*<sup>14</sup>, Loula *et al.*<sup>13</sup> propõem diversas formas de pós-processamento. Neste trabalho adotamos o pós-processamento global de Malta *et al.*<sup>14</sup>:

Dado  $\nabla p^h$ ,  $\nabla s_w^h$  ache

$$v_p^h \in \left\{ v_p^h / v_p^h \in [H^h(\Omega)]^2, v_p^h \in [P^1(\Omega^e)]^2, v_p^h \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ em } \Gamma_p \right\}$$

$$\forall w_v^h \in \left\{ w_v^h / w_v^h \in [H^h(\Omega)]^2, w_v^h \in [P^1(\Omega^e)]^2, w_v^h = 0 \text{ em } \Gamma \right\}$$

tal que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} \mathbf{w}^h \cdot \left( \Lambda_p^{-1} v_p^h + \nabla p^h \right) d\Omega + \sum_{e=1}^{Nel} \int_{\Omega^e} \delta_e \nabla \cdot \mathbf{w}^h \left[ \nabla \cdot \left( v_p^h + \Lambda_m \frac{dp_c}{ds_w} \nabla s_w \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \mathbf{K} (\rho_o \lambda_o + \rho_w \lambda_w) \mathbf{g} \right) - Q_T + \phi c_t \frac{\partial p}{\partial t} \right] d\Omega \text{ em } \Omega \times [0, T] \end{aligned} \quad (55)$$

onde  $\delta_e$  é um parâmetro de malha, geralmente tomado como  $h^e/2$ . Com a utilização da técnica de pós-processamento nota-se que  $p^h$ ,  $v_p^h$  e  $v_p^h$  são aproximados da mesma forma.

Com isto, podemos modificar as iterações por bloco introduzindo-se logo após a atualização do campo de pressão a avaliação do campo de velocidades pós-processado, isto é, solucionando-se

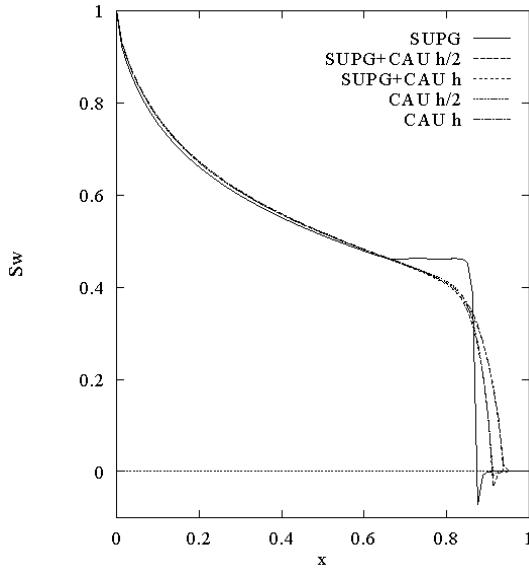
$$\bar{\mathbf{M}} \mathbf{v}_p^{(i)} = \mathbf{F}_{n+1}^{(i)} \quad (56)$$

onde  $\mathbf{v}_p^{(i)}$  são os valores nodais de  $\mathbf{v}_p^h$ , a matriz  $\bar{\mathbf{M}}$  e o vetor  $\mathbf{F}_{n+1}^{(i)}$  correspondem à forma discreta (55). O sistema de equações (49) corresponde à equação da pressão, agora esparsa e simétrica, é solucionado através do método dos gradientes conjugados precondicionado, usando um precondicionador elemento-por-elemento Gauss-Seidel. Já o sistema (52), correspondente à equação da saturação é resolvido pelo algoritmo GMRES com precondicionador elemento-por-elemento Gauss-Seidel. O sistema de equações (56) correspondente ao pós-processamento das velocidades é solucionado através de iterações de Jacobi livre de matrizes.

## EXEMPLOS NUMÉRICOS

### Caso unidimensional

Inicialmente vamos apresentar resultados para a solução da equação da saturação em um problema unidimensional simples, para avaliarmos os diversos componentes das formulações estabilizadas apresentadas na Seção 3. Neste problema não foram considerados os efeitos da pressão capilar e nem termos fonte. Em todos os casos a velocidade total é  $\mathbf{v} = \mathbf{i}_x$  e a saturação da água em  $x = 0$  é fixa em  $s_w = 1,0$ . No primeiro caso adotou-se  $k_{rw} = s_w^2$ ;  $k_{ro} = (1 - s_w)^2$ ;  $\mu_o/\mu_w = 5$  e os efeitos da gravidade não foram incluídos, isto é,  $G_d = 0$ . Os perfis de saturação obtidos neste caso para  $t = 0,5$  Volumes Porosos Injetados (VPI)

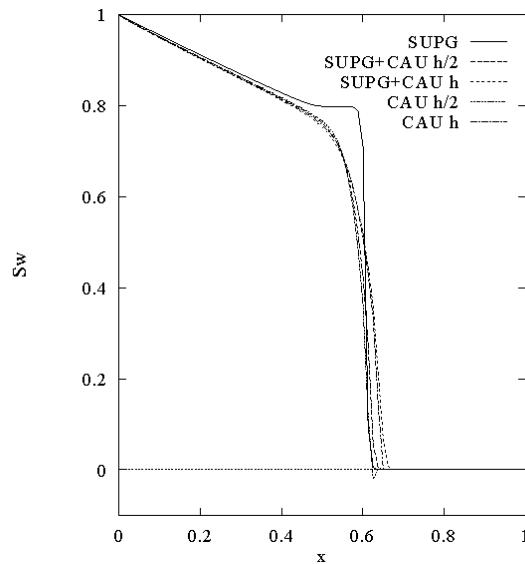


**Figura 1.** Frente de saturação de água em  $t = 0,5$  VPI para o problema unidimensional sem gravidade

encontram-se na Figura 1, para simulação empregando uma malha uniforme com 80 elementos lineares. Na Figura 1, a solução com o método SUPG é identificada simplesmente por SUPG. Quando o operador de captura de descontinuidade é levado em consideração as soluções são identificadas por SUPG+CAU. Também na Figura 1 encontram-se duas soluções com a formulação CAU somente. Note que em algumas soluções a contribuição do termo CAU foi ponderada por  $\delta_2^e = h^e/2$  enquanto que na outra solução o mesmo termo foi ponderado por  $\delta_1^e = h^e$ . Em todos os casos  $\delta_1^e = h^e/2$ . Observou-se na Figura 1 que a solução com o método SUPG é menos difusiva, porém com oscilações espúrias no pé da frente. Já as soluções com a presença do operador de captura de descontinuidade são mais difusivas,

especialmente aquelas onde somente o operador foi utilizado. De acordo com Durlofsky<sup>6</sup>, a altura teórica para o choque neste caso é 0,41, o que está em boa concordância com as soluções numéricas obtidas com as formulações SUPG+CAU e CAU.

O caso seguinte considera os efeitos gravitacionais de tal forma que, neste caso  $G_d = 2$ . Considera-se ainda que os efeitos gravitacionais agem na direção oposta à  $\mathbf{v}$ , ou seja, na direção negativa do eixo  $x$ . Os perfis de saturação para  $t = 0,5$  VPI para as diferentes simulações encontram-se na Figura 2. Novamente a solução SUPG apresentou oscilações indesejáveis, enquanto que as soluções SUPG+CAU e CAU estão em boa concordância com a altura teórica do choque (0,76) prevista neste caso. Ainda, verifica-se que as oscilações espúrias são comparativamente menos acentuadas do que no caso sem gravidade.



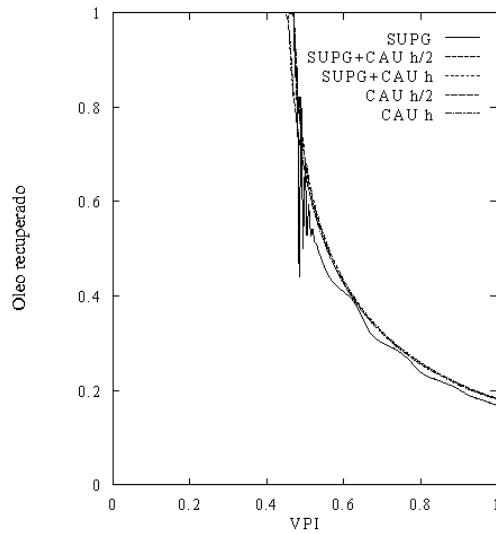
**Figura 2.** Frente de saturação de água em  $t = 0,5$  VPI para o problema unidimensional com gravidade

## PROBLEMA DE CINCO-POÇOS

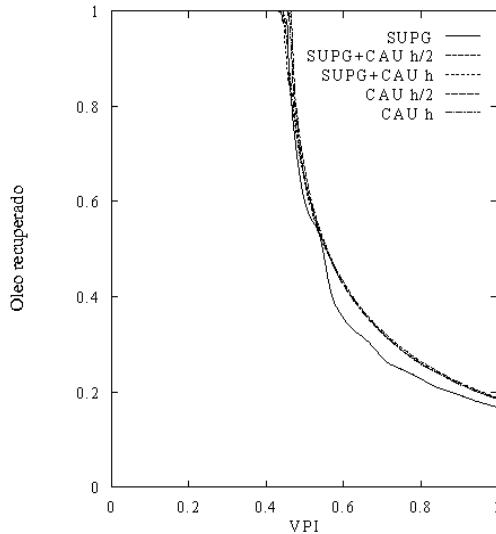
Seja o problema da simulação do escoamento de água e óleo numa configuração do problema de cinco poços com dupla simetria. Neste caso, o domínio do problema é um quadrado de lado unitário, com um poço injetor e um poço produtor alinhados na diagonal principal. Consideramos o reservatório homogêneo, com permeabilidade absoluta, constante e isotrópica, ou seja,  $\mathbf{K} = \mathbf{I}$ . A porosidade do reservatório é constante e seu valor é irrelevante, pois serve apenas como escalonamento do tempo. Tomamos  $c_t = 10^{-6}$  e não consideramos os efeitos gravitacionais e de pressão capilar. Neste exemplo  $k_{rw} = s_w^2$ ;  $k_{ro} = (1 - s_w)^2$  e  $\mu_o/\mu_w = 4$ . Os resultados serão apresentados em termos de Volumes Porosos Injetados (VPI), que é uma grandeza análoga ao tempo adimensionalizado. Adota-se uma malha regular composta de  $20 \times 20$  células, onde cada célula é subdividida em dois elementos triangulares lineares, totalizando 800 elementos. Dois cenários foram considerados. O primeiro, identificado como diagonal, os poços injetor e produtor estão na diagonal perpendicular às linhas diagonais de disposição dos elementos triangulares. O segundo, identificado como paralelo, possui a orientação das linhas diagonais dos elementos paralela à diagonal poço injetor-poço produtor. Idealmente, os resultados para ambas configurações

deveriam ser idênticos. Entretanto, devido a um maior ou menor efeito de orientação de malha, os resultados poderão diferir para os dois cenários. Além disso este exemplo permite validar a solução do problema pressão-velocidade e seu acoplamento com a equação da saturação.

Os resultados para a recuperação de óleo normalizada pelo volume total injetado para os dois cenários encontram-se respectivamente nas Figuras 3 e 4. Pode-se notar nestas figuras que para os dois cenários as soluções com a formulação SUPG apresentaram oscilações indesejáveis, notadamente na configuração diagonal. Os resultados com as formulações com operador de captura de descontinuidade não apresentam oscilações.



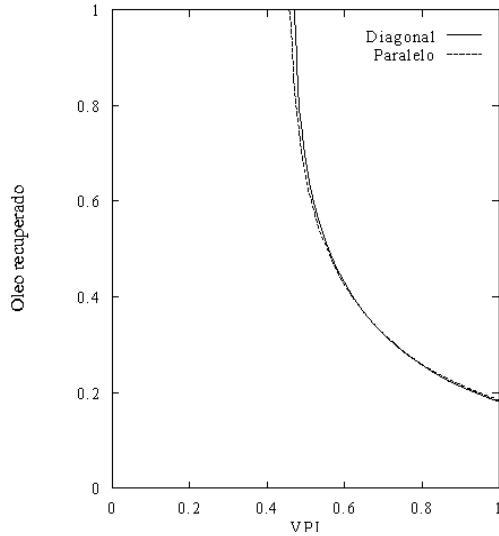
**Figura 3.** Recuperação de óleo para o problema de cinco poços na configuração diagonal



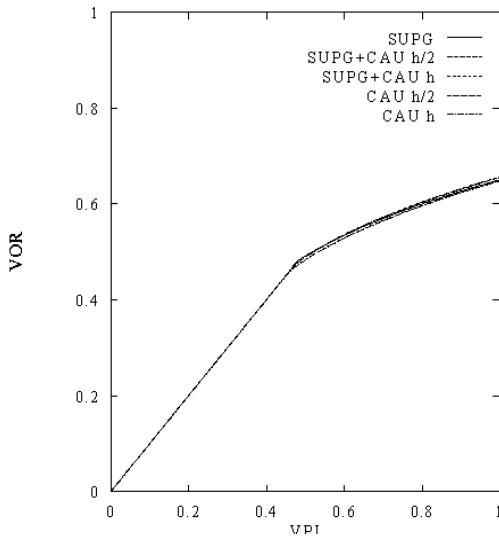
**Figura 4.** Recuperação de óleo para o problema de cinco poços na configuração paralela

A Figura 5 mostra, para a formulação CAU ponderada por  $\delta_2^e = h^e/2$ , uma comparação da recuperação de óleo obtida para os dois cenários de escoamento. Verifica-se que estas formulações exibem pouco efeito de orientação de malha. Resultados semelhantes foram observados para as formulações SUPG+CAU ( $h^e/2$  e  $h^e$ ) e CAU  $h^e$ .

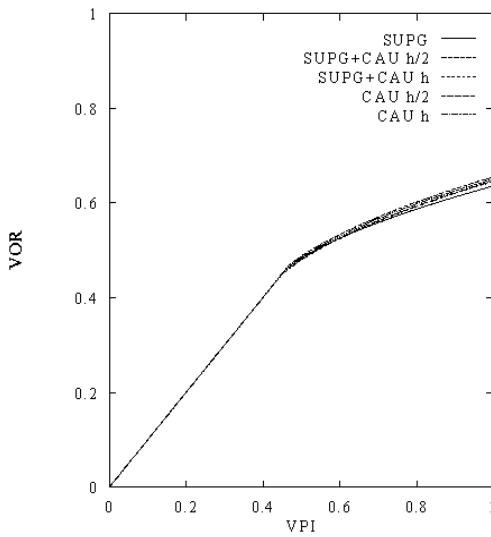
Além disso, as simulações SUPG+CAU e CAU estão em boa concordância com os resultados de Durlofsky<sup>6</sup>, que emprega uma formulação combinando elementos finitos mistos para a equação da pressão e volumes finitos para a equação da saturação. As Figuras 6 e 7 apresentam as curvas de volume de óleo recuperado (VOR) respectivamente para as duas orientações de malha.



**Figura 5.** Recuperação de óleo para o problema de cinco poços em diferentes cenários

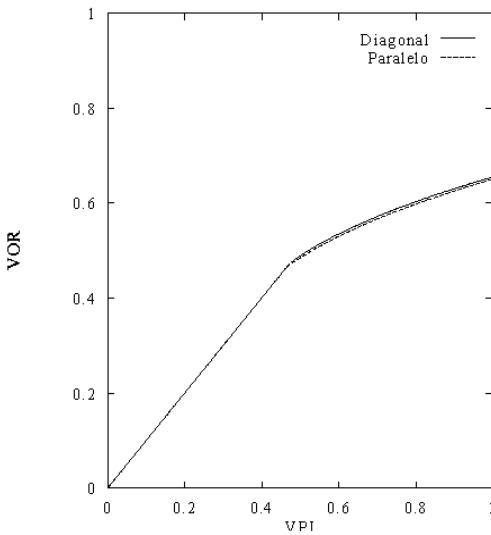


**Figura 6.** Volume de óleo recuperado para o problema de cinco poços na configuração diagonal



**Figura 7.** Volume de óleo recuperado para o problema de cinco poços na configuração paralela

Nota-se que todas as formulações conduziram a uma boa recuperação do volume de óleo, com muito pouca diferença entre as soluções para as orientações diagonal e paralela, conforme evidenciado na Figura 8, que apresenta uma comparação direta para o volume de óleo recuperado obtido com a formulação  $CAU\ h^e/2$  em ambos cenários de escoamento. Resultados semelhantes também foram observados para as formulações SUPG+CAU.



**Figura 8.** Volume de óleo recuperado para o problema de cinco poços em diferentes cenários paralela

As Tabelas I e II apresentam respectivamente o número médio de iterações por bloco-iteração dos algoritmos de solução dos sistemas de equações lineares empregados na solução da equação da pressão, no pós-processamento das velocidades e na solução da equação da saturação, identificados respectivamente por PCG, Jacobi e GMRES. Nestas simulações,

a tolerância dos métodos iterativos foi fixada em  $10^{-4}$ , o número de iterações por bloco foi fixada em 3, e o passo de tempo foi  $\Delta t = 0,004$ . Adotou-se um número de 10 vetores de Krylov para o algoritmo GMRES. Com a formulação SUPG as iterações por bloco convergem em 2 iterações, para ambas orientações de malha.

Método	SUPG	SUPG+CAUh <sup>e</sup> /2	SUPG+CAUh <sup>e</sup>	CAUh <sup>e</sup> /2	CAUh <sup>e</sup>
PCG	39,74	46,30	40,55	39,93	39,72
Jacobi	4,47	3,10	3,61	4,06	4,33
GMRES	8,80	6,52	6,66	4,25	4,23

**Tabela I.** Resultados computacionais para o problema de cinco poços na malha diagonal

Método	SUPG	SUPG+CAUh <sup>e</sup> /2	SUPG+CAUh <sup>e</sup>	CAUh <sup>e</sup> /2	CAUh <sup>e</sup>
PCG	39,55	39,87	39,99	39,71	39,64
Jacobi	5,03	3,64	4,17	3,81	4,57
GMRES	5,59	5,22	5,29	4,28	4,17

**Tabela II.** Resultados computacionais para o problema de cinco poços na malha paralela

Pode-se notar nas Tabelas I e II que os custos computacionais são dominados pela solução da equação da pressão. O número de iterações GMRES é ligeiramente superior na malha diagonal para as soluções que empregam a formulação SUPG, ainda que em todos os casos o número de iterações GMRES possa ser considerado muito pequeno. Deve-se destacar ainda o baixo número de iterações de Jacobi em todas as simulações.

## CONCLUSÕES

Apresentou-se neste trabalho uma comparação de formulações estabilizadas de elementos finitos para a equação da saturação presente no modelo matemático para a simulação de escoamentos bi-fásicos imiscíveis ligeiramente compressíveis. Mostrou-se que a formulação SUPG não era suficiente para evitar o surgimento de oscilações espúrias nas frentes de saturação, devendo ser complementada pelo operador de captura de descontinuidades. Além disso, soluções aceitáveis foram obtidas empregando-se somente o operador de captura de descontinuidades. Foi observado que as oscilações espúrias são menos acentuadas quando os efeitos gravitacionais se opõem ao gradiente de pressão e que nos casos bi-dimensionais, há pouca influência da orientação de malha nos resultados.

## 1 AGRADECIMENTOS

Ao Núcleo de Atendimento em Computação de Alto Desempenho (NACAD) da COPPE/UFRJ pelo apoio computacional. O presente trabalho é apoiado parcialmente pelo Projeto Integrado CNPq/MCT 522.692/95-8, do Laboratório de Métodos Computacionais em Engenharia do Programa de Engenharia Civil da COPPE/UFRJ. Arlenes Silvino da Silva foi apoiado pelo Programa CAPES/PICD /UFMT.

## REFERÊNCIAS

- 1 A.N. Brooks e T.J.R. Hughes, "Streamline-Upwind/Petrov–Galerkin, formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier–Stokes equations", *Comp. Meth. Appl. Mech. and Engng.*, Vol. **32**, pp. 199–259, (1982).
- 2 G. Chavent e J. Jaffre, "Mathematical models and finite elements for reservoir simulation", Nort-Holland, New York, (1986).
- 3 A.L.G.A. Coutinho, J.L.D. Alves, E.L.M. Garcia e A.F.D. Loula, "Solution of miscible and immiscible flows employing element-by-element iterative strategies", *3rd SPE Latin American/Caribbean Engin. Conference*, SPE 27050, pp. 431–444, (1994).
- 4 M.K. Deb, M.P. Reddy, J.B. Thuren e W.T. Adams, "A new generation solution adaptive reservoir simulator", *Society of Petroleum Engineers*, SPE 30720, pp. 175–189, (1995).
- 5 H.K.J. Dhale, M.S. Espedal e O. Saevareid, "Characteristic local grid refinement techniques for reservoir flow problems", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **34**, pp. 1051–1069, (1992).
- 6 L.J. Durlofsky, "A triangle based mixed finite element-finite volume technique for modeling two phase flow through porous media", *J. Comp. Phys.*, Vol. **105**, pp. 252–266, (1993).
- 7 L.S.K. Fung, A.D. Hiebert e L. Nghiem, "Reservoir simulation with a control-volume finite-element method", SPE 4224, *1th SPE Symposium on Reservoir Simulation*, pp. 231–242, (1991).
- 8 A.C.R.N. Galéao e E.G.D. Carmo, "A consistent approximate upwind Petrov–Galerkin formulation for convection dominated problems", *Comp. Meth. Appl. Mech. and Engng.*, Vol. **66**, pp. 83–95, (1988).
- 9 J. Glimm, B. Lindquist, O. McBryan e L. Padmanabhan, "A front tracking reservoir simulator, five-spot validation studies and water coming problem", *The Mathematics of Reservoir Simulation*, pp. 35–106, (1983).
- 10 T.J.R. Hughes, "Finite element method, linear static and dynamic finite element analysis", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, (1987).
- 11 H.P. Langtangen, "Implicit finite element methods for two-phase flow in oil reservoirs", *Int. J. Num. Meth. in Fluids*, Vol. **10**, pp. 651–681, (1990).
- 12 R.W. Lewis, K. Morgan e K.H. Johnson, "A finite element study of two-dimensional multiphase flow with particular reference to the five-spot problem", *Comp. Meth. Appl. Mech. and Engng.*, Vol. **44**, pp. 17–47, (1984).
- 13 A.F.D. Loula, E.L.M. Garcia, M.A. Murad, S.M.C. Malta e R.S. Silva, "Métodos de elementos finitos aplicados a simulacao de petróleo", Technical report, Projeto CENPES/LNCC, (1992).
- 14 S.M.C. Malta, A.F.D. Loula e E.L.M. Garcia, "A postprocessing technique to approximate the velocity field in miscible displacement", *Contemporary mathematics*, Vol. **8**, pp. 239–268, (1995).
- 15 D.W. Peaceman, "Fundamentals of numerical reservoir simulation", Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam, (1977).
- 16 L.F.F. Pereira, J. Douglas e C.S. Huang, "The modified method of characteristics with adjusted advection for an immiscible displacement problem", *Advances in Computacional Mathematics, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics*, Vol. **22**, 53–74, (1999).
- 17 A. Settari, H.S. Price e T. Dupont, "Development and application of variational methods for simuation of miscible displacement in porous media", *SPE Journal*, Trans. AIME 263, pp. 228–246, (1977).