

# Integración semi-analítica de matrices de rigidez de elementos finitos en simetría axial

I.J. Lozada

Decanato de Ingeniería Civil, Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado  
Apto. Postal 3001, Departamento de Ciencias Básicas, Barquisimeto, Venezuela  
email: irislozada121@hotmail.com

D.V. Griffiths

Geomechanics Research Center, Colorado School of Mines, Golden  
CO 80401, Colorado, USA  
email: d.v.griffiths@mines.edu

M. Cerrolaza

Instituto Nacional de Bioingeniería, Universidad Central de Venezuela,  
Ciudad Universitaria S/N, Caracas, Venezuela  
email: mcerrola123@gmail.com

## Resumen

El método de los elementos finitos (MEF) es una técnica de análisis numérico que permite la obtención de soluciones aproximadas de un amplio rango de problemas de ingeniería. Estos problemas pueden ser representados matemáticamente por medio de ecuaciones diferenciales y en muy pocos casos, es posible obtener la solución analítica de las mismas. Las alternativas que se presentan son básicamente dos: considerar hipótesis simplificadoras que eliminen las dificultades y tornen el problema hacia una solución analítica posible; o mantener las complejidades del problema y obtener soluciones numéricas aproximadas haciendo uso del avance de las computadoras y de los algoritmos numéricos. En este trabajo, se presenta una metodología general aplicada a la integración simbólica de las matrices de rigidez de elementos cuadriláteros de cuatro y ocho nodos, en problemas de simetría axial. Esta metodología permite calcular los elementos de la matriz de rigidez de forma sencilla, mediante una expresión semi-analítica. Su aplicación mejora los tiempos de CPU, en comparación con la técnica de integración numérica tipo Gaussiano. El sustituir las subrutinas numéricas utilizadas en los programas comerciales de elementos finitos por las subrutinas simbólicas proporcionará a los profesionales e investigadores que trabajan con el método de los elementos finitos una reducción sustancial de tiempos de CPU, en el análisis de grandes estructuras.

**Palabras clave:** *Elemento cuadrilátero axisimétrico, integración semi-analítica, matriz de rigidez, manipulación simbólica.*

## SEMI-ANALYTICAL INTEGRATION OF FINITE ELEMENTS STIFFNESS MATRICES IN AXISYMMETRIC PROBLEMS

### Summary

The finite element method (MEF) is a numerical analysis technique which provide approximated solutions for engineering problems. These problems can be represented mathematically through differential equations and, in a few cases, it is possible to obtain their analytical solution. This work discusses a general methodology based on the symbolic integration of stiffness matrices of quadrilateral elements having four and eight nodes in axisymmetric problems. The terms of the stiffness matrix are calculated through a semi analytical expression, thus leading to a reduction of CPU time, when compared with numerical integration techniques. The semi analytical subroutines developed herein will help FEM researchers and engineers, by providing significant reductions of CPU times in the analysis of large models.

**Keywords:** *Quadrilateral axisymmetric finite elements, semi-analytical integration, stiffness matrix, symbolic manipulation.*

## INTRODUCCIÓN

En el campo de la ingeniería y las ciencias físicas, el permanente desarrollo computacional permite la incorporación de nuevas tecnologías que mejoren las existentes. El cálculo de matrices de rigidez y masa en el método de los elementos finitos, ha evolucionado exigiendo dicha incorporación. Hasta 1980, en la integración de matrices de rigidez de elementos finitos cuadriláteros, no se contaba con metodologías para calcular de forma explícita sus coeficientes, salvo en casos específicos (rectángulos y cuadriláteros convexos). Fue Okabe<sup>8</sup>, uno de los primeros investigadores que presentó fórmulas explícitas de integrales de expresiones racionales sobre un elemento cuadrilátero convexo isoparamétrico de cuatro nodos. Estas fórmulas requieren la evaluación de productos de la forma  $\phi(\alpha\beta)\ln[f(\alpha,\beta)]/(\alpha^m\beta^n)$ , donde  $\phi$  y  $f$  son funciones racionales y  $m \geq 0$ ,  $n \geq 0$ . Para los elementos cuadriláteros de lados rectos, que usualmente se encuentran en las aplicaciones prácticas, los parámetros  $|\alpha|$  y  $|\beta|$  son pequeños y haciendo que la evaluación de los términos que contienen logaritmos se dificulte. Este trabajo no arrojó comparaciones de tiempos. Autores como Babu y Pinter<sup>1</sup>, basados en el trabajo de Okabe, presentaron fórmulas de integración semi-analítica, para evaluar integrales sobre elementos cuadriláteros simétricos de lados rectos, inscritos en un círculo, mejorando la exactitud de los resultados obtenidos con integración gaussiana. Por otra parte, Mizukami<sup>7</sup>, trabajó con paralelogramos y presentó fórmulas de integración analítica para el cálculo de la matriz de rigidez de este elemento. En este tipo de elemento, el jacobiano de la transformación de coordenadas es una función constante, lo cual ayudó al autor a deducir las fórmulas presentadas en su trabajo. No se realizó comparación alguna de tiempos de CPU. Así mismo, Rathod<sup>10</sup>, generaliza los resultados obtenidos por Babu y Pinter<sup>1</sup> y Mizukami<sup>7</sup>, para presentar fórmulas de integración analítica para un elemento finito cuadrilátero isoparamétrico de cuatro nodos. Para ello, Rathod se basó en métodos básicos de integración (integración por partes), transformando todas las integrales involucradas en el cálculo de la matriz de rigidez a integrales unidimensionales, que luego son expresadas como combinación lineal de cuatro integrales básicas. Usando el sistema de álgebra computacional REDUCE<sup>11</sup> desarrollado en 1987, Kikuchi<sup>4</sup> obtuvo fórmulas explícitas para la integración de la matriz de rigidez del elemento cuadrilátero de cuatro nodos. Este autor no reportó reducciones en el costo computacional. Yagawa *et al.*<sup>14</sup> hacen una combinación de métodos analíticos y numéricos para integrar la matriz de rigidez de un elemento cuadrilátero isoparamétrico de cuatro nodos, en elasticidad plana. Dichos autores, con la ayuda del sistema de álgebra computacional REDUCE<sup>11</sup> expandieron y agruparon convenientemente el integrando. Posteriormente, efectuaron la integración numérica, logrando una mejora en los tiempos de cálculo de un 15 % en comparación a la integración numérica Gauss con 4 puntos. Griffiths<sup>3</sup> presentó una fórmula semi-analítica, para el cálculo de la matriz de rigidez de un elemento finito cuadrilátero isoparamétrico de cuatro nodos, en problemas de elasticidad bidimensional. Este autor clasificó los elementos de la matriz de rigidez en seis grupos, cada uno de ellos caracterizado por una condición particular de sus grados de libertad. La expresión semi-analítica fue obtenida manipulando simbólicamente con el software matemático MAPLE<sup>6</sup> la fórmula de integración de gauss con 4 puntos. Este autor utilizó la fórmula semi-analítica y transformaciones de coordenadas, para calcular las componentes de la matriz de rigidez. La técnica desarrollada reportó una mejora sustancial de los tiempos de CPU, en comparación con la obtenida al usar el método de integración numérica Gauss con 4 puntos. Otro trabajo elaborado en esta línea, fue el de Videla *et al.*<sup>12</sup>. Dichos autores presentaron fórmulas analíticas para la integración de la matriz de rigidez de un elemento cuadrilátero isoparamétrico de cuatro nodos, en problemas de elasticidad plana. Estos autores manipularon simbólicamente todas las expresiones obtenidas en el cálculo de las derivadas parciales de las funciones de forma con respecto a las coordenadas cartesianas y obtuvieron formas generales para cada una de ellas. Estas expresiones permitieron

efectuar la integración de una manera más sencilla. Los resultados fueron codificados en Fortran y reportaron una reducción de un 50% en los cálculos al compararlos con la integración numérica (Gauss con dos y tres puntos). Lozada *et al.*<sup>5</sup> generalizaron los resultados obtenidos por Griffiths, para ser aplicados en la integración semi-analítica de las matrices de rigidez de los elementos finitos cuadriláteros de ocho nodos en problemas elasticidad bi-dimensional, obteniendo mejoras de un 37% en los tiempos de cálculo en comparación a la integración numérica (Gauss con 4 puntos). Videla *et al.*<sup>13</sup> presentaron fórmulas explícitas para la integración de la matriz de rigidez del elemento finito cuadrilátero de ocho nodos, en problemas de elasticidad plana. Este autor logró una reducción en los tiempos de cómputo de un 50% en comparación a la integración numérica. En este trabajo se generalizan los resultados obtenidos por Griffiths<sup>3</sup> y Lozada *et al.*<sup>5</sup> para ser aplicados en la integración simbólica del elemento finito cuadrilátero de cuatro y ocho nodos, en problemas de simetría axial.

## FORMULACIÓN

Los sólidos tridimensionales de simetría axial o sólidos de revolución, pueden ser analizados como problemas bidimensionales. En este trabajo, se considera el elemento cuadrilátero de revolución de cuatro y ocho nodos, con dos grados de libertad por nodo y enumerado en sentido anti-horario. El elemento, como puede apreciarse en la Figura 1, es un cuadrilátero que genera un toroide al girar alrededor del eje  $z$ .

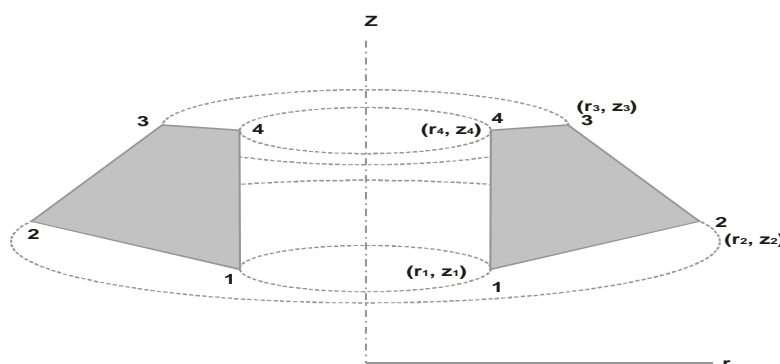


Figura 1. Elemento sólido de revolución (cuadrilátero)

Mediante la transformación de coordenadas, de la ecuación (1), el elemento es transformado en un elemento cuadrilátero con lados paralelos a los ejes coordenados, como se muestra en la Figura 2

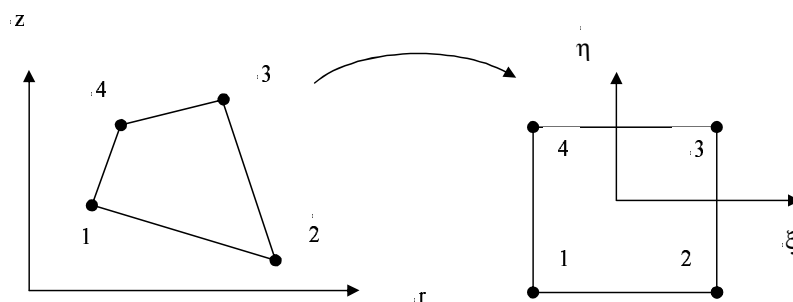


Figura 2. Cambio de coordenadas

La transformación de coordenadas que relaciona el plano  $rz$  con el plano  $\xi\eta$  está dada por:

$$r = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) r_i \quad ; \quad z = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) z_i \quad (1)$$

donde  $n$  representa el número de nodos del elemento y las  $N_i$  son las funciones que interpolan los desplazamientos y la geometría del elemento. En este trabajo se consideran las siguientes funciones de interpolación para el elemento cuadrilátero de cuatro y ocho nodos.

*Cuatro nodos:*

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(1-\eta)(1-\xi) \quad ; \quad N_2 = \frac{1}{4}(1-\eta)(1+\xi) \\ N_3 &= \frac{1}{4}(1+\eta)(1+\xi) \quad ; \quad N_4 = \frac{1}{4}(1+\eta)(1-\xi) \end{aligned} \quad (2)$$

*Ocho nodos:*

$$\begin{aligned} N_1 &= -\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(\xi+\eta+1); \quad N_2 = -\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(-\xi+\eta+1) \\ N_3 &= -\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(-\xi-\eta+1); \quad N_4 = -\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(\xi-\eta+1) \\ N_5 &= \frac{1}{2}(1-\eta)(1-\xi^2) \quad ; \quad N_6 = \frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2) \\ N_7 &= \frac{1}{2}(1+\eta)(1-\xi^2); \quad N_8 = \frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2) \end{aligned} \quad (3)$$

Así:

$$K_{ij} = \iiint_e B_i^T D B_j dV \quad (4)$$

$$= \iint_A \int_0^{2\pi} B_i^T D B_j r d\theta dA \quad (5)$$

$$= 2\pi \iint_A B_i^T D B_j r dA \quad (6)$$

$$= 2\pi \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 r B_i^T(\xi, \eta) D B_j(\xi, \eta) \det J d\xi d\eta \quad (7)$$

donde:

$$B_i^t = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} & 0 & \frac{N_i}{r} & \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial r} \end{bmatrix}; \quad D = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (8)$$

$J$ ,  $E$  y  $\nu$  denotan el jacobiano de la transformación, el módulo de Young y el coeficiente de Poisson, respectivamente.

De (7) y (8) se tiene:

$$K_{ij} = 2\pi \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} c_{11}^{ij} & c_{12}^{ij} \\ c_{21}^{ij} & c_{22}^{ij} \end{bmatrix} \frac{1}{\det J} d\xi d\eta \quad (9)$$

Siendo:

$$c_{11}^{ij} = \left( \frac{N_i N_j}{\sum_{i=1}^n r_i N_i} + \left( \sum_{i=1}^n r_i N_i \right) T_i T_j \right) E_1 + (T_i N_j + T_j N_i) E_2 + \left( \sum_{i=1}^n r_i N_i \right) S_i S_j E_3 \quad (10)$$

$$c_{12}^{ij} = \left( \left( \sum_{i=1}^n r_i N_i \right) S_j T_i + S_j N_i \right) E_2 + \left( \sum_{i=1}^n r_i N_i \right) S_i T_j E_3 \quad (11)$$

$$c_{21}^{ij} = \left( \left( \sum_{i=1}^n r_i N_i \right) S_i T_j + S_i N_j \right) E_2 + \left( \sum_{i=1}^n r_i N_i \right) T_i S_j E_3 \quad (12)$$

$$c_{22}^{ij} = \left( \sum_{i=1}^n r_i N_i \right) (S_i S_j E_1 + T_i T_j E_3) \quad (13)$$

donde:

$$K = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad ; \quad E_1 = K(1-\nu) \quad ; \quad E_2 = K\nu; \quad E_3 = \frac{K(1-2\nu)}{2} \quad (14)$$

$$T_i = \left( \frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} - \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right) = \det J \left( \frac{\partial N_i}{\partial r} \right) \quad (15)$$

$$S_i = \left( -\frac{\partial r}{\partial \eta} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + \frac{\partial r}{\partial \xi} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right) = \det J \left( \frac{\partial N_i}{\partial z} \right) \quad (16)$$

Generalmente, la integración exacta de los términos de la ecuación (9) es compleja y los programas de elementos finitos utilizan integración gaussiana para efectuarlas. Con integración gaussiana de orden  $2 \times 2$ , se obtiene la expresión semi-analítica:

$$k_{ij} = 6\pi \left\{ \frac{A_3(E_1 S_1 + E_2 S_2 + E_3 S_3) + f_1(E_1 S_4 + E_2 S_5 + E_3 S_6)}{3A_3^2 - f_1^2} + \frac{A_3(E_1 T_1 + E_2 T_2 + E_3 T_3) + f_2(E_1 T_4 + E_2 T_5 + E_3 T_6)}{3A_3^2 - f_2^2} \right\} \quad (17)$$

donde:

$$f_1 = (r_1 + r_3)(z_4 - z_2) - (z_1 + z_3)(r_4 - r_2) - 2(r_2 z_4 - r_4 z_2) \quad (18)$$

$$f_2 = (z_2 + z_4)(r_3 - r_1) - (r_2 + r_4)(z_3 - z_1) - 2(r_3 z_1 - r_1 z_3) \quad (19)$$

$$A_3 = \frac{1}{8} [(z_2 - z_4)(r_1 - r_3) + (z_3 - z_1)(r_2 - r_4)]$$

Las funciones  $S_i$  y  $T_i$  dependen del número de nodos y de las coordenadas locales.

## GENERACIÓN DE LOS TÉRMINOS DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ

En este desarrollo se considera la clasificación presentada por Griffiths<sup>3</sup> para el elemento de cuatro nodos y la de Lozada *et al.*<sup>5</sup> para el elemento de ocho nodos, ver Tabla I y II.

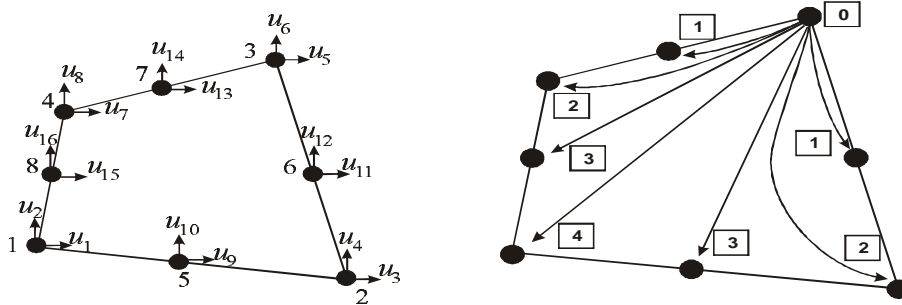
Grupos	Términos	Descripción
A	$k_{11}, k_{22}, k_{33}, k_{44}, k_{55}, k_{66}, k_{77}, k_{88}$	GDL paralelos en el mismo nodo
B	$k_{12}, k_{34}, k_{56}, k_{78}$	GDL ortogonales en el mismo nodo
C	$k_{13}, k_{35}, k_{57}, k_{17}, k_{24}, k_{46}, k_{68}, k_{28}$	GDL paralelos en nodos adyacentes
D	$k_{23}, k_{36}, k_{67}, k_{27}, k_{45}, k_{58}, k_{18}, k_{14}$	GDL ortogonales en nodos adyacentes
E	$k_{15}, k_{37}, k_{26}, k_{48}$	GDL paralelos en nodos opuestos
F	$k_{16}, k_{38}, k_{25}, k_{47}$	GDL perpendiculares en nodos opuestos

**Tabla I.** Clasificación de los términos de la matriz de rigidez del elemento de cuatro nodos

GRUPO	TÉRMINOS	DESCRIPCIÓN	GRADO DE ADYACENCIA
A	$k_{1,1}, k_{2,2}, k_{3,3}, k_{4,4}, k_{5,5}, k_{6,6}, k_{7,7}, k_{8,8}, k_{9,9}, k_{10,10}, k_{11,11}, k_{12,12}, k_{13,13}, k_{14,14}, k_{15,15}, k_{16,16}$	GDL paralelos en el mismo nodo	0
B	$k_{1,2}, k_{3,4}, k_{5,6}, k_{7,8}, k_{9,10}, k_{11,12}, k_{13,14}, k_{15,16}$	GDL ortogonales en el mismo nodo	0
C	$k_{1,3}, k_{3,5}, k_{5,7}, k_{1,7}, k_{9,11}, k_{11,13}, k_{13,15}, k_{9,15}, k_{2,4}, k_{4,6}, k_{6,8}, k_{2,8}, k_{10,12}, k_{12,14}, k_{14,16}, k_{10,16}$	GDL paralelos de nodos separados por un nodo	2
D	$k_{2,3}, k_{3,6}, k_{6,7}, k_{2,7}, k_{10,11}, k_{11,14}, k_{14,15}, k_{10,15}, k_{4,5}, k_{5,8}, k_{1,8}, k_{1,4}, k_{12,13}, k_{13,16}, k_{9,16}, k_{9,12}$	GDL ortogonales de nodos separados por un nodo	2
E	$k_{1,5}, k_{9,13}, k_{3,7}, k_{11,15}, k_{2,6}, k_{4,8}, k_{10,14}, k_{12,16}$	GDL paralelos en nodos opuestos	4
F	$k_{1,6}, k_{9,14}, k_{3,8}, k_{11,16}, k_{2,5}, k_{10,13}, k_{4,7}, k_{12,15}$	GDL perpendiculares en nodos opuestos	4
G	$k_{1,9}, k_{3,9}, k_{3,11}, k_{5,11}, k_{5,13}, k_{7,13}, k_{7,15}, k_{1,15}, k_{2,10}, k_{4,10}, k_{4,12}, k_{6,12}, k_{6,14}, k_{8,14}, k_{8,16}, k_{2,16}$	GDL paralelos de nodos adyacentes	1
H	$k_{1,10}, k_{3,10}, k_{3,12}, k_{5,12}, k_{5,14}, k_{7,14}, k_{7,16}, k_{1,16}, k_{2,9}, k_{4,9}, k_{4,11}, k_{6,11}, k_{6,13}, k_{8,13}, k_{8,15}, k_{2,15}$	GDL perpendiculares de nodos adyacentes	1
I	$k_{1,11}, k_{7,11}, k_{7,9}, k_{5,9}, k_{5,15}, k_{3,15}, k_{3,13}, k_{1,13}, k_{2,12}, k_{8,12}, k_{8,10}, k_{6,10}, k_{6,16}, k_{4,16}, k_{4,14}, k_{2,14}$	GDL paralelos de nodos separados por dos nodos	3
J	$k_{2,11}, k_{8,11}, k_{8,9}, k_{6,9}, k_{6,15}, k_{4,15}, k_{4,13}, k_{2,13}, k_{1,12}, k_{7,12}, k_{7,10}, k_{5,10}, k_{5,16}, k_{3,16}, k_{3,14}, k_{1,14}$	GDL paralelos de nodos separados por dos nodos	3

**Tabla II.** Clasificación de los términos de la matriz de rigidez del elemento de ocho nodos

En la clasificación anterior se considera la simetría de la matriz de rigidez del elemento analizado. El elemento de ocho nodos fue clasificado en 10 grupos, considerando la adyacencia entre los grados de libertad (GDL) de los nodos del elemento y una condición particular de paralelismo o perpendicularidad entre sus grados de libertad. En la Figura 3, se muestran las diferentes relaciones de adyacencia del nodo 3, con los otros nodos del elemento y los grados de libertad en cada nodo.



**Figura 3.** Grados de libertad en cada nodo y relaciones de adyacencia con el nodo3

Para generar los elementos de la matriz de rigidez, se utilizan transformaciones de coordenadas sencillas que no modifiquen la geometría del elemento sino su posición, como se muestra en la Tabla III

Nodos	Transformación ( R )
$(r_1, z_1)$	$(r_4, z_4)$
$(r_2, z_2)$	$(r_1, z_1)$
$(r_3, z_3)$	$(r_2, z_2)$
$(r_4, z_4)$	$(r_3, z_3)$

**Tabla III.** Transformación de coordenadas

Dado un elemento cualquiera de un grupo (término padre), los elementos restantes de este pueden ser generados utilizando las funciones  $S_i$  y  $T_i$  (funciones generadoras) y transformaciones de coordenadas. Comparando el número de operaciones algebraicas realizadas por las funciones generadoras de cada elemento de un grupo, resulta computacionalmente más eficiente generar cada grupo con varios elementos padre, debido a que el número de operaciones algebraicas realizadas por las funciones generadoras  $S_i$  y  $T_i$  de cada elemento del grupo varían.

A continuación se muestra la forma como se generan los términos de la matriz de rigidez en cada grupo, utilizando la ecuación (17) y la transformación  $T_1$ .

**Elementos de ocho nodos**

**Grupo A.** (Términos padres:  $k_{1,1}, k_{2,2}, k_{9,9}$  y  $k_{10,10}$ )

$$\begin{aligned}
 k_{1,1} &\xrightarrow{R} k_{7,7} \xrightarrow{R} k_{5,5} \xrightarrow{R} k_{3,3} \\
 k_{2,2} &\xrightarrow{R} k_{8,8} \xrightarrow{R} k_{6,6} \xrightarrow{R} k_{4,4} \\
 k_{9,9} &\xrightarrow{R} k_{15,15} \xrightarrow{R} k_{13,13} \xrightarrow{R} k_{11,11} \\
 k_{10,10} &\xrightarrow{R} k_{16,16} \xrightarrow{R} k_{14,14} \xrightarrow{R} k_{12,12}
 \end{aligned}
 \tag{20}$$

**Grupo B.**(Términos padres  $k_{1,2}$  y  $k_{9,10}$ )

$$\begin{aligned} k_{1,2} &\xrightarrow{R} k_{7,8} \xrightarrow{R} k_{6,5} \xrightarrow{R} k_{4,3} \\ k_{9,10} &\xrightarrow{R} k_{15,16} \xrightarrow{R} k_{13,14} \xrightarrow{R} k_{11,12} \end{aligned} \quad (21)$$

**Grupo C.**(Términos padres:  $k_{1,3}$ ,  $k_{6,8}$ ,  $k_{9,11}$  y  $k_{10,12}$  )

$$\begin{aligned} k_{1,3} &\xrightarrow{R} k_{1,7} \xrightarrow{R} k_{5,7} \xrightarrow{R} k_{3,5} \\ k_{6,8} &\xrightarrow{R} k_{6,4} \xrightarrow{R} k_{2,4} \xrightarrow{R} k_{2,8} \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} k_{9,11} &\xrightarrow{R} k_{9,15} \xrightarrow{R} k_{13,15} \xrightarrow{R} k_{11,13} \\ k_{10,12} &\xrightarrow{R} k_{10,16} \xrightarrow{R} k_{14,16} \xrightarrow{R} k_{12,14} \end{aligned}$$

**Grupo D.**(Términos padres:  $k_{1,4}$ ,  $k_{1,8}$ ,  $k_{9,12}$  y  $k_{14,15}$ )

$$\begin{aligned} k_{1,4} &\xrightarrow{R} k_{2,7} \xrightarrow{R} k_{5,8} \xrightarrow{R} k_{3,6} \\ k_{1,8} &\xrightarrow{R} k_{6,7} \xrightarrow{R} k_{4,5} \xrightarrow{R} k_{2,3} \end{aligned} \quad (23)$$

$$k_{9,12} \xrightarrow{R} k_{10,15} \xrightarrow{R} k_{13,16} \xrightarrow{R} k_{11,14}$$

$$k_{14,15} \xrightarrow{R} k_{12,13} \xrightarrow{R} k_{10,11} \xrightarrow{R} k_{9,16}$$

**Grupo E.**(Términos padres:  $k_{1,5}$ ,  $k_{2,6}$ ,  $k_{9,13}$  y  $k_{12,16}$ )

$$\begin{aligned} k_{1,5} &\xrightarrow{R} k_{3,7} \\ k_{2,6} &\xrightarrow{R} k_{4,8} \end{aligned} \quad (24)$$

$$k_{9,13} \xrightarrow{R} k_{11,15}$$

$$k_{12,16} \xrightarrow{R} k_{10,14}$$

**Grupo F.**(Términos padres:  $k_{1,6}$  y  $k_{9,14}$ )

$$\begin{aligned} k_{1,6} &\xrightarrow{R} k_{4,7} \xrightarrow{R} k_{2,5} \xrightarrow{R} k_{3,8} \\ k_{9,14} &\xrightarrow{R} k_{12,15} \xrightarrow{R} k_{10,13} \xrightarrow{R} k_{11,16} \end{aligned} \quad (25)$$

**Grupo G.**(Términos padres:  $k_{7,15}$ ,  $k_{7,13}$ ,  $k_{2,10}$  y  $k_{6,12}$ )

$$\begin{aligned} k_{7,15} &\xrightarrow{R} k_{5,13} \xrightarrow{R} k_{3,11} \xrightarrow{R} k_{1,9} \\ k_{7,13} &\xrightarrow{R} k_{5,11} \xrightarrow{R} k_{3,9} \xrightarrow{R} k_{1,15} \end{aligned} \quad (26)$$

$$k_{2,10} \xrightarrow{R} k_{8,16} \xrightarrow{R} k_{6,14} \xrightarrow{R} k_{4,12}$$

$$k_{6,12} \xrightarrow{R} k_{4,10} \xrightarrow{R} k_{2,16} \xrightarrow{R} k_{8,14}$$

**Grupo H.**(Términos padres  $k_{2,9}$   $k_{6,11}$   $k_{1,10}$   $k_{5,12}$ )

$$\begin{aligned}
 k_{2,9} &\xrightarrow{R} k_{8,15} \xrightarrow{R} k_{6,13} \xrightarrow{R} k_{4,11} \\
 k_{6,11} &\xrightarrow{R} k_{4,9} \xrightarrow{R} k_{2,15} \xrightarrow{R} k_{8,13} \\
 k_{1,10} &\xrightarrow{R} k_{7,16} \xrightarrow{R} k_{5,14} \xrightarrow{R} k_{3,12} \\
 k_{5,12} &\xrightarrow{R} k_{3,10} \xrightarrow{R} k_{1,16} \xrightarrow{R} k_{7,14}
 \end{aligned} \tag{27}$$

**Grupo I.**(Términos padres  $k_{1,11}$ ,  $k_{5,9}$ ,  $k_{2,12}$   $k_{6,10}$ )

$$\begin{aligned}
 k_{1,11} &\xrightarrow{R} k_{7,9} \xrightarrow{R} k_{5,15} \xrightarrow{R} k_{3,13} \\
 k_{5,9} &\xrightarrow{R} k_{3,15} \xrightarrow{R} k_{1,13} \xrightarrow{R} k_{7,11} \\
 k_{2,12} &\xrightarrow{R} k_{8,10} \xrightarrow{R} k_{6,16} \xrightarrow{R} k_{4,14} \\
 k_{6,10} &\xrightarrow{R} k_{4,16} \xrightarrow{R} k_{2,14} \xrightarrow{R} k_{8,12}
 \end{aligned} ; \tag{28}$$

**Grupo J.**(Términos padres  $k_{2,11}$ ,  $k_{2,13}$ ,  $k_{1,12}$   $k_{1,14}$ )

$$\begin{aligned}
 k_{2,11} &\xrightarrow{R} k_{8,9} \xrightarrow{R} k_{6,15} \xrightarrow{R} k_{4,13} \\
 k_{2,13} &\xrightarrow{R} k_{8,11} \xrightarrow{R} k_{6,9} \xrightarrow{R} k_{4,15} \\
 k_{1,12} &\xrightarrow{R} k_{7,10} \xrightarrow{R} k_{5,16} \xrightarrow{R} k_{3,14} \\
 k_{1,14} &\xrightarrow{R} k_{7,12} \xrightarrow{R} k_{5,10} \xrightarrow{R} k_{3,16}
 \end{aligned} \tag{29}$$

Los términos de la matriz del elemento de cuatro nodos son generados de manera análoga al caso anterior. Las funciones  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$ ,  $S_4$ ,  $S_5$ ,  $S_6$ ,  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$ ,  $T_4$ ,  $T_5$  y  $T_6$  utilizadas en cada grupo son las que generan los términos padres. Por ejemplo, las funciones que generan a  $k_{22}$  en el elemento de ocho nodos son:

$$\begin{aligned}
 S_1 &= (1/96) (r_{42})^2 (7 r_1 + 2 r s_{24} + r_3) \\
 S_2 &= 0 \\
 S_3 &= (1/96) (z_{42})^2 (7 r_1 + 2 r s_{24} + r_3) \\
 S_4 &= (1/96) (r_{42})^2 (4 r_1 + r s_{24}) \\
 S_5 &= 0 \\
 S_6 &= (1/96)(z_{42})^2(4r_1 + r s_{24}) \\
 T_1 &= (1/2592) (2 r_1^3 + 7 r_2^3 + 8 r_3^3 + 12 r_3^2 r_4 - 18 r_3 r_4^2 + 7 r_4^3 + 6 r_1^2 (r_2 + r_{43}) - 3 r_2^2 (6 r_3 + r_4) + \\
 &\quad 3 r_2 (4 r_3^2 + 2 r_3 r_4 - r_4^2) + 6 r_1 (2 r_2^2 - r_2 (3 r_3 + r_4) + r_4 (-3 r_3 + 2 r_4))) \\
 T_2 &= 0 \\
 T_3 &= (1/2592) (2 (z_1^2 + 4 z_3 z_{31} - z_2 z_4) (r_1 + 2 r s_{24} + r_3) + 2 (r s_{13} + 5 r_4 - r_2) (z_1 - 2 z_3) z_4 + 2 \\
 &\quad (-r_1 - 5 r_2 + r_{43}) (2 z_3 - z_1) z_2 + (2 r s_{13} + r_4 + 7 r_2) z_2^2 + (2 r s_{13} + 7 r_4 + r_2) z_4^2) \\
 T_4 &= (-1/7776) r_{42} (12 (r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2) + 21 r_1 r s_{42} + 6 r_2 r_4 - 30 r_1 r_3 - 33 r_3 r s_{42}) \\
 T_5 &= 0 \\
 T_6 &= (1/2592) (2 (3 r s_{24} + r s_{13}) (2 z_3 z_4 - z_1 z_4) + 2 (6 r_4 - r_2) z_2 z_4 + 2 z_2 (z_1 - 2 z_3) (r s_{14} + r_3 + 3 \\
 &\quad r_2) + 8 r_{42} z_1 z_3 + (r s_{13} + 4 r_2) z_2^2 - 2 r_{42} z_1^2 - 8 z_3^2 r_{42} - z_4^2 (r s_{13} + 4 r_4))
 \end{aligned} \tag{30}$$

En las funciones generadoras, se trabajó con la notación:

$$\begin{aligned} r_{ij} &= r_i - r_j & z_{ij} &= z_i - z_j \\ r s_{ij} &= r_i + r_j & z s_{ij} &= z_i + z_j \quad \text{Con } i, j \in \{1, \dots, 4\} \end{aligned} \quad (31)$$

La fórmula (17) presenta la ventaja que el coeficiente  $A_3$  representa el área del elemento finito en estudio, por lo cual es una función constante. Además si se denota como  $L_1 = f_1(r_1, \dots, r_4, z_1, \dots, z_4)$  y  $L_2 = f_2(r_1, \dots, r_4, z_1, \dots, z_4)$  a los valores que toman las funciones  $f_1$  y  $f_2$  al ser evaluadas en las coordenadas iniciales, entonces al efectuarse rotaciones sobre el elemento finito en estudio, se tiene que:

$$f_1 = \begin{cases} L_2 & \text{Con una rotación} \\ -L_1 & \text{Con dos rotaciones} \\ -L_2 & \text{Con tres rotaciones} \end{cases} \quad \text{y } f_2 = \begin{cases} L_1 & \text{Con una rotación} \\ -L_2 & \text{Con dos rotaciones} \\ -L_1 & \text{Con tres rotaciones} \end{cases}$$

## PRECISIÓN DE LOS RESULTADOS

En el análisis de los resultados obtenidos en la integración de las matrices de rigidez de elementos finitos cuadriláteros de cuatro y ocho nodos, con integración semi-analítica y numérica (Gauss con 4 puntos de integración) se demuestra que ambas tienen la misma precisión. Los errores cometidos son calculados con la ecuación (32).

$$Error = \frac{\sqrt{\sum_{i,j} (s_{ij}^* - s_{ij}^{EX})^2}}{\sum_{i,j} |s_{ij}^*|} \quad (32)$$

donde:

$s_{ij}^*$ : Términos de la matriz de rigidez obtenida por integración numérica.

$s_{ij}^{EX}$ : Términos de la matriz de rigidez obtenida por integración simbólica.

En la Tabla IV, se muestran los errores generados en la integración de la matriz de rigidez del elemento finito de la Figura 4. Los errores generados son pequeños, por lo cual pueden considerarse despreciables y concluirse que ambas técnicas tienen igual precisión.

N° de nodos	a	b	Error
4 nodos	10	10	$0,194703 \times 10^{-7}$
	10	100	$0,499418 \times 10^{-7}$
	10	1000	$0,524022 \times 10^{-7}$
8 nodos	10	10	$0,158075 \times 10^{-7}$
	10	100	$0,220665 \times 10^{-7}$
	10	1000	$0,232560 \times 10^{-7}$

**Tabla IV.** Exactitud de los resultados

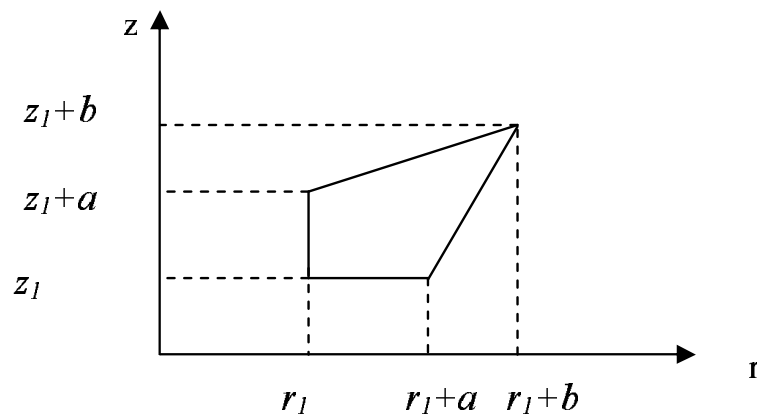


Figura 4. Dimensiones del elemento finito

## TIEMPOS DE CPU

Para evaluar la reducción en los tiempos de CPU, se utilizó un procesador HP NXG120 Centrino 1.86 GHZ y de 1 GB RAM. Los tiempos de CPU empleados por la subrutina simbólica y numérica (Gauss con 4 puntos de integración), son dados en las Tabla V.

N° de nodos	N° de elementos	Numérica (sec)	Simbólica (sec)	Ahorro(%)
4 nodos	10000	2.968E-01	1.406E-01	52.6
	100000	3.062	1.280	58.1
	1000000	30.46	12.73	58.2
8 nodos	10000	1.671	8.437E-01	49.5
	100000	16.04	8.281	48.3
	1000000	161.437	82.51	48.8

Tabla V. Tiempos de CPU

La generalización de la metodología desarrollada y aplicada a la integración semi-analítica de la matriz de rigidez de elementos finitos cuadriláteros de cuatro y ocho nodos, en problemas de simetría axial permite una mayor generalidad y velocidad de cálculo en comparación a la integración numérica.

## CONCLUSIONES

En este trabajo se desarrolló una metodología general aplicable a la integración de matrices de rigidez de cualquier elemento cuadrilátero de cuatro y ocho nodos en problemas de simetría axial, donde los elementos de la matriz de rigidez son obtenidos mediante una expresión semi-analítica y transformaciones de coordenadas. Esta técnica logra reducir sustancialmente los tiempos de cómputo en comparación a la técnica integración numérica (Gauss con cuatro puntos de integración), preservando su precisión. Cabe destacar que estos resultados proporcionarán a los profesionales e investigadores que trabajan con el método de los elementos finitos una reducción sustancial de tiempos de CPU en el cálculo de la matriz de rigidez global, la cual generalmente está constituida por una gran cantidad de elementos de este tipo.

## REFERENCIAS

- 1 D. Babu, y F. Pinter, "Analytical integration formulae for linear isoparametric finite elements", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. **20**, pp. 1153-1166, (1984).
- 2 DERIVE. *Users Manual*, Versión 2, Soft Warehouse, Hawaii, (1989).
- 3 D. Griffiths, "Stiffness matrix of the four-node quadrilateral element in closed form", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. **37**, pp. 1027-1038, (1994).
- 4 M. Kikuchi, "Application of the symbolic mathematics system to the finite element program", *Computational Mechanics*, Vol. **5**, pp. 41-47, (1989).
- 5 I.J. Lozada, J.C. Osorio, D.V. Griffiths y M. Cerrolaza, "Semi-analytical integration of the 8-noded plane element stiffness matrix using symbolic computation", *International Journal for Numerical Methods in Partial Differential Equations*, Vol. **22**, pp. 296-316, (2006).
- 6 MAPLE. *Users Manual*, Versión 7, Soft Warehouse, Hawaii, (1989).
- 7 A. Mizukami, "Some integration formulas for a four-noded isoparametric element", *Comput. Methods Appl. Mech. & Eng.*, Vol. **59**, pp. 111-121, (1986).
- 8 M. Okabe, "Analytical integral formulae related to convex quadrilateral finite elements", *Comput. Methods Appl. Mech. & Eng.*, Vol. **29**, pp. 201-218, (1981).
- 9 R. Pavelle, "MACSYMA: Capabilities and applications to problems in engineering and sciences", Symbolic inc., Cambridge, (1985).
- 10 H. Rathod, "Some analytical integration formulae for a four node isoparametric element", *Comput. & Struct.*, Vol. **30**, N° 55, pp. 1101-1109, (1988).
- 11 REDUCE. *Software for algebraic computation*, Springer, Berlin, (1986).
- 12 L. Videla, N. Aparicio, M. Cerrolaza, "Explicit integration of the stiffness matrix of a four-noded-plane elasticity", *Comm. Num. Meth. Eng.*, Vol. **12**, N° 11, pp. 731-743, (1996).
- 13 L. Videla, T. Baloa, M. Cerrolaza y D. Griffiths, "Exact integration of the stiffness matrix of an 8-node plane elastic finite element by symbolic computation". *International Journal for Numerical Methods in Partial Differential Equations*, Vol. **24**, N° 1, pp. 249-261, (2008).
- 14 G. Yagawa, W. Ye y S. Yoshimura, "A numerical integration scheme for finite element method based on symbolic manipulation", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. **29**, N° 7, pp. 1539-1549, (1990).