

## UN MODELO TRIDIMENSIONAL PARA EL ANÁLISIS DE HORMIGÓN ESTRUCTURAL BAJO CARGA ESTÁTICA CRECIENTE HASTA LA ROTURA

FERNANDO GONZALEZ VIDOSA

*Dpto. de Ingeniería de la Construcción (UPV)  
Campus Camino de Vera  
46020 Valencia, España*

### RESUMEN

Este artículo presenta un modelo numérico para el análisis no lineal de estructuras de hormigón bajo carga estática creciente hasta la rotura, cuyas principales características son las siguientes: discretización por elementos finitos tridimensionales, ecuaciones constitutivas frágiles para el hormigón, representación distribuida de la fisuración y proceso incremental de carga y fisuración. A continuación, se analizan tres elementos estructurales de comportamiento experimental conocido. Los análisis de un prisma de hormigón en masa con rotura frágil y de una viga de hormigón armado con rotura por flexión muestran que las predicciones de carga de rotura son moderadamente sensibles al elemento finito y a la malla adoptados. Finalmente, las predicciones para una viga de hormigón armado con rotura por cortante muestran que los resultados pueden ser muy sensibles al criterio de actualización de propiedades del método iterativo, bien por falta de convergencia o por propagación de mecanismos espurios.

### SUMMARY

This paper presents a numerical model for the non-linear analysis of concrete structures under monotonic loading up to failure, the main features of which are as follows: three-dimensional finite element modelling, brittle constitutive law for concrete, smeared modelling of cracking and incremental loading and cracking procedure. Three different structural elements of known experimental performance are analysed. The analyses of a plain concrete prism exhibiting a brittle failure and a reinforced concrete beam failing in flexure show that the predictions of ultimate loads are rather insensitive to the adopted finite element mesh. Finally, the predictions for a reinforced concrete beam failing in shear show that the results may be very sensitive to the updating strategy of the iterative procedure due to lack of convergence or to divergence caused by propagation of spurious mechanisms.

Recibido: Septiembre 1988

## INTRODUCCION

El método de los elementos finitos (MEF en adelante) se ha converido, tras su aparición a mediados de los años cincuenta<sup>1</sup>, en la técnica numérica de resolución de problemas físico-matemáticos más extendida entre los ingenieros. La aplicación del MEF al análisis no lineal de estructuras de hormigón se inició una década más tarde<sup>2,3</sup>, pero ya en 1982 había sido objeto de numerosos trabajos de investigación<sup>4</sup>, lo que demuestra el interés suscitado por este campo de la investigación. Sin embargo, el éxito de los modelos numéricos ha sido bastante limitado dada la escasez de publicaciones en las que se aborde el estudio de la generalidad y de la objetividad de los modelos propuestos.

De entre los distintos modelos numéricos presentados hasta hoy, conviene destacar aquellos elementos básicos del análisis sobre cuya bondad existe un cierto consenso entre los investigadores: técnicas de representación discreta<sup>2</sup> y distribuida<sup>3</sup> de la fisuración, empleo de fuerzas residuales para ajustarse a relaciones  $\sigma - \epsilon$  no lineales respetando el equilibrio global de la estructura<sup>5,6</sup> e inclusión de propiedades no lineales y envolventes de rotura multiaxiales obtenidas de ensayos experimentales específicos del hormigón<sup>7,8</sup>. A estos elementos básicos del análisis se suman otros elementos secundarios sobre los que no existe un consenso generalizado y cuyo elevado número dificulta seriamente el estudio riguroso de la objetividad de los modelos numéricos que los incorporan. Entre estos últimos hay que citar los siguientes<sup>9</sup>: contribución del hormigón entre fisuras, relaciones  $\sigma - \epsilon$  postúltimas, acunamiento de áridos entre caras de fisura, efecto pasador de las armaduras (i.e. elementos del análisis relativos a las propiedades de los materiales), número de fisuras por iteración, elementos finitos, regla de integración numérica, malla de elementos finitos y método iterativo (i.e. elementos del análisis relativos a los métodos numéricos).

El objetivo de este trabajo es presentar un modelo tridimensional con representación distribuida y frágil de la fisuración para el análisis no lineal de estructuras de hormigón<sup>9</sup>; así como discutir mediante ejemplos la influencia en las predicciones del modelo de algunos elementos del análisis que han sido objeto de reciente discusión científica<sup>10,11,12</sup>, tales como el elemento finito, la malla de elementos finitos y el método iterativo.

## DESCRIPCION DEL METODO DE ANALISIS NUMERICO

### Elementos finitos

Los elementos finitos empleados son los que se representan en la Figura 1. Es decir, los hexaédricos de 20 y 27 nodos para el hormigón (serendipítico y lagrangiano respectivamente) y el uniaxial de tres nodos para el acero. (Se trata de elementos isoparamétricos muy populares cuyas funciones de forma pueden encontrarse en cualquier texto básico de elementos finitos.) Nótese que para el elemento de 20 nodos se han considerado dos reglas de integración gaussiana:  $2 \times 2 \times 2$  o  $3 \times 3 \times 3$  puntos de Gauss. A este respecto hay que puntualizar que, si bien para el análisis lineal de tensiones existe unanimidad en que el elemento integrado por defecto (elemento *HX20A* en adelante)

mejora las predicciones de tensiones obtenidas mediante el elemento con integración completa<sup>13</sup> (elemento *HX20B* en adelante), se ha argumentado recientemente que para el análisis no lineal de estructuras de hormigón la integración por defecto aumenta el riesgo de propagación de mecanismos espurios<sup>12</sup>. Sin embargo, las comparaciones efectuadas durante el desarrollo de este modelo numérico indican que, en general, el uso del elemento integrado por defecto resulta también favorable para el análisis no lineal de hormigón estructural<sup>9,14</sup>.

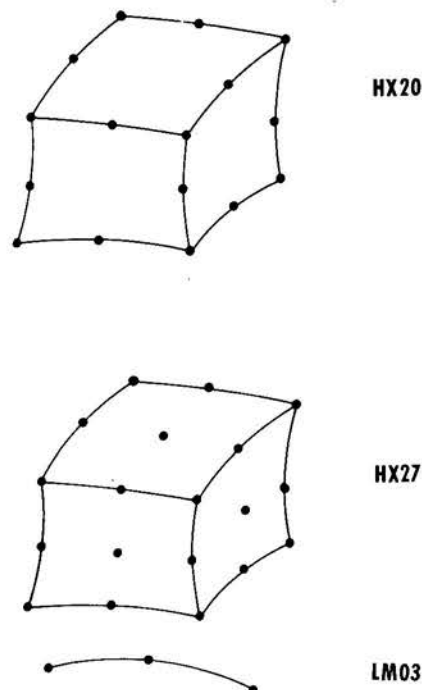


Figura 1. Elementos finitos tridimensionales incorporados: (*HX20*) Elemento serendipítico de 20 nodos; (*HX27*) Elemento lagrangiano de 27 nodos; (*LM03*) Elemento uniaxial de 3 nodos.

### Ecuaciones constitutivas del hormigón y del acero

Las ecuaciones constitutivas adoptadas para describir el comportamiento del hormigón bajo carga estática de corta duración son las propuestas por Kotsovos<sup>15</sup>. Tales ecuaciones se derivaron mediante ajuste estadístico de información obtenida de ensayos uniaxiales, biaxiales y triaxiales de probetas de hormigón, sin que en el proceso se adoptara ningún modelo teórico de material. El modelo de material consta de relaciones  $\sigma - \epsilon$  triaxiales sin ramas de ablandamiento<sup>15</sup> válidas hasta una envolvente triaxial de tensiones de rotura<sup>16</sup>. (Todas las propiedades son únicamente función de la resistencia a compresión simple en probeta cilíndrica.) Las relaciones tensión-deformación se caracterizan por su no linealidad, que se atribuye generalmente a los procesos de microfractura interna del material, debidos a la extensión y propagación de microfisuras. Tales procesos de microfisuración dan lugar a relaciones  $\sigma - \epsilon$  estables

hasta niveles tensionales próximos a los de rotura. Sin embargo, a partir de éstos el material se macrofisura y sufre un crecimiento drástico e inestable de volumen que en ausencia de confinamiento conduce a la fractura brusca del material<sup>15,17,18,19</sup>. Por tanto, el modelo de material no incluye relaciones no lineales postúltimas, ya que los resultados experimentales muestran que la hipótesis de rotura completamente frágil es la que mejor representa el comportamiento del hormigón desde el punto de vista macroscópico<sup>15</sup>. Obsérvese que tal naturaleza frágil del hormigón es perfectamente compatible con el comportamiento dúctil de algunas estructuras de hormigón<sup>20</sup>.

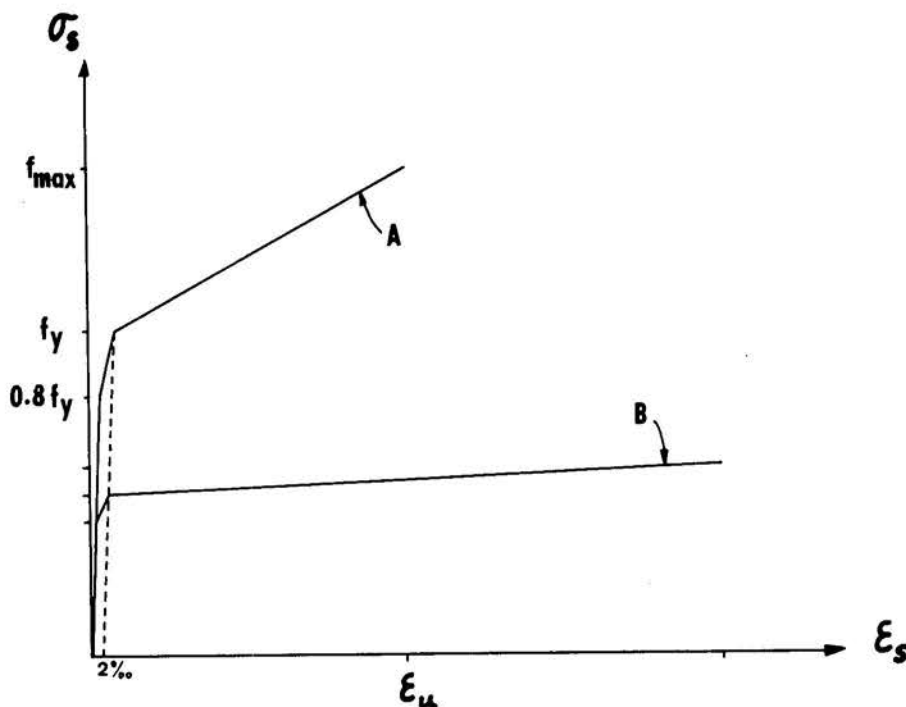


Figura 2. Diagramas uniaxiales  $\sigma - \epsilon$  adoptados para el acero: (A) Aceros deformados en frío; (B) Aceros de dureza natural.

En lo que respecta al acero, en la Figura 2 se representan los diagramas adoptados para los aceros deformados en frío (tipo A) y para los aceros de dureza natural (tipo B). Los diagramas son trilineales y quedan definidos al especificar valores para el módulo de Young, el límite elástico (deformación remanente del dos por mil), la tensión de rotura y la deformación de rotura. Según se verá en los ejemplos numéricos, los nodos de los elementos finitos correspondientes al acero siempre coinciden con nodos de elementos finitos de hormigón, lo que implícitamente supone la adopción de la hipótesis de adherencia perfecta entre el hormigón y el acero. A este respecto, hay que explicar que la representación distribuida de la fisuración no permite una adecuada modelización de fenómenos localizados como el de la adherencia, por lo que esta hipótesis es habitual en casi todos los modelos distribuidos<sup>9</sup>.

## REPRESENTACION DISTRIBUIDA DE LA FISURACION

La fisuración del hormigón es, sin duda, un factor muy importante en el comportamiento de las estructuras de hormigón. Consecuentemente, su modelización es también un factor de gran peso en el análisis. Además, la importancia en el análisis de los aspectos relacionados con la fisuración se ve aumentada por la degradación del acondicionamiento de las matrices de rigidez que la fisuración conlleva, según se ha discutido en otras publicaciones<sup>9,14</sup>. La técnica aquí adoptada se conoce como representación distribuida de la fisuración ("smeared cracking"<sup>4</sup>). Esta técnica consiste básicamente en modificar las matrices constitutivas de aquellas zonas de la estructura en las que el estado tensional excede los estados de rotura, para con ello incorporar la pérdida de rigidez asociada con la fisuración. Tal pérdida de rigidez conlleva descargas tensionales que se transforman en fuerzas residuales que preservan el equilibrio. La versión de representación distribuida incorporada en este trabajo es la misma que la empleada en la mayor parte de los modelos publicados en los últimos años<sup>9</sup>, y consiste en modificar las tensiones y las matrices constitutivas de los puntos de Gauss que se utilizan para la integración numérica de las matrices de rigidez y para el cálculo de las fuerzas residuales.

Las matrices constitutivas adoptadas para puntos de Gauss fisurados son compatibles con la hipótesis de fragilidad anteriormente expuesta y se describen a continuación. Cuando el estado tensional de un punto de Gauss supera por primera vez la envolvente en tracción (i.e. al menos una tensión principal es de tracción), se forma un plano de fisuración que es perpendicular a la dirección de la máxima tracción principal previamente existente. A partir de entonces, la tensión normal a tal plano se anula e incrementos de tensión y deformación en ejes locales se relacionan por la siguiente expresión:

$$\begin{bmatrix} \Delta\sigma_1 \\ \Delta\sigma_2 \\ \Delta\sigma_3 \\ \Delta\tau_{12} \\ \Delta\tau_{13} \\ \Delta\tau_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\epsilon_1 \\ \Delta\epsilon_2 \\ \Delta\epsilon_3 \\ \Delta\gamma_{12} \\ \Delta\gamma_{13} \\ \Delta\gamma_{23} \end{bmatrix}$$

donde el tercer eje local es perpendicular al plano de la fisura y  $\beta (0 \leq \beta \leq 1)$  es el factor de retención del módulo de deformación transversal. (Nótese que los coeficientes  $A$ ,  $b$  y  $G$  son módulos de deformación correspondientes a la Teoría de la Elasticidad obtenidos a partir de unos módulos quasitangentes  $K_t$  y  $G_t$  descritos en la referencia 9.) La presencia de un factor de retención de  $G$  no nulo es indispensable para evitar el excesivo deterioro del acondicionamiento de las matrices de rigidez<sup>9,14</sup>. En este sentido, cabe señalar que valores entre 0.1 y 0.5 son generalmente suficientes para mantener la estabilidad numérica y que las predicciones no lineales son poco sensibles dentro de este intervalo<sup>21</sup> (e.g. un 10%). Si el estado tensional supera por segunda vez en tracción la envolvente, se forma una segunda fisura. La combinación de ambas fisuras se representa mediante la pérdida de rigidez en todas las direcciones, salvo en la dirección paralela

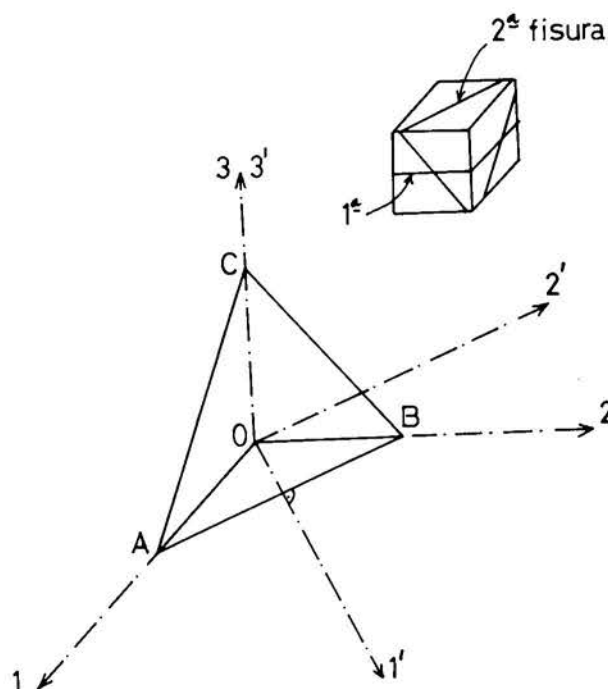


Figura 3. Ejes locales para puntos de Gauss fisurados (primera fisura paralela al plano OAB, segunda fisura paralela al plano ABC).

a la intersección de ambos planos. Las relaciones que se adoptan en los nuevos ejes locales (ejes 1'2'3' en la Figura 3) son las siguientes:

$$\begin{bmatrix} \Delta\sigma_1 \\ \Delta\sigma_2 \\ \Delta\sigma_3 \\ \Delta\tau_{12} \\ \Delta\tau_{13} \\ \Delta\tau_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\epsilon_1 \\ \Delta\epsilon_2 \\ \Delta\epsilon_3 \\ \Delta\gamma_{12} \\ \Delta\gamma_{13} \\ \Delta\gamma_{23} \end{bmatrix}$$

donde de nuevo hay que conservar algo de rigidez transversal para mantener la estabilidad numérica. Para el caso extremo de que el estado tensional supere por tercera vez la envolvente en tracción o en que la envolvente se alcance con todas las tensiones principales en compresión, el material se considera que pierde su rigidez en todas las direcciones. Consecuentemente, la matriz constitutiva adoptada es una matriz casi nula con sólo valores residuales de rigidez transversal, i.e. valores  $\beta G$ ; cuya presencia se justifica por la misma razón apuntada anteriormente para el caso de una o dos fisuras.

#### Proceso incremental de carga y fisuración hasta la rotura

El método iterativo elegido para la resolución del problema no lineal es el conocido método incremental de Newton-Raphson (MINR en adelante). El MINR se puede aplicar con distintas estrategias de puesta al día de propiedades, que dan lugar a



distintas variantes del método que se suelen referenciar como métodos distintos (e.g. métodos de Newton-Raphson puro; modificado, mixto, etc.). No obstante, todas las variantes comparten un esquema de flujo cuya formulación por elementos finitos se resume en la Figura 4 y que se describe brevemente a continuación.

El vector de carga externa se aplica en escalones de carga,  $\Delta f_e$ , a los que hay que añadir el vector de fuerzas residuales de la iteración anterior,  $\Delta f_r$ . A continuación se actualiza o no la matriz de rigidez incremental de la estructura,  $K$  (generalmente conocida como matriz tangente). Si se puede resolver el sistema de ecuaciones, se obtienen los incrementos de desplazamientos nodales,  $\Delta a$ , y se calculan en cada punto de Gauss los nuevos incrementos de deformaciones y de tensiones,  $\Delta \epsilon$  y  $\Delta \sigma$ , haciendo uso de las matrices  $B$  y  $D$  incorporadas en el sistema de ecuaciones; y se actualizan los valores totales de deformaciones y de tensiones,  $\epsilon$  y  $\sigma$ . Las nuevas tensiones totales están equilibradas (i.e.  $\int (B)^T \cdot \sigma \cdot dV = f_e$ ), pero no cumplen las relaciones no lineales de los materiales, a menos que se haya alcanzado la convergencia. Por tanto, estas tensiones equilibradas se corrigen para satisfacer las ecuaciones constitutivas de los materiales (tensiones desequilibradas  $\sigma'$ ). Esta corrección causa la aparición de fuerzas desequilibradas o residuales. Si las fuerzas residuales no satisfacen el criterio de convergencia, la carga externa se mantiene constante y se continúa iterando. En caso contrario, se aplica un nuevo escalón de carga. Obsérvese que antes de la próxima iteración se decide qué matrices  $D$  conviene actualizar.

Según se indica en la Figura 4, el proceso incremental de carga sólo se detiene por divergencia de las fuerzas residuales (si la máxima fuerza residual es mayor que 100 veces la carga total aplicada<sup>9</sup>) o por la imposibilidad de resolver el sistema de ecuaciones (método de Choleski<sup>9</sup>) a causa de la creciente degradación de la matriz  $K$ . En consecuencia, las predicciones de carga de rotura a que se hace referencia en las Tablas I a III se corresponden con las cargas máximas sostenidas en el análisis, i.e. las correspondientes al último escalón de carga convergido.

En lo que respecta al análisis no lineal distribuido de hormigón, la fisuración origina serios problemas de convergencia si no se actualizan las matrices  $D$  de los puntos de Gauss fisurados<sup>11,9</sup> (e.g. método de Newton-Raphson modificado); e incluso puede dar lugar a divergencias prematuras por propagación de mecanismos espurios<sup>12,9,14</sup>. A este respecto, hay que puntualizar que el método iterativo utilizado para los ejemplos numéricos que se describen más adelante actualiza inmediatamente las matrices  $D$  de las nuevas fisuras (método NR-plus); salvo en el tercero de los ejemplos en el que se discute la influencia del método iterativo.

También es importante destacar que las fuerzas residuales causadas por la fisuración distan mucho de ser pequeñas en el caso de modelización frágil (i.e. sin ramas descendentes  $\sigma - \epsilon$  en la dirección normal a las fisuras como es el caso en este trabajo), lo que obliga a controlar el número de fisuras permitidas por iteración para mantener la estabilidad numérica del análisis<sup>21,9,14</sup>. En este sentido, hay que señalar que en los ejemplos numéricos sólo se han permitido 2 nuevas fisuras por iteración para el elemento  $HX20A$  ( $2 \times 2 \times 2$  puntos de Gauss) y 3 para los elementos  $HX20B$  y  $HX27$  ( $3 \times 3 \times 3$  puntos de Gauss).

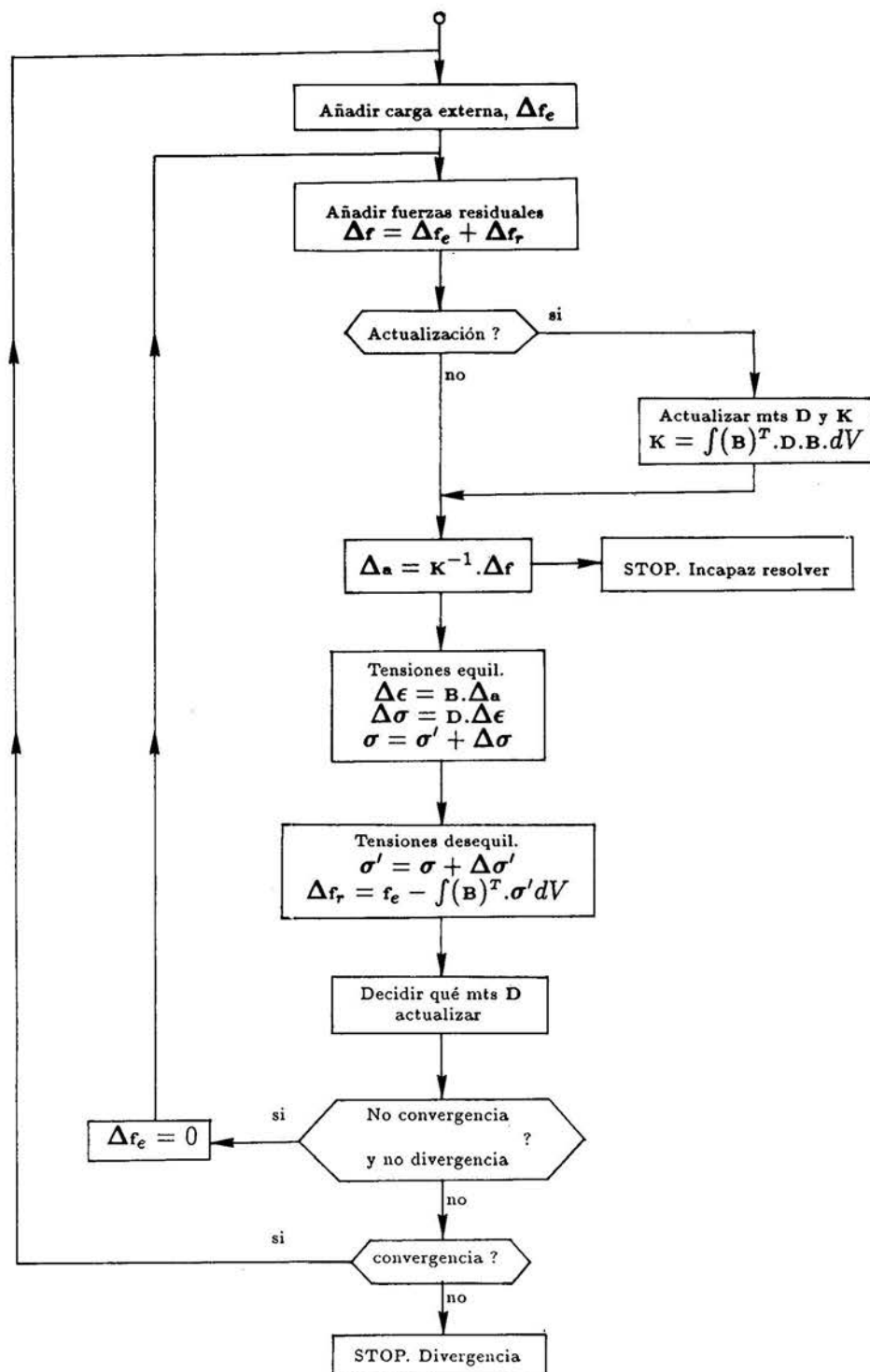


Figura 4. Diagrama de flujo por elementos finitos del método incremental de Newton-Raphson.



Caso	Malla EF	EF	PGs	CMS (MPa)	CMS/Exp.
1	$2 \times 1 \times 2$	HX20	$2 \times 2 \times 2$	19	1.10
2	$2 \times 1 \times 2$	HX20	$3 \times 3 \times 3$	15	0.87
3	$2 \times 1 \times 2$	HX27	$3 \times 3 \times 3$	19	1.10
4	$2 \times 1 \times 1$	HX20	$2 \times 2 \times 2$	20	1.16
5	$4 \times 1 \times 4$	HX20	$2 \times 2 \times 2$	20	1.16

TABLA I. Prisma de hormigón en masa. Resumen de casos analizados y de cargas máximas sostenidas ( $\beta = 0.1$ ).

Caso	Malla EF	EF	PGs	CMS (kN)	CMS/Exp.
1	$3 \times 1 \times 1$	HX20	$2 \times 2 \times 2$	12	0.88
2	$3 \times 1 \times 1$	HX20	$3 \times 3 \times 3$	14	1.03
3	$3 \times 1 \times 1$	HX27	$3 \times 3 \times 3$	14	1.03
4	$6 \times 1 \times 2$	HX20	$2 \times 2 \times 2$	14	1.03
5	$6 \times 1 \times 2$	HX20	$3 \times 3 \times 3$	13	0.96
6	$6 \times 1 \times 2$	HX27	$3 \times 3 \times 3$	13	0.96

TABLA II. Viga con rotura dúctil. Resumen de casos analizados y de cargas máximas sostenidas ( $\beta = 0.1$ ).

### PROGRAMA DE ORDENADOR

El principal programa de ordenador se derivó a partir de un macroprograma FORTRAN de análisis lineal por elementos finitos denominado FINEL<sup>22</sup>. La estructura modular de FINEL permitió que se aprovecharan sin cambios algunos de sus módulos, i.e. los módulos de generación de malla, renumeración nodal, condiciones de contorno y resolución del sistema de ecuaciones por el método de Choleski; así como otras utilidades del programa como el procesador del fichero de entrada de datos, el gestor de módulos y el gestor de la base de datos. Por tanto, el desarrollo del modelo numérico se centró

Caso	Malla EF	MINR	CMS (kN)	CMS/Exp.
1	10 × 1 × 3	NR-plus	300	0.90
2	10 × 1 × 3	MIXNR	200	0.60
3	10 × 1 × 3	INITK	50	0.15

TABLA III. Viga con rotura frágil. Resumen de casos analizados y de cargas máximas sostenidas ( $\beta = 0.1$ ).

fundamentalmente en los aspectos relacionados con la no linealidad de los materiales<sup>9</sup>, i.e. matrices de rigidez, relaciones  $\sigma - \epsilon$ , fuerzas residuales, fisuración, convergencia, etc. También se desarrollaron otros dos programas auxiliares para el procesamiento y la obtención de gráficos de fisuración como los que se incluyen en los ejemplos numéricos. En lo que respecta a estos gráficos, hay que señalar que, en todos los casos, representan una sección de la malla paralela al plano de referencia  $XZ$  (Figuras 5b, 8b y 12b) y que contiene a los puntos de Gauss más próximos a dicho plano  $XZ$ . Los símbolos para la fisuración tienen el siguiente significado: los trazos orientados indican fisuras que forman con el plano de la sección un ángulo mayor que  $45^\circ$  (i.e. fisuras "casi-ortogonales" al plano de la sección); los círculos indican fisuras para las que tal ángulo es menor que  $45^\circ$  (i.e. fisuras "casi-paralelas" al plano de la sección); y, por último, los asteriscos indican puntos de Gauss sin rigidez (i.e. con tres fisuras o que hubieran alcanzado la envolvente en compresión).

## EJEMPLOS NUMERICOS

### Prisma de hormigón en masa bajo carga concentrada en franja

Este ejemplo se corresponde con uno de los prismas ensayados por Niyogi<sup>23</sup> y analizado anteriormente por Bedard y Kotsovos con un modelo bidimensional<sup>21</sup>. El objeto de este ejemplo es estudiar la influencia en las predicciones del modelo numérico del elemento finito y de la malla de elementos finitos. En la Figura 5 se representan los datos experimentales del prisma y una de las tres mallas de elementos finitos utilizadas en el análisis (gracias a las simetrías sólo se analiza un octavo del prisma). Los resultados del análisis se resumen en la Tabla I y en las Figuras 6 y 7 se presentan algunos de los gráficos de fisuración obtenidos.

Según se observa en la Figura 6, las predicciones analíticas muestran que, tras la fisuración vertical de la parte central del prisma, se produce la expansión del lateral del mismo y la subsiguiente rotura. Aunque el grado de aproximación a la carga de rotura es igualmente bueno en los tres primeros casos de la Tabla I (misma malla de elementos finitos y distinto elemento finito), hay que destacar que con el elemento

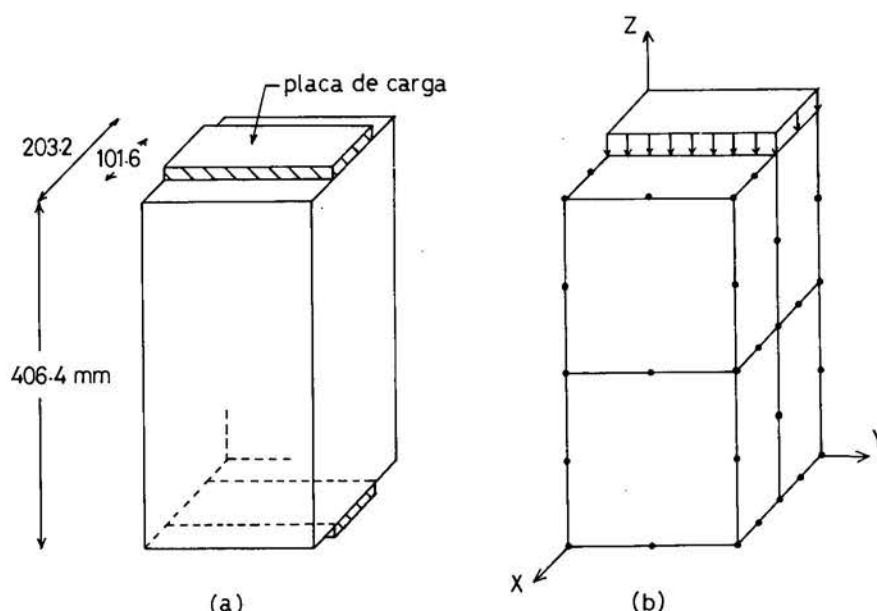


Figura 5. Prisma de hormigón en masa: (a) Datos experimentales ( $f_c = 26.9$  MPa); (b) Malla intermedia de elementos finitos.

de 20 nodos e integración completa la respuesta es más rígida y la carga máxima sostenida es menor que con el mismo elemento integrado por defecto ( $2 \times 2 \times 2$  puntos de Gauss) o que con el elemento lagrangiano; lo que contradice los resultados de De Borst y Nauta<sup>10</sup>, quienes a partir de un único ejemplo sugieren que el uso de elementos integrados por defecto ( $2 \times 2 \times 2$  PGs en los elementos serendipíticos bidimensionales de 8 nodos) empeora la estabilidad numérica respecto a los mismos elementos con integración completa. Por otra parte, la comparación de los casos 1, 4 y 5 (mismo elemento finito y distinta malla) pone de manifiesto que las predicciones de carga de rotura son en este caso, poco sensibles a la malla de elementos finitos. No obstante, hay que notar las diferencias en los gráficos de fisuración (ver Figura 7); aunque, exceptuando el caso 4 en que la discretización es muy burda, los gráficos son cualitativamente semejantes y las diferencias atribuibles a la distinta posición de los puntos de Gauss y al sustancial cambio de aspecto de los elementos finitos (relación altura: anchura: profundidad).

### Viga de hormigón armado con rotura dúctil

El segundo elemento que se analiza es una viga bajo dos cargas puntuales con rotura dúctil ensayada por Kotsovos<sup>20</sup>. En la Figura 8 se resumen las características geométricas y de armado de la viga y se representa una de las dos mallas empleadas en el análisis (en esta ocasión sólo se analiza un cuarto de la viga). La relación vano de cortante/canto útil es de 3.33 y la cuantía de armadura de tracción del 1.2%. La posibilidad de rotura por cortante se aminoró mediante armadura transversal en el vano de cortante. En este sentido, cabe señalar que la carga de rotura experimental (13.6 kN) es muy parecida a la que se obtiene mediante cualquier bloque de tensiones equivalente. No obstante, las mediciones experimentales de deformaciones contradicen

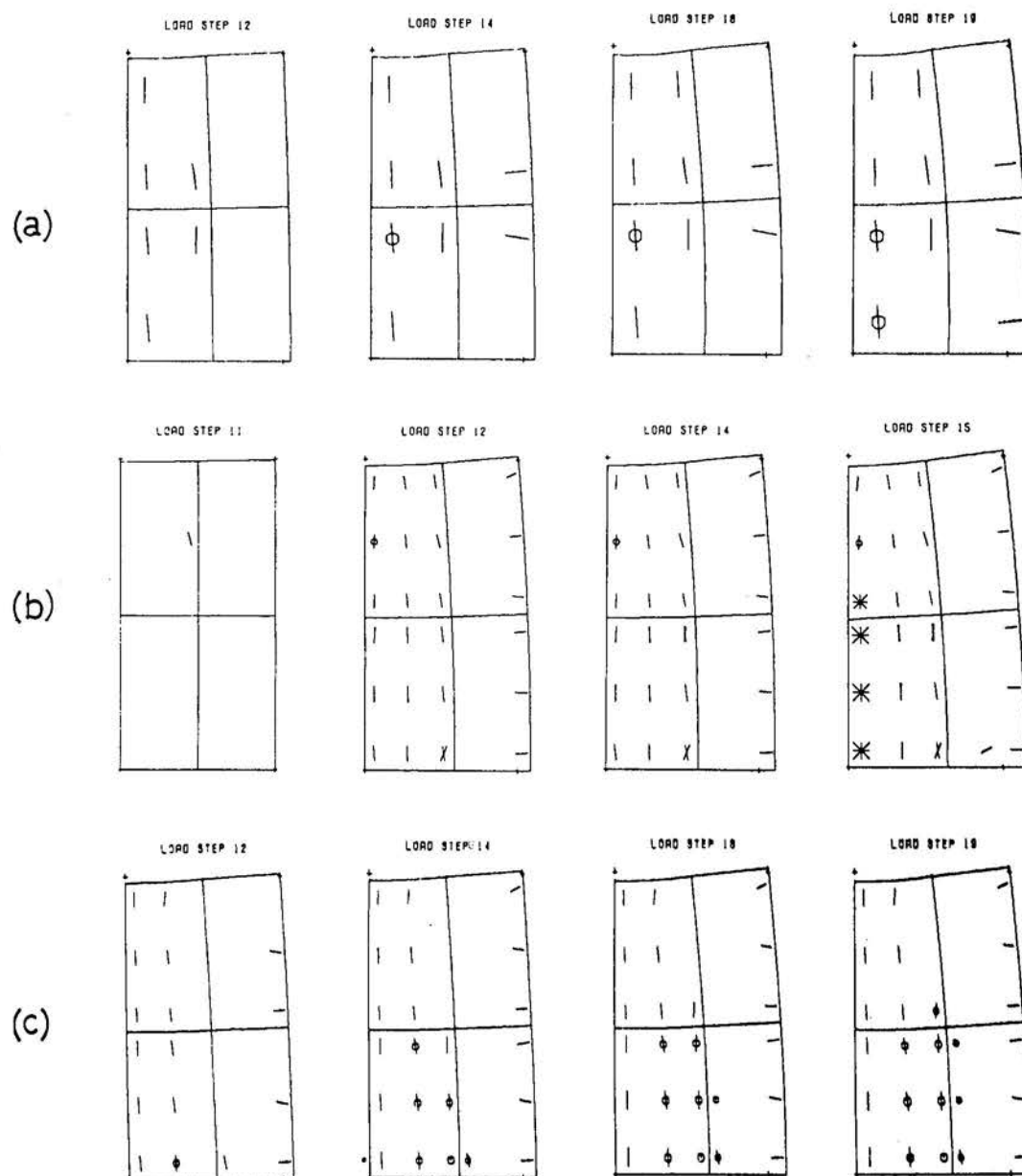


Figura 6. Prisma de hormigón en masa. Influencia del EF en la fisuración (escalón de carga = 1 MPa, desplazamientos magnificados  $\times 30$ ): (a) elemento HX20A; (b) elemento HX20B; (c) elemento HX27.

las hipótesis habituales para el cálculo de secciones en flexión<sup>20</sup> (e.g. plastificación del hormigón en compresión). Los resultados se resumen ahora en la Tabla II. De nuevo, el elemento finito y el tamaño de la malla son objeto de comparación. En la Figura 9 se compara la curva carga-flecha experimental frente a las predicciones mediante el

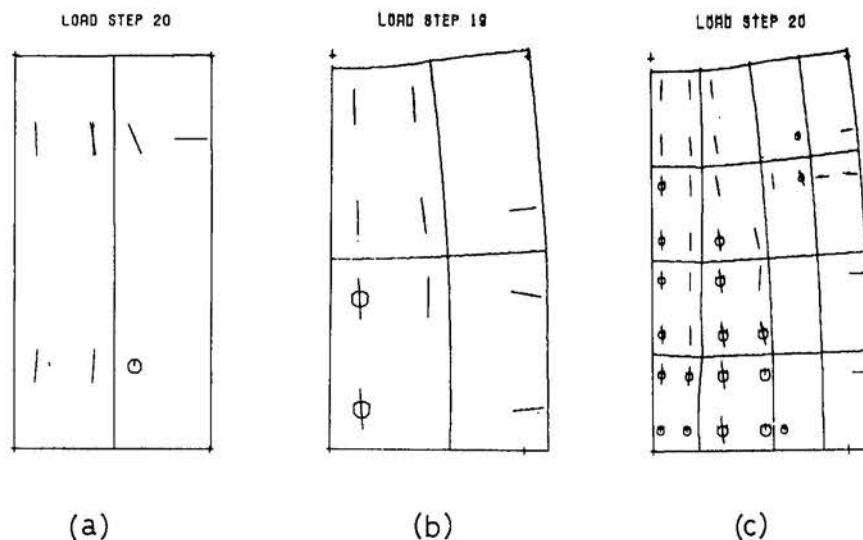
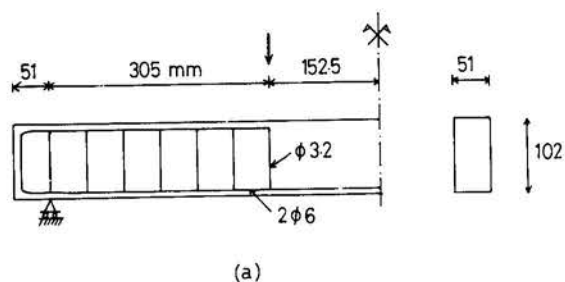


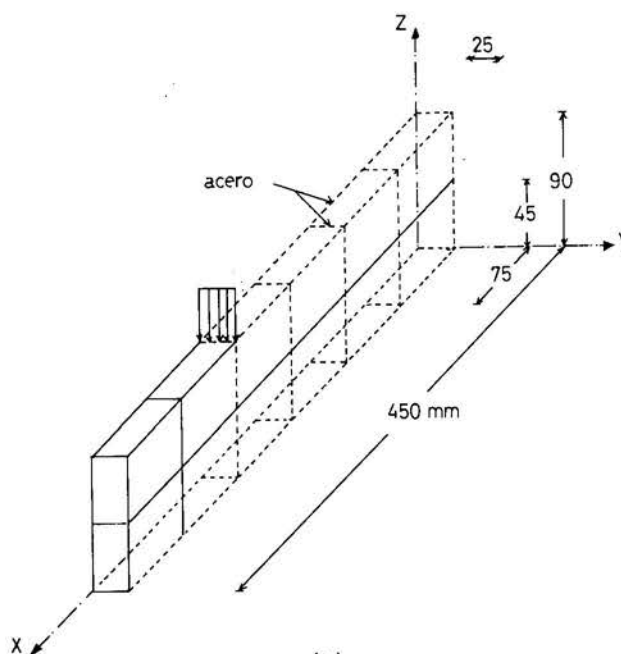
Figura 7. Prisma de hormigón en masa. Influencia de la malla de EF en la fisuración para la carga máxima sostenida (escalón de carga = 1 MPa): (a) 2 elementos HX20A; (b) 4 elementos HX20A; (c) 16 elementos HX20A.

elemento de 20 nodos con  $2 \times 2 \times 2$  y  $3 \times 3 \times 3$  PGs (casos 4 y 5 de la Tabla II). Por otra parte, las Figuras 10 y 11 incluyen gráficos de fisuración de la sección de referencia para distintos casos.

Según se ha explicado anteriormente, en los seis casos se utilizó el criterio de permitir pocas fisuras por iteración (2 fisuras para el elemento HX20A y tres para los elementos HX20B y HX27), descartándose el caso de no controlar el número de nuevas fisuras porque ya Bedard y Kotsovos<sup>21</sup> comprobaron que en elementos armados tal criterio puede conducir a la divergencia prematura del análisis. Con este criterio las predicciones han de ser poco sensibles al escalón de carga, que se fijó en 1 kN. En la Figura 9 se aprecia como las predicciones de flechas son algo mayores que las experimentales ( $\approx 20\%$  mayores para 10 kN) hasta que se inicia en el análisis la plastificación de los elementos de acero. En este sentido, hay que advertir que en el análisis la plastificación se inicia al 80% del límite elástico (ver Figura 2). Con un diagrama bilineal para el acero (más parecido al experimental en este caso) se conseguiría ajustarse más a la curva experimental para cargas próximas a la de rotura; pero con el trilineal se consigue una transición más gradual —que se refleja en las curvas analíticas—, lo que mejora la estabilidad numérica y facilita el análisis de los resultados, ya que se consigue obtener algún/os escalones de carga convergidos con algunos puntos de Gauss del acero ya plastificados. Es importante resaltar que la rotura se produce en los seis casos estudiados por plastificación del acero y fisuración horizontal de la zona comprimida (ver Figuras 10 y 11) y no por aplastamiento del hormigón. Nótese que los puntos de Gauss más próximos a la carga puntual (los únicos con las tres tensiones principales de compresión) no han alcanzado la envolvente de rotura para el último escalón de carga convergido; puesto que se habría producido la pérdida total de capacidad portante en dichos puntos que se reflejaría en el gráfico mediante símbolos



(a)



(b)

Figura 8. Viga con rotura dúctil: (a) Datos experimentales ( $f_c = 37.8$  MPa,  $f_y = 417$  MPa); (b) Malla de 12 elementos hexaédricos.

asterisco. Según se observa en la Figura 11, hay que destacar la excesiva fisuración de la zona comprimida que aparece cuando se utiliza el elemento  $HX20B$  ( $3 \times 3 \times 3$  PGs), lo que, de nuevo, indica su excesiva rigidez. En cualquier caso, las cargas de rotura y las curvas carga-flecha son satisfactorias en todos los casos desde el punto de vista práctico; incluso en el caso 1, en que la malla es poco densa en puntos de Gauss.

### Viga de hormigón armado con rotura frágil por cortante

El tercer elemento que se analiza es una de las vigas sin estribos con rotura por cortante ensayadas por Bresler y Scordelis<sup>24</sup>. Se trata de la viga designada en el artículo por las siglas OA-1, cuyas características geométricas y de materiales se resumen en la Figura 12a. La relación vano de cortante/canto útil es de 3.97 y la cuantía de armadura de tracción del 1.8%. La rotura se produjo en el ensayo a una carga de 334 kN (6.6 mm. de flecha), sin que la armadura longitudinal alcanzara el régimen no lineal. El método iterativo utilizado es ahora objeto de comparación, por lo que la malla de elementos



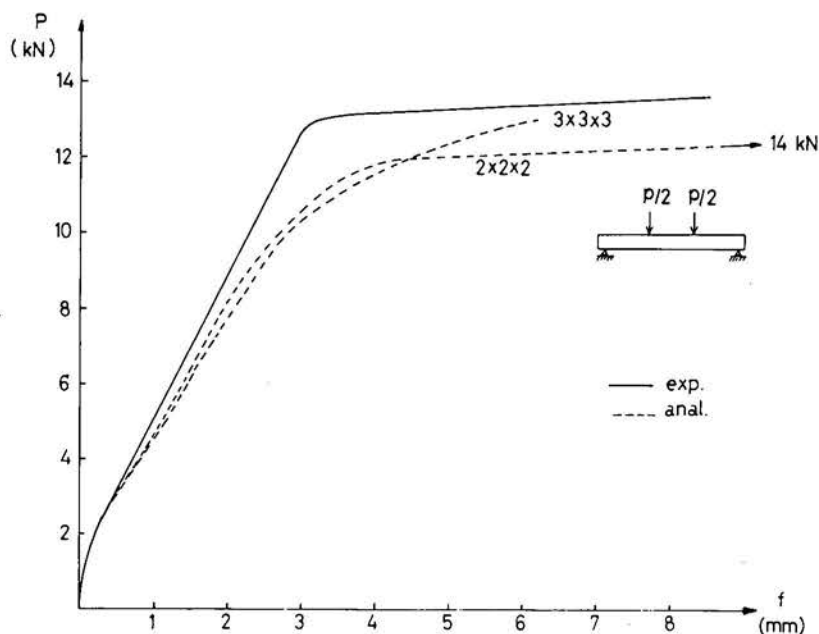


Figura 9. Viga con rotura dúctil. Comparación entre la curva carga-flecha experimental y las analíticas para los elementos  $HX20A$  y  $HX20B$ .

finitos (Figura 12b) se mantiene igual para los tres casos que se presentan. Las cargas máximas sostenidas se resumen en la Tabla III y las Figuras 13 y 14 muestran algunos gráficos de fisuración.

En el caso 1 de la Tabla III, el método iterativo es el mismo que en los ejemplos anteriores. Es decir, el método incremental de Newton-Raphson con actualización automática de las matrices  $D$  de las nuevas fisuras (NR-plus). Los gráficos de fisuración de los últimos escalones de carga convergidos y de la última iteración realizada son los que se representan en la Figura 13. Por comparación de los gráficos de los escalones 9 y 10 (225 y 250 kN), se observa cómo para 250 kN la fisuración incide en el quiebro del camino de compresiones, lo que se corresponde bien con la fisuración diagonal observada en el ensayo. En el análisis la fisuración se estabiliza en éste y en el siguiente escalón de carga. En el último escalón de carga convergido (300 kN) aparece una fisura horizontal junto a la carga puntual que indica la proximidad de la rotura del elemento. (También en este escalón aparecen un buen número de terceras fisuras (asteriscos en el gráfico) que ocasionan la divergencia en este escalón cuando se utiliza una matriz  $D$  nula para puntos de Gauss con tres fisuras<sup>9</sup>.) Finalmente, el gráfico de la última iteración realizada ("load step 777", 325 kN) muestra el fallo local que se produce en el apoyo por fisuración múltiple que ocasiona el descalce del elemento y, consecuentemente, la divergencia del proceso iterativo.

En la Figura 14 se representa el estado de fisuración del último escalón convergido y de la última iteración en el caso 2 de la Tabla III. En esta ocasión el método iterativo es un MINR mixto (MIXNR en la Tabla III) con secuencia prefijada de iteraciones sin y con actualización de todas las matrices constitutivas (una actualización cada

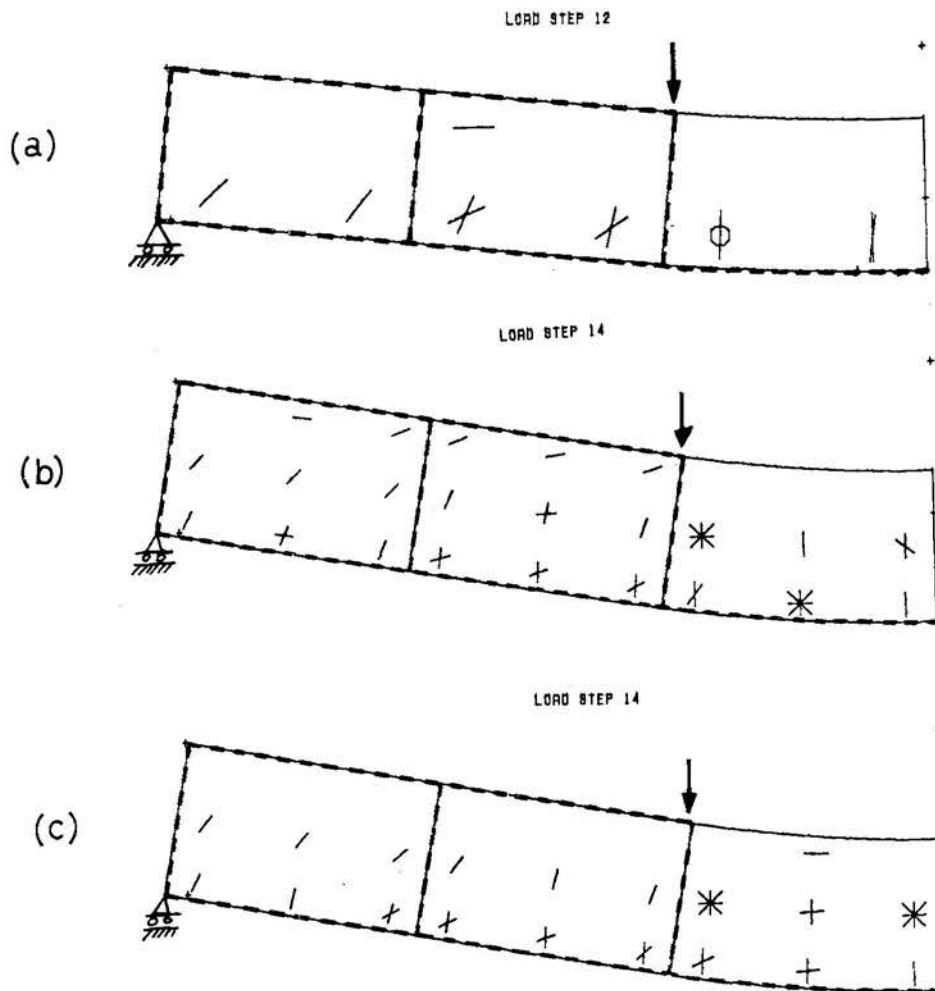


Figura 10. Viga con rotura dúctil. Fisuración para la carga máxima sostenida con malla de 3 elementos hexaédricos (escalón de carga = 1 kN) (a) elemento HX20A; (b) elemento HX20B; (c) elemento HX27.

tres iteraciones en este caso). El gráfico de la última iteración realizada (Figura 14b) muestra claramente cómo se produce un mecanismo local en la zona fisurada. Este tipo de fenómeno es lo que se ha dado en llamar propagación de mecanismos espurios<sup>12</sup>, y que consiste en la propagación de algún modo de deformación que no requiere energía de deformación (modos de deformación asociados con los valores propios nulos de la matriz de rigidez). Tal propagación de lugar a grandes desplazamientos nodales que, a su vez, ocasionan grandes deformaciones y tensiones superiores en varios órdenes de magnitud a las tensiones de rotura de los materiales. El mecanismo espurio se produce seguramente por la combinación de dos factores: el método iterativo y el mal acondicionamiento de las matrices de rigidez de los elementos fisurados, que en este caso se ve agravado por la aparición de segundas fisuras. Téngase en cuenta que el MINR mixto es tal que mantiene temporalmente la rigidez previa a la fisuración, lo

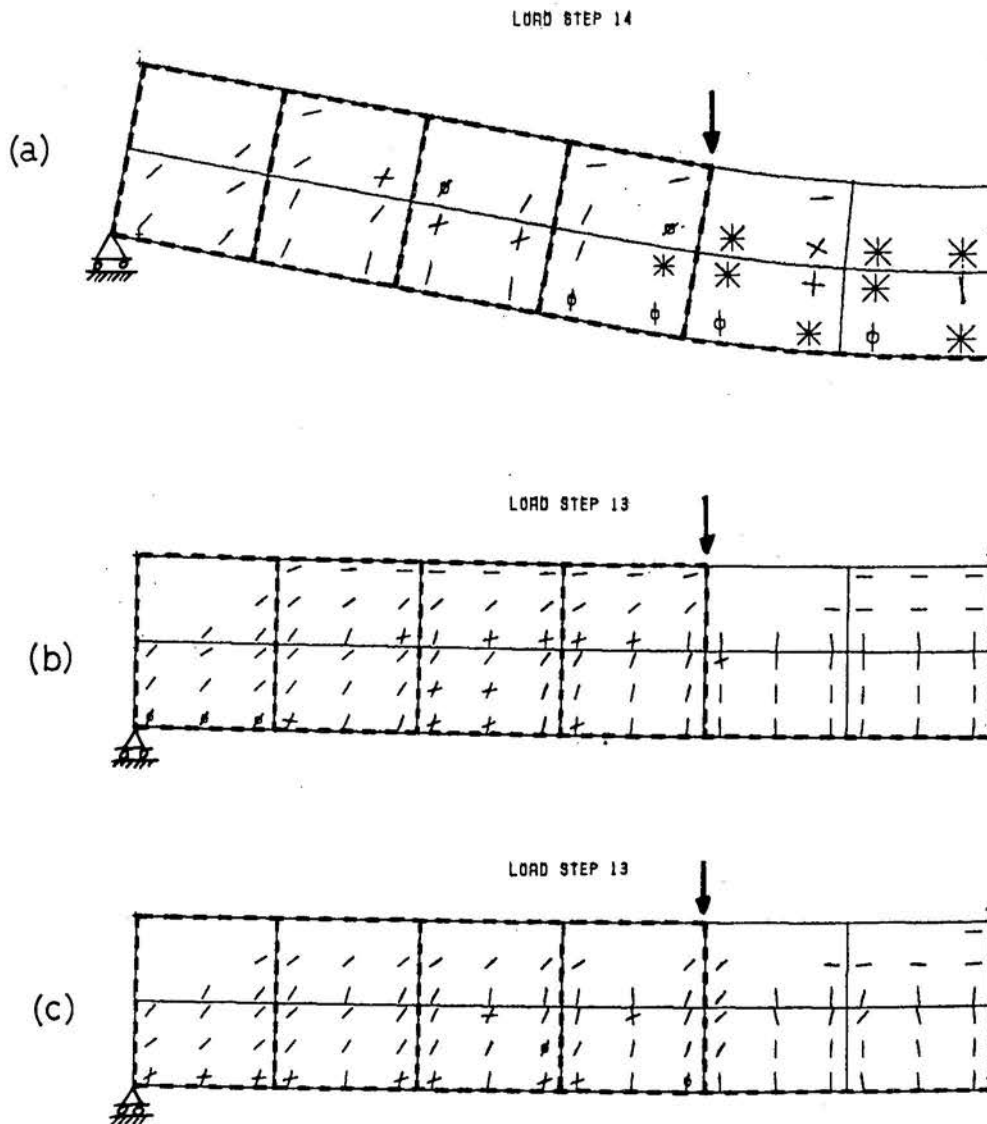


Figura 11. Viga con rotura dúctil. Fisuración para la carga máxima sostenida con malla de 12 elementos hexaédricos (escalón de carga = 1 kN) (a) elemento *HX20A*; (b) elemento *HX20B*; (c) elemento *HX27*.

que ocasiona la existencia de fuerzas residuales importantes en zonas ya fisuradas. Por ello se pueden producir situaciones anómalas, como que al actualizar las propiedades queden zonas fisuradas ya sin rigidez pero con las fuerzas residuales de la iteración anterior. El método iterativo ocasiona en esta ocasión una situación semejante a las combinaciones inestables de rigidez que el uso de ramas  $\sigma - \epsilon$  descendente conlleva<sup>12,14</sup>. No obstante, hay que puntualizar que la mayor parte de los casos estudiados con los dos ejemplos anteriores se recalcularon con el método mixto obteniéndose resultados muy similares a los aquí presentados<sup>9</sup>.

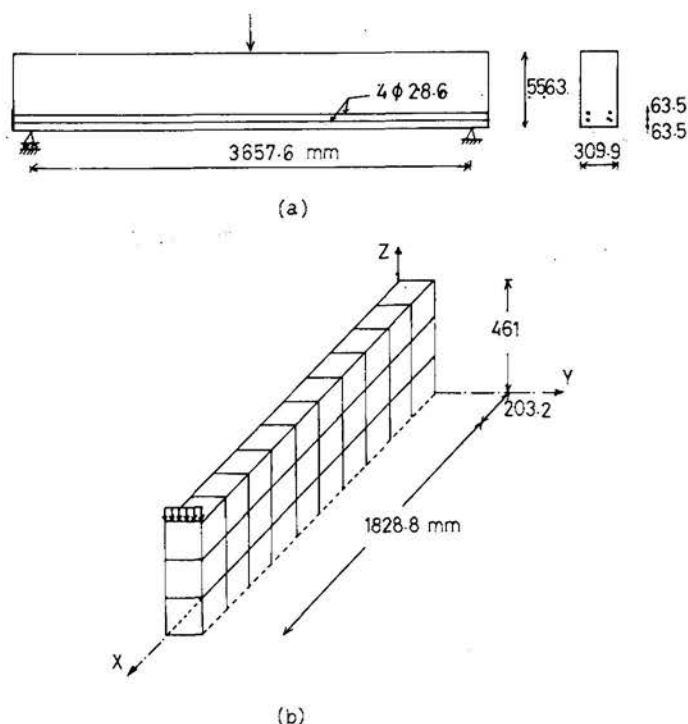


Figura 12. Viga con rotura frágil: (a) Datos experimentales ( $f_c = 22.5$  MPa,  $f_y = 555$  MPa); (b) Discretización por EF

Finalmente, el método iterativo en el caso 3 es el método de Newton-Raphson modificado (o de la rigidez inicial, INITK en la Tabla III). En esta ocasión la ejecución fue abortada intencionalmente tras varios cientos de iteraciones sin que se verificara el criterio de convergencia de tensiones residuales para puntos de Gauss fisurados (0.1 MPa). Este ejemplo no pone sino de manifiesto los problemas de convergencia sin actualización de propiedades cuando se producen no linealidades discontinuas localizadas (e.g. fisuración del hormigón); y también desaconseja el uso de criterios de divergencia basados en el número de iteraciones (obsérvese que la carga máxima sostenida es de sólo el 15% la carga de rotura).

## CONCLUSIONES

A la vista de los resultados aquí presentados, las siguientes conclusiones parecen estar justificadas:

- 1) El análisis de los dos primeros ejemplos (prisma de hormigón en masa y viga con rotura dúctil) muestra que las predicciones de la carga de rotura con representación frágil de la fisuración no son necesariamente muy sensibles a la malla adoptada de elementos finitos.

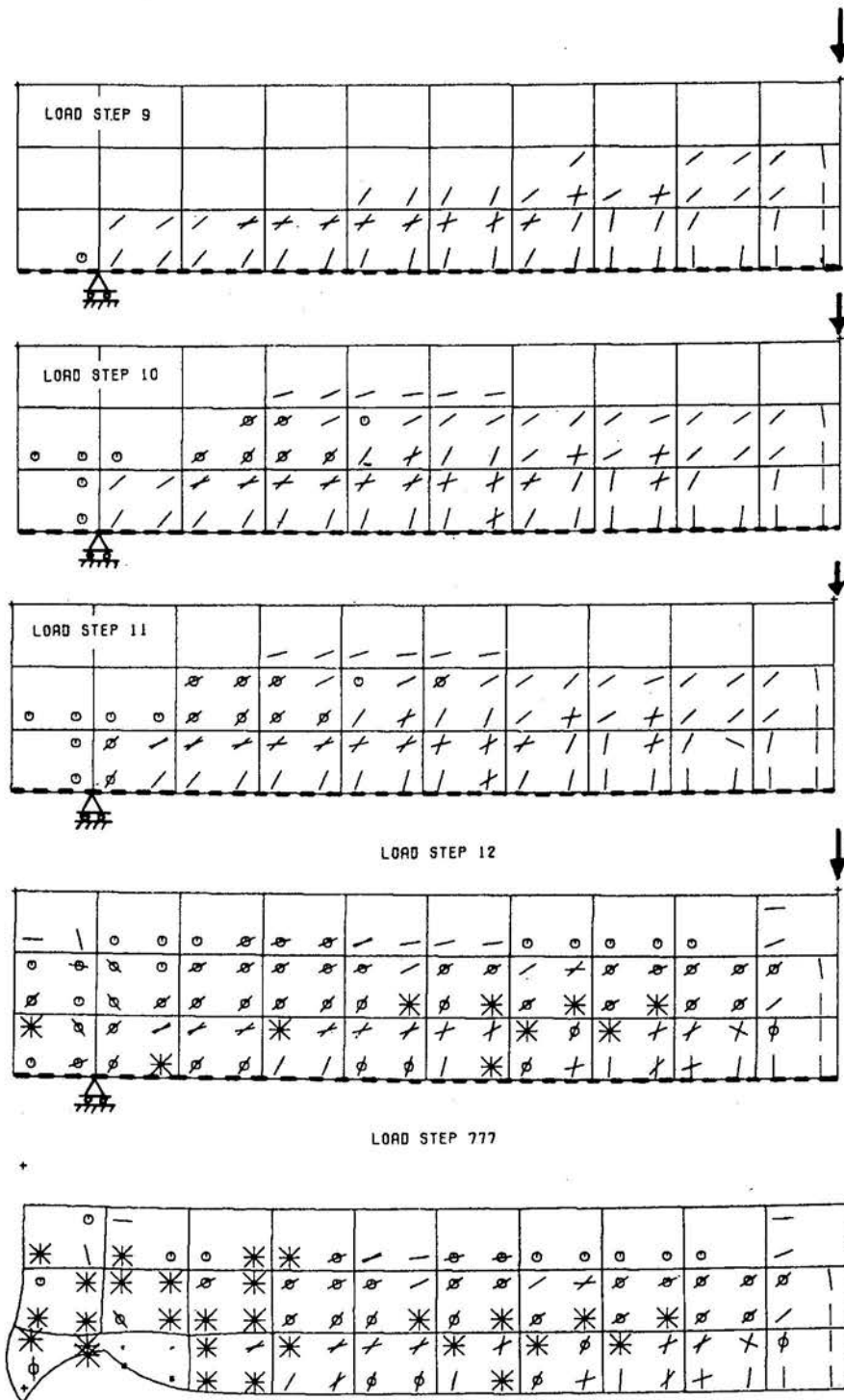


Figura 13. Viga con rotura frágil. Fisuración en el caso 1 para varios niveles de carga (escalón de carga = 25 kN)

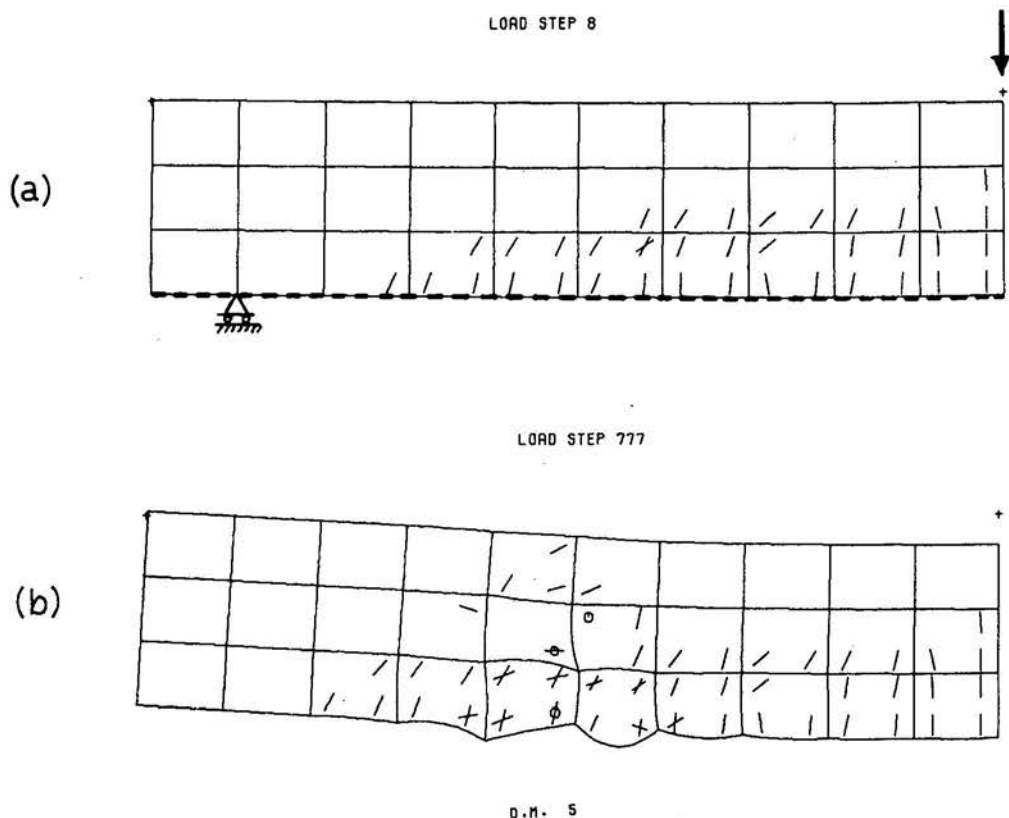


Figura 14. Viga con rotura frágil. Fisuración para el caso 2 (desplazamientos magnificados  $\times 5$ ): (a) carga máxima sostenida (200 kN); (b) última iteración realizada (225 kN)

- 2) Las predicciones analíticas indican en los tres casos que la inclusión de ramas de ablandamiento en compresión puede resultar irrelevante; puesto que en ningún caso se ha alcanzado la envolvente en compresión.
- 3) El tercer ejemplo (viga de hormigón armado con rotura por cortante) demuestra los problemas de convergencia del método de Newton-Raphson modificado e indica que el uso del método de Newton-Raphson mixto puede ocasionar divergencias prematuras por propagación de mecanismos espurios.

## REFERENCIAS

1. R.W. Clough, "The finite element method after twenty-five years: a personal view", *Computers and Structures*, Vol. 12, pp. 361-370, (1980).
2. D. Ngo y A.C. Scordelis, "Finite element analysis of reinforced concrete beams", *ACI J.*, Vol. 64, pp. 152-163, (1967).
3. Y.M. Rashid, "Ultimate strength analysis of prestressed concrete pressure vessels", *Nuclear Engg. and Design*, Vol. 7, pp. 334-344, (1968).
4. ASCE-ACI Task Committee, "State of the Art Report on Finite Element Analysis of



- Reinforced Concrete", *ASCE Special Publication*, New York, 545 pp., (1982).
5. S. Valliapan y T.F. Doolan, "Nonlinear stress analysis of reinforced concrete", *J. Struct. Div. ASCE*, Vol. **98**, pp. 885-897, (1972).
  6. O.C. Zienkiewicz, S. Valliapan y I.P. King, "Stress analysis of rock as 'no tension' material", *Geotechnique*, Vol. **18**, pp. 55-66, (1968).
  7. F.R. Hand, D.A. Pecknold y W.C. Schonobrich, "Nonlinear layered analysis of reinforced concrete plates and shells", *J. Struct. Div. ASCE*, Vol. **99**, pp. 1491-1505, (1973).
  8. M.D. Kostovos, "An analytical investigation of the behaviour of concrete under concentrations of load", *Materials and Structures*, Vol. **14**, pp. 341-348, (1981).
  9. F. González, "Análisis triaxial de estructuras de hormigón bajo carga estática creciente por elementos finitos con fisuración distribuida", *Tesis Doctoral*, Universidad Politécnica de Valencia, 230 pp., (1988).
  10. R. Borst y P. Nauta, "Non-orthogonal cracks in a smeared finite element model", *Engineering Computations*, Vol. **2**, pp. 35-46, (1985).
  11. M.A. Crisfield, "Local instabilities in the non-linear analysis of reinforced concrete beams and slabs", *Proc. Instn. Civ. Engrs. (Part 2)*, Vol. **73**, pp. 135-145, (1982).
  12. M.A. Crisfield, "Snap-trough and snap-back response in concrete structures and the dangers of under-integration", *Int. J. Num. Meth. Engg.*, Vol. **22**, pp. 751-767, (1986).
  13. O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor y J.M. Too, "Reduced integration technique in general analysis of plates and shells", *Int. J. Num. Meth. Engg.*, Vol. **3**, pp. 275-290, (1971).
  14. F. González, M.D. Kotsovos y M.N. Pavlovic, "On the numerical instability of the smeared-crack approach in the nonlinear modelling of concrete structures", *Comm. Appl. Num. Meth.*, Vol. **4**, pp. 799-806, (1988).
  15. M.D. Kotsovos, "Concrete. A brittle fracturing material", *Materials and Structures*, Vol. **17**, pp. 107-115, (1984).
  16. M.D. Kotsovos, "A mathematical description of the strength properties of concrete under generalised stress", *Mag. Con. Res.*, Vol. **31**, pp. 151-158, (1979).
  17. M.D. Kotsovos, "Effect of testing techniques on the post-ultimate behaviour of concrete in compression", *Materials and Structures*, Vol. **16**, pp. 3-12, (1983).
  18. M.D. Kotsovos, "Applicability of test specimen results for the description of the behaviour of concrete in a structure", *ACI J.*, Vol. **81**, pp. 358-363, (1983).
  19. R.H. Evans y M.S. Marathe, "Microcracking and stress-strain curves for concrete in tension", *Materials and Structures*, Vol. **1**, pp. 61-64, (1968).
  20. M.D. Kotsovos, "A fundamental explanation of the behaviour of reinforced concrete beams in flexure based on the properties of concrete under multiaxial stress", *Materials and Structures*, Vol. **15**, pp. 529-537, (1983).
  21. C. Bedard y M.D. Kotsovos, "Fracture processes of concrete for NLFEA methods", *J. Struct. Engg. ASCE*, Vol. **112**, pp. 573-587, (1986).
  22. D. Hitchings, *FINEL Programming Manual*, Imperial College, Londres, 96 pp., (1980).
  23. S.K. Niyogi, "Concrete bearing strength support, mix, size effect", *J. Struct. Div. ASCE*, Vol. **100**, pp. 1685-1702, (1974).
  24. B. Bresler y A.C. Scordelis, "Shear strength of reinforced concrete beams", *ACI J.*, Vol. **60**, pp. 51-74, (1963).