

# Modelos de cono para cálculo de impedancias de cimentaciones pilotadas

Francisco Beltrán

Ingeniería IDOM Internacional, S.A.  
José Abascal 4  
28003 Madrid, España  
Tel.: 34-91-444 11 51, Fax: 34-91-447 31 87  
e-mail: fbg@madrid.idom.es

Alberto Vizcargüénaga

IDOM Ingeniería y Consultoría, S.A.  
Lehendakari Aguirre 3  
48014 Bilbao, España  
Tel.: 34-94-479 76 50, Fax: 34-94-476 18 04  
e-mail: avv@bilbao.idom.es

Fernando Rueda

Ingeniería IDOM Internacional, S.A.  
José Abascal 4  
28003 Madrid, España  
Tel.: 34-91-444 11 51, Fax: 34-91-447 31 87  
e-mail: frg@madrid.idom.es

## Resumen

En este artículo se presenta una aplicación de los modelos de cono al cálculo de impedancias de cimentaciones pilotadas. Los modelos de cono se emplean para obtener las funciones de Green correspondientes al movimiento de un disco rígido embebido en una capa de suelo limitada por un semiespacio rígido (roca). Cada pilote se idealiza mediante una serie de discos rígidos uniformemente distribuidos a lo largo de su longitud. Las funciones de Green permiten entonces obtener la matriz de flexibilidad dinámica correspondiente a este conjunto de discos, a la que se añade la matriz de flexibilidad correspondiente al fuste del pilote. Las impedancias del pilote aislado se calculan a partir de esta matriz de flexibilidad conjunta. Utilizando las impedancias del pilote aislado, se obtienen las impedancias de un grupo de pilotes utilizando factores de interacción dinámica entre ellos. El programa de cálculo que incorpora el desarrollo puede descargarse libremente desde el portal de la Asociación Española de Ingeniería Sísmica ([www.aeis.es](http://www.aeis.es)).

## CONE MODELS FOR DYNAMIC STIFFNESS OF PILE FOUNDATIONS

## Summary

This paper presents an application of soil cone models to the computation of the dynamic stiffness of pile foundations. Cone models are used to obtain the Green functions corresponding to the movement of a rigid disk embedded in a soil layer resting on a rigid rock halfspace. Each pile is idealized by means of a series of rigid disks uniformly distributed along its length. Then, the dynamic flexibility matrix of this system of disks is computed from the Green functions and the flexibility of the pile itself is added. The dynamic stiffness of the single pile is obtained from this joint dynamic flexibility matrix. From the single pile stiffness, the pile group stiffness is obtained using dynamic-interaction factors between the piles. A computer program that implements this method can be downloaded freely from the web site of the Spanish Society for Seismic Engineering ([www.aeis.es](http://www.aeis.es)).

## INTRODUCCIÓN

El ingeniero de a pie que trata con problemas de cimentaciones de máquinas o con el análisis sísmico de estructuras se enfrenta en la práctica diaria con dificultades para representar el papel del terreno en sus modelos de cálculo. Las dificultades derivan del carácter semi-infinito del terreno, que no se compadece bien con las herramientas de cálculo más convencionales.

Los procedimientos rigurosos para obtener las impedancias o rigideces dinámicas del terreno utilizan bien técnicas de elementos finitos con contornos no reflectantes,<sup>1,2,3,4</sup> para representar la propagación de la energía más allá de los límites de la discretización, o bien modelos de elementos de contorno, cuya formulación ya tiene en cuenta intrínsecamente la radiación al infinito.<sup>5,6,7</sup> Sin embargo, para utilizar dichos procedimientos se requiere una considerable formación y experiencia, tanto en la preparación de los datos como en la interpretación de los resultados. Se necesitan también herramientas numéricas específicas y un tiempo y un presupuesto fuera del alcance de la mayoría de los proyectos.

Como resultado de las dificultades anteriores, en la práctica del análisis sísmico, muchas veces, la rigidez y disipación introducida por el terreno simplemente no se tienen en cuenta. Esta puede ser una hipótesis acertada en determinados casos, por ejemplo, en estructuras flexibles y poco pesadas, pero puede conducir a soluciones estructurales innecesariamente conservadoras en otros.

En el proyecto de cimentaciones de máquinas, la práctica tiende a estimar la frecuencia natural del conjunto cimiento-máquina a partir de los asientos esperados y a separar dicha frecuencia natural de la frecuencia de funcionamiento de la máquina. Para ello la solución más convencional es aumentar la masa de la cimentación, sin comprobar si el nivel de vibración será o no admisible.

En este contexto, resulta deseable disponer de modelos sencillos, con un sentido físico claro, que permitan al ingeniero de a pie obtener con facilidad y aproximación suficiente los parámetros de rigidez y disipación dinámica del terreno de cimentación. Esta clase de modelos le permiten, dentro de los estrechos márgenes de tiempo de que dispone, investigar alternativas de proyecto y estudiar la sensibilidad de las respuestas estructurales a los parámetros del terreno sobre los que tiene más incertidumbre.

Un tipo de modelos sencillos de esta clase son los modelos de cono.<sup>11,12,24</sup> Estos modelos fueron introducidos por Ehlers<sup>8</sup> en 1942 y, ya en la década de los 70, por Meek y Veletsos<sup>9</sup> y por Veletsos y Nair.<sup>10</sup> Actualmente, sus aplicaciones están siendo redescubiertas gracias al gran esfuerzo investigador de Wolf y Meek<sup>14-26</sup> en los 90.

En este artículo se presenta una aplicación de los modelos de cono al cálculo de impedancias de cimentaciones pilotadas. Se entiende por impedancia la relación entre las acciones aplicadas sobre la cimentación (fuerzas y momentos) y los movimientos de la misma (desplazamientos y giros). Dicha relación depende no sólo del tipo de movimiento (vertical, balanceo, etc.), sino también de la frecuencia con la que se excita la cimentación. Las impedancias tienen además un valor complejo, ya que existe un desfase entre las acciones y los movimientos. Precisamente este desfase es una medida de la disipación por radiación al infinito introducida por el terreno.

El desarrollo que se resume en las secciones siguientes está basado en las ideas de Wolf, Meek y Song<sup>17</sup> y se hizo en un contexto puramente industrial para un pequeño proyecto relativo a la cimentación de una máquina. El programa de cálculo que incorpora el desarrollo, escrito en FORTRAN, puede descargarse desde el portal de la Asociación Española de Ingeniería Sísmica ([www.aeis.es](http://www.aeis.es)).

## MODELOS DE CONO PARA CIMENTACIONES SOBRE SEMIESPACIO ELÁSTICO

En un modelo de cono el terreno de cimentación se idealiza mediante un cono truncado o viga semi-infinita de sección variable a la cual se aplican las hipótesis convencionales de la Resistencia de Materiales (Figura 1). La estructura del cimiento se idealiza mediante un disco rígido y el comportamiento del terreno, que se considera elástico lineal, se caracteriza mediante las velocidades de propagación de ondas de corte  $c_s$  y de presión  $c_p$ .

Dependiendo del tipo de deformación del suelo, se distingue entre conos de naturaleza traslacional, para el estudio del desplazamiento horizontal y vertical de la cimentación, y conos de naturaleza rotacional, para el estudio de los movimientos de balanceo y torsión. El radio del cono en el contacto con el cimiento  $r_0$  se obtiene en función del área de la huella  $A_0$  en los conos traslacionales y en función de su inercia  $I_0$  en los conos rotacionales. En el cono de balanceo,  $I_0$  representa el momento de inercia del área con respecto al eje de balanceo; mientras que en el cono de torsión representa el momento polar de inercia.

El otro parámetro que define el cono, la relación  $z_0/r_0$ , se obtiene a partir de las propiedades del suelo  $c_s$  y  $c_p$  con la condición de que la rigidez estática del cono sea la misma que la del semiespacio elástico.

**Figura 1.** Modelo de cono

Por ejemplo, para el cono representado en la Figura 1, los valores que lo definen, en función del tipo de movimiento de la cimentación y de las características del suelo, son los que se dan en la Tabla I.<sup>19</sup> Nótese que existen las relaciones siguientes entre el coeficiente de Poisson  $\nu$  del suelo y las velocidades de propagación de ondas

$$\nu = \frac{\left(\frac{c_p}{c_s}\right)^2 - 2}{2\left(\frac{c_p}{c_s}\right)^2 - 2} \quad (1)$$

$$c_p = \sqrt{\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}} c_s \quad (2)$$

Si el esfuerzo axial, esfuerzo cortante, momento flector y momento torsor a lo largo de la longitud del cono se representan por  $N$ ,  $Q$ ,  $M$  y  $T$ , respectivamente, entonces las ecuaciones del movimiento de la directriz del cono son las siguientes

$$\frac{\partial N}{\partial z} = \rho A \ddot{u}_v \quad (3)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = \rho A \ddot{u}_h \quad (4)$$

$$\frac{\partial M}{\partial z} = \rho I \ddot{\theta}_b \quad (5)$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \rho A \ddot{\theta}_t \quad (6)$$

donde  $u_v$  es desplazamiento vertical de la directriz,  $u_h$  desplazamiento horizontal de la directriz,  $\theta_b$  giro de balanceo de la directriz,  $\theta_t$  giro torsor de la directriz.

| Movimiento            | $r_0$                        | $\frac{z_0}{r_0}$                                      |                         | Observaciones   |
|-----------------------|------------------------------|--|-------------------------|---|
|                       |                              | $\nu \leq \frac{1}{3}$                                 | $\nu > \frac{1}{3}$     |   |
| Traslación vertical   | $\sqrt{\frac{A_0}{\pi}}$     | $\frac{\pi}{4}(1-\nu)\left(\frac{c_p}{c_s}\right)^2$   | $\pi(1-\nu)$            | Si $\nu > \frac{1}{3}$ , añadir masa de $2,4(\nu - \frac{1}{3})\rho A_0 r_0$ al cimientto ( $\rho =$ densidad del suelo)    |
| Traslación horizontal | $\sqrt{\frac{A_0}{\pi}}$     | $\frac{\pi}{8}(2-\nu)$                                 |                         |   |
| Balanceo              | $\sqrt[4]{\frac{4I_0}{\pi}}$ | $\frac{9\pi}{32}(1-\nu)\left(\frac{c_p}{c_s}\right)^2$ | $\frac{9\pi}{8}(1-\nu)$ | Si $\nu > \frac{1}{3}$ , añadir inercia de $1,2(\nu - \frac{1}{3})\rho I_0 r_0$ al cimientto ( $\rho =$ densidad del suelo) |
| Torsión               | $\sqrt[4]{\frac{2I_0}{\pi}}$ | $\frac{9\pi}{32}$                                      |                         |   |

**Tabla I.** Propiedades de los modelos de cono para semiespacio elástico

Las ecuaciones anteriores se obtienen simplemente planteando el equilibrio dinámico de la rebanada de cono. Si se emplean las relaciones geométricas

$$A = A_0 \left(\frac{z}{z_0}\right)^2 \quad (7)$$

$$I = I_0 \left(\frac{z}{z_0}\right)^4 \quad (8)$$

y las relaciones constitutivas

$$N = \rho c^2 A \frac{\partial u_v}{\partial z}, \quad c = c_p \text{ si } \nu \leq \frac{1}{3} \text{ y } c = 2c_s \text{ si } \nu > \frac{1}{3} \quad (9)$$

$$Q = \rho c_s^2 A \frac{\partial u_h}{\partial z} \quad (10)$$

$$M = \rho c^2 I \frac{\partial \theta_b}{\partial z}, \quad c = c_p \text{ si } \nu \leq \frac{1}{3} \text{ y } c = 2c_s \text{ si } \nu > \frac{1}{3} \quad (12)$$

$$T = \rho c_s^2 I \frac{\partial \theta_t}{\partial z} \quad (12)$$

Se obtienen las ecuaciones diferenciales

$$\frac{\partial^2 u_v}{\partial z^2} + \frac{2}{z} \frac{\partial u_v}{\partial z} = \frac{\ddot{u}_v}{c^2} \quad (13)$$

$$\frac{\partial^2 u_h}{\partial z^2} + \frac{2}{z} \frac{\partial u_h}{\partial z} = \frac{\ddot{u}_h}{c_s^2} \quad (14)$$

$$\frac{\partial^2 \theta_b}{\partial z^2} + \frac{4}{z} \frac{\partial \theta_b}{\partial z} = \frac{\ddot{\theta}_b}{c^2} \quad (15)$$

$$\frac{\partial^2 \theta_t}{\partial z^2} + \frac{4}{z} \frac{\partial \theta_t}{\partial z} = \frac{\ddot{\theta}_t}{c_s^2} \quad (16)$$

Las ecuaciones diferenciales anteriores son la base para el cálculo de las rigideces dinámicas de la cimentación.

## FUNCIONES DE GREEN

Para pasar al dominio de la frecuencia, se admite que los movimientos a lo largo de la directriz del cono tienen, para cada frecuencia  $\omega$ , la forma:

$$u_v(z, t, \omega) = A_v(z) e^{i\omega t} \quad (17)$$

$$u_h(z, t, \omega) = A_h(z) e^{i\omega t} \quad (18)$$

$$\theta_b(z, t, \omega) = A_b(z) e^{i\omega t} \quad (19)$$

$$\theta_t(z, t, \omega) = A_t(z) e^{i\omega t} \quad (20)$$

La hipótesis anterior da lugar a las siguientes ecuaciones diferenciales para obtener los modos o funciones de amplitud correspondientes a cada frecuencia  $\omega$

$$\frac{d^2 A_v}{dz^2} + \frac{2}{z} \frac{dA_v}{dz} + \frac{\omega^2}{c^2} A_v = 0 \quad (21)$$

$$\frac{d^2 A_h}{dz^2} + \frac{2}{z} \frac{dA_h}{dz} + \frac{\omega^2}{c_s^2} A_h = 0 \quad (22)$$

$$\frac{d^2 A_b}{dz^2} + \frac{4}{z} \frac{dA_b}{dz} + \frac{\omega^2}{c^2} A_b = 0 \quad (23)$$

$$\frac{d^2 A_t}{dz^2} + \frac{4}{z} \frac{dA_t}{dz} + \frac{\omega^2}{c_s^2} A_t = 0 \quad (24)$$

Las funciones de Green de estas ecuaciones diferenciales son las soluciones correspondientes a la aplicación de una carga unidad de frecuencia  $\omega$  en el disco rígido que representa el cimient. Las funciones de Green se dan en la Tabla II y tienen en cuenta únicamente la onda que se dirige desde el disco rígido hacia el infinito. De este modo se representa la radiación de energía al infinito.

| Movimiento            | Función de Green  | Observaciones  |
|-----------------------|---|--|
| Traslación vertical   | $g_v(z) = \frac{1-\nu}{4Gz} \frac{z_0}{r_0} \frac{e^{-i\frac{\omega}{c}(z-z_0)}}{1+i\omega\frac{z_0}{c}}$   | $G$ es el módulo de deformación transversal del suelo. Tomar $c=c_p$ si $\nu \leq \frac{1}{3}$ y $c=2c_s$ si $\nu > \frac{1}{3}$ |
| Traslación horizontal | $g_h(z) = \frac{2-\nu}{8Gz} \frac{z_0}{r_0} \frac{e^{-i\frac{\omega}{c_s}(z-z_0)}}{1+i\omega\frac{z_0}{c_s}}$   |  |
| Balaceo               | $g_b(z) = \frac{3(1-\nu)}{8Gr_0^3} \frac{(\frac{z_0}{z})^3 + z_0(\frac{z_0}{z})^2 i\frac{\omega}{c}}{1 - \frac{z_0^2}{3} \frac{\omega^2}{c^2} + i\frac{\omega}{c} z_0} e^{-i\frac{\omega}{c}(z-z_0)}$ | Tomar $c=c_p$ si $\nu \leq \frac{1}{3}$ y $c=2c_s$ si $\nu > \frac{1}{3}$  |
| Torsión               | $g_t(z) = \frac{3}{16Gr_0^3} \frac{(\frac{z_0}{z})^3 + z_0(\frac{z_0}{z})^2 i\frac{\omega}{c_s}}{1 - \frac{z_0^2}{3} \frac{\omega^2}{c_s^2} + i\frac{\omega}{c_s} z_0} e^{-i\frac{\omega}{c}(z-z_0)}$ |  |

**Tabla II.** Funciones de Green derivadas de los modelos de cono para semiespacio elástico

Para su uso en el cálculo de impedancias de cimentaciones pilotadas, la función de Green correspondiente al desplazamiento vertical proporciona una respuesta demasiado flexible a distancias grandes del disco que representa la cimentación, esto es, para  $z \gg z_0$ . Por ello, si  $g_c(z)$  es la función dada en la Tabla II, se recomienda utilizar como función de Green para el desplazamiento vertical la siguiente<sup>17</sup>

$$g(z) = w(z) g_c(z) + [1 - w(z)] g_f(z) \tag{25}$$

donde  $w(z)$  es una función de ponderación

$$w(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z - z_0 \leq r_0 \\ e^{-0,8 \frac{z-z_0-r_0}{r_0}} & \text{si } z - z_0 > r_0 \end{cases} \tag{26}$$

y la función  $g_f(z)$  es la función

$$g_f(z) = \frac{1}{4\pi G} \left( \psi - \left[ \frac{z - z_0}{\sqrt{(z - z_0)^2 + r_0^2}} \right]^2 \chi \right) \tag{27}$$

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{(z - z_0)^2 + r_0^2}} \left( 1 - i \frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_0^2} \right) e^{-ia_0} + \frac{1}{\sqrt{(z - z_0)^2 + r_0^2}} \left( i \frac{c_s}{c_p a_0} + \frac{1}{a_0^2} \right) e^{-i\frac{c_s}{c_p} a_0}$$

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{(z - z_0)^2 + r_0^2}} \left( 1 - i \frac{3}{a_0} - \frac{3}{a_0^2} \right) e^{-ia_0} - \frac{1}{\sqrt{(z - z_0)^2 + r_0^2}} \left( \frac{c_s^2}{c_p^2} - i \frac{3c_s}{c_p a_0} - \frac{3}{a_0^2} \right) e^{-i\frac{c_s}{c_p} a_0}$$

$$a_0 = \omega \frac{\sqrt{(z - z_0)^2 + r_0^2}}{c_s}$$

### MODELOS DE CONO PARA DISCOS EMBEBIDOS

Cuando un disco rígido (cimentación) se encuentra completamente embebido en un espacio elástico, el efecto del terreno puede idealizarse mediante dos conos como el descrito en las secciones anteriores (Figura 2a). En este caso, las funciones de Green que representan la amplitud de los movimientos correspondientes a las cargas unidad se obtienen dividiendo por dos las funciones que se dan en la Tabla II.

**Figura 2.** Modelos de doble cono para discos embebidos en espacios elásticos

Si el disco está embebido en un semiespacio, la condición de que la tensión debe ser nula en la superficie del mismo puede forzarse introduciendo un disco imagen, colocado de manera simétrica con respecto a la superficie y cargado de la misma manera que el disco original (Figura 2b). Para cada punto de la directriz común de los conos, la suma de las funciones de Green correspondientes al disco y a su disco imagen dan la solución en movimientos que cumple la condición de tensión nula en la superficie del semiespacio.

Puede pensarse también en una situación en la que el disco rígido se encuentra embebido en una capa de suelo que descansa sobre un semiespacio de roca rígida. En este caso, en el contacto de la capa de suelo con el semiespacio rígido debe cumplirse la condición de movimiento nulo. Dicha condición puede imponerse suponiendo que el contacto con la roca es un plano de simetría e introduciendo nuevos discos imagen (Figura 3).

La introducción de nuevos discos imagen con respecto al plano de simetría obliga, para seguir cumpliendo con la condición de tensión nula (antimetría) en la superficie del terreno, a introducir sus discos antimétricos con respecto a la superficie del terreno; los cuales, para cumplir la condición de simetría respecto al contacto con la roca, necesitan la inclusión de nuevos discos simétricos; y así sucesivamente.

El proceso se representa esquemáticamente en la Figura 3 y requiere, para el cumplimiento exacto de las condiciones de tensión nula en la superficie del terreno y de movimiento nulo en el contacto con la roca, la introducción de un número infinito de discos. En la práctica, conforme los discos se van separando más del disco original, su influencia es progresivamente más pequeña y llega un punto en que puede despreciarse.

**Figura 3.** Modelos de doble cono para discos embebidos en una capa de terreno

**Figura 4.** Representación mediante discos de un pilote en semiespacio elástico



## IMPEDANCIAS PARA UN PILOTE AISLADO

En un pilote vertical de radio  $r_0$ , se considera un sistema de  $n$  discos rígidos uniformemente distribuidos de arriba a abajo a lo largo de la longitud  $l$  del pilote (Figura 4).

Cada disco  $i$  tiene seis grados de libertad: tres desplazamientos y tres giros

$$\mathbf{u}_i = \begin{pmatrix} u_v \\ u_{hx} \\ u_{hy} \\ \theta_t \\ \theta_{bx} \\ \theta_{by} \end{pmatrix} \quad (28)$$

De este modo, el conjunto del sistema de discos tiene  $6n$  grados de libertad, los cuales pueden reunirse en un vector  $\mathbf{u}$  de  $6n$  componentes. Es decir

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \dots \\ \mathbf{u}_i \\ \dots \\ \mathbf{u}_n \end{pmatrix} \quad (29)$$

Se supondrá que el disco  $i = 1$  es el situado en la cabeza del pilote.

Para cada frecuencia de excitación  $\omega$  la relación entre las amplitudes de los movimientos  $\mathbf{u}$  y las acciones aplicadas  $\mathbf{p}$  viene dada por la matriz de flexibilidad dinámica  $\mathbf{G}$ , de  $6n \times 6n$  componentes

$$\mathbf{u} = \mathbf{G} \mathbf{p} \quad (30)$$

Las componentes  $g_{i,j}$  de la matriz de flexibilidad  $\mathbf{G}$ , en el caso de que el pilote sea un pilote flotante en un semiespacio elástico, pueden obtenerse sumando las funciones de Green  $g(z)$  correspondientes a cada disco y a un único disco imagen (Figura 4)

$$g_{6(i-1)+1,6(j-1)+1} = g_v(a) + g_v(a') \quad (31)$$

$$g_{6(i-1)+2,6(j-1)+2} = g_h(a) + g_h(a') \quad (32)$$

$$g_{6(i-1)+3,6(j-1)+3} = g_h(a) + g_h(a') \quad (33)$$

$$g_{6(i-1)+4,6(j-1)+4} = g_t(a) + g_t(a') \quad (34)$$

$$g_{6(i-1)+5,6(j-1)+5} = g_b(a) + g_b(a') \quad (35)$$

$$g_{6(i-1)+6,6(j-1)+6} = g_b(a) + g_b(a') \quad (36)$$

para  $i = 1, \dots, n$  y  $j = 1, \dots, n$ . El resto de las componentes de  $\mathbf{G}$  son nulas.

Si el pilote se encuentra en una capa de terreno que descansa sobre un semiespacio rígido, para obtener las componentes de la matriz  $\mathbf{G}$  hay que tener en cuenta las contribuciones de todos los discos que se introduzcan para cumplir las condiciones de simetría con respecto al límite del semiespacio rígido y las de antisimetría con respecto a la superficie del terreno (Figura 3). Por este motivo en el segundo miembro de las ecuaciones anteriores aparecerán tantos nuevos términos como discos adicionales se consideren necesarios para hacer cumplir estas condiciones.

En cualquier caso, las funciones de Green  $g(z)$  con las que se calcula la contribución de cada disco son siempre la mitad de las indicadas en la Tabla II, con la matización hecha para

la función correspondiente al movimiento vertical, ya que corresponden a discos embebidos en el espacio completo.

La inversa de la matriz de flexibilidad dinámica  $\mathbf{G}$  es la matriz de rigidez dinámica  $\mathbf{S}^f$  correspondiente al sistema de discos para la frecuencia  $\omega$ . Para tener la rigidez dinámica del pilote  $\mathbf{S}$ , debe añadirse a la rigidez del sistema de discos la diferencia entre la rigidez del cilindro que constituye el pilote y la rigidez del cilindro de suelo que se ha retirado para construirlo. Es decir

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}^f + \Delta\mathbf{S} = \mathbf{S}^f + \Delta\mathbf{K} - \omega^2 \Delta\mathbf{M} \quad (37)$$

donde las matrices de rigidez  $\mathbf{K}$  y de masas  $\mathbf{M}$  del pilote y del cilindro de suelo son las habituales en el cálculo matricial de estructuras de barras.<sup>28</sup> En la matriz de rigidez dinámica puede incluirse el amortiguamiento histerético tanto del suelo como del pilote utilizando el principio de correspondencia.<sup>11</sup>

Las impedancias del pilote aislado relacionan, para la frecuencia  $\omega$ , los movimientos de la cabeza del pilote con las fuerzas y momentos que es necesario aplicar en dicha cabeza para producirlos. De este modo, las impedancias correspondientes al pilote aislado se obtienen invirtiendo la primera submatriz de  $6 \times 6$  de la inversa de la rigidez dinámica  $\mathbf{S}^{-1}$ .

## FACTORES DE INTERACCIÓN PARA GRUPOS DE PILOTES

El factor de interacción  $\alpha$  se define como el tanto por uno de incremento del movimiento en la cabeza de un pilote debido a la presencia de otro pilote cercano cargado de la misma manera. Es decir, si la rigidez al movimiento de la cabeza de un pilote aislado frente a un determinado tipo de carga es  $k$ , entonces la carga  $p$  producirá un movimiento  $u$  de

$$u = \frac{p}{k} \quad (38)$$

Sin embargo, si dos pilotes idénticos se someten cada uno de ellos a la carga  $p$ , entonces el movimiento de las cabezas será:

$$u = \frac{p}{k}(1 + \alpha) \quad (39)$$

En la práctica geotécnica los movimientos de un grupo de pilotes debidos a la interacción pilote-suelo-pilote se evalúan utilizando estos factores de interacción, por superposición de los efectos sobre cada pilote de todos los demás uno a uno,<sup>13</sup> es decir

$$u_i = \sum_{j=1}^m \frac{1}{k} \alpha_{ij} p_j \quad \text{o en notación matricial} \quad \mathbf{u} = \frac{1}{k} \mathbf{A} \mathbf{p} \quad (40)$$

donde  $u_i$  es movimiento en la cabeza del pilote  $i$  y  $\alpha_{ij}$  factor de interacción del pilote  $i$  con el  $j$ .

Los factores de interacción dinámicos dependen de la frecuencia de la excitación y del tipo de movimiento de las cabezas de los pilotes. Para el movimiento vertical y el giro torsor el factor de interacción es<sup>13</sup>

$$\alpha_{ij} = \sqrt{\frac{r_0}{d}} e^{-\xi \frac{\omega d}{c_s}} e^{-i \frac{\omega d}{c_s}} \quad (41)$$

donde  $r_0$  es radio de los pilotes  $i$  y  $j$ ,  $d$  distancia entre los ejes de los pilotes  $i$  y  $j$ ,  $\xi$  cociente de amortiguamiento histerético del suelo y  $\omega$  frecuencia de cálculo.

Por otro lado, los desplazamientos horizontales y los giros de balanceo de las cabezas de los pilotes están acoplados en el sentido de que el desplazamiento horizontal de la cabeza de un pilote produce el giro de eje horizontal de las cabezas de los pilotes adyacentes. Además, la interacción depende no sólo de la distancia, sino también del ángulo  $\phi$  de la alineación de pilotes con respecto a la dirección del desplazamiento de las cabezas (Figura 5).

**Figura 5.** Ángulo entre la alineación de pilotes y la dirección del movimiento

Si se designa por  $\mathbf{u}^f$  al vector de movimientos (desplazamiento horizontal y su giro acoplado) de campo libre a lo largo de toda la altura del pilote receptor (pilote  $j$ ), se cumple que<sup>17</sup>

$$\mathbf{u}^f = \alpha^f(\phi) \mathbf{u} \quad (42)$$

donde  $\mathbf{u}$  es el vector de movimientos a lo largo de la altura del pilote emisor (pilote  $i$ ) y  $\alpha^f$  es el coeficiente de interacción de campo libre

$$\begin{aligned} \alpha^f(\phi) &= \cos^2(\phi)\alpha^f(0^\circ) + \sin^2(\phi)\alpha^f(90^\circ) \\ \alpha^f(0^\circ) &= \sqrt{\frac{r_0}{d}} e^{-\xi \frac{\omega d}{c}} e^{-i \frac{\omega d}{c}} \\ \alpha^f(90^\circ) &= \sqrt{\frac{r_0}{d}} e^{-\xi \frac{\omega d}{c_s}} e^{-i \frac{\omega d}{c_s}} \end{aligned}$$

siendo  $c = c_p$  si  $\nu \leq \frac{1}{3}$  y  $c = 2c_s$  si  $\nu > \frac{1}{3}$ .

Sin embargo, el movimiento del pilote receptor no será, como en el caso del desplazamiento vertical o el giro torsor, el movimiento correspondiente al campo libre. Los coeficientes  $\alpha^f$  no son directamente utilizables para representar la interacción entre pilotes.

Para obtener los coeficientes de interacción correctos, hay que tener en cuenta que las condiciones de equilibrio implican<sup>11</sup>

$$\mathbf{S}^f \mathbf{u}^f = \mathbf{S} \mathbf{u}^r \quad (43)$$

donde  $\mathbf{u}^r$  es el vector de movimientos a lo largo de la altura del pilote receptor (pilote  $j$ ) y  $\mathbf{S}$  es la matriz de rigidez dinámica del pilote aislado. Entonces, se tiene

$$\mathbf{u}^r = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{S}^f \mathbf{u}^f = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{S}^f \alpha^f(\phi) \mathbf{u} \quad (44)$$

La ecuación anterior proporciona la relación entre los movimientos del pilote emisor  $\mathbf{u}$  y los movimientos del pilote receptor  $\mathbf{u}^r$ . Dicha relación es la que proporciona los coeficientes de interacción dinámica para el desplazamiento horizontal y el giro de eje horizontal.

## IMPEDANCIAS PARA GRUPOS DE PILOTES

A partir de los valores de flexibilidad dinámica correspondientes al pilote aislado y empleando los coeficientes de interacción de la sección anterior, los movimientos en la cabeza de los  $n_p$  pilotes se pueden poner como

$$\{u_{v_i}\} \equiv \mathbf{u}_v = s_v^1 \mathbf{A}_v \mathbf{p}_v \quad (45)$$

$$\{u_{hx_i}\} \equiv \mathbf{u}_{hx} = s_{hx}^1 \mathbf{A}_{hx} \mathbf{p}_{hx} + s_{hxby}^1 \mathbf{A}_{hxby} \mathbf{m}_{by} \quad (46)$$

$$\{u_{hy_i}\} \equiv \mathbf{u}_{hy} = s_{hy}^1 \mathbf{A}_{hy} \mathbf{p}_{hy} + s_{hybx}^1 \mathbf{A}_{hybx} \mathbf{m}_{bx} \quad (47)$$

$$\{\theta_{t_i}\} \equiv \mathbf{t}_t = s_t^1 \mathbf{A}_t \mathbf{p}_t \quad (48)$$

$$\{\theta_{bx_i}\} \equiv \mathbf{t}_{bx} = s_{bx}^1 \mathbf{A}_{bx} \mathbf{m}_{bx} + s_{hybx}^1 \mathbf{A}_{hybx} \mathbf{p}_{hy} \quad (49)$$

$$\{\theta_{by_i}\} \equiv \mathbf{t}_{by} = s_{by}^1 \mathbf{A}_{by} \mathbf{m}_{by} + s_{hxby}^1 \mathbf{A}_{hxby} \mathbf{p}_{hx} \quad (50)$$

con

$$i = 1, \dots, n_p$$

donde  $\mathbf{u}_v$ ,  $\mathbf{p}_v$  son desplazamientos y fuerzas verticales en las cabezas de los pilotes,  $\mathbf{u}_{hx}$ ,  $\mathbf{p}_{hx}$  desplazamientos y fuerzas horizontales  $X$  en las cabezas de los pilotes,  $\mathbf{u}_{hy}$ ,  $\mathbf{p}_{hy}$  desplazamientos y fuerzas horizontales  $Y$  en las cabezas de los pilotes,  $\mathbf{t}_t$ ,  $\mathbf{m}_t$  giro y momento torsor en las cabezas de los pilotes,  $\mathbf{t}_{bx}$ ,  $\mathbf{m}_{bx}$  giro y momento de eje horizontal  $X$  en las cabezas de los pilotes,  $\mathbf{t}_{by}$ ,  $\mathbf{m}_{by}$  giro y momento de eje horizontal  $Y$  en las cabezas de los pilotes,  $s^1$  coeficientes de flexibilidad para el pilote aislado (inversos de las impedancias) y  $\mathbf{A}$  matrices de coeficientes de interacción.

Las relaciones anteriores pueden escribirse en forma compacta como

$$\mathbf{u}_h = \mathbf{S}_h \mathbf{p}_h \quad (51)$$

donde el vector de movimientos  $\mathbf{u}_h$  y el vector de fuerzas  $\mathbf{p}_h$  tienen  $6n_p$  componentes.

Si las cabezas de los pilotes están unidas por un encepado rígido, existe una relación entre las seis componentes del movimiento del encepado  $\mathbf{u}_0$  y el vector  $\mathbf{u}_h$

$$\mathbf{u}_h = \mathbf{T} \mathbf{u}_0 \quad (52)$$

donde  $\mathbf{T}$  es una matriz de  $6n_p \times 6$ . Entonces, se tiene que

$$\mathbf{p}_0 \equiv \mathbf{T}^t \mathbf{p}_h = \mathbf{T}^t \mathbf{S}_h^{-1} \mathbf{u}_h = \mathbf{T}^t \mathbf{S}_h^{-1} \mathbf{T} \mathbf{u}_0 \quad (53)$$

La matriz  $\mathbf{T}^t \mathbf{S}_h^{-1} \mathbf{T}$ , cuadrada de orden 6, reúne las impedancias correspondientes al encepado rígido.

## EJEMPLO DE APLICACIÓN

Como ejemplo de aplicación se estudia la cimentación que se representa en la Figura 6. Se trata de un conjunto de  $5 \times 5$  pilotes de 50 cm de diámetro unidos por un encepado rígido. Los pilotes tienen 10 m de longitud y se sitúan en un suelo con densidad de 1750 kg/m<sup>3</sup> y coeficiente de Poisson de 0,4. El coeficiente de amortiguamiento hysterético del suelo se considera igual a 0,05, en fracción del amortiguamiento crítico. El suelo puede considerarse con propiedades uniformes hasta una profundidad varias veces superior a la longitud de los pilotes.

La densidad del material de los pilotes es 1,40 veces la densidad del suelo, su módulo de elasticidad es de 25 GPa y su coeficiente de Poisson es de 0,25. Para la amplitud esperada de los movimientos, el amortiguamiento hysterético puede despreciarse.

Se trata de obtener las impedancias de la cimentación para una relación de separación a diámetro de los pilotes ( $s/2r_0$ ) de 3 y de 6 y para una relación de módulos de elasticidad pilote-suelo ( $E_p/E_s$ ) de 1000.

**Figura 6.** Planta de la cimentación del ejemplo de aplicación

Los resultados obtenidos para el movimiento horizontal y el giro de balanceo del encepado se dan en las Figuras 7 a 10. Para su cálculo se han empleado 50 discos uniformemente distribuidos en la longitud de los pilotes. Estos resultados se comparan con los publicados por Kaynia y Mahzooni empleando un procedimiento de cálculo riguroso.<sup>27</sup> Los valores de Kaynia y Mahzooni se consideran exactos.

En las figuras, los resultados se dan en función de la frecuencia adimensional  $a_0 \equiv \omega \frac{2r_0}{c_s}$ , siendo  $r_0$  el radio de los pilotes. La impedancia  $K$  para un determinado movimiento de la cimentación se expresa como

$$K = K_s(k_0 + i a_0 c_0) \quad (54)$$

donde  $K_s$  es la rigidez estática y  $k_0$  y  $c_0$  son los coeficientes adimensionales de rigidez y amortiguamiento, respectivamente. Los valores de rigidez estática empleados son los que se dan en la Tabla III.

| $\frac{s}{2r_0}$ | Horizontal                  | Balanceo                  |
|------------------|-----------------------------|---------------------------|
| 3                | $3300E_p I_p \frac{1}{L^3}$ | $1250E_p I_p \frac{1}{L}$ |
| 6                | $5000E_p I_p \frac{1}{L^3}$ | $4700E_p I_p \frac{1}{L}$ |

Nota:  $I_p$  es el momento de inercia de la sección del pilote y  $L$  es la longitud de los pilotes

**Tabla III.** Rigidez estática del encepado

Para el movimiento de balanceo (giro de eje horizontal del encepado), en el que la interacción entre pilotes se calcula fundamentalmente a partir de los coeficientes de interacción de campo libre  $\alpha^f$ , hay una coincidencia excelente con los resultados exactos (Figuras 9 y 10).

En el caso del desplazamiento horizontal (Figuras 7 y 8) la coincidencia con los resultados exactos es menor, sobre todo en la zona de frecuencias intermedias para la relación separación/diámetro de 6. Sin embargo, el procedimiento es capaz de capturar correctamente las tendencias y proporciona una aproximación que puede ser suficiente para muchas aplicaciones prácticas.

**Figura 7.** Coeficiente de rigidez a desplazamiento horizontal del encepado

**Figura 8.** Coeficiente de amortiguamiento a desplazamiento horizontal del encepado

**Figura 9.** Coeficiente de rigidez a giro de balanceo del encepado

**Figura 10.** Coeficiente de amortiguamiento a giro de balanceo del encepado

## CONCLUSIONES

En el contexto de la práctica diaria resulta deseable disponer de modelos sencillos, con un sentido físico claro, que permitan al ingeniero de a pie obtener con facilidad y aproximación suficiente los parámetros de rigidez y disipación dinámica del terreno de cimentación. Un tipo de modelos de esta clase son los modelos de cono.

En este artículo se ha presentado una aplicación de los modelos de cono al cálculo de impedancias de cimentaciones pilotadas, teniendo en cuenta la interacción pilote-suelo-pilote. Las impedancias calculadas se han comparado con las obtenidas mediante un procedimiento riguroso en un ejemplo con pilotes flotantes en un semiespacio elástico. De la comparación se deduce que los modelos de cono son capaces de proporcionar una aproximación que puede ser suficiente para muchas aplicaciones prácticas.

## AGRADECIMIENTOS

Los autores quieren agradecer al Dr. Amir Kaynia, del Instituto Noruego de Geotecnia, sus indicaciones para la comprobación de los resultados obtenidos con el programa de cálculo. También agradecen a Marta Gabarain y a Silvia Meléndez, de IDOM, su impulso y comprensión durante la realización del trabajo.

## REFERENCIAS

- 1 J. Lysmer y R. Kuhlemeyer, "Finite dynamic model for infinite media" *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, Vol. **94**, N° 4 (1969).
- 2 J. Lysmer y G. Wass, "Shear waves in plane infinite structures", *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, Vol. **98**, N° 1, (1972).
- 3 J.M. Roesset y M. Ettouney, "Transmitting boundaries: a comparison". *Int. J. for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. **1**, pp. 151–176, (1977).
- 4 P.A. Cundall, R.R. Kunar, P.C. Carpenter y J. Martí, "Solution of infinite dynamic problems by finite modelling in the time domain", *Proceedings of the 2nd International Conference on Applied Numerical Modelling*, Madrid, (1978).
- 5 J. Domínguez, "Dynamic stiffness of rectangular foundations", Dept. of Civil Engineering, Report R78-20, Massachusetts Institute of Technology, (1978).
- 6 E. Alarcón, J.J. Cano y J. Domínguez, "Boundary element approach to the dynamic stiffness functions of circular foundations", *Int. J. for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. **13**, pp. 645–664, (1989).
- 7 E. Alarcón, A. Martínez y M.S. Gómez, "Dynamic stiffness of bridge abutments", *Proceedings of the 10th World Conference on Earthquake Engineering*, Madrid, (1992).
- 8 G. Ehlers, "The effect of soil flexibility on vibrating systems" (en alemán), *Beton Eisen*, Vol. **41**, pp. 197–203, (1942).
- 9 J.W. Meek y A.S. Veletsos, "Simple models for foundations in lateral and rocking motion", *Proceedings of the 5th World Conference on Earthquake Engineering*, Roma, (1974).
- 10 A.S. Veletsos y V.V.D. Nair, "Response of torsionally excited foundations". *Journal of Geotechnical Engineering*, ASCE. Vol. **100**, N° 4, pp. 476–482. (1974).
- 11 J.P. Wolf, "*Dynamic soil-structure interaction*", Prentice-Hall, (1985).



- 12 J.P. Wolf, “*Soil-structure interaction analysis in time domain*”, Prentice-Hall, (1988).
- 13 G. Gazetas, K. Fan, A. Kaynia y E. Kausel, “Dynamic interaction factors for floating pile groups”, *Journal of Geotechnical Engineering, ASCE*, Vol. **117**, N° 10, pp. 1531–1548, (1991).
- 14 J.W. Meek y J.P. Wolf, “Insights on cutoff frequency for foundation on soil layer”, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. **20**, pp. 651–665, (1991).
- 15 J.W. Meek y J.P. Wolf, “Cone models for homogeneous soil. I”, *Journal of Geotechnical Engineering, ASCE*. Vol. **118** (5), pp. 667–685. (1992).
- 16 J.W. Meek y J.P. Wolf. “Cone models for soil layer on rigid rock. II”. *Journal of Geotechnical Engineering, ASCE*, Vol. **118** 5, pp. 686–703, (1992).
- 17 J.P. Wolf, J.W. Meek y C. Song, “Cone models for a pile foundation”, *Piles Under Dynamic Loads, Proceedings of the ASCE National Convention, GT Div.*, Nueva York, (1992).
- 18 J.P. Wolf y J.W. Meek, “Cone models for a soil layer on a flexible rock half-space”, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. **22**, pp. 185–193, (1993).
- 19 J.P. Wolf y J.W. Meek, “Cone models for nearly incompressible soil”, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. **22**, pp. 649–663, (1993).
- 20 J.W. Meek y J.P. Wolf, “Why cone models can represent the elastic half-space”, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. **22**, pp. 759–771, (1993).
- 21 J.W. Meek y J.P. Wolf, “Approximate Green’s function for surface foundations”, *Journal of Geotechnical Engineering, ASCE*, Vol. **119**, N° 10, pp. 1499–1514, (1993).
- 22 J.W. Meek y J.P. Wolf, “Rotational cone models for a soil layer on flexible rock half-space”, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. **23**, pp. 909–925, (1994).
- 23 J.P. Wolf, “Cone models as a strength-of-materials approach to foundation vibration”, *Proceedings of the 10th European Conference on Earthquake Engineering*, Viena, (1994).
- 24 J.P. Wolf, “*Foundation vibration analysis using simple physical models*”, Prentice-Hall, (1994).
- 25 J.P. Wolf y J.W. Meek, “Insight on 2D- versus 3D-modelling of surface foundations via strength-of-materials solutions for soil dynamics”, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. **23**, pp. 91–112, (1994).
- 26 J.P. Wolf y J.W. Meek, “Dynamic stiffness of foundation on layered soil half-space using cone frustums”, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. **23**, pp. 1079–1095, (1994).
- 27 A.M. Kaynia y S. Mahzooni, “Forces in pile foundations under seismic loading”, *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*. Vol. **122**, N° 1, pp. 46–53, (1996).
- 28 E. Alarcón, R. Álvarez y M.S. Gómez, “*Cálculo matricial de estructuras*”, Reverté, (1986).