

# FLUJO VISCOPLASTICO INCOMPRESIBLE DE MATERIALES CON FRICCION Y COHESION. APLICACION A PROBLEMAS BIDIMENSIONALES

MARIO A. DIEZ  
y  
LUIS A. GODOY

*Departamento de Estructuras,  
Universidad Nacional de Córdoba,  
Casilla de Correos 916,  
Córdoba 5000, Argentina.*

## RESUMEN

Se investiga el flujo incompresible en régimen de materiales con características friccionales y cohesivas, empleando métodos numéricos. Se supone un flujo viscoplastico, para el cual se desarrolla una nueva expresión para el coeficiente de viscosidad. La discretización del modelo se lleva a cabo por medio de una formulación de Elementos Finitos en términos de velocidades, en la cual se satisface incompresibilidad usando una función de penalización. La formulación ha sido implementada para tratar problemas de deformación plana, y los resultados numéricos permiten realizar comparaciones con otros autores para materiales puramente cohesivos o puramente friccionales. Un ejemplo final ilustra el flujo de materiales con cohesión y fricción.

## SUMMARY

The steady state flow of incompressible materials with both frictional and cohesive characteristics is investigated using numerical methods. A visco-plastic flow is assumed, for which a new non-linear expression for the coefficient of viscosity is developed. The discretization of the model is carried out via a Finite Element formulation in terms of velocity, in which incompressibility is satisfied using a penalty function. The formulation has been implemented to deal with plane strain problems, and numerical results allow for comparisons to be made with other authors for purely cohesive or purely frictional materials. A final example illustrates the flow of a frictional/cohesive material.

## INTRODUCCION

Las investigaciones sobre el flujo de materiales sólidos bajo condiciones de deformaciones plásticas y viscoplásticas usando el Método de Elementos Finitos (MEF), han tenido básicamente su origen en problemas de extrusión y conformado de metales. En tales casos, el sólido es tratado como un fluido viscoso de tipo no-Newtoniano e incompresible, bajo condiciones prescritas de velocidad en el contorno para simular

Recibido: Mayo 1990

los procesos industriales de conformado. Una formulación de este tipo fue quizás primeramente presentada por Goon et al. (1968). Zienkiewicz y Godbole (1974), describen detalladamente la obtención de la viscosidad equivalente considerando la función de fluencia de von Mises y utilizando funciones de corriente para discretizar las ecuaciones de trabajos virtuales; ilustran aplicaciones a problemas estacionarios de extrusión; y extienden el modelo a problemas de punzonado en los cuales el proceso es no estacionario. Para la inclusión de los efectos dinámicos se altera en cada intervalo de tiempo la configuración de la malla a partir de las velocidades evaluadas en el intervalo anterior. Los mismos autores (1975), desarrollan y evalúan distintas formulaciones alternativas, con aplicaciones en creep lineal y flujo no-Newtoniano. En un trabajo posterior (Zienkiewicz y Godbole, 1975), investigan en detalle los resultados obtenidos utilizando tanto la formulación velocidad/presión ( $u/p$ ) como la formulación de funciones de penalización y proponen una técnica iterativa para representar adecuadamente la condición de contorno libre a la salida de la matriz, tanto en problemas estacionarios como no estacionarios en procesos de extrusión. El fenómeno de endurecimiento y la inclusión de efectos térmicos acoplados en el material se desarrollaron a partir de esa formulación básica (Zienkiewicz, Jain y Oñate, 1978). Una técnica que permite obtener en forma simultánea la solución del campo de velocidades y temperatura mediante el M.E.F. en flujos con efectos térmicos incluidos se debe a Zienkiewicz, Oñate y Heinrich (1981). Los efectos de la degradación del material por formación de huecos, como también la inclusión de la componente elástica de velocidad de deformación, han sido presentados por Oñate (1986). En todos los casos, los materiales han sido caracterizados por leyes de flujo de tipo von Mises que dependen básicamente de un parámetro de cohesión (la tensión de fluencia).

Los problemas de flujo de materiales granulares y pulverulentos son de gran interés en algunas industrias: en especial son relevantes en minería, procesos químicos y en relación al almacenamiento de productos agrícolas. El comportamiento de tales materiales depende de características de cohesión y fricción conjuntamente, y ha recibido una atención muy limitada en la literatura. En particular, leyes constitutivas de este tipo, se emplean en el contexto de mecánica de los suelos y más recientemente en flujos gravitatorios de materiales almacenados en silos. Jenike (1964), considera un campo de tensiones radiales para resolver las ecuaciones de equilibrio en una tolva, asumiendo que la tensión media en el material varía linealmente con la distancia radial desde el centro de la tolva. Con este análisis "quasi-estático" no es posible obtener como resultado un único campo de velocidades y por lo tanto es necesario agregar los efectos inerciales; esta última consideración da como resultado ecuaciones no lineales de movimiento y por consiguiente es necesario un mayor esfuerzo para su resolución. Savage (1967), resuelve el problema de flujo en una tolva utilizando la técnica de Perturbaciones (expandiendo en términos del ángulo de fricción de la pared). Para los órdenes de expansión presentados, las funciones que definen el campo de velocidades y presiones resultan poco precisas. Jenike y Shield (1959), suponen dos postulados constitutivos: fricción intergranular tipo Coulomb, e isotropía del material. Con base a esas hipótesis, Brennen y Pearce (1978), realizaron estudios comparativos entre resultados experimentales y analíticos obtenidos a partir de una solución bidimensional en una tolva plana, considerando un flujo plano continuo y asumiendo que la densidad

del material se mantiene constante durante todo el proceso. Emplearon también el método de perturbaciones para la solución analítica de las ecuaciones de movimiento especializadas para el caso de flujo estacionario y simétrico respecto al eje de la tolva, y teniendo en cuenta los efectos de fricción entre el medio granular y la pared de la tolva. Para la expansión en series usaron dos parámetros de perturbación: el radio y la relación angular  $\theta/\theta_w$  donde  $\theta_w$  representa el simiángulo de inclinación de la tolva. Asimismo obtuvieron la ubicación de las condiciones de bordes inferior y superior encontrando los puntos donde se anulan las tensiones radiales. En este trabajo se concluye que la solución analítica basada en las relaciones constitutivas de Jenike y Shield ofrecen una buena aproximación a los resultados experimentales y seguramente una mejor aproximación podría esperarse agregando términos en la expansión en serie, aunque la solución resultará en general tediosa e impracticable. Nguyen, Brennen y Sabersky (1979), obtuvieron la solución en problemas de flujos de materiales no cohesivos granulares en tolvas cónicas nuevamente por la vía analítica. El procedimiento utilizado es idéntico al descrito en la referencia anterior, sólo que las ecuaciones de movimiento son especializadas para el caso de geometría cónica. Meric y Tabarrok (1982), presentan un procedimiento para resolver en forma aproximada las ecuaciones que gobiernan el flujo incompresible de un material granular sin cohesión. Con este procedimiento se perturba específicamente la función de tensión de Airy mediante lo cual quedan automáticamente satisfechas las ecuaciones de equilibrio y la función de fluencia. Los autores muestran que los resultados obtenidos mediante este procedimiento evidencian una mayor precisión respecto a los valores experimentales disponibles comparado con otras técnicas como las anteriormente descritas en esta reseña bajo idénticas consideraciones tanto de flujo (es decir se supone un flujo másico estacionario que se modela como un medio continuo e isótropo) como de material (suponiendo un comportamiento rígido plástico de Mohr-Coulomb): Meric et al. concluyen (al igual que Brennen y Pearce) que las diferencias en los resultados derivan fundamentalmente en la metodología de la obtención de la solución, y una mejora implicaría agregar más términos en la expansión de perturbaciones, pero concluyen que: "en la práctica esta extensión resulta un procedimiento de solución muy laborioso y puede ser más ventajoso abandonar las características semianalíticas del método de perturbaciones y usar un procedimiento puramente numérico tal como el M.E.F., mediante el cual un refinamiento para mejorar la solución puede lograrse fácilmente". Los pocos estudios mencionados tienen en común el empleo de técnicas analíticas o perturbaciones, en cuyo caso se trata de soluciones para dominios y condiciones de contorno determinadas. Debido a las limitaciones impuestas por las técnicas de solución, los modelos de material sólo incorporan un parámetro de fricción, dejando de lado las posibilidades de investigar el flujo de sólidos con cohesión y fricción.

En este trabajo en cambio, se propone un modelo general de flujo para materiales con cohesión y fricción utilizando el criterio de Drucker y Prager para representar la superficie de fluencia plástica del material granular. El método de los Elementos Finitos es usado para discretizar el dominio y resolver las ecuaciones de movimiento que gobiernan esta clase de problemas. El trabajo está basado en parte de la tesis doctoral del primero de los autores (Diez, 1990).

## FORMULACION DEL PROBLEMA

### Ecuaciones Fundamentales

En un flujo estacionario lento, las ecuaciones diferenciales que describen el movimiento de un fluido viscoso incompresible en un dominio se reducen a:

$$\text{Momentum} \quad \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + b_j = 0 \quad (1)$$

$$\text{Continuidad} \quad \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2)$$

donde  $\sigma_{ij}$  y  $b_j$  representan el tensor de tensiones internas y el vector de fuerzas másicas por unidad de volumen;  $u_i$  el vector velocidad, y los índices  $i, j = 1, 3$ .

A partir de la definición del tensor tasa de deformación

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3)$$

para fluidos incompresible, la ecuación(2), puede ser alternativamente reescrita como:

$$\dot{\epsilon}_v = \dot{\epsilon}_{ii} = 0 \quad (4)$$

La tensión media o presión  $p$  (considerada positiva en este trabajo) queda definida por:

$$p = \sigma_m = -\frac{1}{3} \sigma_{ii} \quad (5)$$

Para el caso particular de fluidos lineales, la relación entre el tensor de tensiones y la tasa de deformación será:

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} \quad (6)$$

donde el tensor constitutivo se representa con  $D_{ijkl}$  y puede descomponerse en las componentes desviadoras y volumétricas de la forma:

$$\sigma_{ij} = 2\mu \dot{\epsilon}_{ij} - p \delta_{ij} \quad (7)$$

con  $\delta_{ij}$  y  $\mu$  se representan el delta de Kronecker y el coeficiente de viscosidad lineal del material. Este coeficiente puede a su vez, ser función de  $\dot{\epsilon}$ , de la temperatura y de la densidad del fluido. Tales fluidos son denominados no-Newtonianos (no lineales), y la formulación será especializada para ellos.

En lugar de la formulación diferencial de momentum o equilibrio (ecuación 1), es posible presentar el problema en forma integral equivalente mediante potencias virtuales, en cuyo caso se requiere que para un cambio compatible de velocidad y tasa de deformación virtual  $\delta u$  y  $\delta \dot{\epsilon}$  las potencias internas y externas resulten iguales (Zienkiewicz et al. 1975).

$$\int_{\Omega} \delta \dot{\epsilon}_{ij} \sigma_{ij} d\Omega = \int_{\Omega} \delta u_i b_i d\Omega + \int_S \delta u_i t_i dS \quad (8)$$

Con  $\Omega$  se representa un dominio de flujo para el que pueden prescribirse determinadas condiciones de contorno de presión  $S_p$  ó de velocidad  $S_u$ .

Una ecuación adicional necesita ser escrita para forzar la condición de incompresibilidad (ecuación 4), estableciendo que para cualquier variación virtual de presión interna  $\delta p$ , el trabajo correspondiente en un fluido incompresible es nulo:

$$\int_{\Omega} \delta p \dot{\epsilon}_{ii} d\Omega = 0 \quad (9)$$

Las ecuaciones (8) y (9) pueden ser directamente discretizadas mediante diferentes técnicas de solución numérica. Entre las comúnmente usadas podemos mencionar:

- a) La Formulación mixta (u/p), donde se utilizan ambas ecuaciones obteniendo como resultados el campo de velocidades y presiones simultáneamente,
- b) la formulación usando una función de penalización, en la que las presiones dejan de ser incógnitas (ecuación 9), pudiéndose evaluar las presiones en una etapa final a partir del campo de velocidades (Zienkiewicz et al., 1978).

Las ecuaciones (1)–(9), coinciden con las empleadas en materiales puramente cohesivos. Para materiales granulares, la viscosidad equivalente  $\mu = \mu(\dot{\epsilon}, \sigma_m)$  debe aún obtenerse, lo cual se detalla en la siguiente sección.

### Viscosidad Equivalente. Criterio de Drucker y Prager

En procesos con grandes velocidades de deformación donde el material sigue un comportamiento elasto viscoplástico, es posible despreciar la componente elástica de velocidad de deformación. La relación general constitutiva (ecuación 6) puede ser alternativamente expresada en términos de tensiones desviadoras  $S_{ij}$  (Zienkiewicz et al., 1974) como:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2\mu} S_{ij} \quad (10)$$

donde

$$S_{ij} = \sigma_{ij} + p\delta_{ij} \quad (11)$$

Los materiales viscoplásticos no-Newtonianos, (que corresponden a una generalización del fluido de Bingham), presentan un comportamiento rígido inicial y comienzan a fluir cuando las tensiones superan el límite de fluencia  $F(\sigma) = 0$ . Una descripción general del flujo de tales materiales puede ser obtenida relacionando las componentes de tensiones con la tasa de deformaciones (Perzyna, 1966) como:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{vp} = \gamma < \beta(F) > \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} \quad (12)$$

donde  $\gamma$ ,  $F$  y  $Q$  representan el parámetro de fluidez, la superficie de fluencia y el potencial plástico del material;  $\beta$  es una función que permite ajustar el modelo a los resultados experimentales correspondientes, adoptándose en este trabajo un valor unitario, mientras que el símbolo  $\langle \rangle$  denota:

$$\langle F \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } F < 0 \\ F & \text{si } F \geq 0 \end{cases}$$

Se especializa a continuación la ecuación (12), para materiales granulares, utilizando la ley de fluencia plástica de Drucker y Prager. Esta ley permite representar en forma adecuada la ley de Mohr-Coulomb, que ha sido tradicionalmente usada para representar la superficie de fluencia de materiales granulares, tanto friccionales como cohesivos. La función de fluencia  $F$  se define (Zienkiewicz y Corneau, 1974), en este caso como:

$$F = \alpha' \sigma_m + \sqrt{3}(J_2')^{1/2} - k \quad (13)$$

donde

$$\alpha' = \frac{6 \sin \phi}{3 - \sin \phi}, \quad y \quad k = \frac{6c \cos \phi}{3 - \sin \phi}$$

Las constantes  $c$  y  $\phi$  definen la cohesión y el ángulo de fricción interna del material,  $\sigma_m$  la tensión media (ecuación 5) y  $J_2'$  el segundo invariante del tensor desviador definido como

$$J_2' = \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij} \quad (14)$$

Para la definición de  $Q$ , se considera un flujo de tipo no asociativo ( $F \neq Q$ ), estableciendo ciertas condiciones de manera tal que los cambios plásticos de volumen resulten nulos ( $\dot{\epsilon}_{ii}^p = 0$ ), esto último es equivalente a suponer para  $Q$  la función de fluencia de von Mises. Es decir, considerar en el espacio principal de tensiones que la función de fluencia  $F$  representa un cono, mientras que el potencial  $Q$  representa un cilindro.

Con esta consideración, el gradiente del potencial resulta:

$$\frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{(J_2')^{1/2}} S_{ij} \quad (15)$$

Reemplazando las ecuaciones (13) y (15) en la ecuación constitutiva general de Perzyna (ecuación 12), para el caso particular que  $F \geq 0$ , se obtiene:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{vp} = \gamma (\alpha' \sigma_m + \sqrt{3}(J_2')^{1/2} - k) \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{(J_2')^{1/2}} S_{ij} \quad (16)$$

Igualando los segundos miembros de las ecuaciones (10) y (16), y operando se obtiene:

$$\frac{1}{\mu} = \gamma \left( 3 + \frac{\sqrt{3}\alpha'\sigma_m}{(J'_2)^{1/2}} - \frac{\sqrt{3}k}{(J'_2)^{1/2}} \right) \quad (17)$$

Esta última expresión puede ser alternativamente escrita en término de tasa de deformaciones. Para ello, despejando  $S_{ij}$  de la ecuación (10), y reemplazando ese valor en la ecuación (14), se tiene:

$$J'_2 = 2\mu^2 \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} \quad (18)$$

Introduciendo en esta última ecuación el invariante del vector velocidad de deformación definido por:

$$\dot{\epsilon}^2 = \frac{2}{3} \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} \quad (19)$$

se tiene

$$(J'_2)^{1/2} = \sqrt{3}\mu\dot{\epsilon} \quad (20)$$

y sustituyendo finalmente esta última expresión en la ecuación (17) se obtiene:

$$\mu = \frac{1}{3\gamma} + \frac{k}{3\dot{\epsilon}} - \frac{\alpha'\sigma_m}{3\dot{\epsilon}} \quad (21)$$

que define el coeficiente de viscosidad equivalente para materiales granulares que fluyen sin cambios de volumen. Esta última expresión, representa obviamente un problema no lineal  $\mu = \mu(\dot{\epsilon}, \sigma_m)$ , y tiene una validez general puesto que permite representar como casos límites tanto comportamientos puramente viscosos (anulando el segundo y tercer término), como también un comportamiento puramente plástico ideal, ( $\gamma \rightarrow \infty$ ). En la Figura 1 se ilustra la relación entre la viscosidad y el invariante del vector velocidad de deformación para distintos valores de presiones.

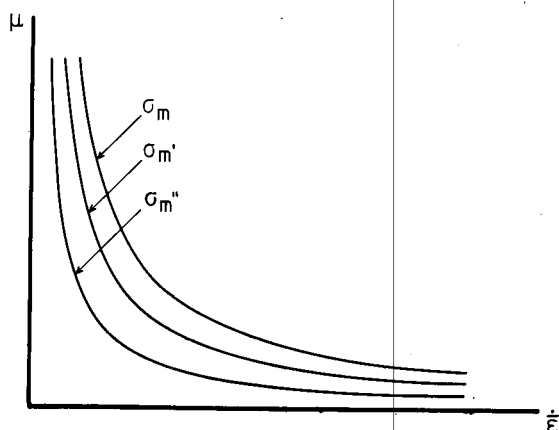


Figura 1. Relación entre viscosidad y segundo invariante de deformaciones para diferentes presiones.

Por otra parte, la ecuación (21), constituye una relación general dado que tomando  $\phi = 0^\circ$  (comportamiento puramente cohesivo del material); se obtiene un valor del coeficiente de viscosidad idéntico al obtenido por Oñate y Zienkiewicz (1983), para el estudio de procesos de extrusión y conformado de metales, en cuyo caso el comportamiento del material queda representado por la ley de fluencia de von Mises.

Obsérvese también que la hipótesis de flujo no asociativo no altera en absoluto la simetría de las componentes  $\dot{\epsilon}_{ij}^{vp}$ .

### DISCRETIZACION MEDIANTE ELEMENTOS FINITOS VIA PENALIZACION

Se discretiza el campo de velocidades del dominio  $\Omega$  en la forma clásica de Elementos Finitos en función de sus valores nodales

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{N}\mathbf{a}^e \\ \dot{\epsilon} &= \mathbf{B}\mathbf{a}^e \end{aligned} \quad (22)$$

donde  $\mathbf{N}$  representa las funciones de forma apropiadas y definidas elemento por elemento,  $\mathbf{B}$  la correspondiente matriz de deformación y  $\mathbf{a}^e$  las velocidades nodales incógnitas del problema, (Zienkiewicz, 1977).

Utilizando la función de penalización, como se ha mencionado anteriormente, para satisfacer la condición de incompresibilidad, desaparece como incógnita el campo de presiones y por consiguiente el problema adopta una forma simple y expeditiva, (Reddy, 1982; Hughes et al., 1979).

$$\dot{\epsilon}_{ii} = \dot{\epsilon}_v = \frac{\sigma_m}{\alpha} \simeq 0 \quad (23)$$

donde el parámetro de penalización  $\alpha$ , es un número suficientemente grande, y de cuya elección nos ocuparemos más adelante. Introduciendo las dos últimas ecuaciones en la ecuación (8), de potencias virtuales se tiene:

$$\left( \int_{\Omega} \mathbf{B}^T 2\mu \mathbf{D}^s \mathbf{B} d\Omega + \alpha \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D}^v \mathbf{B} d\Omega \right) \mathbf{a}^e - \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{b} d\Omega - \int_S \mathbf{N}^T \mathbf{t} dS = \mathbf{0} \quad (24)$$

o bien

$$[\mathbf{K}^{es} + \alpha \mathbf{K}^{ev}] \mathbf{a}^e - \mathbf{f}^e = \mathbf{0} \quad (25)$$

donde

$$\mathbf{K}^{es} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T 2\mu \mathbf{D}^s \mathbf{B} d\Omega \quad (26)$$

está formada por las componentes desviadoras;

$$\mathbf{K}^{ev} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D}^v \mathbf{B} d\Omega \quad (27)$$

representa la contribución volumétrica y

$$\mathbf{f}^e = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{b} d\Omega + \int_S \mathbf{N}^T \mathbf{t} dS \quad (28)$$

es el vector de carga nodal, formado por contribuciones de volumen y de contorno, en tanto que  $\mathbf{D}^S$  y  $\mathbf{D}^V$  representan matrices desviadoras y volumétricas respectivamente.

Ensamblando las contribuciones de cada uno de los elementos resulta:

$$\mathbf{K}^S[\mu(a)]\mathbf{a} + \alpha \mathbf{K}^V \mathbf{a} - \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (29)$$

El sistema global (29) es no lineal debido a la dependencia de  $\mathbf{K}^S$  de la solución  $\mathbf{a}$ , a través de  $\mu$ . Se advierte en ella, que si el parámetro de penalización  $\alpha$  aumenta, la ecuación se reduce a:

$$\mathbf{K}^V \mathbf{a} = \frac{\mathbf{f}}{\alpha} \simeq \mathbf{0} \quad (30)$$

lo cual es equivalente a exigir la singularidad de la matriz volumétrica  $\mathbf{K}^V$  y para tal fin puede utilizarse sobre esa componente la Técnica de Integración Reducida (Zienkiewicz, 1977).

El sistema (30) puede resolverse en forma iterativa a partir de un valor de viscosidad inicial propuesto  $\mu_0$ , que permita evaluar  $\mathbf{K} = \mathbf{K}^S + \alpha \mathbf{K}^V$

$$\mathbf{K}^0 = \mathbf{K}(\mu_0) \quad (31)$$

Como solución del sistema es posible obtener el campo de velocidades nodales para la iteración  $n$  en la forma

$$\mathbf{a}^n = [\mathbf{K}_{n-1}]^{-1} \mathbf{f} \quad (32)$$

El proceso se repite hasta alcanzar una convergencia prefijada (usualmente  $\delta = 0.01$ ) definida en término de velocidades como

$$\frac{\sum (a_i^n - a_i^{n-1})^2}{\sum (a_i^n)^2} \leq \delta \quad (33)$$

donde las sumatorias se extienden de 1 al número total de grados de libertad. Es de destacar que la técnica de iteración directa en general converge en pocas iteraciones.

En el presente trabajo han sido implementados elementos Serendipity de 8 nodos y Lagrangeanos de 9 nodos para tratar problemas de estados planos de deformación disponiéndose en ambos elementos tanto de la técnica de Integración Reducida uniforme (2x2 Gauss), para la evaluación de las componentes de la matriz de rigidez desviadora y volumétrica, como de la técnica de Integración Selectiva: (3x3) para la parte desviadora y (2x2) para la volumétrica.

Respecto a la metodología implementada para la evaluación de la viscosidad, se ha utilizado el criterio sugerido por Barlow (1976), para tensiones, es decir se calculan las viscosidades en los puntos "óptimos" (2x2 Gauss) para los elementos usados, extrapolando luego a los puntos de Gauss (3x3) necesarios para la integración numérica de la componente desviadora.

Como consecuencia de la técnica de integración utilizada, el campo de presiones entre elementos resulta en general discontinuo. En este trabajo, se utiliza una técnica de suavización para evaluar finalmente las presiones en cada nudo.

### EJEMPLOS DE APLICACION

Para ilustrar y validar el modelo propuesto, se analizan en esta sección tres casos de flujo. En el primero, se asume un comportamiento constitutivo del material de tipo viscoplástico de Bingham, en el segundo caso, se representa un material puramente friccional mientras que en el último se supone un comportamiento cohesivo-friccional. En estos dos últimos casos se considera un flujo plástico ideal ( $\gamma = 10^8$  1/Pas). Elementos Lagrangeanos e integración selectiva se utilizan en todos los casos analizados los cuales han sido realizados en un ordenador personal tipo PC-AT.

#### Ejemplo 1: Flujo viscoplástico entre láminas planas (Fig. 2,3,4)

Se simula el desarrollo del perfil de velocidades a la entrada de un conducto formado por dos placas planas asumiendo un comportamiento del fluido de tipo viscoplástico de Bingham. En la Figura 2 se esquematiza en la parte (a) el problema analizado,

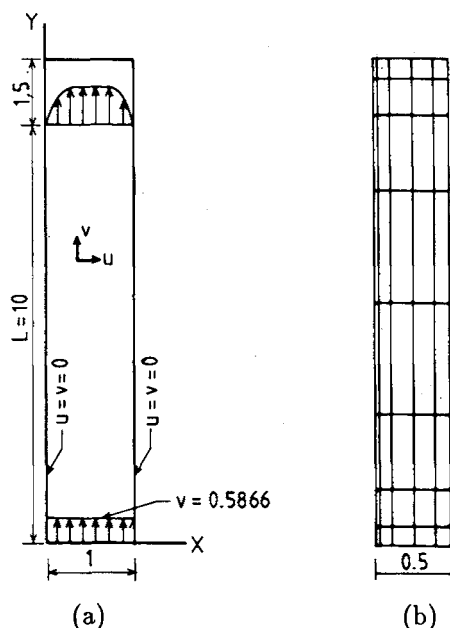


Figura 2. (a) Flujo viscoplástico plano.  $\gamma = 1$  (1/Pa s);  $c = 5$ ;  $\phi = 0^\circ$ .  
(b) Discretización de E. F. utilizada.

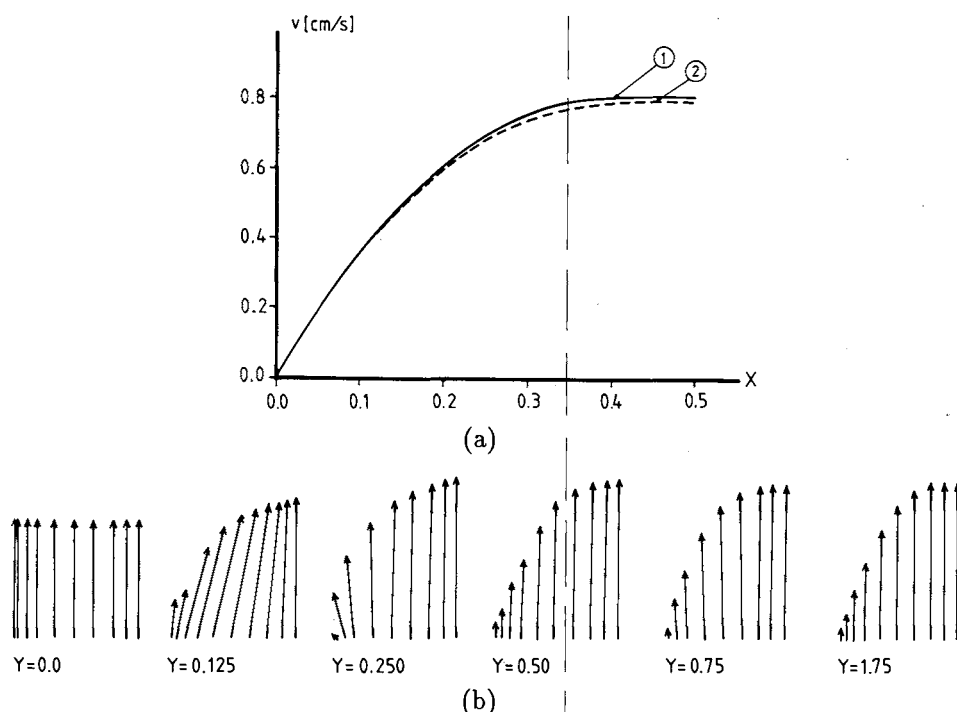


Figura 3. (a) Perfil de velocidades para distintas posiciones  $x$  en  $y=L$  para el problema de la Figura 2. -1- Solución analítica exacta; -2- Presente análisis. (b) Desarrollo del perfil de velocidades en la región de entrada.

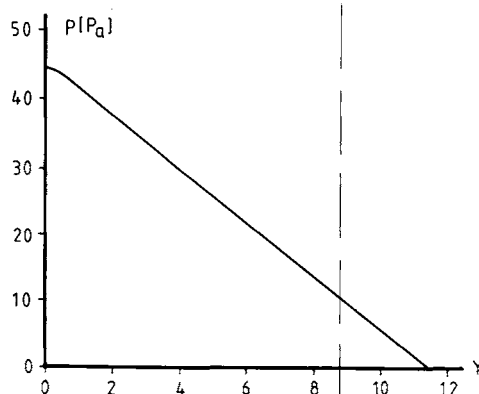


Figura 4. Presión en el centro para distintas longitudes del conducto de la Figura 2.

mientras que en la (b) se indica la malla de Elementos Finitos utilizada. Dada la simetría se ha discretizado sólo la mitad del conducto.

En la Figura 3(a) se compara el perfil de velocidades en coordenadas  $y = L$  obtenido en el presente análisis con la solución analítica exacta (Begis, 1972). Un esquema de la evolución del perfil de velocidades obtenido en la región de la entrada se muestra en la parte (b) de la misma figura.

Por último en la Figura 4, se grafica la variación de presión obtenida en el centro del conducto para las distintas posiciones longitudinales.

## Flujo gravitatorio en una tolva plana

### Ejemplo 2: Material puramente friccional (Fig. 5,6,7)

Se simula un flujo estacionario gravitatorio en una tolva plana. En este caso la tolva está llena con granos de arena de cuarzo seco de granulometría media. Este material presenta un comportamiento puramente friccional y queda definido (Brennen y Pearce, 1978), por las constantes  $\phi = 30^\circ$  y  $c = 0$ . Su densidad en términos de gravedad específica volumétrica es  $SG=1,53$ . En la Figura 5(a), se indican las características geométricas que definen el problema mientras que en la parte (b) se esquematiza la malla de elementos finitos utilizada y nuevamente aprovechando la simetría sólo se ha discretizado la mitad del dominio. No se consideran los efectos friccionales entre el material almacenado y la pared de la tolva.

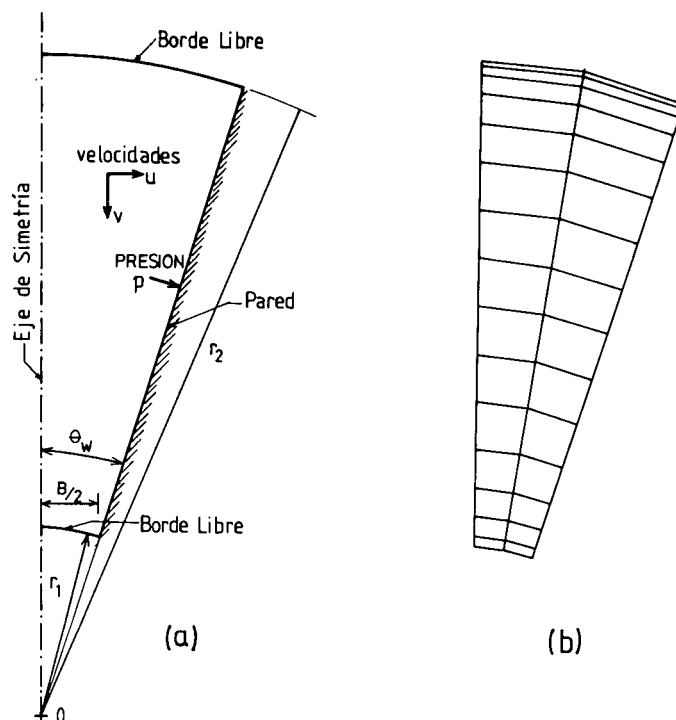


Figura 5. (a) Esquema de una tolva plana; (b) Malla de E. F. utilizada.

Se realizan estudios paramétricos en tolvas con diferentes ángulos de inclinación de pared  $\theta_w$ , manteniéndose constante el tamaño de la boca de descarga  $B$  y la relación  $r_2/r_1$ . En la Figura 6, se muestra la variación de presión sobre la pared en función del ángulo  $\theta_w$ .

Finalmente se comparan en la Figura 7 las presiones sobre la pared obtenidas con el presente modelo y las publicadas en los artículos por Brennen y Pearce (1978) y Meric y Tabarrok (1982). Las diferencias pueden atribuirse a dos motivos: en primer término en el presente modelo no se consideran estrictamente las mismas hipótesis; y en

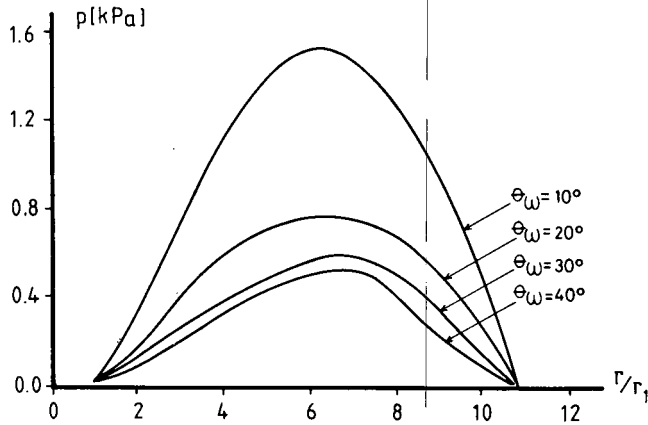


Figura 6. Presiones sobre la pared en distintas posiciones para diferentes tolvas.  $SG=1.53$ ;  $\phi = 30^\circ$ ;  $c = 0$ ;  $r_2/r_1 = 10.75$ ;  $B/2 = 0.03175m$ ;  $\gamma = 10^8(1/Pas)$ .

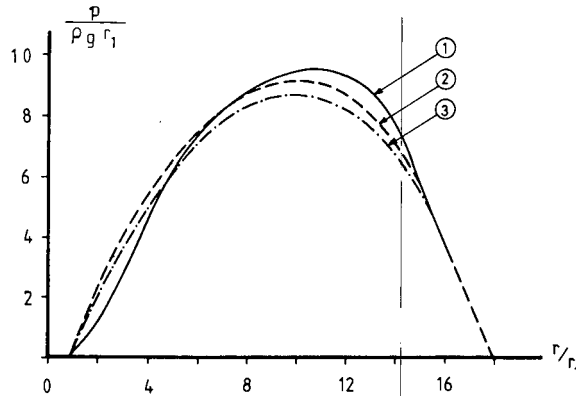


Figura 7. Comparación de presiones adimensionalizadas sobre la pared en distintas posiciones. (1) Presente análisis; (2) Meric y Tabarrok y (3) Brennen y Pearce.  $\phi = 35^\circ$ ;  $c = 0$ ; densidad  $\rho = 1530Kg/m^3$ ;  $\theta_w = 25^\circ$ ;  $r_2/r_1 = 18$ ;  $B/2 = 0.03175m$ ;  $\gamma = 10^8(1/Pas)$ .

segundo lugar en los artículos mencionados las ecuaciones que gobiernan el problema se resuelven en forma aproximada siguiendo un esquema semianalítico mediante el método de las perturbaciones, lo cual contiene lógicamente errores como consecuencia del truncamiento de términos.

### Ejemplo 3: Materiales con fricción y cohesión (Fig. 8)

En este último ejemplo se estudia un flujo gravitatorio similar al anterior (Figura 5), pero en este caso la tolva está llena con harina de trigo. Por consiguiente este material pulverulento presenta un comportamiento del tipo cohesivo-friccional y queda definido por los parámetros  $c=1200Kg/m^2$ ;  $\phi = 45^\circ$  y  $SG= 0.65$  (Calil, 1984). Se ilustra nuevamente en la Figura 8, la variación de presión sobre la pared para distintas posiciones  $r/r_1$  de las tolvas con diferentes inclinaciones. Al igual que en el caso anterior

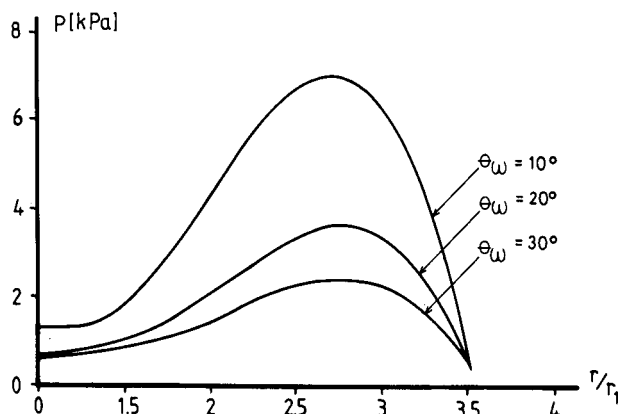


Figura 8. Presiones sobre la pared en distintas posiciones para diferentes tolvas.  $SG=0.65$ ;  $\phi = 45^\circ$ ;  $c = 1200 \text{ Kg/m}^2$ ;  $r_2/r_1 = 3.5$ ;  $B/2 = 0.01 \text{ m}$ ;  $\gamma = 10^8 (1/\text{Pas})$ .

no se consideran los efectos friccionales pared-harina.

## ASPECTOS NUMERICOS Y COMPUTACIONALES

En la implementación del modelo propuesto es necesario tener en cuenta algunos aspectos numéricos que pueden tener consecuencias en la calidad de los resultados.

### Selección del Parámetro de Penalización $\alpha$

En primer lugar, se ha investigado la incidencia de la forma en la que se lleva a cabo la penalización, distinguiéndose entre penalización uniforme de la malla, (un único  $\alpha$  para toda la malla) y penalización a nivel de cada elemento, (valores distintos de  $\alpha$  para cada elemento).

En el primer caso, la penalización se realiza de manera uniforme sobre todos los elementos, es decir, se considera un valor único y constante de  $\alpha$  durante todo el análisis y en cada uno de los puntos de integración de Gauss (2x2) donde se evalúan las viscosidades. En el segundo caso, en cambio se considera una penalización variable a nivel de cada elemento y para cada una de las iteraciones. Esta forma propuesta por Hughes et al. (1979), consiste en penalizar cada punto (2x2) de Gauss con un valor proporcional a la viscosidad  $\mu$  asociada en ese mismo punto de la forma:

$$\alpha = \beta \mu$$

y donde  $\beta$  es una constante.

Ambas técnicas han sido incorporadas al programa computacional desarrollado e investigadas. Es preciso resaltar, que no se han obtenido diferencias sustanciales en los resultados (velocidad y presiones) como consecuencia de la aplicación de una u otra técnica.

En la Figura 9 se ilustra la evolución del perfil de velocidad para el ejemplo 1 obtenido para cada una de las iteraciones utilizando ambas técnicas. Pueden apreciarse ligeras diferencias en la primera iteración, aunque el fenómeno se amortigua a partir

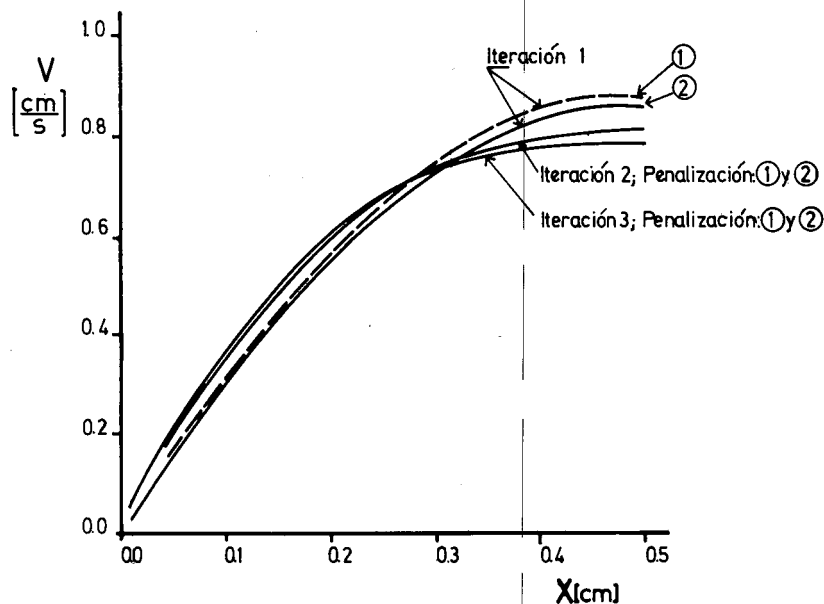


Figura 9. Evaluación del perfil de velocidades en cada iteración usando: -1- penalización uniforme y -2- penalización variable por elementos. Datos como en la Figura 2.

de la segunda iteración en adelante y se ha podido comprobar numéricamente que el error final (en velocidades y presiones), no supera en ningún caso el 0.05%. Un comportamiento análogo tiene lugar para el caso de flujos gravitatorios de material granular. En general, tanto los valores de viscosidad como su variación en el dominio del flujo resultan sensiblemente inferiores en relación a los obtenidos en flujos de metales.

En segundo lugar, se investigó acerca del valor de  $\alpha$  adecuado. Algunos autores: Reddy (1982); Bianchi y Sheppard (1987), realizan estudios de convergencia en  $\alpha$ . Como consecuencia de los resultados numéricos obtenidos, Hughes (1979), sugiere que el valor de  $\alpha$  depende exclusivamente de la longitud de palabra de cada ordenador y que a su vez éste, es independiente del parámetro de cada malla, (asociado con el tamaño de los elementos); en tanto que Oden (1978), demuestra lo contrario.

A fin de mostrar la incidencia del valor  $\alpha$  en la solución numérica, se ilustran en la Figura 10, en la parte (a) el perfil de velocidades y en (b) la variación de presión para el mismo ejemplo 1 de aplicación analizado en la sección anterior. Se observan errores significativos para valores pequeños de  $\alpha$  mientras que para rangos de  $\alpha$  entre  $10^6$  y  $10^{10}$  los errores en términos de velocidades y presiones disminuyen sensiblemente. De este ejemplo se concluye que un valor  $\alpha = 10^8$  resulta adecuado; en tanto que la investigación llevada a cabo para otros tipos de flujos muestran el mismo rango de valores de  $\alpha$ .

### Puntos de Singularidad sobre el Contorno

En muchas aplicaciones de flujo a problemas de silo, el contorno presenta discontinuidades en la normal. Ejemplos de esas discontinuidades se encuentran en las intersecciones del cuerpo principal del silo con la tolva. El hecho que dos elementos

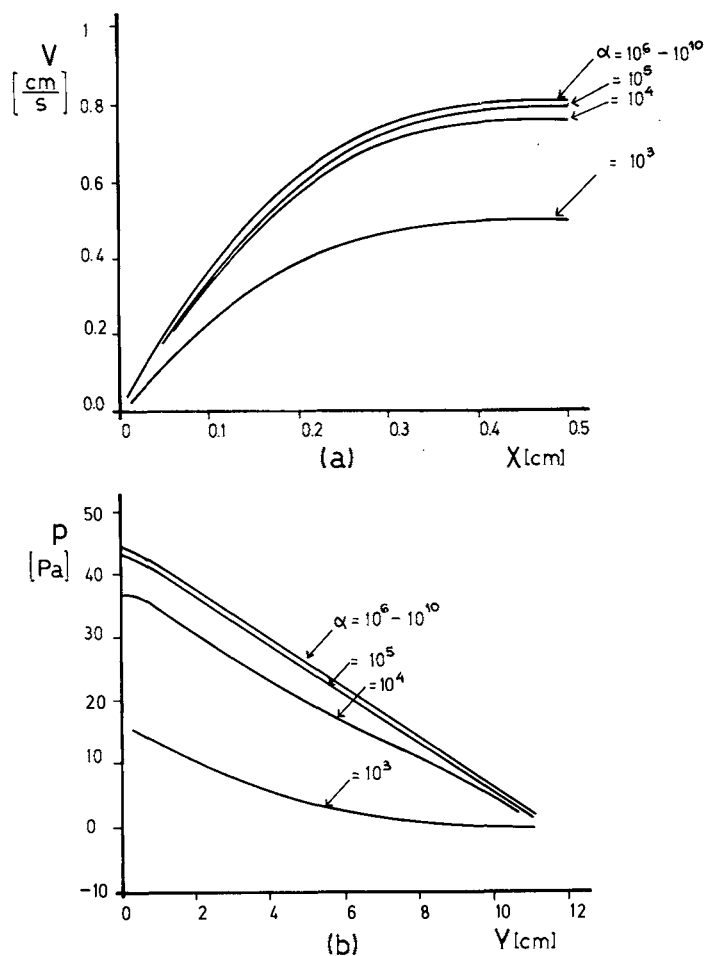


Figura 10. Selección del parámetro de penalización  $\alpha$ . Resultados para el ejemplo de la Figura 2. (a) velocidades y (b) presiones.

contiguos sobre el borde tengan distintas normales trae como consecuencia un punto singular en el nodo común a ambos elementos. Este tipo de problemas ha sido detectado en otros problemas, y un estado del arte puede encontrarse en el libro de Carey y Oden (1983).

Se disponen distintas técnicas para el tratamiento de la singularidad empleando elementos finitos (Henshell, 1975; Carey y Oden, 1983). En el presente trabajo, se ha utilizado la propuesta por Henshell que es la más simple de implementar y conduce a aproximaciones adecuadas en elementos isoparamétricos. Esta técnica está basada en introducir singularidad en derivadas de velocidades (de las que se obtienen tensiones) a través de degenerar la topología del elemento. Para esto, se ubican los nodos centrales de los elementos contiguos al punto singular como se muestra en la Figura 11(a).

En la Figura 11(b) se muestra el campo de velocidades para un ejemplo tolvacilindro. Se observa que si no se mejora la solución en la vecindad de la singularidad,

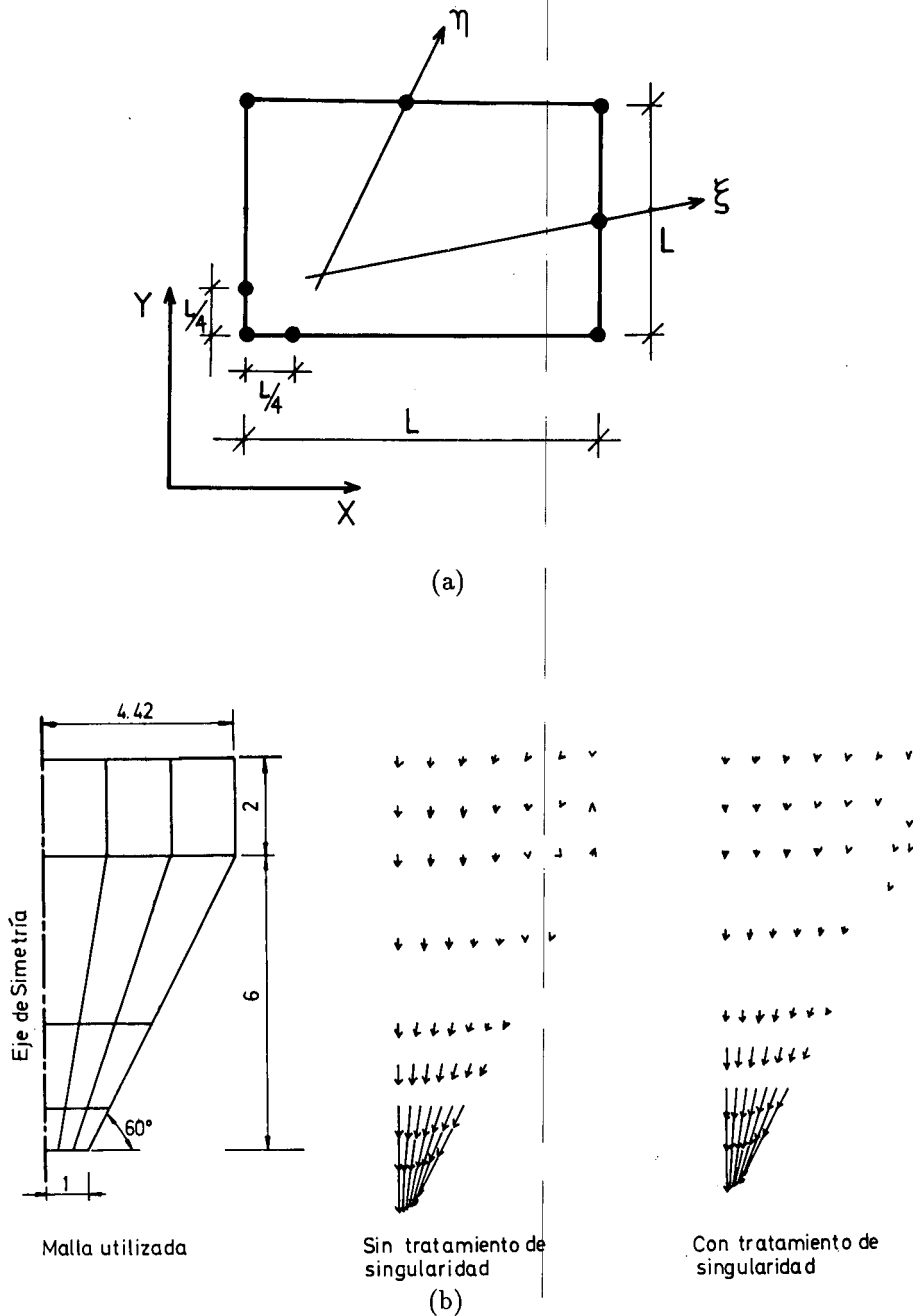


Figura 11. Tratamiento de puntos singulares sobre el contorno. (a) Degeneración del elemento, (b) campo de velocidades en la parte inferior de una celda.  $\phi = 25^\circ$ ;  $c = 0$ ;  $\gamma = 10^8(1/Pas)$ ;  $\rho = 1.5gr/cm^3$ .

se tienen en algunas zonas velocidades opuestas al flujo. Los errores en velocidades se detectan también en zonas alejadas de la intersección cono-cilindro. Cuando se modifican los dos elementos contiguos a la singularidad, se corrigen los valores de velocidad sobre toda la malla.

## CONCLUSIONES

Numerosos procesos de flujo de materiales granulares y pulverulentos no han sido resueltos de una manera satisfactoria hasta el presente. Tal es el caso, por ejemplo, del flujo durante el vaciado de una celda para el almacenamiento de grano, en que el material tiene un comportamiento que puede modelarse como viscoplástico no-Newtoniano.

El modelo presentado en este trabajo permite simular convenientemente flujos incompresibles de materiales definidos por los parámetros  $c$  y  $\phi$  (cohesión y ángulo de fricción interna respectivamente). Se obtiene una viscosidad equivalente no lineal en velocidades a partir de la ley de fluencia de Druker y Prager y se utilizan con éxito técnicas numéricas tales como integración selectiva y función de penalización que permiten una rápida implementación del modelo en códigos de elementos finitos disponibles.

A diferencia de trabajos de otros autores sobre materiales granulares, en los que la solución se obtuvo empleando técnicas de perturbación para condiciones de borde determinadas, el enfoque presentado es general y permite analizar dominios arbitrarios, con condiciones de borde de velocidad restringida o impuesta.

De la comparación de los resultados obtenidos con los publicados por otros autores se concluye que el modelo presentado permite representar adecuadamente los flujos granulares cohesivos y por tanto se espera una amplia aplicabilidad en problemas ingenieriles tales como movimiento de suelos, vaciado de silos, etc.

Si bien, los resultados presentados tratan sólo problemas de deformación plana, la extensión a sólidos axisimétricos o problemas tridimensionales no origina ninguna dificultad adicional.

## AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen a CONICOR y CONICET por la financiación de este proyecto de investigación, como así también las sugerencias y comentarios de los Prof. E. Oñate y F. Basombrío (quien recomendó el estudio del primer ejemplo).

## REFERENCIAS

1. D. Begis, "Analyse numérique de l'écoulement d'un fluide de Bingham", *Tesis*, Univ. de Paris, (1972).
2. J. Barlow, "Optimal Stress Locations in Finite Element Models", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 10, pp. 243-251, (1976).
3. J.H. Bianchi y T. Sheppard, "Comparison of a Viscoplastic Finite-Element Model with Slip-Line Field and Upper-Bound Solutions for Non-Hardening Material Subjected to Plane Strain and Axisymmetric Extrusion", *Int J. Mech. Sci.*, Vol. 29, pp. 61-81, (1987).
4. C. Brennen y J.C. Pearce, "Granular Material Flow in Two-Dimensional Hoppers", *J. Of Applied Mech.*, Vol. 45, pp. 43-50, (1978).
5. C. Calil, "Sobrepresiones en las Paredes de los Silos para Almacenamiento de Productos Pulverulentos Cohesivos", *Tesis de Doctorado Universidade de São Paulo*, São Carlos, SP,

- Brasil, (1984).
6. G.F. Carey y J.T. Oden, "Finite Elements: A Second Course", Vol. II, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, (1983).
  7. M. Diez, "Presiones en Silos durante el Flujo de Materiales con Cohesión y Fricción Mediante Elementos Finitos", *Tesis de Doctorado en Ciencias de la Ingeniería*, Universidad Nacional de Córdoba, Argentina, (1990).
  8. G.Y. Goon, I.P. Poluchin, W.P. Poluchin y B.A. Prudcowsk, "The Plastic Deformation of Metals", *Metallurgica*, Moscow (en ruso), (1968).
  9. D. Henshell, "Crack Tip Finite Elements are Unnecessary", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 9, pp. 495-507, (1975).
  10. T.J.R. Hughes, W.K. Liu, y A. Brooks, "Finite Element Analysis of Incompressible Viscous Flows by the Penalty Function Formulation", *J. of Comp. Physics*, Vol. 30, pp. 1-60, (1979).
  11. A.M. Jenike, y R.T. Shield, "On the Plastic Flow of Coulomb Solids Beyond Original Failure", *J. of Applied Mech.*, Vol. 26, pp. 599-602, (1959).
  12. A.W. Jenike, "Steady Gravity Flow of Frictional-Cohesive Solids in Converging Channels", *J. of Applied Mech.*, Vol. 31, pp. 5-11, (1964).
  13. R.A. Meric y B. Tabarrok, "On the Gravity Flow of Granular Materials", *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 8, pp. 469-478, (1982).
  14. T.V. Nguyen, C. Brennen y R.H. Sabersky, "Gravity Flow of Granular Materials in Conical Hoppers", *J. of Applied Mech.*, Vol. 46, pp. 529-535, (1979).
  15. J.T. Oden, "A Teory of Penalty Methods for Finite Element Aproximations of Highly Nonlinear Problems in Continuum Mechanics", *Comp. Struct.*, Vol. 8, pp. 445-449, (1978).
  16. E. Oñate, "Análisis de Problemas de Conformado de Metales por el Método de los Elementos Finitos utilizando una Formulacion de Flujo Viscoplastico", en *Mecánica Computacional*, Vol. 5, (Ed. L. Godoy), Asociación Argentina de Mecánica Computacional, Santa Fé, Argentina, pp. 152-177, (1986).
  17. P. Perzyna, "Fundamental Problems in Visco-Plasticity", *Recent Advances in Applied Mech. Chap. 9*, Academic Press, New York, pp. 243-377, (1966).
  18. J.N. Reddy, "On Penalty Function Methods in the Finite Element Analysis of Flow Problems", *Int. J. for Num. Meth. in Fluids*, Vol. 2, pp. 151-171, (1982).
  19. S.B. Savage, "Gravity Flow of a Cohesionless Bulk Solid in a Converging Conical Channel", *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 9, pp. 651-659, (1967).
  20. O.C. Zienkiewicz y P.N. Godbole, "Flow of Plastic and Viscoplastic Solids with Special reference to extrusion and forming processes", *Int. J. Num. Meth. in Engng.*, Vol. 8, pp. 3-16, (1974).
  21. O.C. Zienkiewicz e I.C. Corneau, "Visco-plasticity, Plasticity and Creep in Elastic Solids: A Unified Numerical Solution Approach", *Int. J. Num. Meth. in Engng.*, Vol. 8, pp. 821-845. (1974).
  22. O.C. Zienkiewicz y P.N. Godbole, "Viscous, Incompressible Flow with special reference to non-Newtonian (plastic) fluids", *Finite Element Methods in Flow Problems*, Swansea, (1974), (Ed. R.H. Gallagher, J.T. Oden, C. Taylor y O.C. Zienkiewicz), Chap. 2, Wiley, New York, (1975).
  23. O.C. Zienkiewicz y P.N. Godbole, "A Penalty Function Approach to Problems of Plastic Flow of Metals with Large Surface Deformations", *J. Strain Analysis*, Vol. 10, N°3, pp. 180-185, (1975).
  24. O.C. Zienkiewicz, "The Finite Element Method", Tercera Edición, McGraw-Hill, New

- York, (1977).
25. O.C. Zienkiewicz, P.C. Jain y E. Oñate, "Flow of Solids During Forming and Extrusion. Some Aspects of Numerical Solutions", *Int. J. Solids Structures*, Vol. **14**, pp. 15-38, (1978).
  26. O.C. Zienkiewicz, E. Oñate y J.C. Heinrich, "A General Formulation for Coupled Thermal Flow of Metals Using Finite Elements", *Int. J. Num. Meth. in Engng.*, Vol. **17**, pp. 1497-1514, (1981).