Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería. Vol. 9, 4, 403–416(1993)

ESTIMACIÓN DEL ERROR DE DISCRETIZACIÓN EN ELEMENTOS DE DEFORMACIONES SUPUESTAS

F.J. BELTRÁN
y
F. MARTÍNEZ

Principia, S.A., Velázquez 94,
28006 – Madrid

RESUMEN

El artículo presenta el fundamento teórico de un nuevo estimador del error de discretización utilizable con elementos de deformaciones supuestas. Frente a estimadores de otras clases, su principal ventaja desde el punto de vista práctico es que se evalúa elemento a elemento de forma independiente, sin ser necesario el cálculo de promedios nodales ni de "saltos" interelementales. Desde el punto de vista teórico, no impone para su aplicación ningún requisito de suavidad para la solución teórica, esto es, la solución exacta puede exhibir discontinuidades sin que se perturbe la aplicabilidad del estimador. Las pruebas preliminares realizadas con el estimador muestran algunas dificultades para su aplicación general como medida del error global; sin embargo, su utilización como indicador de error en procesos de remallaje adaptativo parece sencilla y económica.

SUMMARY

The paper introduces the theoretical foundation of a new error estimate for assumed strain finite elements. When compared with other existing error estimates, its main advantage is that it can be computed on an element by element basis, without evaluating nodal averages nor interelement jumps. Besides, the new estimate can be used for problems with non smooth solution without theoretical inconsistencies. Preliminary testing shows some difficulties for a general application of the estimate to assess the global error. Nevertheless, its use as local error indicator in order to guide adaptive meshing computations seems straightforward and economical.

Recibido: Febrero 1993

©Universitat Politècnica de Catalunya (España) ISSN 0213–1315

INTRODUCCIÓN

La investigación en el campo de la tecnología de elementos parece girar hoy en día en torno a los llamados elementos de "altas prestaciones". Este término fue acuñado por Felippa[8] para designar colectivamente a elementos simples, o de bajo orden, que con mallas relativamente gruesas son capaces de proporcionar una precisión aceptable desde el punto de vista ingenieril.

En el desarrollo de los elementos de altas prestaciones se han empleado y se siguen empleando técnicas muy variadas e ingeniosas, muchas veces sin más soporte en apariencia que la intuición del investigador y la bondad de los resultados. Podrían mencionarse aquí, por ejemplo, herramientas como la introducción de modos incompatibles o la integración reducida en cualquiera de sus formas, la "receta" de la Formulación Libre o los procedimientos de deformaciones supuestas.

El denominador común de las técnicas anteriores es el abandono de la formulación convencional en desplazamientos, basada en el principio de la mínima energía potencial.

Es de destacar que en la mayoría de los casos se ha encontrado a posteriori un fundamento teórico para los "trucos" numéricos utilizados en el desarrollo de estos elementos de altas prestaciones, generalmente a través de principios variacionales multicampo[1,9,10,11,12,13,14].

Por otro lado, nótese que la característica fundamental de esta clase de elementos, proporcionar una precisión aceptable con mallas gruesas, los hace muy atractivos para ser incluidos dentro de programas de cálculo de propósito general. De hecho, en las librerías de los programas comerciales resulta cada vez más difícil encontrar elementos de formulación convencional, sin ningún "truco" o refinamiento numérico para mejorar sus prestaciones. Así, resulta que los elementos más utilizados en la práctica pueden derivarse en la mayoría de los casos de principios variacionales con varios campos independientes.

Recientemente, con apoyo en la justificación variacional dada por Felippa a la Formulación Libre[6,10], se ha introducido una nueva categoría de estimadores del error de discretización para problemas de elasticidad y flexión de placas[2,3,4,5]. Los nuevos estimadores se obtienen por diferencia entre la energía asociada a los distintos campos independientes (movimientos, deformaciones, tensiones) que intervienen en la formulación variacional.

Frente a estimadores de otras clases, su principal ventaja desde el punto de vista práctico es que se evalúan elemento a elemento de forma independiente, sin ser necesario el cálculo de promedios nodales ni de "saltos" interelementales. Desde el punto de vista teórico, no imponen para su aplicación ningún requisito de "suavidad" para la solución teórica, esto es, la solución exacta puede exhibir discontinuidades sin que se perturbe la aplicabilidad de los nuevos estimadores.

Hasta ahora la viabilidad de esta nueva categoría de estimadores se ha comprobado únicamente para los elementos obtenidos según la receta de la Formulación Libre. Sin embargo, se tiene la impresión de que el concepto se puede extender a cualquier elemento susceptible de formularse utilizando un principio variacional con varios campos independientes.

El objetivo de estas notas es presentar los resultados obtenidos en la aplicación

de las nuevas ideas a otro tipo de elementos de altas prestaciones: los elementos con deformaciones naturales supuestas (ANS), cuya justificación variacional emplea también principios multicampo[12,14].

NOTACIÓN

Para establecer la notación se plantea aquí el problema de la elasticidad lineal.

Sea un cuerpo elástico sometido a unas acciones estáticas y que ocupa un dominio $\Omega \subset \Re^3$. El cuerpo está limitado por una superficie S que se descompone en dos partes $S = S_d \cup S_t$. El vector normal exterior a S se denota por $\boldsymbol{n}$.

Sobre S_d se conocen los desplazamientos $\bar{\boldsymbol{d}}$, mientras sobre S_t son conocidas las tensiones $\bar{\boldsymbol{t}}$. También es dato el campo $\boldsymbol{b}$ de fuerzas por unidad de volumen sobre Ω. Las incógnitas del problema son: el campo $\boldsymbol{u}$ de desplazamientos en Ω, el campo $\boldsymbol{e}$ de deformaciones infinitesimales en Ω y el campo $\boldsymbol{\sigma}$ del tensor de tensiones en Ω.

Cuando se utilizan principios variacionales para resolver el problema se trabaja con campos independientes o primarios, que están sujetos a variaciones, y con campos dependientes o derivados, que se obtienen a partir de aquéllos. La solución se determina tomando variaciones con respecto a los campos independientes. En este trabajo se adoptará la notación de Felippa[9] para distinguir entre campos dependientes e independientes. Un campo que pueda variarse independientemente se denotará colocando una tilde "˜ " sobre el símbolo correspondiente, por ejemplo: $\tilde{\boldsymbol{u}}$, $\tilde{\boldsymbol{e}}$ ... En los campos derivados la dependencia se identificará colocando como superíndice el símbolo del campo primario. Así por ejemplo:

$$\boldsymbol{e}^{u} = \frac{1}{2}(\nabla + \nabla^{t})\tilde{\boldsymbol{u}} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{\sigma}^{u} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{e}^{u} \tag{1}$$

donde ∇ representa el operador gradiente y $\boldsymbol{D}$ es el tensor de constantes elásticas. De este modo, los símbolos sin tilde ni superíndice $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{\sigma}$ se reservarán para los campos solución exacta del problema.

La escritura de las integrales de volumen y de superficie se abreviará colocando el integrando entre paréntesis o entre corchetes respectivamente. El dominio de integración se indicará mediante un subíndice:

$$(f)_\Omega \equiv \int_\Omega f\,d\Omega \quad , \quad [f]_{S_t} \equiv \int_{S_t} f\,dS \tag{2}$$

En el caso de que $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{g}$ sean funciones tensoriales se define la notación:

$$(\boldsymbol{f},\boldsymbol{g})_\Omega \equiv \int_\Omega \boldsymbol{f} : \boldsymbol{g}\,d\Omega \tag{3}$$

y análogamente para las integrales de superficie, en cuyo caso se emplearán corchetes.

PRINCIPIO VARIACIONAL MULTICAMPO

El principio variacional de partida es el principio de Hu-Washizu[15]. Según este principio, la solución del problema elástico hace estacionario el funcional:

$$\prod_W \left(\tilde{\boldsymbol{u}}, \tilde{\boldsymbol{e}}, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \tilde{\boldsymbol{t}}\right) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma}^e, \tilde{\boldsymbol{e}})_\Omega + (\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{e}^u - \tilde{\boldsymbol{e}})_\Omega - (\boldsymbol{b}, \tilde{\boldsymbol{u}})_\Omega - [\overline{\boldsymbol{t}}, \tilde{\boldsymbol{u}}]_{S_t} + \left[\tilde{\boldsymbol{t}}, \overline{\boldsymbol{d}} - \tilde{\boldsymbol{u}}\right]_{S_d} \quad (4)$$

sin ninguna restricción para los campos independientes.

Puede pensarse en imponer a los campos $\tilde{\boldsymbol{u}}$ y $\tilde{\boldsymbol{e}}$ de (4) las restricciones:

$$\tilde{\boldsymbol{u}} = \overline{\boldsymbol{d}} \quad \text{en} \quad S_d \qquad (5)$$

$$\tilde{\boldsymbol{e}} = \boldsymbol{e}^u + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad \text{en} \quad \Omega \qquad (6)$$

Entonces se obtiene un nuevo funcional:

$$\begin{aligned} \prod_S (\tilde{\boldsymbol{u}}, \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}) &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma}^e, \tilde{\boldsymbol{e}})_\Omega + (\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{e}^u - \tilde{\boldsymbol{e}})_\Omega - (\boldsymbol{b}, \tilde{\boldsymbol{u}})_\Omega - [\overline{\boldsymbol{t}}, \tilde{\boldsymbol{u}}]_{S_t} = \\ &\frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma}^u, \boldsymbol{e}^u)_\Omega + (\boldsymbol{\sigma}^u, \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}})_\Omega + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon, \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}})_\Omega - (\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}})_\Omega - (\boldsymbol{b}, \tilde{\boldsymbol{u}})_\Omega - [\overline{\boldsymbol{t}}, \tilde{\boldsymbol{u}}]_{S_t} \end{aligned} \qquad (7)$$

y la solución del problema elástico hará estacionario este funcional entre los campos que cumplan con las restricciones (5) y (6).

La primera variación del funcional (7) da:

$$\delta \prod_S = (\boldsymbol{\sigma}^u + \boldsymbol{\sigma}^\varepsilon - \tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \delta\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}})_\Omega - (div(\boldsymbol{\sigma}^u + \boldsymbol{\sigma}^\varepsilon) + \boldsymbol{b}, \delta\tilde{\boldsymbol{u}})_\Omega - (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}, \delta\tilde{\boldsymbol{\sigma}})_\Omega + \qquad (8)$$

$$[(\boldsymbol{\sigma}^u + \boldsymbol{\sigma}^\varepsilon)\boldsymbol{n} - \overline{\boldsymbol{t}}, \delta\tilde{\boldsymbol{u}}]_{S_t}$$

Así, la condición de estacionaridad, $\delta \prod_S = 0$, proporciona las ecuaciones de Euler correspondientes al principio variacional:

$$div(\boldsymbol{\sigma}^u + \boldsymbol{\sigma}^\varepsilon) + \boldsymbol{b} = 0 \quad \text{en } \Omega \quad \text{(equilibrio en } \Omega) \qquad (9)$$

$$(\boldsymbol{\sigma}^u + \boldsymbol{\sigma}^\varepsilon)\boldsymbol{n} - \overline{\boldsymbol{t}} = 0 \quad \text{en } S_t \quad \text{(equilibrio en } S_t) \qquad (10)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^u + \boldsymbol{\sigma}^\varepsilon = \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \quad \text{en } \Omega \qquad (11)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = 0 \quad \text{en } \Omega \qquad (12)$$

DISCRETIZACIÓN POR EL MEF

La discretización del principio variacional presentado más arriba da lugar a la formulación de elementos de deformaciones supuestas, tal y como se presenta en Simó[14].

El dominio Ω se divide en parcelas o elementos: $\Omega = \bigcup_i \Omega_i$.

Los campos $\tilde{\boldsymbol{u}}$ y $\boldsymbol{e}^u$ se construyen por ensamblaje de campos $\tilde{\boldsymbol{u}}_i$ y $\boldsymbol{e}_i^u$ definidos dentro de cada elemento con las funciones de forma isoparamétricas habituales:

$$\tilde{\boldsymbol{u}}_i = \boldsymbol{N}_i(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{d}_i \tag{13}$$

$$\boldsymbol{e}_i^u = \frac{1}{2}(\nabla + \nabla^t)\tilde{\boldsymbol{u}}_i = \boldsymbol{B}_i(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{d}_i \tag{14}$$

donde ξ representa las coordenadas naturales del elemento.

El campo $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ de deformaciones mejoradas se construye también por ensamblaje de campos elementales $\tilde{\varepsilon}_i$:

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_i = \boldsymbol{G}_i(\boldsymbol{\xi})\alpha_i \tag{15}$$

A la matriz $\boldsymbol{G}_i(\xi)$ de modos de deformación mejorada se le imponen en esta formulación dos condiciones. Por un lado, sus columnas deben ser modos de deformación linealmente independientes entre sí y, por otro lado, sus columnas deben ser también linealmente independientes de los modos contenidos en $\boldsymbol{B}_i(\xi)$.

Los campos $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ se generan ensamblando del mismo modo campos $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_i$ definidos elemento a elemento:

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_i = \boldsymbol{S}_i(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{s}_i \tag{16}$$

Las condiciones para la matriz de modos de tensión $\boldsymbol{S}_i(\xi)$ son que incluya los modos de tensión constante en el elemento y que sea ortogonal a $\boldsymbol{G}_i(\xi)$ en sentido de que:

$$(\tilde{\sigma}_i, \tilde{\varepsilon}_i)_{\Omega_i} \equiv \boldsymbol{s}_i^t \{ \int_{\Omega_i} \boldsymbol{S}_i^t(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{G}_i(\boldsymbol{\xi}) d\Omega \} \alpha_i = 0 \tag{17}$$

Nótese que una manera de hacer cumplir la condición de ortogonalidad (17) es tomar una matriz de modos de tensión $\boldsymbol{S}_i(\xi)$ constante en el elemento y exigir que:

$$\int_{\Omega_i} \boldsymbol{G}_i(\boldsymbol{\xi}) d\Omega = 0 \tag{18}$$

Por ser los campos $\tilde{\boldsymbol{u}}$ continuos en Ω y los campos $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ y $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ continuos a trozos en Ω, el funcional $\prod_s$ puede ponerse como suma de funcionales similares a él pero definidos en cada elemento:

$$\prod_S (\tilde{\boldsymbol{u}}, \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}) = \sum_i \prod_{S_i} (\tilde{\boldsymbol{u}}_i, \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_i, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_i) \tag{19}$$

Así, $\prod_S$ se hará estacionario cuando todos los funcionales $\prod_{S_i}$ se hagan estacionarios. De este modo basta con estudiar las condiciones de estacionaridad de

uno de los funcionales $\prod_{S_i}$. Para simplificar la notación, a partir de este punto se suprime el subíndice "i" indicativo del dominio elemental.

La sustitución de las expresiones (13) a (16) en el funcional elemental proporciona su expresión discreta:

$$\prod_S = \frac{1}{2}\boldsymbol{d}^t(\boldsymbol{B}^t\boldsymbol{D}\boldsymbol{B})_\Omega\boldsymbol{d} + \boldsymbol{d}^t(\boldsymbol{B}^t\boldsymbol{D}\boldsymbol{G})_\Omega\boldsymbol{\alpha} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}^t(\boldsymbol{G}^t\boldsymbol{D}\boldsymbol{G})_\Omega\boldsymbol{\alpha} - \\ - \boldsymbol{s}^t(\boldsymbol{S}^t\boldsymbol{G})_\Omega\boldsymbol{\alpha} - (\boldsymbol{b}^t\boldsymbol{N})_\Omega\boldsymbol{d} - \left[\bar{\boldsymbol{t}}^t\boldsymbol{N}\right]_{S_t}\boldsymbol{d} \tag{20}$$

Nótese que el cuarto sumando es nulo por la condición de ortogonalidad impuesta a los modos de tensión. Resulta entonces que la condición (17) permite eliminar la aparición explícita de los campos $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ en el funcional $\prod_S$, donde quedan en la práctica sólo dos campos independientes.

Las condiciones de estacionaridad de (20) son:

$$\frac{\partial \prod_S}{\partial \boldsymbol{d}} = (\boldsymbol{B}^t\boldsymbol{D}\boldsymbol{B})_\Omega\boldsymbol{d} + (\boldsymbol{B}^t\boldsymbol{D}\boldsymbol{G})_\Omega\boldsymbol{\alpha} - (\boldsymbol{b}^t\boldsymbol{N})_\Omega - \left[\bar{\boldsymbol{t}}^t\boldsymbol{N}\right]_{S_t} = 0 \tag{21}$$

y

$$\frac{\partial \prod_S}{\partial \boldsymbol{\alpha}} = (\boldsymbol{G}^t\boldsymbol{D}\boldsymbol{B})_\Omega\boldsymbol{d} + (\boldsymbol{G}^t\boldsymbol{D}\boldsymbol{G})_\Omega\boldsymbol{\alpha} = 0 \tag{22}$$

Con las definiciones:

$$\boldsymbol{K}_u \equiv (\boldsymbol{B}^t\boldsymbol{D}\boldsymbol{B})_\Omega, \qquad \boldsymbol{K}_e \equiv (\boldsymbol{G}^t\boldsymbol{D}\boldsymbol{G})_\Omega, \qquad \boldsymbol{Q} \equiv (\boldsymbol{B}^t\boldsymbol{D}\boldsymbol{G})_\Omega \\ \boldsymbol{f}_b \equiv (\boldsymbol{b}^t\boldsymbol{N})_\Omega, \qquad \boldsymbol{f}_t \equiv \left[\bar{\boldsymbol{t}}^t\boldsymbol{N}\right]_{S_t} \tag{23}$$

las ecuaciones anteriores pueden escribirse:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_u & \boldsymbol{Q} \\ \boldsymbol{Q}^t & \boldsymbol{K}_e \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{d} \\ \boldsymbol{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}_b + \boldsymbol{f}_t \\ 0 \end{bmatrix} \tag{24}$$

Por las condiciones para la elección de $\boldsymbol{G}(\xi)$, la matriz $\boldsymbol{K}_e$ es regular. Entonces, el sistema (24) se puede condensar a:

$$[\boldsymbol{K}_u - \boldsymbol{Q}\boldsymbol{K}_e^{-1}\boldsymbol{Q}^t]\boldsymbol{d} = \boldsymbol{f}_b + \boldsymbol{f}_t \tag{25}$$

donde la matriz en el primer miembro es la matriz de rigidez elemental en el sentido habitual y el segundo miembro corresponde al vector elemental de cargas.

Obsérvese que la matriz de rigidez elemental se construye sumando a la matriz correspondiente a la formulación convencional en desplazamientos un término corrector que depende de los modos de deformaciones supuestas. El vector elemental de cargas es el mismo que en la formulación convencional.

De la condensación resulta además que:

$$\boldsymbol{\alpha} = -\boldsymbol{K}_e^{-1}\boldsymbol{Q}^t\boldsymbol{d} \tag{26}$$

ESTIMADOR DE ERROR

Se consideran los dos funcionales siguientes:

$$\prod_p(\tilde{\boldsymbol{u}}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma}^u,\boldsymbol{e}^u)_\Omega - (\boldsymbol{b},\tilde{\boldsymbol{u}})_\Omega - [\overline{\boldsymbol{t}},\tilde{\boldsymbol{u}}]_{S_t} \tag{27}$$

$$\prod_S(\tilde{\boldsymbol{u}},\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}},\tilde{\boldsymbol{\sigma}}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma}^u,\boldsymbol{e}^u)_\Omega + (\boldsymbol{\sigma}^u,\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}})_\Omega + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma}^e,\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}})_\Omega - (\tilde{\boldsymbol{\sigma}},\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}})_\Omega - (\boldsymbol{b},\tilde{\boldsymbol{u}})_\Omega - [\overline{\boldsymbol{t}},\tilde{\boldsymbol{u}}]_{S_t} \tag{28}$$

El primero de ellos está asociado al principio variacional de la mínima energía potencial, el cual se aplica a campos $\tilde{\boldsymbol{u}}$ con la misma restricción (5) que la utilizada en el principio variacional asociado al segundo funcional.

Dada una solución aproximada $(\tilde{\boldsymbol{u}},\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}},\tilde{\boldsymbol{\sigma}})$, se propone como estimador del error de discretización la diferencia:

$$\delta = \prod_P - \prod_S = -(\boldsymbol{\sigma}^u,\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}})_\Omega - \frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma}^e,\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}})_\Omega + (\tilde{\boldsymbol{\sigma}},\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}})_\Omega \tag{29}$$

De acuerdo con las propiedades de los multiplicadores de Lagrange[7], la diferencia anterior es nula para la solución exacta del problema.

La discretización por el MEF de (29) proporciona en cada elemento, de acuerdo con el apartado anterior:

$$\delta_i = -\boldsymbol{d}^t\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\alpha} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}^t\boldsymbol{K}_e\boldsymbol{\alpha} \tag{30}$$

e introduciendo la relación (26):

$$\delta_i = \frac{1}{2}\boldsymbol{d}^t\boldsymbol{Q}\boldsymbol{K}_e^{-1}\boldsymbol{Q}^t\boldsymbol{d} \geq 0 \tag{31}$$

El estimador global se obtiene por suma de los estimadores elementales:

$$\delta = \sum_i \delta_i \tag{32}$$

siendo cada δ_i una medida del error en el elemento correspondiente. Medida que, una vez homogeneizada dividiendo por el área o volumen del elemento, puede utilizarse para guiar procesos de refinamiento selectivo de la discretización.

Obsérvese que, de acuerdo con (30) y (31), el estimador resulta estar asociado a la energía de deformación correspondiente al campo de deformaciones mejoradas $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$.

ESTUDIO DE UN ELEMENTO CUADRILÁTERO DE 4 NODOS

Particularización de la formulación

En Simó[14] puede verse que el clásico elemento de modos incompatibles de Wilson-Taylor[16] se obtiene particularizando la formulación presentada más arriba con una elección determinada de los modos de deformación mejorada $\boldsymbol{G}$. El propio Simó[14] y otros autores[17] proponen diferentes elementos de cuatro nodos para problemas de tensión y deformación plana basados en otras elecciones de $\boldsymbol{G}$. Sin embargo, en el campo de la elasticidad lineal y para mallas formadas por paralelogramos, los resultados que proporcionan estos elementos son idénticos a los que se obtienen con el elemento de Wilson-Taylor (matrices de rigidez idénticas: mismas tensiones, mismos desplazamientos).

Es por lo anterior que se ha decidido concentrar el estudio del estimador propuesto sobre el elemento de Wilson-Taylor. Este elemento resulta ser, por otro lado, muy popular y está disponible en muchos programas de cálculo de propósito general[18,19,20,21].

Pruebas del estimador

Para dar idea de la conducta numérica del estimador, se presentan aquí como ejemplo dos casos extremos: un caso de flexión pura, para el cual el elemento Wilson-Taylor proporciona una solución "exacta", y un caso (panel en L) con una singularidad en el campo de tensiones, lo que requiere una discretización fina para obtener resultados aceptables.

Laja en flexión

El elemento de Wilson-Taylor fue desarrollado precisamente para mejorar los resultados en flexión que se obtenían con los elementos formulados de modo convencional. Es por esto que su comportamiento es excelente en problemas dominados por la flexión.

En un caso de flexión pura (sin esfuerzo cortante) este elemento proporciona las tensiones y movimientos **nodales** exactos. Sin embargo, no proporciona los campos solución exacta del problema. Basta con observar que no existe continuidad del campo de desplazamientos de un elemento a otro.

En la Figura 1 se representa el caso de una laja en flexión sin tensiones de corte. El elemento de Wilson-Taylor obtiene en este caso de flexión pura una solución energéticamente equivalente a la solución exacta, pero que no es la solución exacta punto por punto. Desde la perspectiva del ingeniero que hace los cálculos esto tiene poca importancia, ya que se obtienen las tensiones y movimientos nodales correspondientes a la solución exacta y estos son precisamente los resultados que para él caracterizan el cálculo. Por el contrario, el estimador propuesto refleja el hecho de que la solución obtenida no corresponde a la exacta proporcionando valores no nulos. Valores que son, naturalmente, tanto más pequeños cuanto mayor es la finura de la malla (Figura 1 y Figura 2).

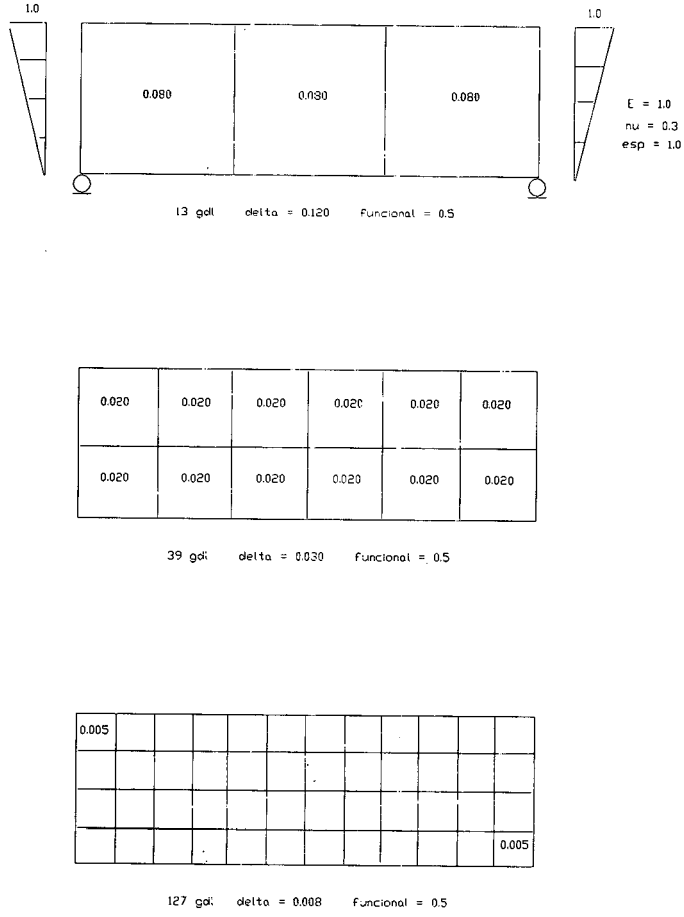

Figura 1. Ejemplo 1. Mallados y estimadores de error.

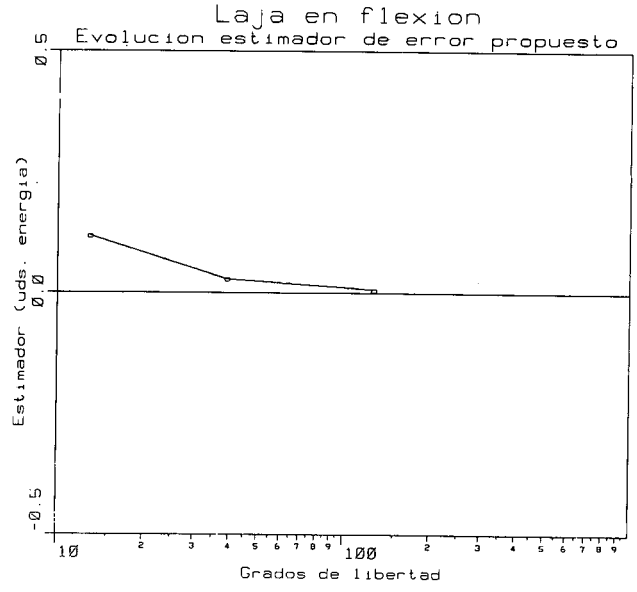

Figura 2. Ejemplo 1. Evolución del estimador de error.

Así pues, en este caso el comportamiento del estimador propuesto es malo desde el punto de vista ingenieril (a pesar de ser correcto desde el punto de vista matemático) ya que, para unos resultados "exactos", estima errores no nulos.

El ejemplo ha sido escogido expresamente para ayudar a comprender la naturaleza del estimador. El estimador sólo dará un valor nulo cuando sea nula la energía de deformación asociada al campo de deformaciones mejoradas $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$: recuérdese la ecuación de Euler (12) asociada al principio variacional de partida. Si resulta que puede construirse una solución "exacta" utilizando deformaciones mejoradas no nulas, como en el caso de la flexión pura, entonces el estimador tomará valores distintos de cero.

En realidad, como del elemento de Wilson-Taylor, en un caso general, sólo pueden esperarse soluciones realmente exactas en problemas de deformación constante, el estimador tiene tendencia a proporcionar valores no nulos en cualquier otro caso. A nivel global el estimador es entonces una medida de lo lejos que se está de una situación correspondiente al caso límite de la prueba de la parcela, en el que la solución de deformaciones tiende a ser constante en cada elemento. Se trata pues de una medida de la convergencia de la solución en este sentido.

Por otro lado, como el estimador se obtiene sumando los valores calculados elemento a elemento, resulta que estos valores elementales pueden ser utilizados directamente como "indicadores" de las zonas del mallado que requieren comparativamente mayor refinamiento. En la Figura 1 se representa el valor numérico de dichos indicadores en el interior de los respectivos elementos. El valor representado, por motivos de homogeneización corresponde a $\delta_i/(\textit{área elemento}_i)$, con δ_i calculado según (31). Nótese que en este ejemplo el indicador toma el mismo valor en todos los elementos, índice de que una malla uniforme es la más adecuada para el problema.

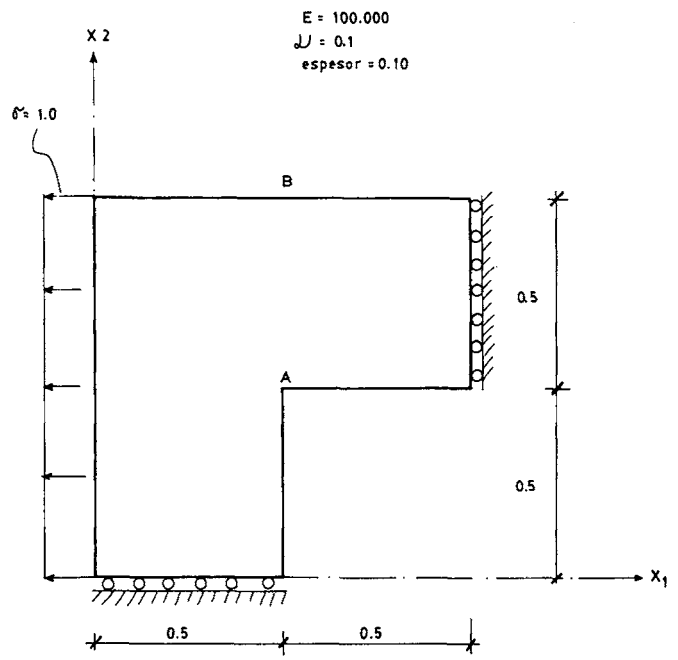

Figura 3. Ejemplo 2. Panel en forma de L.

Panel en L

La Figura 3 muestra un panel en forma de L sometido a tracción en uno de sus lados, con sus dimensiones y condiciones de contorno. El interés de este ejemplo radica en la singularidad geométrica que aparece en la esquina A, donde la tensión horizontal σ_1 tiende a infinito. Ello hace que se requiera una malla relativamente fina de elementos de cuatro nodos como el que se estudia para obtener resultados con alguna calidad.

Este problema fue analizado con una malla uniforme constituida por otro tipo de elementos (cuadriláteros de 32 grados de libertad) con objeto de obtener una solución de referencia. El número total de grados de libertad utilizados para obtener esta solución de referencia fue de 1170.

En la Figura 4 se representan los distintos mallados utilizados con elementos de Wilson-Taylor así como los valores calculados para los indicadores de error locales (elementales) y globales.

Puede verse como los indicadores locales señalan la singularidad adoptando valores comparativamente altos en su entorno.

En la Figura 5 se da la evolución del estimador de error propuesto en función del número de grados de libertad junto con la variación del error real, evaluado como diferencia entre el potencial de referencia y el potencial aproximado: $|\prod - \prod_S|$.

El estimador propuesto tiene en este caso un comportamiento excelente, sobreestimando ligeramente el error. En este caso los modos de deformaciones mejoradas no juegan el papel preponderante del ejemplo anterior.

CONCLUSIONES

Se ha presentado un nuevo tipo de estimador de error para elementos basados en la formulación de deformaciones supuestas. El planteamiento del nuevo estimador se apoya en el fundamento variacional de dichos elementos y se obtiene como diferencia entre dos funcionales que adoptan el mismo valor para la solución exacta del problema.

Frente a estimadores de otras clases, su principal ventaja es que se evalúa elemento a elemento de forma paralela y económica, sin ser necesario el cálculo de promedios nodales ni de "saltos" interelementales. Tampoco impone para su aplicación ningún requisito de suavidad para la solución teórica, que puede exhibir discontinuidades.

Las pruebas preliminares realizadas muestran resultados aceptables cuando en la solución del problema los modos "altos" del campo de deformaciones supuestas no juegan un papel preponderante. En caso contrario se produce una estimación muy por exceso del error desde una perspectiva ingenieril.

En todos los casos el valor del estimador se reduce al aumentar el número de grados de libertad empleados, siendo una medida de la convergencia de la solución.

El estimador global se obtiene sumando contribuciones elementales y estas contribuciones pueden utilizarse como medidas de la convergencia local de la solución. Por comparación entre estas contribuciones locales, se obtienen de forma económica "indicadores" de las zonas del mallado que requieren un mayor refinamiento. Es quizás en este campo donde el nuevo estimador tenga una aplicación práctica más clara e inmediata.

0.0086	0.0987	1.1283
0.0785	0.0002	2.1117
1.2918	1.7619	

x 10-6

24 gdl

delta = 3.9885 10-7

funcional = -0.1313 10-5

0.015	0.179	0.50	1.194	1.561	2.09
0.013	0.223	0.947	0.77	0.2.08	1.96
0.132	0.556	0.33	7.07	2.18	1.81
0.89	1.29	4.56			
2.61	1.61	5.35			
4.28	3.29	5.15			

x 10-7

72 gdl

delta = 7.3122 10-8

funcional = -0.1494 10-5

0.0	0.0	0.0	0.1	0.2	0.4	0.6	0.7	0.7	0.7
0.0	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.7
0.0	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.7	0.7	0.7
0.0	0.1	0.1	0.2	0.7	0.3	1.2	0.8	0.7	0.7
0.0	0.2	0.2	0.3	0.9	7.7	1.1	0.7	0.7	0.7
0.2	0.3	0.4	1.0	6.2					
0.6	0.5	0.5	0.5	2.8					
1.2	0.8	0.7	1.2	2.1					
1.7	1.1	1.1	1.4	2.2					
2.1	1.4	1.3	1.6	2.3					

x 10-7

180 gdl

delta = 3.1281 10-8

funcional = -0.1527 10-5

funcional de referencia = -0.1551 10-5

Figura 4. Ejemplo 2. Mallados y estimadores de error.

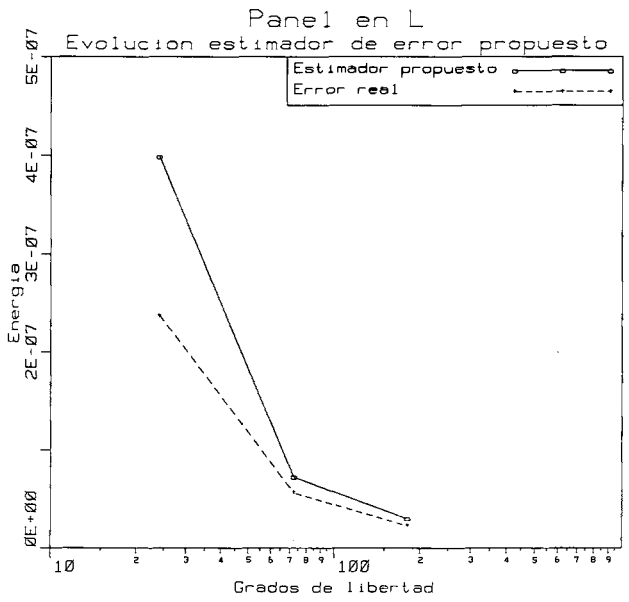

Figura 5. Ejemplo 5. Evolución del estimador de error.

REFERENCIAS

1. S. Alexander, K. Alvin, H.M. de la Fuente, C.A. Felippa, B. Hangen y C. Militello, "Membrane triangles with corner drilling freedoms: I.The EFF element, II.The ANDES element, III.Implementation and performance evaluation", *Report CU-CSSC-91-24*, University of Colorado, Boulder, (1992).
2. F.J. Beltrán, "Estimadores de Error Basados en Principios Variacionales Multicampo para Cálculos por Elementos Finitos", *Tesis Doctoral*, Universidad Politécnica de Madrid, (1990).
3. F.J. Beltrán y E. Alarcón, "Accuracy estimates based on multifield variational principles", *European Journal of Mechanics A/Solids* , Vol. **11**, pp. 487–518, (1992).
4. F.J. Beltrán y E. Alarcón, "Estimación del error de discretización con principios variacionales multicampo: I.Elasticidad", *Rev. Int. Mét. Num. Cálculo y Diseño en Ing.*, Vol. **8**, pp. 25–43, (1992).
5. F.J. Beltrán y E. Alarcón, "Estimación del error de discretización con principios variacionales multicampo: II. Flexión de placas", *Rev. Int. de Mét. Num. Cálculo y Diseño en Ing.*, Vol. **8**, pp. 139–156, (1992).
6. P.G. Bergan y M.K. Nygard, "Finite elements with increased freedom in choosing shape functions", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. **20**, pp. 643–664, (1984).
7. R. Courant y D. Hilbert, *"Methods of Mathematical Physics*, Vol. I, John Wiley, (1953).
8. C.A. Felippa, "Recent Developments in high performance finite elements based on the free formulation", *Report CU-CSSC-88-09*, University of Colorado, Boulder, (1988).
9. C.A. Felippa, "Parametrized multifield variational principles in elasticity: I.Mixed functionals", *Com. Appl. Num. Meth.*, Vol. **5**, pp. 69–78, (1989).

10. C.A. Felippa, "Parametrized multifield variational principles in elasticity: II.Hybrid functionals and the free formulation", *Comp. Appl. Num. Meth*, Vol. **5**, pp. 79–88, (1989).
11. D.S. Malkus y T.J.R. Hughes, "Mixed finite element methods. Reduced and selective integration techniques: a unification of concepts", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. **15**, pp. 63–81, (1978).
12. C. Militello y C.A. Felippa, "A variational justification of the assumed natural strain formulation of finite elements. I.Variational principles", *Computers&Structures*, Vol. **34**, pp. 431–438, (1990).
13. J.C. Simó y T.J.R. Hughes, "On the variational foundations of assumed strain methods", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. **53**, pp. 51–54, (1986).
14. J.C. Simó y M.S. Rifai, "A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. **29**, pp. 1595–1638, (1990).
15. K. Washizu, *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*, Pergamon Press, (1968).
16. E.L. Wilson, R.L. Taylor, W.P. Doherty y J. Ghabousy, "Incompatible displacement models", *Num. and Comp. Meth. in Struct. Mech.*, (S.T. Feneves et al. eds.), pp. 43–57, Academic Press, (1973).
17. U. Andelfinger y E. Ramm, "EAS elements for 2D-3D plate and shell structures and their equivalence to HR elements", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, en prensa.
18. K.J. Bathe, E.L. Wilson y F.E. Peterson, "SAP IV – A structural analysis program for static and dynamic response of linear systems", *Report no. EERC 73-11*, Universidad de California, Berkeley, (1974).
19. Hibbitt, Karlsson & Sorensen, Inc. "ABAQUS User's Manual, ver. 5.2", (1992).
20. McNeal-Schwendler Corp., "MSC-NASTRAN Manuals, ver. 67", (1991).
21. Swanson Analysis System Inc., "ANSYS User's Manual, ver. 4.4", (1989).