

# Uma metodologia para a resolução das equações de Navier-Stokes via elementos finitos com aceleração multigrid

Paulo R. Trales

Universidade Federal Fluminense  
Instituto de Matemática  
Departamento de Análise  
Rua Mario Santos Braga s/n Centro Niterói  
CEP 24020-240, Rio de Janeiro, Brasil  
Tel.: 55-21-610 48 70, Fax: 55-21-717 82 69 ramal 51  
e-mail: egm@vm.uff.br

## Sumário

Este trabalho versa sobre a resolução numérica das equações de Navier-Stokes bidimensionais pelo método dos elementos finitos, onde associamos aos esquemas de projeção, o uso das técnicas de aceleração multigrid. A implementação do algoritmo global resultante dessa conjunção de métodos, conduz a um software bastante robusto e preciso, embora de custo computacional relativamente baixo. Esta conclusão é baseada em diversos testes realizados na resolução de problemas acadêmicos ou clássicos em geometrias distintas, com malhas estruturadas ou não, para números de Reynolds até a ordem de alguns milhares. Adicionalmente, diferentes possibilidades em termos de resolutores multigrid foram comparadas, em termos de eficiência e precisão, no tratamento da etapa de convecção-difusão do algoritmo.

### **Palavras-chave:**

*Convecção-difusão, elementos finitos, equações de Navier-Stokes, métodos multigrid, método das projeções.*

## A SOLUTION METHOD OF THE NAVIER-STOKES EQUATIONS VIA FINITE ELEMENTS WITH MULTIGRID ACCELERATION

### Summary

This work deals with the numerical solution of the two-dimensional Navier-Stokes equations. A finite element discretization is used in connection with projection methods, and multigrid techniques provide an acceleration of the solution procedure. The resulting numerical scheme is shown to give rise to a robust software with an implementation cost rather low for this class of problems. This conclusion is drawn on the basis of several numerical tests for flows at Reynolds numbers up to a few thousands, in the context of both academic stationary problems and of a classical time-dependent one, with structured and unstructured meshes. Additionally, a number of different possibilities in terms of multigrid solvers for the advection-diffusion step of the algorithm were checked, in the aim of comparing their efficiency and accuracy.

### **Keywords:**

*Advection-difusion, finite elements, multigrid methods, Navier-Stokes equations, projection Methods.*

## INTRODUÇÃO

Neste trabalho considera-se a resolução numérica das equações de Navier-Stokes bidimensionais pelo método dos elementos finitos, onde associamos aos algoritmos de desacoplamento ditos de projeção, o uso das técnicas de aceleração multigrid para o tratamento da etapa de convecção-difusão. Será considerado unicamente o caso de escoamentos em regiões limitadas do plano, descritos pelo sistema de Navier-Stokes em dois campos, a saber:

- o campo de velocidades  $u$ ,
- o campo de pressões  $p$ .

Vamos detalhar a seguir o conjunto de processos que nos permitiram passar da resolução do problema contínuo à formulação discreta das equações de Navier-Stokes. Inicialmente recordamos aquelas equações sob sua forma adimensional, válidas numa região limitada  $\Omega$  de fronteira  $\Gamma$  do plano, na qual é estudado o escoamento.

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{Re} \Delta u + (u \cdot \nabla) u + \nabla p = f \quad (1)$$

$$\nabla \cdot u = 0 \quad (2)$$

sendo  $f$  um campo de forças dado.

Naturalmente o sistema formado pelas duas equações acima deve ser complementado por condições de contorno apropriadas, sobre as quais discorreremos oportunamente. Por outro lado observamos que nosso estudo é conduzido para as equações evolutivas, visto que a aplicação da metodologia ao caso estacionário se deduz imediatamente. Assim sendo uma condição inicial de velocidade dada, digamos  $u = u_0$  em  $\Omega$  deve ser também incorporada ao sistema.

As escolhas feitas para se chegar ao nosso esquema numérico global de resolução dessas equações, foram guiadas pela preocupação de encontrar o melhor compromisso entre métodos confiáveis, aproximando satisfatoriamente as condições físicas com o menor esforço computacional possível. Isso se justifica pelas sabidamente numerosas aplicações práticas das equações de Navier-Stokes em Mecânica dos Fluidos, onde a complexidade dos problemas conduz freqüentemente a um número muito elevado de incógnitas, podendo atingir facilmente algumas centenas de milhares.

## MÉTODO DAS PROJEÇÕES

Utilizamos no trabalho esquemas em que a resolução para cada uma das incógnitas escalares é desacoplada das outras. Partindo das equações (1) e (2), a técnica das projeções original, dita de Chorin<sup>8</sup>-Temam,<sup>26</sup> consiste em decompor a cada passo de tempo, a resolução do sistema de Navier-Stokes em uma etapa de convecção-difusão e uma etapa de projeção acoplada. Assim numa primeira apresentação, e denotando por  $\Delta t$  o passo de tempo adotado, o algoritmo pode ser expresso por dado  $u_0$ , para  $n = 1, 2, \dots$ , calcular  $u^n$  e  $p_*^n$  depois de determinar  $u_k^n$  por

$$\frac{u_*^n - u^{n-1}}{\Delta t} - \frac{1}{Re} \Delta u_*^n + (u^{n-1} \cdot \nabla) u_*^n = 0 \quad (3)$$

$$\begin{cases} \frac{u^n - u_*^n}{\Delta t} + \nabla p_*^n = 0 \\ \nabla \cdot u^n = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Aqui se impoem condições de contorno apropriadas na fronteira: por exemplo, para fixar idéias,  $u_*^n$  é dado em toda parte. As mesmas condições se aplicam a  $u^n \cdot \vec{n}$  onde  $\vec{n}$  é a normal exterior a  $\Gamma$ . No entanto observa-se que como decorrência das duas equações de (4) temos

$$\Delta p_*^n = \frac{\nabla \cdot u_*^n}{\Delta t} \quad (5)$$

A passagem à equação de segunda ordem (5) requer uma condição de contorno. No caso surge necessariamente de maneira natural uma condição de Neumann homogênea, imposta à pressão  $p_*^n$  sobre o bordo de  $\Omega$

$$\frac{\partial p_*^n}{\partial n} = 0 \quad (6)$$

A pressão  $p_*^n$  é assim unicamente definida, a menos de uma constante aditiva arbitrária. Tal indeterminação será aqui levantada fixando-se  $p_*^n = 0$  em um ponto dado do domínio. Deve ser também observado que a condição de Neumann acima não é propriamente física em geral para a pressão exata, o que entretanto não perturba a convergência do algoritmo.<sup>27</sup>

O algoritmo em versão totalmente desacoplada consiste então em resolver sucessivamente, mediante as condições inicial e de contorno

$$\frac{u_*^n - u_*^{n-1}}{\Delta t} - \frac{1}{Re} \Delta u_*^n + (u_*^{n-1} \cdot \nabla) u_*^n = 0 \quad (7)$$

$$\Delta p_*^n = \frac{\nabla \cdot u_*^n}{\Delta t} \quad (8)$$

$$u^n = u_*^n - \Delta t \nabla p_*^n \quad (9)$$

## O esquema de Goda

O esquema original de Chorin-Temam associa simplicidade e robustez muito embora algumas lacunas relativas à precisão possam ser apontadas do ponto de vista teórico. Muitos estudos,<sup>23,12</sup> ainda discutem sua convergência. Alguns estudos numéricos<sup>11,12</sup> mostram que ele atinge uma convergência de ordem 1 o que veremos a seguir. Dentre as tentativas de melhorar o algoritmo, a proposta por Goda<sup>10</sup> consiste em deixar o gradiente da pressão no passo  $n - 1$  na equação de difusão (7) donde vem o seguinte esquema

$$\frac{u_*^n - u_*^{n-1}}{\Delta t} - \frac{1}{Re} \Delta u_*^n + (u_*^{n-1} \cdot \nabla) u_*^n + \nabla p_*^{n-1} = 0 \quad (10)$$

$$\Delta (p_*^n - p_*^{n-1}) = \frac{\nabla \cdot u_*^n}{\Delta t} \quad (11)$$

$$u^n = u_*^n - \Delta t \nabla (p_*^n - p_*^{n-1}) \quad (12)$$

Está demonstrada na referência,<sup>12</sup> a convergência incondicional em  $O(\Delta t)$  desse esquema. Por outro lado, vários artigos que buscam uma convergência de ordem 2 ou ainda maiores<sup>23,12,5</sup> utilizam na etapa da convecção-difusão, aproximações diferentes da de Euler de ordem 1 (Crank-Nicolson, Euler retrógrado de ordem 2, etc.) foram aplicadas nos esquemas de Chorin-Temam e de Goda. Outros pesquisadores entre os quais Karniadakis *et al.*<sup>14</sup> propõem inverter as etapas de difusão e de projeção, mas a precisão dos resultados ficaria ainda hoje por ser demonstrada.

Neste trabalho limitamo-nos aos esquemas de Chorin-Temam e de Goda totalmente desacoplados.

### Pós-tratamento da pressão

É fato bastante conhecido dos usuários dos métodos de projeção que se  $u^n$  aproxima  $u$  de maneira satisfatória  $p_*^n$  não aproxima bem  $p$ . Essa observação deve-se em boa parte ao fato de se impor sistematicamente à pressão uma condição de Neumann não física. Para superar esse inconveniente, um pós-processamento da pressão a partir da velocidade  $u^n$  calculada a cada passo de tempo é considerado neste trabalho. A pressão devendo satisfazer naturalmente as equações de Navier-Stokes, tendo  $u^n$  calculado, esse pós-tratamento consiste em tomar a divergência da equação (1).

Aproximamos desta maneira  $p$  pela aproximação “fraca”  $p^n$  seguinte

$$\Delta p^n = -\nabla \cdot [(u^n \cdot \nabla)u^n] \quad (13)$$

Por compatibilidade das condições de contorno obtemos

$$\frac{\partial p^n}{\partial n} = -[(u^n \cdot \nabla)u^n] \cdot \vec{n} + \frac{1}{Re} \Delta u^n \cdot \vec{n} \quad (14)$$

sempre supondo  $\frac{\partial u^n}{\partial t} \cdot \vec{n} = 0$ .

Entretanto dentro de um contexto discreto, o tratamento do termo em  $\Delta u^n$  na condição (14) apresenta dificuldades embora superáveis se é admitida uma perda de precisão.<sup>19</sup> Mas nesse caso uma alternativa interessante consiste simplesmente em negligenciá-lo, o que constitui uma aproximação válida ao menos para números de Reynolds elevados. A condição reduz-se então a

$$\frac{\partial p^n}{\partial n} = -[(u^n \cdot \nabla)u^n] \cdot \vec{n} \quad (15)$$

Esse procedimento permite compensar grandemente o defeito de precisão dos esquemas de projeção. A pressão calculada dessa forma se revela, como veremos nos casos-teste apresentados neste artigo, muito mais precisa do que a pressão diretamente calculada  $p_*^n$ .

## DISCRETIZAÇÃO ESPACIAL POR ELEMENTOS FINITOS

### Formulações variacionais

A discretização espacial das equações a resolver a cada passo de tempo e a cada etapa do algoritmo, será feita pelo método dos elementos finitos, para o que é necessário primeiramente escrevê-las numa forma variacional. No caso do esquema original de Chorin-Temam, a formulação variacional do problema (7), (8) y (9) se exprime por

$$\int_{\Omega} \frac{u_*^n - u_*^{n-1}}{\Delta t} \cdot v - \frac{1}{Re} \int_{\Omega} \Delta u_*^n \cdot v + \int_{\Omega} (u_*^{n-1} \cdot \nabla)u_*^n \cdot v = 0 \quad \forall v \in (H_0^1(\Omega))^2 \quad (16)$$

$$\int_{\Omega} \Delta p_*^n q = \int_{\Omega} \frac{\nabla \cdot u_*^n}{\Delta t} q, \quad \forall q \in H^1(\Omega)/\mathbb{R} \quad (17)$$

$$\int_{\Omega} u^n \cdot v = \int_{\Omega} u_*^n \cdot v - \Delta t \int_{\Omega} \nabla p_*^n \cdot v \quad \forall v \in (L^2(\Omega))^2 \quad (18)$$

$$- \int_{\Omega} \Delta p^n q = \int_{\Omega} \nabla \cdot [(u^n \cdot \nabla)u^n] q \quad \forall q \in H^1(\Omega)/\mathbb{R} \quad (19)$$

Como supomos que  $u_*^n$  é sempre imposto sobre a fronteira, levando ainda em conta as condições de contorno (6) e (15) verificadas por  $p_*^n$  e  $p^n$ , após a aplicação de fórmulas de Green clássicas, essas equações se reduzem a

$$\int_{\Omega} \frac{u_*^n \cdot v}{\Delta t} + \frac{1}{Re} \int_{\Omega} \nabla u_*^n \cdot \nabla v + \int_{\Omega} (u^{n-1} \cdot \nabla) u_*^n \cdot v = \int_{\Omega} \frac{u^{n-1} \cdot v}{\Delta t} \quad \forall v \in (H_0^1(\Omega))^2 \quad (20)$$

$$\int_{\Omega} \nabla p_*^n \cdot \nabla q = - \int_{\Omega} \frac{\nabla \cdot u_*^n}{\Delta t} q \quad \forall q \in H^1(\Omega)/\mathbb{R} \quad (21)$$

$$\int_{\Omega} u^n \cdot v = \int_{\Omega} u_*^n \cdot v - \Delta t \int_{\Omega} \nabla p_*^n \cdot v \quad \forall v \in (L^2(\Omega))^2 \quad (22)$$

$$\int_{\Omega} \nabla p^n \cdot \nabla q = - \int_{\Omega} (u^n \cdot \nabla) u^n \cdot \nabla q \quad \forall q \in H^1(\Omega)/\mathbb{R} \quad (23)$$

No caso do esquema de Goda as formulações variacionais são análogas, a menos da modificação trivial de (20) afim de incorporar o termo envolvendo o gradiente de pressão no passo de tempo precedente.

### Discretização espacial P1/P1

Com o objetivo de realizar um bom compromisso entre o esforço computacional e a obtenção de métodos confiáveis, escolhemos utilizar uma formulação discreta por elementos finitos clássicos triangulares lineares contínuos (P1) tanto para a velocidade como para a pressão. A esse respeito, observamos que, conforme demonstrado por Ruas,<sup>21</sup> a utilização de elementos finitos do tipo P1 em soma direta com uma função bolha por triângulo para a velocidade não deveria melhorar de maneira significativa a qualidade dos resultados no contexto do esquema empregado, ao menos para uma bolha particular.

Por outro lado, um estudo orientado para os algoritmos de projeção aqui empregados em versão linearizada (isto é, sem o termo convectivo), realizado por Goldberg e Ruas<sup>11</sup> com o elemento misto utilizado neste trabalho, mostra que se obtêm ordens de convergência satisfatórias, mesmo para uma escolha não ótima de  $\Delta t$ . Apresentamos abaixo as principais conclusões daquele estudo:

Sendo  $h$  o diâmetro máximo dos triângulos da malha utilizada, e  $u^h$  e  $p^h$  a velocidade e a pressão determinadas da forma indicada acima a cada passo de tempo, se  $\Delta t$  é da ordem de  $h$ , o erro da aproximação  $u^h$  na norma  $L^2$  é da ordem de  $h^{\frac{3}{2}}$ , ao passo que o erro para  $p^h$  na norma  $H^1$  será da ordem de  $h$ .

Uma escolha ótima sob o ponto de vista de precisão seria o de tomar  $\Delta t$  da ordem de  $h^2$ , pois nesse caso teríamos uma convergência em  $h^2$  para a velocidade, sendo ainda em  $h$  para o gradiente de pressão, mas essa possibilidade implica evidentemente num maior esforço computacional.

Esse estudo mostra então que para o problema linearizado, obtemos ordens de convergência satisfatórias, mesmo para uma escolha não ótima de  $\Delta t$ .

Notemos que esses resultados se aplicam somente a um passo do algoritmo de projeção de Chorin-Teman (4) e não podem de modo algum garantir a convergência do esquema global quando  $\Delta t$  e  $h$  tendem a zero. Enfim é também interessante observar que a adequação da aproximação contínua linear por triângulos de todos os campos envolvidos, no contexto de algoritmos de projeção foi também estabelecida por Blasco e Codina.<sup>3</sup>

### Tratamento da convecção dominante

É sabido que a resolução efetiva de (20) apresenta problemas de instabilidade numérica, problemas estes provenientes do termo convectivo, sobretudo para números de Reynolds elevados. Uma das técnicas reconhecidamente eficazes para superar esse problema é a devida a Brooks e Hughes,<sup>7</sup> conhecida como SUPG (abreviação de “streamline-upwind Petrov-Galerkin”), isto é, o método de Petrov-Galerkin com difusão agregada sobre as linhas de corrente. Essa técnica consiste em tomar como função teste na formulação variacional da equação da conservação da quantidade de movimento, ao invés de  $v \in H_0^1(\Omega)^2$  (ref.<sup>7</sup>), o campo  $w$  que lhe é associado por

$$w = v + \rho^n(u^{n-1} \cdot \nabla)v$$

onde

$$\rho_{/K}^n = \frac{c \cdot h(K)}{\|u^{n-1}(G_K)\|}$$

sendo  $h(K)$  o diâmetro e  $G_K$  o baricentro, do elemento  $K$  e  $c$  uma constante da ordem de 0,5.

Para o termo contendo  $\rho^n$  como coeficiente não se efetua nenhuma integração por partes. Assim sendo, observando-se por exemplo que no contexto dos algoritmos de projeção aqui empregados, o termo convectivo só aparece na equação de convecção-difusão para determinar  $u_*^n$ , dada a escolha da discretização espacial, no caso do algoritmo de Chorin-Temam essa equação se escreverá na forma variacional seguinte

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{u_*^n \cdot (v + \rho^n(u^{n-1} \cdot \nabla)v)}{\Delta t} + \frac{1}{Re} \int_{\Omega} \nabla u_*^n \cdot \nabla v + \int_{\Omega} (u^{n-1} \cdot \nabla)u_*^n \cdot (v + \rho^n(u^{n-1} \cdot \nabla)v) = \\ & = \int_{\Omega} \frac{u^{n-1} \cdot (v + \rho^n(u^{n-1} \cdot \nabla)v)}{\Delta t} \quad \forall v \in (H_0^1(\Omega))^2 \end{aligned} \quad (24)$$

Para o algoritmo de Goda, seguindo a recomendação de Goldberg e Ruas,<sup>11</sup> o gradiente de pressão de  $p^{n-1}$  só deve ser multiplicado por  $v$ . A etapa de convecção-difusão toma então a forma seguinte

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{u_*^n \cdot (v + \rho^n(u^{n-1} \cdot \nabla)v)}{\Delta t} + \frac{1}{Re} \int_{\Omega} \nabla u_*^n \cdot \nabla v + \int_{\Omega} (u^{n-1} \cdot \nabla)u_*^n \cdot (v + \rho^n(u^{n-1} \cdot \nabla)v) = \\ & = \int_{\Omega} \frac{u^{n-1} \cdot (v + \rho^n(u^{n-1} \cdot \nabla)v)}{\Delta t} - \int_{\Omega} \nabla p^{n-1} \cdot v \quad \forall v \in (H_0^1(\Omega))^2 \end{aligned} \quad (25)$$

## TESTES NUMÉRICOS COM O MÉTODO MULTIGRID

### Resolutores dos sistemas lineares

Como se depreende da subseção precedente, dois tipos de sistemas lineares devem ser resolvidos a cada passo de tempo: um não simétrico para se determinar as componentes de  $u_*^n$ , e outro simétrico com matriz definida positiva para se determinar  $p_*^n$  e  $p_n$ . Vamos descrever aqui brevemente os algoritmos efetivamente implementados no código utilizado para tais resoluções.

Para o cálculo desacoplado das duas componentes da velocidade  $u_*^n$ , tanto com o esquema original de Chorin-Teman como quando utilizamos o esquema de Goda escolhemos os métodos multigrid apresentados em mais detalhes a seguir. No que se refere à obtenção das pressões, utilizamos o método dos gradientes conjugados clássico com pré-condicionamento, devendo-se precisar que este último é aqui efetuado pela fatoração incompleta que mantém a taxa de preenchimento da matriz esparsa de elementos finitos. Por outro lado, principalmente pelas razões apontadas na Seção de Conclusões deste trabalho, é ainda hoje uma questão objeto de alguma controvérsia a preferência, também no caso não simétrico, por métodos da família dos gradientes conjugados pré-condicionados para matrizes de discretização não simétricas, mesmo em versões aperfeiçoadas mais recentes reconhecidamente eficazes. Por isso nossa escolha recaiu nos métodos multigrid, os quais se revelaram totalmente satisfatórios para resolver as equações de convecção-difusão discretizadas da forma indicada na seção anterior.

Fazemos a seguir uma breve recapitulação do princípio desses métodos, acrescentando algumas particularidades relativas à discretizações via elementos finitos.

### Técnicas multigrid

As técnicas multigrid consistem em combinar métodos iterativos básicos, como as iterações de Jacobi, de Gauss-Seidel e variações, (os suavizadores) com correções, utilizando discretizações sobre redes (ou malhas) de discretização mais grosseiras. Sua característica fundamental é que a convergência é independente do tamanho do passo de discretização  $h$ ; na realidade o princípio essencial é o de aproximar a parte suave do erro (grande comprimento de onda) em redes mais grosseiras. A parte não suave do erro, parte oscilatória, é reduzida com um pequeno número de iterações (independentemente de  $h$ ) com um método iterativo básico na rede fina. Outra característica importante é que essas técnicas permitem atingir custos assintóticos em função da ordem  $N$  do sistema que vão de  $O(N \log N)$  para o ciclo padrão e chegam a  $O(N)$  para a versão “Full Multigrid”.

Uma introdução elementar sobre os métodos multigrid é apresentada em Trales;<sup>29</sup> investigações mais elaboradas sobre diferenças finitas em Stubentromberg<sup>25</sup> e Brandt,<sup>6</sup> sobre volumes finitos em Wesseling<sup>31</sup> e sobre elementos finitos em Bank e Rose<sup>1</sup>, Braess e Hackbush,<sup>4</sup> Fuchs,<sup>9</sup> Hackbush,<sup>13</sup> McCormick<sup>17</sup> e Maitre e Musy.<sup>15</sup>

Passamos a descrever algumas técnicas multigrid usadas nesse trabalho.

### Introdução

Sendo  $Ax = b$  um sistema de equações lineares proveniente de uma discretização de um problema de valor de contorno, usaremos  $x$  para denotar a solução exata desse sistema e  $u$  para denotar uma aproximação para a solução exata, gerada por algum método iterativo. Símbolos como  $x$  e  $u$  representam vetores que quando associados a uma rede particular, por exemplo a  $\Omega_h$ , serão denotados por  $x_h$  e  $u_h$ .

Existem duas importantes medidas de  $u$  como uma aproximação de  $x$ , uma é o erro (ou erro algébrico) dado por  $e = x - u$  que é também um vetor e pode ser medido por qualquer norma. Infelizmente o erro é tão inacessível quanto a própria solução exata, entretanto uma medida computável de quanto  $u$  aproxima  $x$  é o resíduo, que é dado por  $d = b - Au$  que é simplesmente a quantidade pela qual a aproximação  $u$  falha em satisfazer o problema original  $Ax = b$ .

O resíduo também é um vetor e seu tamanho pode ser medido pela mesma norma usada para o erro. Podemos encontrar uma relação extremamente importante entre o resíduo e o erro; isto é, facilmente se mostra que  $Ae = d$  que chamamos de equação residual, que diz que o erro satisfaz o mesmo conjunto de equações que o termo desconhecido  $x$  quando  $b$  é trocada pelo resíduo  $d$ . Supondo que uma aproximação  $u$  foi encontrada por algum

método podemos calcular facilmente o resíduo  $d = b - Au$ . Para melhorar a aproximação  $u$ , podemos resolver a equação residual para  $e$  e então calcular uma nova aproximação usando a definição do erro  $x = u + e$ . Na prática a equação do resíduo e essa idéia de correção residual podem ser utilizadas com grande vantagem e desempenham um papel vital nos métodos multigrid.

### O método dois-grid

Seja  $\Omega$  um aberto de  $\mathbb{R}^d$  de fronteira  $\Gamma(\partial\Omega)$  suficientemente regular. Nos interessamos pela resolução de problemas de valor de contorno

$$\begin{cases} A^\Omega x = b^\Omega & \text{em } \Omega \\ A^\Gamma x = b^\Gamma & \text{em } \Gamma \end{cases} \quad (26)$$

onde  $A^\Omega$  designa um operador diferencial linear elítico,  $A^\Gamma$  um operador linear sobre  $\Gamma$ ,  $b^\Omega$  e  $b^\Gamma$  são funções dadas sobre  $\Omega$  e  $\Gamma$  respectivamente.

Utilizando uma discretização por diferenças finitas, elementos finitos ou volumes finitos substitui-se a resolução do problema contínuo (26) por um sistema linear que denotaremos por

$$A_h x_h = b_h \quad \text{em } \Omega_h \quad (27)$$

onde  $\Omega_h$  designa a rede de passo  $h$ ,  $x_h$  é uma função de rede definida sobre  $\Omega_h$  ( $x_h$  é uma função discreta definida sobre os pontos da rede  $\Omega_h$ ) e  $A_h$  é um operador de rede linear.

Para a resolução do sistema linear (27) será aplicado inicialmente o algoritmo dito dois-grid.

Primeiramente apresentaremos o método utilizando somente duas redes, uma fina que notamos por  $\Omega_h$  e outra grosseira que notamos por  $\Omega_H$ , onde  $h$  e  $H$  designam os passos de discretização. Nos limitamos ao caso de redes  $\Omega_h$  e  $\Omega_H$  com passos constantes e iguais em todas as direções.

Designamos por  $\bar{w}_h = \phi_h^{\nu_s}(w_h, A_h, b_h)$  o resultado de  $\nu_s$  onde  $s \in \{0, 1, 2\}$  passos de um método iterativo linear (de matriz de iteração  $\phi_h$ ) aplicada a partir de  $w_h$  para resolver o sistema  $A_h x_h = b_h$ .

No vocabulário multigrid, essas iterações constituem a fase dita de “suavização” ou de “relaxação”; uma iteração dois-grid ( $h, H$ ) que permite passar de  $u^j$  a  $u^{j+1}$  se desenvolve então da seguinte forma:

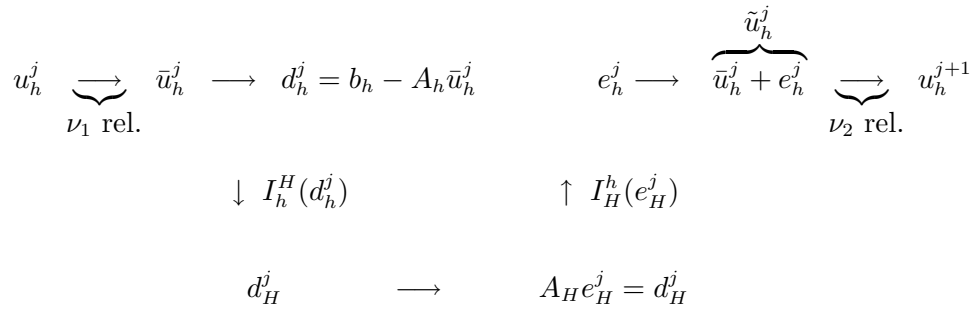
- Fazer a pré-suavização  $\rightarrow \bar{u}_h^j = \phi_h^{\nu_1}(u_h^j, A_h, b_h)$  ou seja, efetuar  $\nu_1$  relaxações de um método iterativo linear, de matriz de iteração  $\phi_h$  aplicada a partir da suposição inicial  $u_h^j$  para resolver o sistema  $A_h x_h = b_h$  obtendo a aproximação  $\bar{u}_h^j$ .
- Calcular o resíduo  $b_h - A_h \bar{u}_h^j$  na rede  $\Omega_h \rightarrow d_h^j = b_h - A_h \bar{u}_h^j$ .
- Transferir para a rede grosseira  $\Omega_H$  esse resíduo encontrado na rede  $\Omega_h$  através do operador de restrição  $\mathbf{R} = I_h^H \rightarrow d_H^j = I_h^H d_h^j$ .
- Efetuar os seguintes cálculos  $\rightarrow$  o erro  $e_H^j$  em  $\Omega_H$  e também a matriz de rede grosseira  $A_H$  a partir da matriz de rede fina  $A_h$ .
- Resolver a equação residual  $\rightarrow A_H e_H^j = d_H^j$  sobre a rede mais grosseira  $\Omega_H$ .
- Transferir para a rede fina  $\Omega_h$  esse erro  $e_H^j$  encontrado na rede  $\Omega_H$  através do operador de prolongamento  $\mathbf{P} = I_H^h \rightarrow e_h^j = I_H^h e_H^j$ .
- Corrigir a aproximação encontrada utilizando esse  $e_h^j \rightarrow \tilde{u}_h^j = \bar{u}_h^j + e_h^j$ .
- Fazer a pós-suavização  $\rightarrow u_h^{j+1} = \phi_h^{\nu_2}(\tilde{u}_h^j, A_h, b_h)$  ou seja, efetuar  $\nu_2$  relaxações de um método iterativo linear, de matriz de iteração  $\phi_h$  aplicada a partir da suposição inicial “melhorada”  $\tilde{u}_h^j$  para resolver o sistema  $A_h x_h = b_h$  obtendo a aproximação  $u_h^{j+1}$ .



Na verdade, para colocarmos em prática o método dois-grid necessitamos ter em mãos os elementos a seguir:<sup>6,13,15,25,31</sup>

- a rede grosseira  $\Omega_H$ ,
- um operador  $A_H$  -representado por uma matriz- sobre a rede grosseira  $\Omega_H$ ,
- os operadores de transferência inter-redes:
  - o operador de restrição  $\mathbf{R} = I_h^H$  para passar de  $\Omega_h$  para  $\Omega_H$ ,
  - o operador de prolongamento  $\mathbf{P} = I_H^h$  para passar de  $\Omega_H$  para  $\Omega_h$ ,
- um procedimento de suavização  $\phi_h$ ,
- os números  $\nu_1$  e  $\nu_2 \in \mathbb{Z}^+$  de passos no procedimento de suavização, devem ser tais que  $\nu_1 + \nu_2 = \nu_0 \geq 1$ ; (ver observações a seguir).

Para fins de codificação, mostramos a seguir a estrutura de um método dois-grid.



**Diagrama 1.** Estrutura de um método dois-grid ( $h, H$ )

Uma definição precisa e compacta do algoritmo dois-grid se resume então a:

suavização 1 (pré-suavização) :	$\bar{u}_h^j = \phi_h^{\nu_1}(u_h^j, A_h, b_h)$	
correção por aproximação na rede grosseira:		
cálculo do resíduo:	$d_h^j = b_h - A_h \bar{u}_h^j$	
restrição do resíduo:	$d_H^j = I_h^H d_h^j$	(28)
resolução sobre $\Omega_H$ de:	$A_H e_H^j = d_H^j$	
prolongamento do erro sobre $\Omega_h$ :	$e_h^j = I_H^h e_H^j$	
correção da aproximação sobre $\Omega_h$ :	$\tilde{u}_h^j = \bar{u}_h^j + e_h^j$	
suavização 2 (pós-suavização) :	$u_h^{j+1} = \phi_h^{\nu_2}(\tilde{u}_h^j, A_h, b_h)$	

O método dois-grid é uma iteração linear e o operador de iteração se escreve

$$\begin{aligned}
 M_h^H &= \phi_h^{\nu_2} K_h^H \phi_h^{\nu_1} \\
 K_h^H &= I_h - I_H^h A_H^{-1} I_h^H A_h
 \end{aligned}
 \tag{29}$$

$I_h$  designando a identidade sobre  $\Omega_h$ .

## Observações

Os diferentes componentes do método dois-grid tem uma grande influência sobre o comportamento do método.

- Escolha da rede grosseira: a mais utilizada é  $H = 2h$  (malha padrão), mas existem outras escolhas adaptadas a diferentes tipos de problemas.<sup>25</sup>
- Escolha do operador  $A_H$ : podemos tomar o operador obtido pela mesma discretização que  $A_h$  para a malha de passo  $H$ . Uma outra escolha<sup>13,31</sup> natural no caso de elementos finitos é  $A_H = \mathbf{R} A_h \mathbf{P}$  ou melhor,  $A_H = I_h^H A_h I_H^h$ .
- Escolha de  $\mathbf{R}$  e de  $\mathbf{P}$ : pares diferentes de  $I_h^H$  e  $I_H^h$  foram propostos por la referência.<sup>25</sup>
- Escolha de  $\phi_h$ : os métodos de relaxação habituais, Jacobi, Gauss-Seidel, SOR (por pontos ou por blocos) devem ser adaptados para obtermos boas propriedades de suavização (boas escolhas de coeficientes para Jacobi Ponderado e SOR, boa numeração das variáveis para Gauss-Seidel, etc.). Métodos não clássicos como a decomposição LU incompleta para uma matriz  $A_h$  são também utilizados como suavizadores.<sup>31</sup> Vários outros métodos baseados em Gauss-Seidel (Lexicográfico, Red-Black, Linhas Alternadas, Distribuído, etc.) vem sendo usados também como suavizadores.<sup>13,25,31</sup>
- Eficiência de  $\phi_h$ : um método de relaxação é chamado de “suavizador eficiente” se reduz os componentes de alta frequência do erro de uma ordem de magnitude em somente um pequeno número de relaxações independentemente de  $h$ .
- $\nu_1$  e  $\nu_2$  são números pequenos, tipicamente 1 ou 2 com  $\nu_1 \geq \nu_2$ ; na verdade poucas relaxações (suavizações) são suficientes<sup>13</sup>  $\nu_1 + \nu_2 \leq 4$  ou 5.

## Generalização do método

A idéia básica para passarmos do método de duas redes (dois-grid) para o método de redes múltiplas (multigrid) é que em lugar de resolvermos a equação residual (28), calculamos uma aproximação  $e_H^j$ , aplicando um método dois-grid para resolver o sistema  $A_H e_H^j = d_H^j$  utilizando então uma rede mais grosseira que  $\Omega_H$ . Daí a iteração dois-grid da seção anterior (com níveis  $\{H, H'\}$  ao invés de  $\{h, H\}$ ) pode ser usado como um solver iterativo da equação  $A_H e_H^j = d_H^j$  uma vez que  $H > 0$ .

Essa combinação dá o método três-grid envolvendo os níveis  $h$ ,  $H$  e  $H'$ . A solução exata da equação  $A_H e_H^j = d_H^j$  é substituída por  $\gamma$  passos de iteração dois-grid nos níveis  $H$ ,  $H'$  envolvendo a solução de novas equações auxiliares  $A_{H'} e_{H'}^j = d_{H'}^j$  para  $\gamma$  diferentes lados direitos  $d_{H'}^j$ .

Se o fator de convergência desse método dois-grid é suficientemente pequeno, basta efetuarmos um pequeno número  $\gamma$  de iterações dois-grid para obtermos uma boa aproximação de  $e_H^j$  em (28). Podemos assim aplicar essa idéia recursivamente utilizando redes mais grosseiras. Se  $H' > 0$ , a solução exata de  $A_{H'} e_{H'}^j = d_{H'}^j$  pode novamente ser aproximada por uma iteração dois-grid nos níveis  $H'$  e  $H''$ . O algoritmo resultante seria um método quatro-grid.

Esse processo pode ser repetido até que todos os níveis tenham sido envolvidos. A equação na rede mais grosseira (nível 0) pode ser resolvida de maneira exata ou de maneira aproximada, e a escolha de qual método de resolução será usado é de pouca importância em virtude da fraca dimensão do sistema; na verdade, no caso de uma resolução por método iterativo, devemos efetuar  $\nu_0 = \nu_1 + \nu_2$  relaxações no sistema de rede grosseira, pois lá existirão poucas incógnitas a serem determinadas.

Consideremos, então, nesse momento uma sequência de redes  $\Omega_h$  de passos de malha decrescentes  $h_k$ ,  $k = (0, 1, 2, \dots)$ . Para simplificar as notações trocaremos  $h_k$  por  $k$ .

$U(\Omega_k)$  designa o espaço de funções de redes definidas sobre  $\Omega_k$  e  $\phi_k^{\nu_s}(w_k, A_k, b_k)$  o resultado de  $\nu_s$  passos de suavização aplicados a  $A_k x_k = b_k$ , a partir da primeira aproximação  $w_k$ .

A cada  $\Omega_k$  associamos os operadores lineares

$$A_k : U(\Omega_k) \longrightarrow (\Omega_k)$$

$$\phi_k : U(\Omega_k) \longrightarrow U(\Omega_k)$$

(operador de iteração do suavizador)

$$I_k^{k-1} : U(\Omega_k) \longrightarrow U(\Omega_{k-1})$$

(operador de transferência inter-redes de restrição)

$$I_{k-1}^k : U(\Omega_{k-1}) \longrightarrow U(\Omega_k)$$

(operador de transferência inter-redes de prolongamento)

e a equação discreta  $A_k x_k = b_k$  em  $\Omega_k$

Um passo de iteração multigrid (com  $(k+1)$  redes) pode resolver  $A_k x_k = b_k$  ( $k$  fixo  $\geq 2$ ) a partir de uma certa aproximação  $u_k^j$  pode ser descrito como se segue:

Passamos de  $u_k^j$  a  $u_k^{j+1}$  por:

suavização 1 (pré-suavização) :	$\bar{u}_k^j = \phi_k^{\nu_1}(u_k^j, A_k, b_k)$
correção por aproximação na rede grosseira:	
cálculo do resíduo:	$d_k^j = b_k - A_k \bar{u}_k^j$
restrição do resíduo:	$d_{k-1}^j = I_k^{k-1} d_k^j$
calculamos uma aproximação $\bar{e}_{k-1}^j$ da solução da equação residual $A_{k-1} e_{k-1}^j = d_{k-1}^j$	
em $\Omega_{k-1}$ aplicando $\gamma$ iterações do método a $k -$ redes (utilizando as redes $\Omega_{k-1}, \Omega_{k-2}, \dots, \Omega_0$ e os operadores de rede correspondentes) a (30) tomando a função de rede nula como primeira aproximação	(30)
prolongamento do erro sobre $\Omega_k$ :	$e_k^j = I_{k-1}^k \bar{e}_{k-1}^j$
correção da aproximação sobre $\Omega_k$ :	$\tilde{u}_k^j = \bar{u}_k^j + e_k^j$
suavização 2 (pós-suavização) :	$u_k^{j+1} = \phi_k^{\nu_2}(\tilde{u}_k^j, A_k, b_k)$

Nota: A suavização 1 efetua  $\nu_1$  passos de pré-suavização sobre  $A_k x_k = b_k$  em  $\Omega_k$  com suposição inicial  $\bar{u}_k^j$ , e a suavização 2 efetua  $\nu_2$  passos de pós-suavização sobre  $A_k x_k = b_k$  em  $\Omega_k$  com suposição inicial  $\tilde{u}_k^j$ .

Supomos na programação dos códigos  $\nu_1, \nu_2, \gamma$  fixados (note que podemos fazer esses parâmetros dependerem do nível). Alguns autores já tem feito softwares em ambiente multigrid onde esses valores podem ser alterados dinamicamente.

### Alguns esquemas multigrid

Podemos ilustrar a estrutura de um passo de iteração multigrid apresentando primeiramente os esquemas V-ciclo e W-ciclo, com quatro níveis de redes (3, 2, 1, 0) respectivamente, representando as diferentes fases de cálculo (suavização, restrição, prolongamento, etc.), através dos seguintes diagramas:

#### Notação:

$\nu_1, \nu_2$  e  $\nu_0 = \nu_1 + \nu_2$  : passos de suavização

$\searrow$ : restrição

: resolução da equação na rede mais grosseira

$\nearrow$ : prolongamento

#### Diagrama 2. Esquemas multigrid típicos

O F-ciclo é na verdade um compromisso entre o V-ciclo e o W-ciclo; na prática ele apresenta as mesmas propriedades de convergência do W-ciclo e é mais barato.

#### Diagrama 3. Esquema F-ciclo

## Caso da discretização por elementos finitos P1

No que tange ao caso específico da discretização espacial empregada de elementos finitos P1, algumas formas de numeração de incógnitas nas diversas malhas envolvidas, como a introduzida no nosso trabalho, permitem um tratamento automático dessa etapa de implementação das técnicas multigrid particularmente simples. Trata-se do princípio das malhas embutidas, onde para cada malha de um dado nível, constrói-se uma malha refinada de nível imediatamente acima, subdividindo-se cada triângulo da primeira em quatro triângulos congruentes, unindo-se os pontos médios dos seus lados. Por esse princípio a numeração de nós para cada nova malha assim gerada, é realizada de forma que os nós vértices dos triângulos da malha que se refina mantenham os mesmos números que nesta última, e somente aqueles que são tais pontos médios recebam novos números na seqüência natural.

Considerando-se para se fixar as idéias o caso em que a função incógnita é conhecida em toda a fronteira do domínio, os operadores de prolongamento e restrição associados a duas malhas de níveis consecutivos são definidos da seguinte forma. O prolongamento consiste em atribuir os valores nodais na malha mais fina, de uma função linear por pedaços definida na malha mais grosseira, como sendo simplesmente idênticos aos que têm nesta última. No caso da restrição à malha mais grosseira de uma função linear por pedaços definida na malha mais fina, seu valor no  $i$ -ésimo nó interno da primeira é obtido através de uma ponderação dos  $N_{i+1}$  nós da segunda que são seus vizinhos (incluído ele mesmo), tal que o peso atribuído ao próprio nó é de  $2/(N_i + 2)$  e aos demais de  $1/(N_i + 2)$ . Assim procedendo, não somente a determinação dos elementos e o armazenamento na forma Morse, das matrizes associadas aos diversos níveis de malha envolvidos, como o acesso a esses mesmos elementos é feito de forma rápida e sistemática. Para maiores detalhes a respeito o autor se refere a Hackbush<sup>13</sup> e a Trales.<sup>29</sup>

Acrescentamos ainda que todas as malhas foram construídas a partir de um arquivo externo contendo a descrição da malha mais grosseira, gerada quer por um código próprio para o caso de domínios simples, quer pelo gerador de malhas do código Modulef para o escoamento em torno de um cilindro. Foram realizados vários testes numéricos para medir a eficiência e a confiabilidade do algoritmo global proposto nesta pesquisa, em especial com o uso dos esquemas do tipo V-ciclo, e dos esquemas W-ciclo e F-ciclo este último somente no caso dos problemas estacionários resolvidos que apresentamos a seguir.

## PROBLEMAS ESTACIONÁRIOS COM SOLUÇÃO EXATA CONHECIDA

Três problemas estacionários, serviram para testar várias configurações do esquema numérico proposto: o escoamento em uma cavidade, o escoamento de Poiseuille entre duas placas paralelas e o escoamento de Couette entre dois cilindros coaxiais. Estudamos de modo particular seu comportamento em função do passo de tempo e do comprimento do passo de malha em malhas finas. No que tange ao algoritmo de resolução, os dois métodos de projeção programados nos nossos códigos -o esquema original de Chorin-Temam e a versão de Goda- são designados nas tabelas respectivamente por "CT" e "G".

Os resultados de convergência desses três casos foram comparados com suas respectivas soluções exatas. O erro da velocidade foi medido na norma  $L_\infty$ . Os erros para a pressão calculada  $p^n$  diretamente através dos métodos de projeção e a pressão pós-processada,  $p^n$  foi medido na norma  $L_2$ . Embora nesses testes tenhamos soluções exatas disponíveis, no intuito de preservarmos a objetividade do estudo numérico preferimos adotar como critério de convergência o único que pode ser empregado em qualquer situação fisicamente realista. Mais precisamente supõe-se que a convergência ocorreu desde que a norma do máximo da diferença entre valores nodais das componentes da velocidade em duas aproximações sucessivas é inferior a dada tolerância razoavelmente pequena. Esta foi aqui tomada igual a 0,001 em todos os casos.

A solução dos problemas testados não depende a priori do número de Reynolds, mas para testar o desempenho do algoritmo, escolhemos diferentes valores desse parâmetro a partir de  $Re = 200$ . O coeficiente proveniente da estabilização de Petrov-Galerkin,  $c$  foi fixada em 0,5 seguindo as considerações dadas no algoritmo de resolução. Já os valores de  $\Delta t$  usados nos testes, em princípio, devem ser escolhidos da ordem do passo de malha, de modo a satisfazer a condição de estabilidade própria à estratégia semi-implícita de integração no tempo para a etapa de convecção-difusão do algoritmo empregado. Tal escolha respeita também a recomendação de Goldberg e Ruas,<sup>11</sup> no que tange tanto à estabilidade quanto à otimização da qualidade da aproximação, próprias a uma iteração completa do algoritmo. No entanto, dado que no caso de um problema estacionário, um maior ou menor  $\Delta t$  pode influir na rapidez de convergência, fizemos algumas experiências com diferentes valores desse parâmetro que não respeitem necessariamente os critérios supracitados, no intuito de determinar empiricamente o tempo de CPU necessário para se atingir a solução para diferentes  $\Delta t$ . De um modo geral observou-se que tal influência é significativa, e para melhor ilustrar essa conclusão, mostraremos com algumas tabelas, para o caso do escoamento de Poiseuille, a rapidez de convergência relativa a diferentes valores de  $\Delta t$ .

Passamos abaixo à descrição desses problemas com a respectiva apresentação dos resultados numéricos. Para todos tomamos  $f = (0, 0)$ .

### O problema da cavidade

Neste caso o domínio físico de cálculo é o quadrado unitário, isto é

**Figura 1.** Domínio do escoamento nos problemas da cavidade e de Poiseuille

Para este problema a velocidade é imposta sobre todas as paredes (lados do quadrado) da forma

$$u(x, y) = (u_x, u_y)$$

com

$$u_x(x, y) = x$$

$$u_y(x, y) = -y$$

Quanto à pressão, será fixada nula em um ponto para se determinar de forma única a solução do problema, na medida em que a velocidade é inteiramente imposta sobre toda a fronteira do domínio do escoamento. Os valores exatos da velocidade são as funções  $u_x$  e  $u_y$  das condições de contorno já definidas, e a pressão exata determinada a menos de uma constante aditiva e é dada por  $p(x, y) = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ .

No caso, escolhemos  $p(0, 0) = 0$ .

Sendo  $L$  o comprimento do lado da cavidade, o número de Reynolds é dado por  $\frac{L}{\nu}$  onde  $\nu$  é a viscosidade cinemática do fluido.

Apresentamos aqui os resultados obtidos com uma malha média, de 1089 nós, e com a malha mais fina de 4225 nós. Nas tabelas de “Convergência” seguintes figuram na primeira linha, o método multigrid, o esquema utilizado, o suavizador com respectivos parâmetros de pré e pós-suavização e por fim o número de iterações multigrid usado. Na segunda linha figuram o intervalo de tempo, as normas, a quantidade de iterações necessárias para a convergência do algoritmo quando ele converge ou NHC caso contrário, visível ou após um certo número de iterações (estabilidade do número de graus de liberdade não verificada) ou divergência do resolutor matricial empregado e por último o tempo de CPU em segundos. Entretanto, na primeira hipótese se temos uma aproximação suficiente da solução as normas dos erros serão indicadas, como também caso contrário apresenta-se entre parênteses o número de iterações onde o cálculo foi interrompido. Finalmente, os resultados indicados em itálico nas duas últimas linhas fornecem o melhor desempenho para  $u^n$ ,  $p_*^n$  e  $p^n$  sobre diferentes passos de tempo para cada um dos métodos de projeção.

<b>Re 200</b>	Mét $\rightarrow V$	Esq $\rightarrow 2N$	Suav $\rightarrow G(2,2)$	mg = 8	1089 nós
$\Delta t = 0,05$	$\ u^n - u_{exa}\ _{L^\infty}$	$\ p_*^n - p_{exa}\ _{L^2}$	$\ p^n - p_{exa}\ _{L^2}$	Conv.	Cpu
CT	0,01302	0,00369	0,00109	27	195,77
G	0,01806	0,00352	0,00249	33	242,13

<b>Re 1000</b>	Mét $\rightarrow V$	Esq $\rightarrow 2N$	Suav $\rightarrow G(2,2)$	mg = 8	1089 nós
$\Delta t = 0,05$	$\ u^n - u_{exa}\ _{L^\infty}$	$\ p_*^n - p_{exa}\ _{L^2}$	$\ p^n - p_{exa}\ _{L^2}$	Conv.	Cpu
CT	0,03842	0,01646	0,00678	44	318,17
G	0,01254	0,00516	0,00320	59	430,95

<b>Re 200</b>	Mét $\rightarrow V$	Esq $\rightarrow 2N$	Suav $\rightarrow G(2,2)$	mg = 8	4225 nós
$\Delta t = 0,05$	$\ u^n - u_{exa}\ _{L^\infty}$	$\ p_*^n - p_{exa}\ _{L^2}$	$\ p^n - p_{exa}\ _{L^2}$	Conv.	Cpu
CT	0,00898	0,00745	0,00062	37	1541,79
G	0,00779	0,00832	0,00080	42	1283,57

<b>Re 1000</b>	Mét $\rightarrow V$	Esq $\rightarrow 2N$	Suav $\rightarrow G(2,2)$	mg = 8	4225 nós
$\Delta t = 0,05$	$\ u^n - u_{exa}\ _{L^\infty}$	$\ p_*^n - p_{exa}\ _{L^2}$	$\ p^n - p_{exa}\ _{L^2}$	Conv.	Cpu
CT	0,00793	0,01764	0,00925	42	2026,88
G	0,07985	0,00987	0,00108	47	1583,57

A análise desses resultados confirma que a convergência é mais rapidamente obtida pelo algoritmo original de Chorin-Teman em relação ao algoritmo de Goda.

Sobre a malha mais fina podemos dizer que os resultados são similares, embora não tenhamos um  $\Delta t$  ótimo para os dois métodos.

Por outro lado, encontramos aqui a justificativa do cálculo da pressão pós-processada, pois os resultados em todos os casos, são bem melhores do que aqueles da pressão diretamente calculada pelo algoritmo das projeções.

O problema da cavidade também serviu para testar o comportamento da metodologia numérica aqui empregada com o aumento do número de Reynolds. Apresentamos a seguir os resultados obtidos nesse sentido com o V-ciclo a três níveis, naturalmente mantendo a hipótese de uma resposta laminar com os mesmos dados e sobre a mesma rede mais fina.

<b>Re 3000</b>	Mét $\rightarrow V$	Esq $\rightarrow 3N$	Suav $\rightarrow L(2,1)$	mg = 7	4225 nós
$\Delta t = 0,05$	$\ u^n - u_{exa}\ _{L^\infty}$	$\ p_*^n - p_{exa}\ _{L^2}$	$\ p^n - p_{exa}\ _{L^2}$	Conv.	Cpu
CT	0,78250	0,21301	0,08539	48	2526,46
G	0,77113	0,25803	0,10201	82	4155,50

<b>Re 4000</b>	Mét $\rightarrow V$	Esq $\rightarrow 3N$	Suav $\rightarrow L(2,1)$	mg = 7	4225 nós
$\Delta t = 0,05$	$\ u^n - u_{exa}\ _{L^\infty}$	$\ p_*^n - p_{exa}\ _{L^2}$	$\ p^n - p_{exa}\ _{L^2}$	Conv.	Cpu
CT	0,84280	0,20607	0,10040	50	2632,62
G	0,85383	0,25436	0,12037	84	4332,11

Como se pode deprender dessas tabelas, quanto maior o número de Reynolds piores foram os resultados e maior o número de iterações no tempo necessário para se atingir o regime estacionário, o que é mais do que plausível.

### O escoamento de Poiseuille

Tomamos aqui o mesmo domínio do caso anterior. O escoamento se faz entre dois planos paralelos. A velocidade é imposta na entrada e na saída do domínio (lados verticais) por

$$u(x, y) = (u_x, u_y)$$

com

$$u_x(x, y) = y(1 - y)$$

$$u_y(x, y) = 0$$

A velocidade exata corresponde às funções dadas nos contornos, e a pressão sempre fixada em um ponto terá como valor exato,  $p(x, y) = -\frac{2}{Re} \cdot x$ , isto é, ainda aqui,  $p(0, 0) = 0$ . O número de Reynolds é calculado como anteriormente. Resultados obtidos com a malha de 1089 nós:



<b>Re 200</b>	Mét $\rightarrow W$	Esq $\rightarrow 3N$	Suav $\rightarrow D(3,2)$	mg = 6	1089 nós
$\Delta t = 0,3$	$\ u^n - u_{exa}\ _{L^\infty}$	$\ p_*^n - p_{exa}\ _{L^2}$	$\ p^n - p_{exa}\ _{L^2}$	Conv.	Cpu
CT	0,00449	0,00012	0,00010	17	130,23
G	0,00477	0,00483	0,00020	16	122,17

	Mét $\rightarrow V$	Esq $\rightarrow 3N$	Suav $\rightarrow G(2,2)$	mg = 8	1089 nós
$\Delta t = 0,2$	$\ u^n - u_{exa}\ _{L^\infty}$	$\ p_*^n - p_{exa}\ _{L^2}$	$\ p^n - p_{exa}\ _{L^2}$	Conv.	Cpu
CT	0,00435	0,00018	0,00008	22	167,49
G	0,00423	0,00051	0,00011	21	160,84

	Mét $\rightarrow V$	Esq $\rightarrow 3N$	Suav $\rightarrow G(2,2)$	mg = 8	1089 nós
$\Delta t = 0,1$	$\ u^n - u_{exa}\ _{L^\infty}$	$\ p_*^n - p_{exa}\ _{L^2}$	$\ p^n - p_{exa}\ _{L^2}$	Conv.	Cpu
CT	0,00803	0,00046	0,00022	34	254,83
G	0,00793	0,00062	0,00021	33	252,11

	Mét $\rightarrow V$	Esq $\rightarrow 3N$	Suav $\rightarrow G(2,2)$	mg = 8	1089 nós
$\Delta t = 0,05$	$\ u^n - u_{exa}\ _{L^\infty}$	$\ p_*^n - p_{exa}\ _{L^2}$	$\ p^n - p_{exa}\ _{L^2}$	Conv.	Cpu
CT	0,01977	0,00107	0,00072	45	344,34
G	0,01993	0,00751	0,00072	45	340,08

Como se pode deduzir das tabelas os melhores resultados, quanto à convergência, são obtidos com  $\Delta t = 0,3$  embora seja h cerca de dez vezes menor. Mais ainda os resultados pioram quanto menor  $\Delta t$ . Em visto disso adotamos o valor de  $\Delta t = 0,3$  no caso seguinte.

<b>Re 1000</b>	Mét $\rightarrow V$	Esq $\rightarrow 3N$	Suav $\rightarrow G(2,2)$	mg = 8	1089 nós
$\Delta t = 0,3$	$\ u^n - u_{exa}\ _{L^\infty}$	$\ p_*^n - p_{exa}\ _{L^2}$	$\ p^n - p_{exa}\ _{L^2}$	Conv.	Cpu
CT	0,00230	0,00009	0,00004	24	181,17
G	0,00189	0,00090	0,00005	23	173,83

Resultados obtidos com a malha de 4225 nós:

<b>Re 200</b>	Mét $\rightarrow$ V	Esq $\rightarrow$ 3N	Suav $\rightarrow$ G(2,2)	mg = 8	4225 nós
$\Delta t = 0,3$	$\ u^n - u_{exa}\ _{L^\infty}$	$\ p_*^n - p_{exa}\ _{L^2}$	$\ p^n - p_{exa}\ _{L^2}$	Conv.	Cpu
CT	0,00473	0,00012	0,00007	17	1011,98
G	0,00459	0,00408	0,00018	16	956,45

	Mét $\rightarrow$ V	Esq $\rightarrow$ 3N	Suav $\rightarrow$ G(2,2)	mg = 8	4225 nós
$\Delta t = 0,2$	$\ u^n - u_{exa}\ _{L^\infty}$	$\ p_*^n - p_{exa}\ _{L^2}$	$\ p^n - p_{exa}\ _{L^2}$	Conv.	Cpu
CT	0,00474	0,00021	0,00010	22	1294,65
G	0,00458	0,00401	0,00010	21	1232,93

Observa-se a mesma tendência quanto à escolha ótima de  $\Delta t$  com respeito à convergência. Então de novo tomando  $\Delta t = 0,3$  temos:

<b>Re 1000</b>	Mét $\rightarrow$ V	Esq $\rightarrow$ 3N	Suav $\rightarrow$ G(2,2)	mg = 8	4225 nós
$\Delta t = 0,3$	$\ u^n - u_{exa}\ _{L^\infty}$	$\ p_*^n - p_{exa}\ _{L^2}$	$\ p^n - p_{exa}\ _{L^2}$	Conv.	Cpu
CT	0,00209	0,00008	0,00003	25	1457,61
G	0,00142	0,00063	0,00005	24	1404,79

Apresentamos a seguir uma comparação entre o V-ciclo o W-ciclo e o F-ciclo com quatro níveis de redes para o escoamento de Poiseuille. Selecionamos nessa comparação apenas o esquema de Chorin-Teman. Resultados obtidos com a malha de 4225 nós:

<b>Re 500</b>	Mét $\rightarrow$ V	Esq $\rightarrow$ 4N	Suav $\rightarrow$ D(3,2)	mg = 6	4225 nós
$\Delta t = 0,05$	$\ u^n - u_{exa}\ _{L^\infty}$	$\ p_*^n - p_{exa}\ _{L^2}$	$\ p^n - p_{exa}\ _{L^2}$	Conv.	Cpu
CT	0,10983	0,02878	0,00396	11	584,33

	Mét $\rightarrow$ W	Esq $\rightarrow$ 4N	Suav $\rightarrow$ D(3,2)	mg = 6	4225 nós
$\Delta t = 0,05$	$\ u^n - u_{exa}\ _{L^\infty}$	$\ p_*^n - p_{exa}\ _{L^2}$	$\ p^n - p_{exa}\ _{L^2}$	Conv.	Cpu
CT	0,10342	0,02659	0,00378	11	657,12

	Mét $\rightarrow F$	Esq $\rightarrow 4N$	Suav $\rightarrow D(3,2)$	mg = 6	4225 nós
$\Delta t = 0,05$	$\ u^n - u_{exa}\ _{L^\infty}$	$\ p_*^n - p_{exa}\ _{L^2}$	$\ p^n - p_{exa}\ _{L^2}$	Conv.	Cpu
CT	0,10398	0,02733	0,00381	11	621,07

É interessante notar que embora tenhamos resultados mais apurados no esquema W-ciclo em relação ao V-ciclo existe uma diferença de tempo não desprezível -em torno de 13 %- a mais para o primeiro em relação ao segundo. Isso era previsto pois existe uma maior quantidade de operações de transferência inter-redes e naturalmente de pré e pós-suavizações efetuadas naquele tipo de ciclo. O F-ciclo exibiu um desempenho globalmente comparável ao do W-ciclo. Embora os esquemas W-ciclo e F-ciclo tenham propriedades de convergência parecidas, o W-ciclo apresenta na maioria das vezes melhores resultados, o que foi constatado com o nosso código.

### O escoamento de Couette

Estudaremos em seguida o escoamento estacionário de um fluido entre dois cilindros circulares coaxiais de comprimento infinito. O cilindro interior de raio  $r_i$  será animado de um movimento de rotação com velocidade tangencial  $V_\theta = 1$  sobre o cilindro interno e o cilindro exterior de raio  $r_e$  será suposto em repouso.

**Figura 2.** Domínio do escoamento no problema de Couette

A velocidade angular do fluido é dada por

$$\omega(r) = \frac{r_i V_\theta}{r_e^2 - r_i^2} \frac{r_e^2 - r^2}{r^2} \quad \text{onde} \quad r^2 = x^2 + y^2$$

Podemos então deduzir as velocidades cartesianas

$$u(x, y) = (u_x, u_y)$$

$$\text{com } u_x(x, y) = -y \left( \frac{V_\theta}{r_e^2 - r_i^2} \frac{r_e^2 - r^2}{r^2} \right)$$

$$u_y(x, y) = x \left( \frac{V_\theta}{r_e^2 - r_i^2} \frac{r_e^2 - r^2}{r^2} \right)$$

Por outro lado, as equações de Navier-Stokes em coordenadas cilíndricas fornecem

$$\frac{\partial p}{\partial r} = r \omega^2(r)$$

Assim impondo-se a pressão nula sobre o cilindro imóvel deduzimos

$$p(r) = \frac{r_i^2 V_\theta^2}{(r_e^2 - r_i^2)^2} \left[ \frac{r^2}{2} - \frac{r_e^4}{2r^2} + 2r_e^2(\ln r_e - \ln r) \right]$$

Afim de simplificar as expressões tomamos  $r_i = 1$ ; e  $r_e = 2$ ; temos então

$$u(x, y) = (u_x, u_y)$$

com

$$u_x(x, y) = -y \left( \frac{4 - r^2}{3r^2} \right)$$

$$u_y(x, y) = x \left( \frac{4 - r^2}{3r^2} \right)$$

$$p(x, y) = \frac{1}{9} \left[ \frac{r^2}{2} - \frac{8}{r^2} + 8(\ln 2 - \ln r) \right]$$

Podemos facilmente verificar que a velocidade e a pressão assim definidas verificam as equações de Navier-Stokes. O número de Reynolds é calculado por  $Re = \frac{V_\theta r_i}{\nu}$ , onde tomamos  $V_\theta = 1$ .

A simetria do problema permite só considerarmos um quarto do domínio conforme a figura para efetuarmos os cálculos. Tomamos nessa forma de resolução a velocidade dada nas porções da fronteira com as referências 4 e 2, embora essa não seja a condição mais adequada fisicamente.

**Figura 3.** Geração da malha no problema de Couette com uso da simetria

**Figura 4.** Malha tipo para resolver o problema de Couette sem uso da simetria

Uma segunda possibilidade foi a de considerar como domínio de resolução toda a coroa circular.

A malha do quarto de coroa foi construída por mapeamento de uma malha uniforme de um quadrado unitário de vértices  $(r_i, 0)$ ,  $(r_i + 1, 0)$ ,  $(r_i + 1, 1)$ ,  $(r_i, 1)$  naquele domínio, onde essencialmente as coordenadas cartesianas dos nós passam a representar o papel das coordenadas polares.

No caso da coroa inteira, a malha foi construída pela sua subdivisão em  $M$  camadas de largura variável e  $N$  subdivisões por camada conforme a figura anteriormente mostrada.

Resultados obtidos com a malha de 4225 nós:

<b>Re 200</b>	Mét $\rightarrow$ 2G	Esq $\rightarrow$ 2N	Suav $\rightarrow$ G(2,2)	mg = 8	4225 nós
$\Delta t = 0,05$	$\ u^n - u_{exa}\ _{L^\infty}$	$\ p_*^n - p_{exa}\ _{L^2}$	$\ p^n - p_{exa}\ _{L^2}$	Conv.	Cpu
CT	0,01737	0,09216	0,0311	160	9153,74
G	0,00552	0,03112	0,0229	162	9262,31

<b>Re 1000</b>	Mét $\rightarrow$ 2G	Esq $\rightarrow$ 2N	Suav $\rightarrow$ G(2,2)	mg = 8	4225 nós
$\Delta t = 0,05$	$\ u^n - u_{exa}\ _{L^\infty}$	$\ p_*^n - p_{exa}\ _{L^2}$	$\ p^n - p_{exa}\ _{L^2}$	Conv.	Cpu
CT	0,02707	0,08546	0,00449	252	14169,63
G	0,00801	0,03593	0,00286	251	14390,57

## RESOLUÇÃO DE UM PROBLEMA EVOLUTIVO

Para completar os estudos numéricos apresentados neste artigo, vamos considerar o caso de um problema bem menos acadêmico do que os resolvidos na seção anterior. Trata-se do problema evolutivo, relativo ao escoamento de um fluido viscoso incompressível que se produz em torno de um cilindro circular de comprimento infinito. Tal como muitos autores cujo objetivo principal é ilustrar o acerto da escolha de uma determinada metodologia numérica para simular escoamentos reais, contentamo-nos aqui em estudar apenas a fase inicial do escoamento. Essa escolha é feita dado que a resposta física é bem conhecida através de diversos resultados experimentais disponíveis na literatura, podendo-se dessa forma aferir adequadamente a robustez de um código de simulação. A realização bem sucedida dessas simulações, que se pode depreender dos diversos resultados apresentados mais adiante, enseja o prosseguimento das pesquisas nessa direção, mediante a aplicação do código aqui empregado ao caso mais complexo dos estágios ulteriores do escoamento, no qual conhecidamente instabilidades se desenvolvem a jusante do cilindro.<sup>22</sup>

Definimos por  $L_0$  a distância entre as duas paredes - que como o cilindro pode ter comprimento infinito  $D$  o diâmetro do cilindro,  $L_1$  a distância da entrada do domínio ao centro deste,  $L_2$  a distância do centro do cilindro até a saída do domínio,  $L_3$  a altura das paredes e  $L_4$  o comprimento do domínio. O domínio de estudo bidimensional (área hachurada) é então o da Figura 5.

**Figura 5.** Domínio do escoamento no problema do cilindro

As condições de contorno do domínio são:

- $\underline{u} = 0$  (condição de aderência) sobre o cilindro  $u = \underline{u} = 0$ ; para  $x^2 + y^2 = \frac{D^2}{4}$ ,
- uma velocidade igual a  $\underline{u}$  na entrada do domínio e sobre a parede inferior e superior  $u = \underline{u} = (\underline{u}_x, 0)$  para  $x = -L_1$  e  $y = \pm \frac{L_3}{2}$ .

Duas condições de contorno à saída do domínio  $x = L_2$  foram testadas com o objetivo de determinar qual daria a resposta mais realista longe do obstáculo. As condições de contorno seguintes foram determinadas dentro do contexto do método das projeções. Sobre a reta  $x = L_2$

$$\begin{aligned} \text{A)} \quad & \frac{\partial u_x}{\partial x} = u_y = p = 0 \\ \text{B)} \quad & u_x = \underline{u}_x, \quad \frac{\partial u_y}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \end{aligned}$$

Os domínios de cálculo sobre os quais foram feitos os estudos numéricos são definidos pelos valores

$$L_0 = \infty; \quad L_1 = \frac{5}{2}D; \quad L_2 = \frac{25}{2}D; \quad L_3 = \frac{10}{2}D$$

O comprimento característico do escoamento é aqui o diâmetro  $D$  do cilindro e o cálculo do número de Reynolds será modificado variando-se  $\nu$ . Números de Reynolds indo de algumas centenas a milhares foram testados.

Estes são os casos que serão estudados numericamente. Os resultados obtidos pelo uso das técnicas multigrid nas equações da convecção-difusão darão uma estimativa da robustez daquelas técnicas.

Para o problema do cilindro foram construídas duas malhas grosseiras, a primeira com 408 nós e 730 elementos e a segunda com 541 nós e 988 elementos. As etapas seguintes de geração de malhas mais finas, tabelas de incidência etc. foram efetuadas pelas rotinas dos algoritmos multigrid. Por exemplo, a primeira malha em dois níveis de redes passou para 1546 nós e 2920 elementos e em três níveis para 6012 nós e 11680 elementos.

Os escoamentos estacionários deram uma estimativa da precisão geral do algoritmo, pois seus resultados são comparados com as soluções exatas. O escoamento em torno do cilindro entre outros ensinamentos sobre o comportamento do algoritmo sobre malhas bastante finas, permitiu estudar a influência das condições de contorno na saída do domínio levando em conta resultados já bem conhecidos.<sup>28</sup>

A propósito, o algoritmo das projeções conduz como vimos ao cálculo de uma primeira velocidade aproximada  $u_*^n$ , mediante as definições de condições iniciais e condições de contorno detalhadas, segundo os problemas físicos descritos em la referência.<sup>29</sup> Notemos que as relações (9) e (12) que permitem obter  $u^n$  a partir de  $u_*^n$  e  $p_*^n$  mostram que as condições de contorno impostas a  $u^n$  podem ser distintas daquelas impostas a  $u_*^n$ .

Assim no caso particular do escoamento em torno de um cilindro, as condições A) e B) definidas sobre o segmento de saída do domínio de cálculo, em particular sobre  $u^n$ , devem resultar de implementações numéricas apropriadas de condições incidindo sobre  $u_*^n$ , que podem até ser de tipos diferentes.

Vejamos então as condições que impusemos a  $u_*^n$  no segmento de saída do domínio  $x = L_2$ , de forma a fazer  $u^n$  (e  $p^n$ ) verificar A) ou B)

$$\begin{aligned} 1) \quad & \frac{\partial u_{x*}^n}{\partial x} = u_{y*}^n = 0 \quad \implies \quad u_y^n = 0 \text{ pois } p_*^n = 0 \text{ sobre } x = L_2, \quad \implies \quad \text{A)}, \\ & \text{posto que } \nabla \cdot u^n = 0 \\ 2) \quad & u_{x*}^n = \underline{u}_x \text{ e } \frac{\partial u_{y*}^n}{\partial x} = 0 \quad \implies \quad \text{B)}, \\ & \text{posto que } \frac{\partial p_*^n}{\partial x} = 0 \text{ sobre } x = L_2 \end{aligned}$$

Utilizamos em nossas simulações computacionais desse escoamento o método V-ciclo de três-níveis, com oito iterações multigrid e com o suavizador Gauss-Seidel com duas pré e duas pós-suavizações.

Com o objetivo de determinar a aproximação numérica mais realista possível selecionamos a condição de contorno 1), posto que com a condição de contorno 2) observamos instabilidades que não ocorreram com a condição adotada. No intuito de permanecermos em um regime tipicamente laminar o número de Reynolds foi aqui fixado inicialmente em 200. Aumentamos em seguida esse parâmetro para 1000 e finalmente para 2000. Escolhemos utilizar nos gráficos de velocidade o algoritmo original de Chorin-Teman para  $Re = 200$ , o algoritmo de Goda para  $Re = 1000$  e o algoritmo original de Chorin-Teman para  $Re = 2000$ .

A condição de contorno selecionada será validada nos dois primeiros testes, com uma malha grosseira com 1546 nós para testar sua viabilidade e no último  $-Re = 2000-$  com uma malha de 2541 nós. Essas duas malhas (apresentadas a seguir) foram geradas pelas rotinas multigrid do programa. O cálculo foi feito até  $T = 13$ . Apresentamos no final das tabelas do último escoamento tratado a variação da pressão naquele tempo.

Os parâmetros numéricos são justificados por estudos teóricos e pelos resultados dos escoamentos estacionários:  $c = 0,5$  e  $\Delta t = 0,05$ .

O valor de  $c$  ou  $\rho$  deve permitir uma boa estabilização do esquema, sobretudo para esses números de Reynolds tratados, sem entretanto adicionar demasiada viscosidade artificial. O passo de tempo parece ter sido uma boa escolha.

Teria sido interessante proceder a uma comparação entre as técnicas multigrid usadas neste trabalho, com algum método iterativo baseado em uma só rede (método single-grid). Entretanto pareceu-nos que, sendo a quantidade de métodos desta última classe disponíveis atualmente, praticamente ilimitados, qualquer comparação com um método particular seria pouco significativa ou tendenciosa. No entanto dentro de um panorama mais geral é possível se fazer a seguinte comparação entre as duas classes de métodos no contexto das equações da convecção-difusão com baixa difusividade. Sabidamente um método single-grid que preserva as vantagens da esparsividade de uma matriz de discretização por elementos finitos só é competitivo se alguma forma de pré-condicionamento baseado na fatoração incompleta da mesma é utilizado. Justamente, tratando-se aqui de uma matriz com uma componente antisimétrica dominante, os riscos de ruptura (*break-down*) de tal fatoração são consideráveis. Note-se que tal dificuldade não se apresenta de nenhuma maneira no caso dos métodos multigrid, sendo portanto essa uma vantagem a priori dos mesmos sobre os métodos single-grid no caso presente.

Por outro lado considerando sua notória eficiência para o caso de sistemas com matriz simétrica positiva-definida no cálculo da pressão empregamos o método dos gradientes conjugados com pré-condicionamento por fatoração incompleta.



Malha fina com 15808 elementos gerada pelo código a partir de uma malha lida com 3952 elementos ( $Re = 2000$ )

**Figura 6.** Malhas usadas no problema do cilindro

**Figura 7.** Vistas do campo de velocidades em torno do cilindro para  $Re = 1000$  e  $T = 13$

**Figura 8.** Gráfico de pressão ao longo do eixo  $Ox$  para  $Re = 1000$  e  $T = 13$

**Figura 9.** Vistas do campo de velocidades em torno do cilindro para  $Re = 2000$  e  $T = 13$

**Figura 10** Gráfico de pressão ao longo do eixo  $Ox$  para  $Re = 2000$  e  $T = 13$

## CONCLUSÕES

As conclusões que podem ser extraídas desse estudo são de várias ordens. Em primeiro lugar sobre o bom comportamento geral dos métodos de projeção no contexto dos escoamentos bidimensionais de fluidos viscosos incompressíveis. Aplicados com o uso de discretização feita pelo método dos elementos finitos, os algoritmos testados, Chorin-Temam e Goda, se mostraram bastante robustos e eficientes nos diferentes ensaios apresentados. Sobre o uso das técnicas multigrid podemos dizer que desde os testes preliminares feitos na equação da convecção-difusão seu comportamento tanto a nível de rapidez quanto a nível de qualidade de resultados superou nossas previsões. A propósito, teria sido interessante proceder a uma comparação entre as técnicas multigrid usadas neste trabalho, com algum método iterativo baseado em uma só rede (método single-grid). Entretanto pareceu-nos que, sendo a quantidade de métodos desta última classe disponíveis atualmente, praticamente ilimitada, qualquer comparação com um método particular seria pouco significativa ou tendenciosa. No entanto dentro de um panorama mais geral é possível se fazer a seguinte comparação entre as duas classes de métodos no contexto das equações da convecção-difusão com baixa difusividade. Sabidamente um método single-grid que preserva as vantagens da esparsidade de uma matriz de discretização por elementos finitos só é competitivo se alguma forma de condicionamento baseado na fatoração incompleta desta é utilizado. Justamente, tratando-se aqui de uma matriz com uma componente antisimétrica dominante, os riscos de ruptura (*break-down*) de tal fatoração são consideráveis. Note-se que tal dificuldade não se apresenta de nenhuma maneira no caso dos métodos multigrid, sendo portanto essa uma vantagem a priori dos mesmos sobre os métodos single-grid no caso presente. Por outro lado, considerando sua notória eficiência para o caso de sistemas com matriz simétrica positiva-definida, no cálculo da pressão empregamos o método dos gradientes conjugados com pré-condicionamento por fatoração incompleta.

Em resumo, os resolutores de sistemas utilizados no trabalho parecem ser no momento presente a melhor escolha, pois seus desempenhos indicaram uma grande estabilidade a um custo reduzido.

No que se refere aos problemas estacionários os esquemas acima descritos nunca divergiram, o que é naturalmente explicado pelas escolhas numéricas feitas onde não foram respeitadas certas considerações físicas. A convergência do algoritmo de Goda apresentou algumas vezes dificuldades nas diferentes configurações, mas quando a convergência era atingida seu nível de precisão era mais apurado.

Sobre o escoamento em torno de um cilindro, as soluções calculadas pelo código se revelaram bastante próximas das soluções reais. Com um número de Reynolds fixado à 200 as condições de contorno adotadas na saída do domínio acarretaram uma grande estabilidade do esquema. As validações efetuadas para o número de Reynolds igual a 1000 e 2000, quando comparadas com experiências e outros estudos numéricos realmente justificaram a escolha desse método e da estabilização utilizada do tipo Petrov-Galerkin.

Uma outra conjectura que nos parece muito interessante e pertinente foi sobre a codificação do método multigrid, que está de tal forma geral, que com quase nenhuma alteração na sua programação pode ser aplicado de imediato a problemas tridimensionais.

Uma contribuição do trabalho, que nos parece relevante, diz respeito ao uso de malhas não estruturadas que exigiu o uso de complexas ferramentas computacionais e técnicas de apoio para permitir a implementação dos métodos multigrid associados aos algoritmos das projeções.

O pós-tratamento da pressão apresentado aqui também corrige em grande parte alguns maus resultados da pressão habitualmente encontrados nas aplicações dos algoritmos das projeções.

As perspectivas do trabalho podem ainda cobrir vários aspectos e dão margem a distintas linhas de ação; uma das melhorias mais interessantes nos parece ser uma grande paralelização dos procedimentos com o objetivo de diminuir mais ainda seu custo geral e beneficiar o desempenho dos computadores de novas gerações. Ainda nesse mesmo código se pode medir a evolução do desempenho com malhas muito finas. O uso das técnicas multigrid também para os cálculos da pressão certamente seria mais uma opção eficiente. Poderiam ser testados outros esquemas multigrid com outros números de níveis e outros relaxadores inclusive.

A flexibilidade do método dos elementos finitos permite a passagem para geometrias mais complexas o que é extremamente relevante para critérios industriais, o que segundo os resultados já obtidos é plenamente viável. Os chamados métodos multigrid algébricos parecem se encaixar muito bem nessa idéia de geometrias complexas o que daria uma perspectiva futurista muito refinada como continuidade do presente texto. Os métodos multigrid não dependem do tipo de elemento utilizado o que dá margem ao uso de outros elementos clássicos como também novos elementos finitos. Por outro lado sem ir até níveis de turbulência, poderemos considerar número de Reynolds mais elevados ainda.

Em resumo, o corpo total do trabalho aqui desenvolvido está plenamente adaptado à modelagem do problema tratado, por suas qualidades de robustez e bom compromisso entre a exatidão dos resultados e a velocidade dos cálculos. Por outro lado podemos pensar razoavelmente que um esquema de projeção de ordem superior deverá assegurar uma grande confiabilidade de resultados e não prejudicar a rapidez dos cálculos. O presente estudo com o algoritmo de Goda constitui já um início considerável nessa direção. Mais a recente redescoberta do interesse no algoritmo das projeções e sua aplicação em nosso contexto deixa essa questão ainda em aberto quanto à ordem a ser utilizada, ao esquema numérico "ideal" adaptado àqueles métodos e mesmo ao lugar relativo da etapa de projeção com respeito à de convecção-difusão.

Finalmente uma esperança que esse trabalho possa consistir como um ponto de partida, através de uma forma de ataque equivalente, para um código modelando escoamentos plenamente turbulentos.

## REFERÊNCIAS

- 1 R.E. Bank e D.J. Rose, “Analysis of a multilevel iterative method for nonlinear finite element equations”, *Math. Comp.*, Vol. **39**, pp. 453–465, (1982).
- 2 J. Blasco e R. Codina, “A Stabilized finite element method for the incompressible Navier-Stokes equations based on a pressure gradient projection”, *Proceedings of the 10th International Conference on Finite Elements in Fluids*, Tucson, Arizona, pp. 235–240, (1998).
- 3 J. Blasco e R. Codina, “Analyses of a finite element approximation of the incompressible Navier-Stokes equations using equal order velocity-pressure interpolation”, submitted to *SIAM Journal on Numerical Analysis*.
- 4 D. Braess e W. Hackbush, “A new convergence proof for the multigrid method including the V-cycle”, *SIAM, J. Numer. Anal.*, Vol. **20**, pp. 967–975, (1983).
- 5 K. Boukir, “Méthodes en temps d’ordre élevé par décomposition d’opérateurs. Application aux équations de Navier-Stokes”, tese de doutorado, Université Paris VI, (1993).
- 6 A. Brandt, “Multigrid techniques: guide with applications to fluid dynamics”, *GMD-Studien*, N° 85, Sankt Augustin, Germany, (1984).
- 7 A.N. Brooks e T.J.R. Hughes, “Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. **32**, pp. 199–259, (1982).
- 8 A. Chorin, “A numerical method for solving incompressible viscous problems”, *J. Comp. Physics*, Vol. **2**, pp. 12–16, (1967).
- 9 L. Fuchs, “Multigrid schemes for incompressible flows”, em “*Efficient solution of elliptic systems*”, W. Hackbusch (ed.), *Notes on Numerical Fluid Mechanics*, Vol. **10**, Vieweg-Verlag, pp. 38–51, (1984).
- 10 K. Goda, “A multistep technique with implicit difference schemes for calculating two or three-dimensional cavity flows”, *J. Comput. Phys.*, Vol. **30**, pp. 76–95, (1979).
- 11 D. Goldberg e V. Ruas, “A numerical study of the tridimensional viscous incompressible flow combining finite elements and projection algorithms”, to appear in *International Journal of Numerical Methods in Fluids*.
- 12 J.L. Guermond, “Approximation des équations de Navier-Stokes instationnaires par des méthodes de projection”, *Notes et documents Limsi*, Vol. **93**, N° 30, (1993).
- 13 W. Hackbusch, “*Multigrid methods and applications*”, Springer-Verlag, Kiel, Germany, (1985).
- 14 G.E. Karniadakis, M. Israeli e S.A. Orszag, “High-orders splitting methods for incompressible Navier-Stokes equations”, *J. Comput. Phys.*, Vol. **97**, pp. 414–443, (1991).
- 15 J.F. Maitre e F. Musy, “Multigrid methods for symmetric variational problems: a general theory and convergence estimates for usual smoothers”, *Appl. Math. Comp.*, pp. 21–43, (1987).
- 16 J.F. Maitre e F. Musy, “Multigrid methods: convergence theory in a variational framework”, *SIAM J. Num. Anal.*, Vol. **21**, pp. 657–671, (1984).
- 17 S. McCormick, “*Multigrid methods*”, Vol.3, Society for Industrial and Applied Mathematics-SIAM, Philadelphia, USA, (1987).
- 18 R.A. Nicolaides, “On finite element multigrid algorithms and their use”, in *Mathematics of finite elements and applications*, Whiteman (ed.), Conf. Uxbridge 1978, pp. 459–466, London Academic Press, (1979).

- 19 H. Rahmoun, “Simulation par éléments finis d’écoulements plans dans des conduites avec un obstacle”, Mémoire de stage de DEA, Laboratoire de Modélisation en Mécanique, Université Paris VI, (1993).
- 20 P.A. Raviart e J.M. Thomas, “*Introduction à l’analyse numérique des équations aux dérivées partielles*”, Masson, 3<sup>e</sup> tirage, 1992).
- 21 V. Ruas, “A quasilinear finite element method for solving transient problems with a consistent diagonal mass matrix”, *Matemática Aplicada e Computacional*, Vol. **3**, N° 2, pp. 113–130, (1984).
- 22 J.C. Simo e F. Armero, “Unconditional stability and long term behavior of transient algorithms for the incompressible Navier-Stokes equations”, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. **111**, pp. 111–154, (1994).
- 23 J. SHEN, “On error estimates of projection methods for Navier-Stokes equation: first order schemes”, *Siam J. Numer. Anal.*, Vol. **29**, pp. 57–77, (1992).
- 24 J. Shen, “On error estimates of some higher projection methods and penalty-projection methods for Navier-Stokes equation”, *Numer. Math.*, Vol. **62**, pp. 49–73, (1992).
- 25 K. Stuben e U. Trottenberg, “Multigrid methods: fundamental algorithms, model problem analysis and applications”, *Proc. Koln-Porz, Conference on Multigrid Methods*, W. Hackbusch e U. Trottenberg (eds.), *Lecture in Mathematics*, Vol. **960**, Springer-Verlag, Berlin, pp. 1–176, (1982).
- 26 R. Temam, “Sur l’approximation de la solution des équations de Navier-Stokes par la méthode des pas fractionnaires (I)”, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, Vol. **32**, pp. 135–153, (1969).
- 27 R. Temam, “Navier-Stokes equations”, North-Holland, Amsterdam, (1977).
- 28 A. Toumi, “Ètude numérique d’écoulements visqueux tridimensionnels par la formulation vitesse tourbillon”, tese de doutorado, Université Paris VI, (1990).
- 29 P.R. Trales, “Resolução das equações de Navier-Stokes pelo método das projeções via elementos finitos com aceleração pelas técnicas multigrid”, tese de doutorado, PUC-Rio, Rio de Janeiro, (1995).
- 30 P.R. Trales, “Techniques multigrille dans la résolution des équations de Navier-Stokes par éléments finis combinés avec un algorithme de projection”, 29<sup>e</sup> *Congrès National d’Analyse Numérique*, França, (1997).
- 31 P. Wesseling, “*An introduction to multigrid methods*”, Springer-Verlag, Amsterdam, (1992).