

UN ELEMENTO FINITO 3D PARA EL ANALISIS CINEMATICAMENTE NO LINEAL DE LAMINAS ELASTOPLASTICAS

J. CASANOVA
J.F. MOYA
S. MONLEON
y
P. FUSTER

*Departamento de Mecánica de los Medios
Continuos y Teoría de las Estructuras
Universidad Politécnica de Valencia*

RESUMEN

En el análisis de láminas elastoplásticas se debe recurrir a teorías de la plasticidad ad hoc, no derivadas de la teoría tridimensional general sino postuladas a priori y basadas en muchas simplificaciones, o bien tratar el cuerpo como 3D. En este segundo caso, la utilización de elementos convencionales en el Método de los Elementos Finitos (M.E.F.) plantea importantes problemas numéricos, y requiere un tiempo de computación excesivamente dilatado. En este escrito se presenta un elemento finito 3D pensado especialmente para superar estos inconvenientes. Su desarrollo consta de tres partes bien diferenciadas: la obtención de las matrices cinemáticas necesarias para la resolución del problema estático de un continuo 3D cualquiera, supuesta conocida la interpolación del campo de desplazamientos; la particularización de éstas al caso laminar, mediante el uso del modelo de comportamiento transversal CT1 como función de interpolación en el espesor; y la reorganización del algoritmo resultante de las dos fases anteriores para evitar el aumento desmesurado del tiempo de cálculo cuando se incrementa el número de puntos de integración en el espesor. Finalmente se incluyen varios ejemplos que muestran el buen comportamiento del elemento presentado, cuyas principales ventajas son: en primer lugar, que permite procesar un elevado número de puntos de integración en el espesor con un coste computacional razonable, y a continuación, la capacidad para tratar cualquier geometría de la superficie de referencia de modo muy sencillo pero sin introducir simplificaciones, y la posibilidad de tratar otros tipos estructurales derivados del laminar utilizando el mismo algoritmo.

SUMMARY

When dealing with elastoplastic shell analysis, we must appeal either to suitable theories of plasticity, which aren't the result of the general three-dimensional theory as they have been formulated a priori and based on many simplifications, or to the treatment of the body as a three dimensional one (3D).

In the second case, there are a lot of numerical problems arising from the use of conventional elements in the Finite Element Method (F.E.M.), and also, a long time of computation is

Recibido: Abril 1988

required.

In this paper we present a 3D finite element, which is aimed at overcoming the aforesaid disadvantages.

Its development is divided into three different parts, first of all the obtention of the kinematic matrices required to solve a static problem of whatever 3D continuous medium, once the interpolation for the displacement field is known. Secondly, their particularization to the shell case, through the use of the model of transversal behaviour CT1 as the function of interpolation in thickness. The third one is the reorganization of the resulting algorithm from the two previous steps to avoid an excessive increase in the calculation time when the number of integration points in thickness is raised.

Finally we include several examples showing the good results of the described element, having some advantages such as: first, the processing of a high number of integration points with a reasonable computational cost; secondly, the ability to deal with any reference surface geometry in a very simple way, without introducing any simplification, and in the third place, the possibility to deal with other kinds of structures derived from the shell model by using the same algorithm.

INTRODUCCION

El análisis estático de estructuras laminares por el M.E.F. puede abordarse desde dos puntos de vista diferentes, uno 2D y el otro 3D. El primero de ellos remarca el carácter bidimensional de estas piezas, considerando el comportamiento global en el espesor y requiriendo para ello la consideración de ecuaciones constitutivas especiales; supone, pues, una simplificación en cuanto a la cinemática y, en general, también en lo relativo a las ecuaciones constitutivas, así como un tiempo de computación necesario bastante menor.

Por el contrario, el planteamiento 3D se basa en la determinación precisa de la respuesta en cada punto, utilizando las relaciones constitutivas convencionales y sin requerir, en principio, ninguna simplificación ni cinemática ni constitutiva; en contrapartida, puede presentar problemas numéricos, debido a la gran diferencia de rigidez en unas u otras direcciones⁵, y requiere mayor tiempo de computación.

Desde el punto de vista de la cinemática, el enfoque 3D parece, a primera vista, notablemente superior, porque no requiere simplificación alguna. No obstante, esto no es así, porque considerando un solo elemento en espesor, como es habitual en láminas, la función de interpolación en esta dirección jugará un papel similar al de la hipótesis cinemática en un modelo 2D, y la consideración de varios elementos en ella agravará los problemas de mal condicionamiento numérico y elevado coste computacional. Así pues, en este aspecto deben considerarse superiores los modelos 2D.

En cuanto a las ecuaciones constitutivas, en el ámbito de los materiales hiperelásticos es posible desarrollar una versión 2D de ellas, es decir, una relación entre esfuerzos generalizados y deformaciones generalizadas, a partir de la 3D y equivalente a aquella, por lo que se puede realizar un planteamiento global del problema completamente 2D equivalente al 3D de partida^{1,2,3}. Sin embargo, cuando se trata de análisis elastoplásticos, no es posible, en el marco de la teoría del flujo plástico, obtener una versión 2D de las ecuaciones constitutivas equivalente a la 3D inicial, debido, por una parte, a que la consideración de partes plásticas de las deformaciones generalizadas implica un modo de extenderse la plastificación en el espesor muy

diferente del propio del análisis 3D, y por otra, a que no puede determinarse una superficie de plastificación en esfuerzos generalizados (o deformaciones generalizadas) partiendo de una dada en tensiones 3D (o deformaciones 3D)⁴. En consecuencia, en el análisis elastoplástico, deberá optarse por una formulación 3D para poder introducir las características del material en forma convencional, pudiendo incorporar así, sin mayor complicación, todos los avances que en este campo se produzcan a medida que ello suceda, o bien recurrir a una teoría del flujo plástico de las láminas postulada a priori, sobre la base de las simplificaciones necesarias, y sujeta a verificación por contraste con modelos 3D o por métodos experimentales. En esta última línea, justificada por el menor coste computacional, cabe citar los modelos desarrollados por Ilyushin¹⁶, Ivanov¹⁸, Cristfiels^{17,18}, Eidsheim y Larsen²⁰ y Bienik y Funaro²¹, a todos los cuales es común considerar comportamiento perfectamente plástico, despreciar la influencia de los cortantes y partir del criterio 3D de Hubert-von Mises-Hencky.

En vista, pues, de que para mantener la generalidad suficiente en cuanto al modelo de comportamiento del material, y no introducir formas aberrantes de extensión de la plastificación por el espesor en él, se hace necesario recurrir a una formulación 3D. Procede abordar a continuación el comentario de sus inconvenientes y de los medios que se proponen para eludirlos.

Es bien conocido que el análisis de estructuras marcadamente bidimensionales mediante elementos finitos 3D convencionales presenta importantes problemas numéricos⁵. Para solucionarlos diferentes autores han utilizado procedimientos distintos, entre los cuales el que mayor éxito ha sido el de definir el campo de desplazamientos del espacio laminar a partir exclusivamente de parámetros significativos en el movimiento de la lámina considerada como estructura 2D, es decir, de los que definen el movimiento de su superficie media y la evolución de la normal. Tal método, en esencia supone admitir una hipótesis de comportamiento transversal de la lámina, y con diferentes expresiones de ésta ha sido utilizado por varios autores^{4,5,6,7,8,9}. En este escrito se presenta uno de estos elementos (entendiendo como tal no la mera descripción de unas funciones de interpolación, sino el procedimiento completo de obtención de las matrices cinemáticas* que aparecen en el M.E.F.), basado en el modelo de comportamiento transversal CT1 recientemente presentado^{4,10}, el cual se ha desarrollado siguiendo un método que permite aumentar el número de puntos de integración en el espesor considerablemente con muy poco coste computacional adicional, por lo que se considera muy adecuado para el análisis en régimen elastoplástico que exige que este número sea elevado.

En un trabajo anterior⁹, los autores presentaban un procedimiento de obtención de las matrices cinemáticas que intervienen en el problema estático de una lámina planteado por el M.E.F. basado en la descomposición del proceso en dos bloques: el primero de ellos permite obtener las citadas matrices cinemáticas en función de las primeras y segundas derivadas de Frechet del gradiente del desplazamiento en la dirección de los incrementos de los parámetros nodales, y es común a cualquier problema estático de un continuo 3D; el segundo se encarga de calcular dichas derivadas

* se denominan matrices cinemáticas a aquellas que dependen exclusivamente de la cinemática del movimiento de la pieza, es decir, N , \bar{N} , B y \bar{B} .

de Frechet, siendo el único que tiene en cuenta el carácter laminar de la estructura. Este planteamiento presenta la ventaja de ser común el primer bloque para cualquier problema estático 3D, y ser el segundo muy sencillo y basado exclusivamente en conceptos elementales de análisis tensorial y geometría diferencial, por lo que resulta fácil modificarlo para considerar otras hipótesis cinemáticas; por el contrario, presenta el inconveniente de exigir un tiempo de computación elevado cuando se procesa una lámina elastoplástica, puesto que el número de operaciones a realizar en cada punto de integración en el espesor es elevado.

En el presente escrito, partiendo de un planteamiento similar, se combinarán ambos bloques para generar dos nuevos, el primero, con un número importante de operaciones, se ejecuta una sola vez por punto de integración considerado sobre la superficie de referencia, y el segundo, muy simple y rápido de ejecución, consiste en una combinación polinómica de valores previamente hallados y es el único que debe calcularse en todos y cada uno de los puntos de integración del espesor. Con este nuevo planteamiento se ha perdido la posibilidad de fácil modificación del anterior, así como la entidad conceptual de cada uno de los bloques, pero a cambio se ha conseguido mayor velocidad de proceso y la posibilidad de identificar los distintos términos de las matrices \mathbf{B} y $\tilde{\mathbf{B}}$ con las primeras y segundas variaciones, respectivamente, de las deformaciones generalizadas que aparecen en una formulación 2D.

En el primer capítulo se presentará la resolución por el método de los elementos finitos del problema estático de un continuo tridimensional cualquiera, mediante una formulación lagrangiana total y basando el desarrollo en el método de Newton-Raphson; el segundo se consagrará a estudiar el planteamiento adecuado para evitar los problemas numéricos generados por el tratamiento mediante elementos 3D de láminas y el tercero a reseñar las modificaciones necesaria para conseguir la economía de tiempo a que se ha hecho referencia. Por último se presentarán algunos ejemplos ilustrativos de las bondades del elemento descrito.

FORMULACION POR ELEMENTOS FINITOS DEL PROBLEMA DE EQUILIBRIO DE UN CONTINUO TRIDIMENSIONAL

Un cuerpo \mathcal{B} es una variedad tridimensional diferenciable, con contorno liso al menos a trozos¹¹. Sus elementos se denominan partículas y las coordenadas X que los definen, coordenadas materiales.

Una configuración \mathbf{X} es una aplicación del cuerpo \mathcal{B} sobre el espacio geométrico ordinario (es decir, el espacio afín euclídeo \mathbf{R}^3), que es continua, invertible y preserva la orientación. Dicha aplicación asigna a cada partícula X la posición \mathbf{x} que ocupa en el espacio

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{X} : \mathcal{B} \rightarrow \mathbf{R}^3 \\ \mathbf{X}(X) = \mathbf{x} \end{array} \right\} \quad (1)$$

En la formulación lagrangiana total de cualquier problema se define una configuración privilegiada \mathbf{X}_0 , llamada configuración de referencia, a la que se refieren

todas las variables y parámetros. Habitualmente se toma como tal la aplicación unidad, y se habla indistintamente de cuerpo o de configuración de referencia. En este trabajo se operará así.

Cualquier proceso mecánico que sufra un cuerpo implicará un cambio de configuración. El campo de desplazamientos \mathbf{d}^* asociado a tal proceso es el conjunto de los vectores de \mathbf{R}^3 con origen en los puntos de la configuración de referencia y extremo en su correspondiente imagen en la actual; sus componentes, por lo tanto, serán¹¹:

$$\mathbf{d}^* = \mathbf{X}(X) - \mathbf{X}_0(X) \quad (2)$$

y, conocida la configuración de referencia, de la relación anterior es evidente que cualquier otra configuración se puede definir mediante la aplicación \mathbf{X} o mediante el campo de desplazamientos \mathbf{d}^* asociado.

En el planteamiento del problema estático de un cuerpo \mathcal{B} , de contorno $\Omega \equiv \partial\mathcal{B}$, pueden aparecer dos tipos de condiciones de borde, las cinemáticas o de Dirichlet, que definen la posición actual $\bar{\mathbf{d}}^*$ de una parte Ω_u del contorno, y las estáticas o de Neumann, que determinan el vector de fuerzas por unidad de área $\bar{\mathbf{t}}^*$ que actúa sobre la parte del contorno Ω_σ en la configuración actual. Estas dos partes del contorno son tales que

$$\left. \begin{array}{l} \bar{\Omega}_u \cup \bar{\Omega}_\sigma = \bar{\Omega} \\ \Omega_u \cap \Omega_\sigma = \{ \} \end{array} \right\} \quad (3)$$

es decir, que no se solapan y entre ambas cubren todo el contorno excepto algún punto o línea aislados (esto es, salvo un conjunto de puntos de medida nula).

Se define el espacio de configuraciones admisibles, en el que se investigará la solución del problema planteado, como¹⁰

$$\tau = \{ \mathbf{d}^* : \mathcal{B} \rightarrow \mathbf{R}^3 / \det(\mathbf{F}^*) > 0 \text{ y } \mathbf{d}^*|_{\Omega_u} = \bar{\mathbf{d}}^* \} \quad (4)$$

donde \mathbf{F}^* representa el gradiente de la deformación, es decir

$$\mathbf{F}^* = \mathbf{g}_i^* \otimes \mathbf{G}^{*i} \quad (5)$$

siendo \mathbf{g}_i^* y \mathbf{G}^{*i} , respectivamente, la base natural del sistema de coordenadas convectivas X en la configuración actual y la base recíproca del mismo sistema de coordenadas en la configuración de referencia. La condición $\det(\mathbf{F}^*) > 0$ garantiza que el cambio de configuración conserva las propiedades de invertibilidad y mantenimiento de la orientación.

El espacio de variaciones cinemáticamente admisibles alrededor de una configuración $\mathbf{d}^* \in \tau$ se define como¹¹:

$$\mathcal{V} = \{ \mathbf{q}^* : \mathcal{B} \rightarrow \mathbf{R}^3 / \mathbf{q}^*|_{\Omega_u} = 0 \} \quad (6)$$

y es el espacio tangente a τ en $\mathbf{d}^* \in \tau$.

Por último, partiendo bien del principio de los trabajos virtuales, bien de un principio variacional adecuado, el problema estático de un continuo 3D se puede expresar como

$$\boxed{\text{Determinar } \mathbf{d}^* \in \tau / G(\mathbf{d}^*, \mathbf{q}^*) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{q}^* \in \mathcal{V}} \quad (7)$$

donde $G(\mathbf{d}^*, \mathbf{q}^*)$ es un funcional definido como

$$\begin{aligned} G : \tau \times \mathcal{V} &\rightarrow \mathbf{R} \\ G(\mathbf{d}^*, \mathbf{q}^*) &= \int_B \tilde{\mathbf{T}}^* : \delta \mathbf{E}^* \, dV - \int_B \mathbf{b}^* \cdot \mathbf{q}^* \, dV - \int_{\Omega_\sigma} \bar{\mathbf{t}}^* \cdot \mathbf{q}^* \, dS \end{aligned} \quad (8)$$

siendo $\tilde{\mathbf{T}}^*$ el segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff, \mathbf{b}^* el campo de fuerzas de volumen que actúan sobre el cuerpo, y $\delta \mathbf{E}^*$ la variación del tensor de deformación de Lagrange, es decir, la diferencial del Frechet de éste en la dirección \mathbf{q}^* ,

$$\delta \mathbf{E}^* = \left[\frac{d}{d\epsilon} (\mathbf{E}^* + \epsilon \mathbf{q}^*) \right]_{\epsilon=0} = \text{sim} [\mathbf{F}^* \cdot \text{grad } \mathbf{q}^*] \quad (9)$$

En esta última expresión sim representa la simetrización del contenido del corchete, y grad el operador gradiente

$$\text{grad } \mathbf{q}^* = \mathbf{q}_{,i}^* \otimes \mathbf{G}^{*i} ; \quad \mathbf{q}_{,i}^* = \frac{\partial \mathbf{q}^*}{\partial \theta^i} \quad (10)$$

Todas las variables que no se han definido explícitamente mantienen el significado asignado con anterioridad. Por las propiedades de la diferencial de Frechet, (9) se puede escribir como

$$\delta \mathbf{E}^* = \mathbf{E}^*(\mathbf{d}^*) \cdot \mathbf{q}^* \quad (11)$$

poniendo de manifiesto la linealidad de $\delta \mathbf{E}^*$ en \mathbf{q}^* .

La resolución analítica del problema integral (7) es harto difícil, si no imposible, en la mayoría de los casos. No obstante, su solución numérica por el M.E.F. es sencilla, puesto que la introducción de una función de interpolación, postulada a priori como solución del problema a falta de determinar algunas constantes, lo transforma en algebraico y resoluble por los métodos convencionales del Cálculo Numérico. La discretización en elementos finitos permite definir, de modo sencillo y elegante, una función de interpolación, tan compleja como se deseé, en el dominio total, mediante el ensamblaje de otras sencillas definidas sobre cada elemento; naturalmente, cuanto menores sean los elementos, es decir, cuantos más grados de libertad tenga la función de interpolación, mejor se aproximarán la solución del problema discreto a la del continuo inicial (7). El número de elementos a considerar está limitado por la precisión del ordenador que se utilice y por el coste económico (en tiempo de computación y en

memoria de ordenador) que suponga disminuir el error por debajo de un valor máximo admisible.

Para transformar el problema integral (7) en uno discreto equivalente, supóngase que el campo de desplazamientos \mathbf{d}^* puede aproximarse mediante la función de interpolación $\hat{\mathbf{d}}^*$, que depende de las coordenadas θ^i del punto que se esté considerando y de un conjunto \mathbf{u} de parámetros de interpolación (o parámetros nodales)

$$\mathbf{d}^*(\theta^i) \simeq \hat{\mathbf{d}}(\theta^i, \mathbf{u}) \quad (12)$$

y es al menos continua a trozos, existiendo sus derivadas hasta el orden necesario en todo el dominio con la posible excepción de un conjunto de puntos de medida nula. Aunque habitualmente se supone que $\hat{\mathbf{d}}^*$ es lineal en los parámetros nodales, ello no es una restricción imprescindible^{13,3,9}, y en este apartado, por conveniencia para desarrollos posteriores, se va a mantener el carácter no lineal de $\hat{\mathbf{d}}^*$ en \mathbf{u} .

Al considerar la función de interpolación (12) se está aproximando el espacio de configuraciones admisibles τ , de dimensión infinita, por un subespacio de dimensión finita $\tau_n \subset \tau$. Del mismo modo deberá aproximarse el espacio de variaciones cinemáticamente admisibles \mathcal{V} por un subespacio de dimensión finita $\mathcal{V}_n \subset \mathcal{V}$, siendo ambos aproximaciones mutuamente coherentes. Ello se consigue interpolando \mathbf{q} mediante

$$\mathbf{q}^*(\theta^i) \simeq \hat{\mathbf{q}}^*(\theta^i, \mathbf{u}) = D\hat{\mathbf{d}}^*(\theta^i, \mathbf{u}|\Delta\mathbf{u}) = \mathbf{N}(\theta^i, \mathbf{u}) \cdot \Delta\mathbf{u} \quad (13)$$

donde $D\hat{\mathbf{d}}^*(\theta^i, \mathbf{u}|\Delta\mathbf{u})$ representa la diferencia de Frechet de $\hat{\mathbf{d}}^*$ en dirección $\Delta\mathbf{u}$, y $\Delta\mathbf{u}$ es una variación cinemáticamente admisible de los parámetros nodales. A primera vista la ecuación (13) puede parecer una restricción excesiva del espacio de variaciones cinemáticamente admisibles, pues no sólo se va a imponer a $\hat{\mathbf{q}}^*$ la restricción cinemática, sino también una forma determinada dependiente de la del campo de desplazamientos; no obstante, como las variaciones de parámetros nodales $\Delta\mathbf{u}$ sólo están obligadas a satisfacer las condiciones de contorno, y no a guardar ninguna relación con el campo de desplazamientos real, la ecuación (13) representa en cualquier punto del cuerpo cualquier variación admisible de los desplazamientos, siendo bien conocido, además, que en la utilización de un método energético es suficiente considerar variaciones en un entorno de la solución para determinar esta¹².

Llevando (12) y (13) a (11) se puede expresar

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{E}^* &\simeq \mathbf{E}^*(\hat{\mathbf{d}}^*(\theta^i, \mathbf{u})) : \mathbf{N}(\theta^i, \mathbf{u}) \cdot \Delta\mathbf{u} \\ &= \hat{\mathbf{E}}(\theta^i, \mathbf{u}) : \mathbf{N}(\theta^i, \mathbf{u}) \cdot \Delta\mathbf{u} = \mathbf{B}(\theta^i, \mathbf{u}) \cdot \Delta\mathbf{u} \end{aligned} \quad (14)$$

y sustituyendo esta relación en la definición de $G(\mathbf{d}^*, \mathbf{q}^*)$, teniendo en cuenta que $\tilde{\mathbf{T}}^*$, \mathbf{b}^* y $\tilde{\mathbf{t}}^*$, por ser funciones conocidas de las coordenadas θ^i y quizás del campo de desplazamientos \mathbf{d}^* , pueden considerarse conocidos dependiendo de θ^i y \mathbf{u} sin más que utilizar la relación (11), se llega finalmente a

$$G(\mathbf{d}^*, \mathbf{q}^*) \simeq \mathbf{R}(\mathbf{u}) \cdot \Delta \mathbf{u} \quad (15)$$

$$\mathbf{R}(\mathbf{u}) = \int_B \tilde{\mathbf{T}}^* : \mathbf{B} \, dV - \int_B \mathbf{b}^* \cdot \mathbf{N} \, dV - \int_{\Omega_\sigma} \bar{\mathbf{t}}^* \mathbf{N} \, dS \quad (16)$$

que permite expresar la versión discreta del problema (7) como

$$\text{Determinar } \mathbf{u} \in \mathcal{E}^N / \mathbf{R}(\mathbf{u}) \cdot \Delta \mathbf{u} = 0 \quad \forall \Delta \mathbf{u} \in \mathcal{W}^N$$

(17)

donde \mathcal{E}^N es el espacio de vectores de parámetros nodales admisibles

$$\mathcal{E}^N = \{\mathbf{u} \in \mathbf{R}^N / \mathbf{u}|_{\Omega_u} = \bar{\mathbf{u}}\} \quad (18)$$

y \mathcal{W}^N es el de variaciones cinemáticamente admisibles de estos vectores

$$\mathcal{W}^N = \{\Delta \mathbf{u} \in \mathbf{R}^N / \Delta \mathbf{u}|_{\Omega_u} = 0\} \quad (19)$$

En estas definiciones, $\mathbf{u}|_{\Omega_u} = \bar{\mathbf{u}}$ significa que los vectores de parámetros nodales son tales que sustituidos en la función de interpolación (12) conducen al cumplimiento automático de las condiciones de contorno de desplazamiento impuesto, y análogamente, $\Delta \mathbf{u}|_{\Omega_u} = 0$ implica que la evaluación de (13) en cualquier $\Delta \mathbf{u} \in \mathcal{W}^N$ conduce a valores nulos de $\hat{\mathbf{q}}^*$ en los puntos de Ω_u . Finalmente, el problema (17) puede expresarse como

$$\text{Determinar } \mathbf{u} \in \mathcal{E}^N / \mathbf{R}(\mathbf{u}) = 0$$

(20)

que, puesto que \mathbf{R} no es sino el vector de componentes de la solicitud activa según los grados de libertad (g.d.l.) considerados, es la condición de equilibrio según se suele expresar en Mecánica Analítica.

Puesto que el problema (20) es algebraico, su resolución puede abordarse por los métodos convencionales del Cálculo Numérico. Suele utilizarse alguna de las variantes del método de Newton-Raphson, que, como es bien conocido, supone sustituir la resolución de un problema no lineal por la de una serie de problemas obtenidos por linealización de aquel alrededor de las sucesivas aproximaciones a la solución.

Sea $\mathbf{u}_n \in \mathcal{E}^N$ una aproximación a la solución de (20). La parte lineal del operador $\mathbf{R}(\mathbf{u})$ en un entorno de \mathbf{u}_n puede expresarse como (11)

$$\mathcal{L}\mathbf{R}(\mathbf{u}_n, \Delta \mathbf{u}) = \mathbf{R}(\mathbf{u}_n) + D\mathbf{R}(\mathbf{u}_n | \Delta \mathbf{u}) \quad (21)$$

donde el segundo sumando del segundo miembro representa la diferencial de Frechet de $\mathbf{R}(\mathbf{u})$ en la dirección $\Delta\mathbf{u} \in \mathcal{W}^N$ y en el punto $\mathbf{u}_n \in \mathcal{E}^N$. Utilizando las propiedades de la diferencial de Frechet puede escribirse

$$D\mathbf{R}(\mathbf{u}_n|\Delta\mathbf{u}) = \mathbf{K}_T \cdot \Delta\mathbf{u} \quad (22)$$

representando \mathbf{K}_T la matriz de rigidez tangente, que a su vez suele descomponerse en otras cuatro^{13,9,3,4},

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{K}_{GD} + \mathbf{K}_{TI} - \mathbf{K}_{CD} - \mathbf{K}_{CI} \quad (23)$$

que se obtienen sin más que aplicar la definición de diferencial de Frechet al operador $\mathbf{R}(\mathbf{u})$ y agrupar términos convenientemente. En este proceso es interesante observar que el campo de tensiones de Piola-Kirchhoff $\tilde{\mathbf{T}}^*$, que aparece en la primera integral de (16), depende de los parámetros nodales \mathbf{u} exclusivamente a través de las deformaciones de Lagrange \mathbf{E}^* , por lo tanto, su diferencial de Frechet se podrá obtener, conocidas las ecuaciones constitutivas, como:

$$D\tilde{\mathbf{T}}^*(\mathbf{u}|\Delta\mathbf{u}) = D\tilde{\mathbf{T}}^*(\mathbf{E}^*|\Delta\mathbf{E}^*) \cdot \Delta\mathbf{E}^* = \mathbf{C} : \Delta\mathbf{E}^* \quad (24)$$

donde \mathbf{C} es el operador constitutivo tangente, y $\Delta\mathbf{E}^*$ representa la diferencial de Frechet del campo de tensores de Lagrange, dada por la ecuación (14). En un caso hiperelástico, en el cual se conoce $\tilde{\mathbf{T}}^*$ en función de \mathbf{E}^* exclusivamente, es inmediato determinar \mathbf{C} . En uno elastoplástico, $\tilde{\mathbf{T}}^*$ depende del estado deformacional actual \mathbf{E}^* , pero también de su parte plástica y de una serie de parámetros internos que representan la historia de los estados deformacionales anteriores, a través de un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, sometido a la limitación adicional de tener que pertenecer obligatoriamente el estado final de cualquier proceso al dominio elástico asociado a dicho estado; todo ello, así como la estrategia particular de integración numérica que se adopte para las ecuaciones del flujo plástico, debe ser tenido en cuenta en la obtención del operador $\mathbf{C}^{4,14,15}$, que en este caso se denomina operador elastoplástico tangente coherente con el algoritmo de integración utilizado. La obtención del operador \mathbf{C} es, en este caso, un problema de cierta entidad, para cuya resolución se refiere al lector a la referencia⁴.

De modo similar a como se ha obtenido la variación (diferencial de Frechet) de las tensiones, se opera para determinar la de los campos de fuerzas de volumen \mathbf{b}^* y de fuerzas de superficie sobre el contorno $\tilde{\mathbf{t}}^*$, si estos dependen de la configuración actual, estableciendo que

$$D\mathbf{b}^*(\mathbf{u}_n|\Delta\mathbf{u}) = D\mathbf{b}^*(\mathbf{d}_n^*|\mathbf{q}^*) : D\mathbf{q}^*(\mathbf{u}_n|\Delta\mathbf{u}) = \hat{\boldsymbol{\beta}}_n \cdot \Delta\mathbf{u} \quad (25)$$

$$D\tilde{\mathbf{t}}^*(\mathbf{u}_n|\Delta\mathbf{u}) = D\tilde{\mathbf{t}}^*(\mathbf{d}_n^*|\mathbf{q}^*) : D\mathbf{q}^*(\mathbf{u}_n|\Delta\mathbf{u}) = \hat{\boldsymbol{\tau}}_n \cdot \Delta\mathbf{u} \quad (26)$$

donde se ha calculado la variación de estos campos alrededor de una configuración $\mathbf{d}_n \simeq \hat{\mathbf{d}}(\mathbf{u}_n)$, cuando esta varía en $\mathbf{q}^* \in \mathcal{V}$, y a continuación se ha introducido la

discretización definida en (12) y (13).

Considerando todo esto, los distintos términos de la matriz de rigidez tangente (23) se pueden expresar:

- matriz de grandes desplazamientos

$$\mathbf{K}_{GD} = \int_B \mathbf{B}^T : \mathbf{C}_n : \mathbf{B} dV \quad (27)$$

- matriz de tensiones iniciales

$$\mathbf{K}_{TI} = \int_B \tilde{\mathbf{T}}^* : \tilde{\mathbf{B}} dV \quad (28)$$

- matriz de cargas dependientes de la deformación

$$\mathbf{K}_{CD} = \int_B \mathbf{N}^T : \hat{\boldsymbol{\beta}}_n : \mathbf{N} dV + \int_{\Omega_\sigma} \mathbf{N}^T : \hat{\boldsymbol{\tau}}_n : \mathbf{N} dS \quad (29)$$

- matriz de cargas iniciales

$$\mathbf{K}_{CI} = \int_B \mathbf{b}^* \cdot \tilde{\mathbf{N}} dV + \int_{\Omega_\sigma} \bar{\mathbf{t}}^* \cdot \tilde{\mathbf{N}} dS \quad (30)$$

donde todas las funciones que intervienen están evaluadas en $\mathbf{u}_n \in \mathcal{E}^N$. Las componentes de las matrices cinemáticas $\mathbf{B}, \tilde{\mathbf{B}}, \mathbf{N}$ y $\tilde{\mathbf{N}}$, así como las de los distintos términos de la matriz de rigidez, se resumen en la Tabla I.

Por último, la resolución por el método de Newton-Raphson del problema (20), conocida una aproximación inicial \mathbf{u}_0 a la solución, se reduce a

```

 $\mathbf{u}_n \leftarrow \mathbf{u}_0$ 
Repetir
  Determinar  $\Delta \mathbf{u} \in \mathcal{W}^N / \mathcal{LR}(\mathbf{u}_n, \Delta \mathbf{u}) =$ 
   $= \mathbf{R}(\mathbf{u}_n) + \mathbf{K}_T(\mathbf{u}_n) \cdot \Delta \mathbf{u} = 0$ 
 $\mathbf{u}_n \leftarrow / \mathbf{u}_n + \Delta \mathbf{u}$ 
Hasta convergencia

```

Nótese que la aproximación inicial puede ser $\mathbf{u}_0 = \mathbf{0}$, y entonces la primera iteración equivale a resolver el problema con geometría lineal y comportamiento elástico.

VARIABLE	COMPONENTES
d^*	$d^{*i}(\theta^m) = \hat{d}^{*i}(\theta^m, u^A)$
N	$d_{,A}^{*i} = \frac{\partial \hat{d}^{*i}}{\partial u^A}$
\tilde{N}	$d_{,AB}^{*i} = \frac{\partial^2 \hat{d}^{*i}}{\partial u^A \partial u^B}$
B	$B_{Aij} = \frac{1}{2} \{ \hat{d}_{i j,A}^* + \hat{d}_{j i,A}^* + \hat{d}_{, i,A}^* \cdot \hat{d}_{k j}^* + \hat{d}_{ i}^* \cdot \hat{d}_{k j,A}^* \}$
\tilde{B}	$\tilde{B}_{ABij} = \frac{1}{2} \{ \hat{d}_{, i,A}^* \cdot \hat{d}_{k j,B}^* + \hat{d}_{, i,B}^* \cdot \hat{d}_{k j,A}^* + \hat{d}_{i j,AB}^* + \hat{d}_{j i,AB}^* + \hat{d}_{, i,AB}^* \cdot \hat{d}_{k j}^* + \hat{d}_{, i}^* \cdot \hat{d}_{k j,AB}^* \}$
\hat{R}	$\hat{R}_A = \int_B \tilde{T}^{ij} B_{Aij} dV - \int_B b_i \hat{d}_{,A}^{*i} dV - \int_{\Omega_\sigma} \bar{t}_i \hat{d}_{,A}^{*i} dS$
K_{GD}	$(K_{GD})_{AB} = \int_B B_{Aij} C^{ijkl} B_{Bkl} dV$
K_{TI}	$(K_{TI})_{AB} = \int_B \tilde{T}^{ij} \tilde{B}_{ABij} dV$
K_{CD}	$(K_{CD})_{AB} = \int_B \hat{d}_{,A}^{*i} \beta_{ij} \hat{d}_{,B}^{*j} dV + \int_{\Omega_\sigma} \hat{d}_{,A}^{*i} \tau_{ij} \hat{d}_{,B}^{*j} dS$
K_{CI}	$(K_{CI})_{AB} = \int_B b_i d_{,AB}^{*i} dV + \int_{\Omega_\sigma} \bar{t}_i \hat{d}_{,AB}^{*i} dS$

Tabla I. Matriz de rigidez tangente y vector de residuos.

Con lo expuesto en este apartado se está en disposición de resolver el problema estático de un continuo 3D cualquiera, conociendo previamente sólo la interpolación del campo de desplazamientos y la definición del propio problema.

EL ANALISIS POR M.E.F. DE ESTRUCTURAS LAMINARES: LA HIPOTESIS CINEMATICA Y LA FUNCION DE FORMA

Cuando se analizan estructuras marcadamente bidimensionales, como es el caso de placas y láminas, utilizando elementos finitos 3D convencionales, debido a que las deformaciones en la dirección del espesor son mucho menores que las que se presentan según las direcciones paralelas al plano tangente a la superficie de referencia, aparecen coeficientes de rigidez de orden de magnitud muy diferente según el g.d.l. considerado, lo cual, inevitablemente, conduce a sistemas de ecuaciones mal condicionados para su resolución numérica. Para eludir este inconveniente se ha recurrido a introducir funciones de penalización, o a utilizar elementos 3D no convencionales, basados bien en definir g.d.l. diferentes en una y otra cara de la lámina, o bien en hacerlo sólo sobre la superficie de referencia⁵. Este último procedimiento supone, en definitiva introducir una hipótesis cinemática, del mismo modo que se hace en los métodos clásicos de análisis y utilizarla como función de forma en el espesor. Esto es lo que se hace, en última instancia, en las referencias^{5,6,7,8}, aunque ello no se enfoque de este modo, y en ^{4,9}, con este mismo planteamiento.

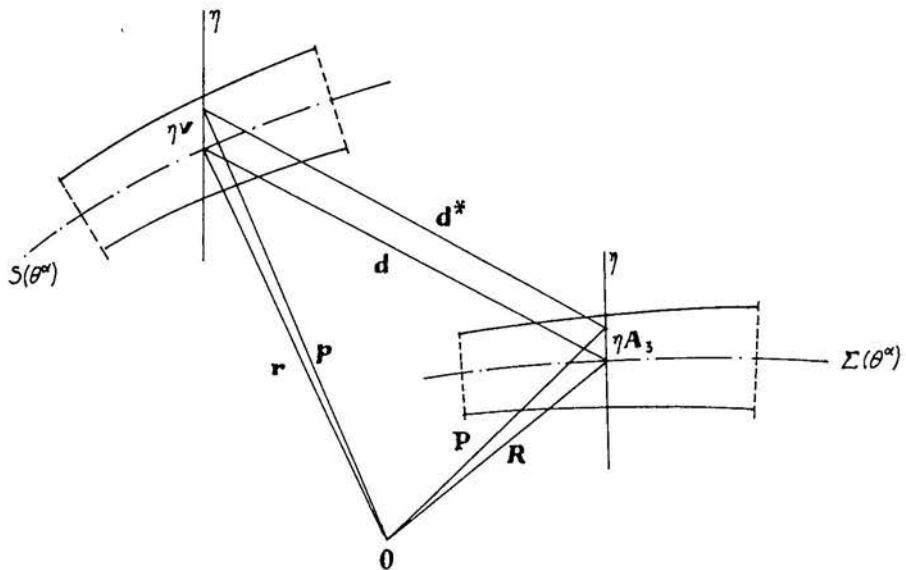


Figura 1. Cinemática de la lámina. Modelo CT1.

El modelo de comportamiento transversal CT1, que es el de primer orden de los de una familia jerárquica desarrollada en ^{1,9}, establece que las normales a la superficie de referencia en la configuración de referencia Σ , permanecen rectas en cualquier otra configuración, aunque no necesariamente normales a la superficie de referencia S en ella, y puede variar la longitud del segmento de estas rectas contenida en el espacio laminar. Matemáticamente, se expresa mediante la siguiente relación:

$$\mathbf{d}^*(\theta^\alpha, \eta) = \mathbf{d}(\theta^\alpha) + \eta \mathbf{v}(\theta^\alpha) \quad (32)$$

donde $\theta^\alpha, \alpha = 1, 2$ representan las coordenadas gaussianas de un punto de Σ (o de S), y η la coordenada según el espesor, todas ellas en el sistema convectivo. $\mathbf{d}^*(\theta^\alpha, \eta)$ representa el desplazamiento de un punto $(\theta^1, \theta^2, \eta)$ cualquiera del espacio laminar, $\mathbf{d}(\theta^\alpha)$ el de un punto (θ^1, θ^2) de la superficie de referencia y \mathbf{v} un vector director de la recta en que se transforma la normal a Σ , que contiene además la información relativa al alargamiento en esta dirección. Este modelo se utilizará como función de interpolación en el espesor en el elemento finito 3D para análisis de láminas que se presenta, para cuya completa definición no resta sino admitir conocidas las funciones $\hat{\mathbf{d}}(\theta^\alpha, \mathbf{u})$ y $\hat{\mathbf{v}}(\theta^\alpha, \mathbf{u})$, mediante las cuales se interpolan los campos vectoriales \mathbf{d} y \mathbf{v} , pudiéndose entonces escribir

$$\hat{\mathbf{d}}^*(\theta^\alpha, \eta, \mathbf{u}) = \hat{\mathbf{d}}(\theta^\alpha, \mathbf{u}) + \eta \hat{\mathbf{v}}(\theta^\alpha, \mathbf{u}) \quad (33)$$

La ecuación (33) es la particularización a este caso de la función de interpolación $\hat{\mathbf{d}}^*$ que aparecía en la relación (12) del punto anterior, a partir de la cual se ha desarrollado el algoritmo del M.E.F.. Bastará, pues, para tenerlo completamente definido evaluar las expresiones que aparecen en la Tabla I en función de las componentes de \mathbf{d} y \mathbf{v} .

Los vectores y tensores que intervienen en la definición del funcional $G(\mathbf{d}^*, \mathbf{q}^*)$, ecuación (8), y consecuentemente en la del vector de componentes de la solicitación

activa según los g.d.l. considerados, $R(\mathbf{u})$, ecuación (16), pueden expresarse en cualquier sistema de coordenadas del espacio, aunque, en el caso de las láminas, la referencia más natural, y por lo tanto la más cómoda para trabajar, será la formada por las coordenadas gaussianas de la superficie de referencia Σ , θ^1 y θ^2 , y la coordenada η en el espesor*. Operar de este modo significa expresar el vector \mathbf{d}^* , a partir del cual se han definido las matrices cinemáticas, en la base natural \mathbf{G}^{*i} de este sistema de coordenadas, y los vectores \mathbf{d} y \mathbf{v} , definidos sobre Σ , en la particularización de \mathbf{G}_i^* a los puntos de esta superficie (de ecuación $\eta = 0$ en el sistema de coordenadas adoptado). Dicha particularización conduce a los vectores \mathbf{A}_α , $\alpha = 1, 2$, base natural asociada a las coordenadas gaussianas θ^α , $\alpha = 1, 2$, en Σ , y \mathbf{A}_3 dado por

$$\mathbf{A}_3 = \frac{\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2}{\|\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2\|} \quad (34)$$

donde \times representa el producto vectorial y $\|\cdot\|$ el operador módulo. La relación entre los vectores de la base \mathbf{G}_i^* en cualquier punto del espacio laminar y su particularización \mathbf{A}_i a la superficie de referencia viene dada por el tensor de Krauss $\boldsymbol{\mu}$ y su inverso $\bar{\boldsymbol{\mu}}$

$$\boldsymbol{\mu} = \mathbf{G}_i^* \otimes \mathbf{A}^i = \mu_i^j \mathbf{A}_j \otimes \mathbf{A}^j \quad (35)$$

$$\bar{\boldsymbol{\mu}} = \mathbf{A}_i \otimes \mathbf{G}^{*i} = \bar{\mu}_j^i \mathbf{A}_i \otimes \mathbf{A}^j \quad (36)$$

cuyas componentes se expresan como^{4,19}

$$\begin{aligned} \mu_\beta^\alpha &= \delta_\beta^\alpha - \eta B_\beta^\alpha \quad \alpha, \beta \in \{1, 2\} \\ \mu_3^\alpha &= \mu_3^3 = 0 \quad \forall \alpha \in \{1, 2\} \\ \mu_3^3 &= 1 \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \bar{\mu}_\beta^\alpha &= \frac{1}{\mu} [\delta_\beta^\alpha + \eta(B_\beta^\alpha - 2H\delta_\beta^\alpha)] \quad \alpha, \beta \in \{1, 2\} \\ \bar{\mu}_3^\alpha &= \bar{\mu}_3^3 = 0 \quad \forall \alpha \in \{1, 2\} \\ \bar{\mu}_3^3 &= 1 \end{aligned} \quad (38)$$

donde B_β^α son las componentes mixtas del tensor de curvaturas de Σ , δ_β^α las deltas de Kronecker, μ el determinante de las componentes mixtas del tensor de Krauss, dado por

$$\mu = 1 - 2H\eta + K\eta^2 \quad (39)$$

* Si la estructura constase de varias láminas, éstas serían las coordenadas locales en cada una de ellas, que bastaría transformar en un paso final, antes del ensamblaje de la matriz de rigidez global, al sistema de coordenadas global adoptado.

H es la curvatura principal de Σ

$$H = \text{tr}(B_\beta^\alpha) \quad (40)$$

y K la curvatura total o gaussiana de esta superficie

$$K = \det(B_\beta^\alpha) \quad (41)$$

siendo la relación entre las bases a que se ha hecho referencia

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_i^* &= \mu_i^j \mathbf{A}_j & \mathbf{A}_i &= \bar{\mu}_i^j \mathbf{G}_j^* \\ \mathbf{G}^{*i} &= \bar{\mu}_j^i \mathbf{A}^j & \mathbf{A}^j &= \mu_i^j \mathbf{G}^{*i} \end{aligned} \quad (42)$$

que es inmediata de obtener a partir de (35) y (36).

Por definición, las componentes \hat{d}^{*i} del vector $\hat{\mathbf{d}}^*$ en la base \mathbf{G}_i^* se calculan mediante

$$\hat{d}^{*i} = \hat{\mathbf{d}}^* \cdot \mathbf{G}^{*i} \quad (43)$$

donde no hay más que sustituir la ecuación (33), expresar los vectores $\hat{\mathbf{d}}$ y $\hat{\mathbf{v}}$ por sus componentes en la base \mathbf{A}_i y hacer uso de las relaciones (42) para llegar a

$$\hat{d}^{*i} = \bar{\mu}_j^i (\hat{d}^j + \eta \hat{v}^j) \quad (44)$$

donde

$$\hat{d}^j = \hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{A}^j \quad (45)$$

$$\hat{v}^j = \hat{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{A}^j \quad (46)$$

En (44), \hat{d}^{*i} depende de θ^α , η y \mathbf{u} , mientras \hat{d}^i y \hat{v}^i sólo lo hacen de θ^α y \mathbf{u} , y $\bar{\mu}_j^i$ sólo de θ^α y η . Las funciones \hat{d}^{*i} son las componentes del campo de desplazamientos en la base \mathbf{G}_i^* , que se trataban de obtener, y las funciones \hat{d}^i y \hat{v}^i , que en adelante se denominarán "desplazamientos característicos", se pueden interpolar mediante cualquier función de forma 2D convencional, que, aunque ello no es necesario⁹, se supondrá lineal en los parámetros nodales \mathbf{u} . Puesto que, conocidas \hat{d}^i y \hat{v}^i , su derivación respecto a los parámetros nodales es inmediata, también lo es la obtención de las matrices \mathbf{N} y $\tilde{\mathbf{N}}$ (véase Tabla I). Si, con la notación habitual del M.E.F., se escribe

$$\hat{\mathbf{d}}(\theta^\alpha, \mathbf{u}) = \hat{\mathbf{d}}(\theta^\alpha) \cdot \mathbf{u} \quad (47)$$

$$\hat{\mathbf{v}}(\theta^\alpha, \mathbf{u}) = \hat{\mathbf{v}}(\theta^\alpha) \cdot \mathbf{u} \quad (48)$$

donde $\hat{\mathbf{d}}$ y $\hat{\mathbf{v}}$ son matrices de $3 \times N$, siendo N el número de g.d.l. considerados, entonces

$$\mathbf{N} = \bar{\mu}(\hat{\mathbf{d}} + \eta \mathbf{v}) \quad (49)$$

$$\tilde{\mathbf{N}} = \mathbf{0} \quad (50)$$

siendo $\mathbf{0}$ la matriz nula de $3 \times N$ y $\bar{\mu}$ la de componentes del inverso del tensor de Krauss (3×3).

Para obtener las matrices \mathbf{B} y $\tilde{\mathbf{B}}$ se deberán expresar, en primer lugar, $\hat{d}_{i||j}^*$ y $\hat{d}_{||j}^{*i}$ en función de parámetros que dependan de \hat{d}^i y \hat{v}^i , tal como se hizo con \hat{d}^{*i} en (44). Procediendo análogamente al caso anterior, se parte de la definición de derivada covariante en la métrica $G_{ij}^* = \mathbf{G}_i^* \cdot \mathbf{G}_j^*$ (representada por $||$)

$$\hat{d}_{i||j}^* = \hat{\mathbf{d}}_{,j}^* \cdot \mathbf{G}_i^* \quad (51)$$

$$\hat{\mathbf{d}}_{,j}^* \cdot \mathbf{G}^{*i} = \hat{d}_{||j}^{*i} \quad (52)$$

se sustituye aquí la ecuación (33), expresando los vectores $\hat{\mathbf{d}}$ y $\hat{\mathbf{v}}$ en la base \mathbf{A}_i , se deriva haciendo uso de las fórmulas de Weingarten y Gauss (véase, por ejemplo, las referencias 1, 4 o 19), se utilizan las relaciones (42) para determinar los productos escalares de los vectores de una y otra base y, por último, se reordenan convenientemente los términos para obtener

$$\hat{d}_{||j}^{*i} = \bar{\mu}_{,k}^i (\hat{e}_{,j}^k + \eta \hat{x}_{,j}^k) \quad (53)$$

$$\hat{d}_{i||j}^* = \mu_{,i}^k (\hat{e}_{kj} + \eta \hat{x}_{kj}) \quad (54)$$

donde los sistemas \hat{e}_{kj} y \hat{x}_{kj} se definen mediante

$$\hat{\mathbf{d}}_{,j}^* = (\hat{e}_{,j}^k + \eta \hat{x}_{,j}^k) \mathbf{A}_k = (\hat{e}_{kj} + \eta \hat{x}_{kj}) \mathbf{A}^k \quad (55)$$

y se han determinado a partir de la aplicación de las fórmulas de Weingarten y Gauss a (33), teniendo en cuenta (45) y (46), llegando a

$$\left. \begin{aligned} \hat{e}_{,\beta}^{\alpha} &= \hat{d}_{,\beta}^{\alpha} - \hat{d}^3 B_{,\beta}^{\alpha} \\ \hat{e}_{,\alpha}^3 &= \hat{d}_{,\alpha}^3 - \hat{d}^3 B_{,\alpha}^3 \\ \hat{e}_{,3}^i &= \hat{v}^i \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{x}_{,\beta}^{\alpha} &= \hat{v}_{,\beta}^{\alpha} - \hat{v}^3 B_{,\beta}^{\alpha} \\ \hat{x}_{,\alpha}^3 &= \hat{v}_{,\alpha}^3 - \hat{v}^3 B_{,\alpha}^3 \\ \hat{v}_{,3}^i &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

representando (|) la derivación covariante en la métrica $A_{ij} = \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{A}_j$. Las expresiones desarrolladas de los sistemas \hat{e}_i^i y \hat{x}_i^i se recogen en la Tabla II. Nótese que dichos sistemas dependen exclusivamente de las coordenadas θ^α , $\alpha = 1, 2$, y de los parámetros nodales \mathbf{u} , siendo lineal la dependencia respecto a estos últimos, por serlo la de \hat{d}^i y \hat{v}^i . Finalmente, como la derivación de estos sistemas respecto a los parámetros nodales es inmediata, también lo es la obtención de las matrices \mathbf{B} y $\tilde{\mathbf{B}}$, con lo que concluye la parte de preparación de las expresiones analíticas a incorporar al programa.

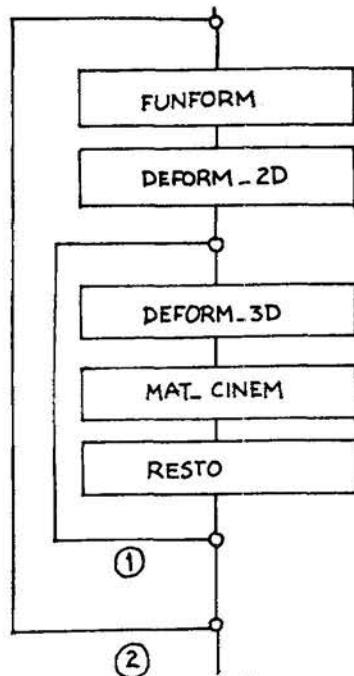
Componentes	Expresión
$\hat{e}_{.1}^1$	$\hat{d}_{,1}^1 + \Gamma_{11}^1 \hat{d}^1 + \Gamma_{21}^1 \hat{d}^2 - B_{,1}^1 \hat{d}^3$
$\hat{e}_{.2}^1$	$\hat{d}_{,2}^1 + \Gamma_{12}^1 \hat{d}^1 + \Gamma_{22}^1 \hat{d}^2 - B_{,2}^1 \hat{d}^3$
$\hat{e}_{.3}^1$	\hat{v}^1
$\hat{e}_{.1}^2$	$\hat{d}_{,1}^2 + \Gamma_{11}^2 \hat{d}^1 + \Gamma_{21}^2 \hat{d}^2 - B_{,1}^2 \hat{d}^3$
$\hat{e}_{.2}^2$	$\hat{d}_{,2}^2 + \Gamma_{12}^2 \hat{d}^1 + \Gamma_{22}^2 \hat{d}^2 - B_{,2}^2 \hat{d}^3$
$\hat{e}_{.3}^2$	\hat{v}^2
$\hat{e}_{.1}^3$	$\hat{d}_{,1}^3 + B_{11} \hat{d}^1 + B_{21} \hat{d}^2$
$\hat{e}_{.2}^3$	$\hat{d}_{,2}^3 + B_{12} \hat{d}^1 + B_{22} \hat{d}^2$
$\hat{e}_{.3}^3$	\hat{v}^3
$\hat{x}_{.1}^1$	$\hat{v}_{,1}^1 + \Gamma_{11}^1 \hat{v}^1 + \Gamma_{21}^1 \hat{v}^2 - B_{,1}^1 \hat{v}^3$
$\hat{x}_{.2}^1$	$\hat{v}_{,2}^1 + \Gamma_{12}^1 \hat{v}^1 + \Gamma_{22}^1 \hat{v}^2 - B_{,2}^1 \hat{v}^3$
$\hat{x}_{.3}^1$	0
$\hat{x}_{.1}^2$	$\hat{v}_{,1}^2 + \Gamma_{11}^2 \hat{v}^1 + \Gamma_{21}^2 \hat{v}^2 - B_{,1}^2 \hat{v}^3$
$\hat{x}_{.2}^2$	$\hat{v}_{,2}^2 + \Gamma_{12}^2 \hat{v}^1 + \Gamma_{22}^2 \hat{v}^2 - B_{,2}^2 \hat{v}^3$
$\hat{x}_{.3}^2$	0
$\hat{x}_{.1}^3$	$\hat{v}_{,1}^3 + B_{11} \hat{v}^1 + B_{21} \hat{v}^2$
$\hat{x}_{.2}^3$	$\hat{v}_{,2}^3 + B_{12} \hat{v}^1 + B_{22} \hat{v}^2$
$\hat{x}_{.3}^3$	0

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = \mathbf{A}^\gamma \cdot \mathbf{A}_{\alpha,\beta} \quad , \quad \text{símbolos de Christoffel de segunda especie}$$

$$B_{\alpha\beta} = \mathbf{A}_3 \cdot \mathbf{A}_{\alpha,\beta} \quad , \quad \text{segunda forma fundamental}$$

TABLA II. Componentes de las derivadas del campo de desplazamientos.

El algoritmo de obtención de la matriz de rigidez y vector de residuos, en la parte que afecta a este artículo, consta de cuatro fases fundamentales (véase Figura 2):



- 1- Bucle sobre los puntos de integración en el espesor
- 2- Bucle sobre los puntos de integración en la superficie media

Figura 2. Algoritmo inicial.

- Una primera (FUNFORM) en la que se obtendrán las funciones \hat{d}^i , \hat{v}^i , $\hat{d}_{,\alpha}^i$, $\hat{v}_{,\alpha}^i$, $\alpha = 1, 2$, y las derivadas de todas ellas respecto a los parámetros nodales, en el punto de integración sobre la superficie de referencia que se esté considerando.
- A continuación, en el mismo punto, se obtendrán los sistemas \hat{e}_j^i , \hat{x}_j^i , (Tabla II), y sus derivadas respecto a los parámetros nodales (DEFORM-2D).
- En tercer lugar, (DEFORM-3D), y en cada uno de los puntos de integración en el espesor que correspondan al que se estaba tratando en la superficie de referencia, se deberán determinar las funciones \hat{d}^{*i} , $\hat{d}_{i||j}^*$, $\hat{d}_{||j}^i$ y sus derivadas respecto a los parámetros nodales (ecuaciones (44), (53) y (54)).
- y en cuarto lugar, con los resultados anteriores, se determinan las matrices \mathbf{N} , $\tilde{\mathbf{N}}$, \mathbf{B} y $\tilde{\mathbf{B}}$ (Tabla I, subrutina MAT-CINEM).

Una vez realizado lo anterior, resta multiplicar por operadores que dependen de las cargas, las tensiones o las características del material, y por los pesos de las fórmulas de integración y los jacobianos correspondientes, y ensamblar la matriz de rigidez global.

Todo ello no afecta al problema objeto de este escrito, y se ha representado, en el esquema anterior, por la subrutina RESTO.

LAS LAMINAS ELASTOPLASTICAS Y EL TIEMPO DE COMPUTACION

El procedimiento de obtención de las matrices cinemáticas descrito en las secciones precedentes presenta ciertas ventajas frente a otros más habituales, basados en la determinación explícita previa de las expresiones de todas y cada una de sus componentes en función de los parámetros nodales y posterior programación de tales relaciones, entre las que cabe citar:

- Su carácter algorítmico, entendiendo por tal el hecho de constar el método varios pasos sencillos, definidos por una serie de expresiones compactas, susceptibles de ser programadas directamente (las ecuaciones cuarta y quinta de la Tabla I, conjuntamente con las número (49) y (50), para el bloque MAT-CINEM, las número (44), (53) y (54), así como sus correspondientes derivadas respecto a los parámetros nodales para el DEFORM-3D, o las número (56) y (57) para el bloque DEFORM-2D). Este rasgo permite eludir la programación de expresiones farragosas, con el riesgo de cometer errores de difícil localización que ello conlleva, sustituyéndola por la de otras más sencillas, con menor probabilidad de error, y por trabajo del ordenador.
- La utilidad de estas mismas rutinas de cálculo para la resolución de una amplia gama de problemas. La primera de ellas, MAT-CINEM, es común a todos los problemas estáticos 3D basados en una formulación lagrangiana total, así como a los que, siendo esencialmente 1D o 2D, pretendan analizarse, por los motivos que sea, como 3D (éste es el caso de la tipología que nos ocupa); la segunda, DEFORM-3D, lo es a todos los casos posibles de análisis laminar, abordados por este procedimiento, en que la hipótesis cinemática sea una función lineal en η .
- La validez total de las rutinas anteriores sean cuales sean las funciones de interpolación escogidas para cada desplazamiento característico, ya que éstas sólo intervienen en la subrutina FUNFORM, la cual puede disponer de un catálogo de éstas tan extenso como se precise y sencillísimo de ampliar. Ello supone, por una parte, que el procedimiento descrito permite disponer de toda una familia de elementos finitos 3D basados en la misma hipótesis cinemática, según cuales sean las funciones concretas escogidas para interpolar los distintos desplazamientos característicos \hat{d}^i y \hat{v}^i , y por otra, que es posible analizar modelos estructurales derivados del laminar con el mismo programa, simplemente omitiendo la interpolación de alguno de los desplazamientos característicos citados, por ejemplo, vigas y arcos si no se consideran \hat{d}^2 y \hat{v}^2 , o lajas en tensión (o deformación) plana si sólo se utilizan \hat{d}^1 y \hat{d}^2 .
- La capacidad del modelo para representar cualquier geometría, ya que ésta se define exclusivamente a través del tensor métrico, el de curvaturas y los símbolos de Christoffel de la superficie de referencia Σ , que se determinan en la subrutina

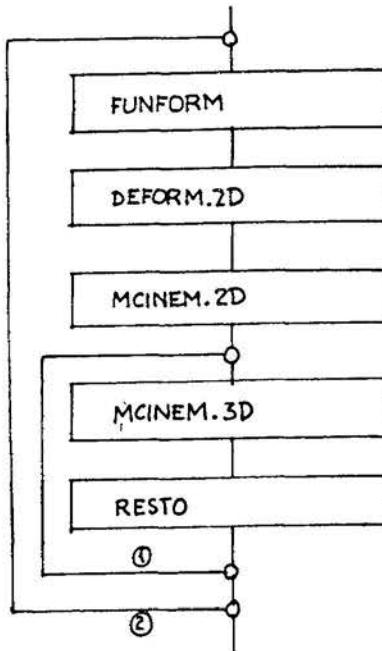
adecuada.

No obstante, cuando se trata de realizar análisis elastoplásticos, que requieren utilizar un número elevado de puntos de integración en el espesor, (seis, ocho o diez frente a los dos que son suficientes en el caso elástico⁴), el tiempo de computación crece de forma importante con dicho número de puntos, haciéndose excesivamente largo. Esta característica hay que considerarla como un inconveniente serio del método, puesto que hace tedioso el cálculo e incrementa su coste, pudiendo causar, en último extremo, el que se relegue el modelo 3D al contraste de los modelos elastoplásticos 2D aproximados, asumiendo los inconvenientes de éstos en los restantes cálculos. No obstante, puesto que es en el análisis elastoplástico donde realmente interesa considerar el carácter 3D de la lámina, para tener una interpretación correcta del fenómeno, se ha tratado de paliar este inconveniente, buscando un modo de abordar la determinación de las matrices cinemáticas tal que permita incrementar considerablemente el número de puntos de integración en el espesor sin aumento apreciable del tiempo de computación. Para ello se han reorganizado las subrutinas DEFORM-3D y MAT-CINEM anteriores, de tal modo que el grueso de las operaciones a realizar se efectúe en una nueva rutina MCINEM-2D, que depende de los puntos de integración sobre la superficie de referencia, pero no de los del espesor, y otra muy sencilla, MCINEM-3D, que depende de estos últimos. Esta reorganización, como el lector podrá deducir más adelante, sólo puede efectuarse sobre las matrices B y \tilde{B} , cuyas componentes dependen del tensor de Kraus, el cual es una expresión polinómica en η , y no sobre N y \tilde{N} , que lo hacen de su inverso, ya que éste es racional (representable, por lo tanto, por una serie de infinitos términos), en dicha variable. Ello no es un inconveniente grave, ya que con el modo de interpolación admitido, \tilde{N} es idénticamente nula, y N es mucho menos costosa de calcular que B y \tilde{B} , interviniendo, además, sólo en el vector de cargas, que se determina una sola vez en todo el proceso, y en la matriz de cargas dependientes de los desplazamientos, que en la mayoría de los casos también es idénticamente nula, puesto que las solicitudes, habitualmente, no suelen depender de dicho campo.

Al efectuar la modificación que se está tratando se pierde la generalidad de la subrutina MAT-CINEM comentada, puesto que tras ella el algoritmo resultante ya sólo es válido para problemas de láminas cuya hipótesis cinemática sea una expresión lineal en η , y para los derivados de dicho modelo.

La reforma citada del algoritmo es fácil de imaginar: puesto que el inconveniente detectado deriva del elevado número de operaciones que se incluyen en el bucle sobre los puntos de integración en el espesor, se trata simplemente de reorganizar las distintas relaciones que intervienen, expresándolas como polinomios en η , cuyos coeficientes serán función del punto considerado sobre la superficie media, por lo que su determinación podrá efectuarse fuera del citado bucle, quedando sólo en la combinación polinómica. El proceso a desarrollar es el siguiente: se sustituyen las derivadas adecuadas de (53) y (54) en las relaciones cuarta y quinta de la Tabla I, y (37) en el resultado de esta operación, agrupando, a continuación los términos independiente, lineal y cuadrático en η ; la determinación de estos términos constituirá la subrutina MCINEM-2D, que no necesita estar incluida en el bucle sobre los puntos de integración en el espesor, y su combinación constituirá la subrutina MCINEM-3D, muy sencilla de programar y rápida

de ejecutar, que es la única parte del algoritmo incluida en dicho bucle. El diagrama de flujo resultante se representa en la Figura 3, en la cual las restantes subrutinas son las mencionadas en el apartado anterior.



- 1- Bucle sobre los puntos de integración en el espesor.
- 2- Bucle sobre los puntos de integración en la superficie media.

Figura 3. Algoritmo modificado.

Además de lo descrito hasta aquí, se incluirá en cuanto sigue la descomposición de \mathbf{B} y $\tilde{\mathbf{B}}$ en dos matrices cada una, denotadas por un superíndice 0 o 1, que serán, respectivamente, sus partes lineal y no lineal en los desplazamientos. Sean, pues

$$(\mathbf{B}^0)_{Aij} = \frac{1}{2} \{ \hat{d}_{i||j,A}^* + \hat{d}_{j||i,A}^* \} \quad (58)$$

$$(\mathbf{B}^1)_{Aij} = \frac{1}{2} \{ \hat{d}_{.||i,A}^* \cdot \hat{d}_{k||j}^* + \hat{d}_{.||i}^* \cdot \hat{d}_{k||j,A}^* \} \quad (59)$$

$$(\tilde{\mathbf{B}}^0)_{ABij} = \frac{1}{2} \{ \hat{d}_{i||j,AB}^* + \hat{d}_{j||i,AB}^* \} \quad (60)$$

$$(\tilde{\mathbf{B}}^1)_{ABij} = \frac{1}{2} \{ \hat{d}_{.||i,A}^* \cdot \hat{d}_{k||j,B}^* + \hat{d}_{.||i,B}^* \cdot \hat{d}_{k||j,A}^* + \hat{d}_{.||i,AB}^* \cdot \hat{d}_{k||j}^* + \hat{d}_{.||i}^* \cdot \hat{d}_{k||j,AB}^* \} \quad (61)$$

donde $(\mathbf{A})_{Aij}$ significa el elemento A_{ij} de la matriz \mathbf{A} .

Por simplicidad de notación, se adoptará en cuanto sigue el siguiente convenio:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_I + \eta \mathbf{A}_{II} + \eta^2 \mathbf{A}_{III} \quad (62)$$

donde \mathbf{A} representa cualquiera de las matrices \mathbf{B}^0 , \mathbf{B}^1 , $\tilde{\mathbf{B}}^0$ o $\tilde{\mathbf{B}}^1$. Que todas ellas admiten una descomposición de este tipo puede comprobarlo el lector sin más que realizar con cada una de sus componentes el proceso descrito anteriormente, que se presenta, a modo de ejemplo, para la $A_{\alpha\beta}$ de la matriz \mathbf{B}^0 . Llevando (54) a (58)

$$(\mathbf{B}^0)_{A\alpha\beta} = \frac{1}{2} \{ \mu_{\alpha}^k (\hat{e}_{k\beta} + \eta \hat{x}_{k\beta})_{,A} + \mu_{\beta}^k (\hat{e}_{k\alpha} + \eta \hat{x}_{k\alpha})_{,A} \}$$

teniendo en cuenta, ahora (37) y que el tensor de Krauss no depende de los parámetros nodales

$$\begin{aligned} (\mathbf{B}^0)_{A\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \{ (\delta_{\alpha}^{\lambda} - \eta B_{\alpha}^{\lambda}) (\hat{e}_{\lambda\beta,A} + \eta \hat{x}_{\alpha\beta,A}) + (\delta_{\beta}^{\lambda} - \eta B_{\beta}^{\lambda}) (\hat{e}_{\lambda\alpha,A} + \eta \hat{x}_{\lambda\alpha,A}) \} = \\ &= \frac{1}{2} \{ (\hat{e}_{\alpha\beta,A} + \hat{e}_{\beta\alpha,A}) + \eta (\hat{x}_{\alpha\beta,A} + \hat{x}_{\beta\alpha,A} - B_{\alpha}^{\lambda} \hat{e}_{\lambda\beta,A} - B_{\beta}^{\lambda} \hat{e}_{\lambda\alpha,A}) + \\ &+ \eta^2 (-B_{\alpha}^{\lambda} \hat{x}_{\lambda\beta,A} - B_{\beta}^{\lambda} \hat{x}_{\lambda\alpha,A}) \} \end{aligned} \quad (63)$$

de donde

$$(\mathbf{B}_I^0)_{A\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\hat{e}_{\alpha\beta,A} + \hat{e}_{\beta\alpha,A}) \quad (64)$$

$$(\mathbf{B}_{II}^0)_{A\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\hat{x}_{\alpha\beta,A} + \hat{x}_{\beta\alpha,A} - B_{\alpha}^{\lambda} \hat{e}_{\lambda\beta,A} - B_{\beta}^{\lambda} \hat{e}_{\lambda\alpha,A}) \quad (65)$$

$$(\mathbf{B}_{III}^0)_{A\alpha\beta} = \frac{1}{2} (-B_{\alpha}^{\lambda} \hat{x}_{\lambda\beta,A} - B_{\beta}^{\lambda} \hat{x}_{\lambda\alpha,A}) \quad (66)$$

Del mismo modo se procede con las restantes componentes de esta matriz y con todas las de las otras, cuyo desarrollo no se incluye pues no aporta nada nuevo. Simplemente, en los términos cuadráticos en desplazamientos debe observarse que, mientras $d_{i||j}^*$ depende del tensor de Krauss (54), $d_{||j}^{*i}$ lo hace de su inverso (53), y en el producto de ambos, por lo tanto, no aparecen términos relacionados con él, como se puede ver fácilmente

$$\begin{aligned} \hat{d}_{||j}^{*k} \cdot \hat{d}_{k||i}^* &= \mu_m^k (\hat{e}_{.j}^m + \eta \hat{x}_{.j}^m) \mu_n^n (\hat{e}_{ni} + \eta \hat{x}_{ni}) \\ &= \delta_m^n (\hat{e}_{.j}^m + \eta \hat{x}_{.j}^m) (\hat{e}_{ni} + \eta \hat{x}_{ni}) \\ &= (\hat{e}_{.j}^m + \eta \hat{x}_{.j}^m) (\hat{e}_{mi} + \eta \hat{x}_{mi}) \end{aligned} \quad (67)$$

Las componentes de las matrices \mathbf{B}_R^0 , \mathbf{B}_R^1 , $\tilde{\mathbf{B}}_R^0$ y $\tilde{\mathbf{B}}_R^1$, $R = I, II, III$, se incluyen en las Tablas III, IV y V. Volviendo a la Figura 3, las operaciones a realizar en MCINEN-2D son las descritas en estas tablas, y las de MCINEN-3D las dadas por (62).

Matriz	Componentes	EXPRESION
\mathbf{B}_I^0	$A\alpha\beta$	$\frac{1}{2}(\hat{e}_{\alpha\beta,A} + \hat{e}_{\beta\alpha,A})$
	$A\alpha 3$	$\frac{1}{2}(\hat{e}_{3\alpha,A} + \hat{v}_{\alpha,A})$
	$A33$	$\hat{v}_{,A}^3$
\mathbf{B}_{II}^0	$A\alpha\beta$	$\frac{1}{2}(\hat{x}_{\alpha\beta,A} + \hat{x}_{\beta\alpha,A} - B_{.\alpha}^\lambda \hat{e}_{\lambda\beta,A} - B_{.\beta}^\lambda \hat{e}_{\lambda\alpha,A})$
	$A\alpha 3$	$\frac{1}{2}(\hat{x}_{\alpha 3,A} - B_{.\alpha}^\lambda \hat{v}_{\lambda,A})$
	$A33$	0
\mathbf{B}_{III}^0	$A\alpha\beta$	$\frac{1}{2}(-B_{.\alpha}^\lambda \hat{x}_{\lambda\beta,A} - B_{.\beta}^\lambda \hat{x}_{\lambda\alpha,A})$
	$A\alpha 3$	0
	$A33$	0
\mathbf{B}_I^1	$A\alpha\beta$	$\frac{1}{2}(\hat{e}_{.\alpha,A}^i \hat{e}_{i\beta,A} + \hat{e}_{.\alpha,A}^i \hat{e}_{i\beta,A})$
	$A\alpha 3$	$\frac{1}{2}(\hat{v}_{,A}^i \hat{e}_{i\alpha} + \hat{v}^i \hat{e}_{i\alpha,A})$
	$A33$	$\hat{v}^i \hat{v}_{i,A}$
\mathbf{B}_{II}^1	$A\alpha\beta$	$\frac{1}{2}(\hat{e}_{.\alpha,A}^k \hat{x}_{k\beta,A} + \hat{e}_{.\alpha,A}^k \hat{x}_{k\beta} + \hat{e}_{.\beta,A}^k \hat{x}_{k\alpha} + \hat{e}_{.\beta}^k \hat{x}_{k\alpha,A})$
	$A\alpha 3$	$\frac{1}{2}(\hat{v}_{,A}^i \hat{x}_{i\alpha} + \hat{v}^i \hat{x}_{i\alpha,A})$
	$A33$	0
\mathbf{B}_{III}^1	$A\alpha\beta$	$\frac{1}{2}(\hat{x}_{.\alpha,A}^k \hat{x}_{k\beta} + \hat{x}_{.\alpha}^k \hat{x}_{k\beta,A})$
	$A\alpha 3$	0
	$A33$	0

Tabla III. Componentes de la matriz \mathbf{B}_R^0 , \mathbf{B}_R^1 , $R = I, II, III$.

Matriz	Componentes	EXPRESION
$\tilde{\mathbf{B}}_I^0$	$AB\alpha\beta$	$\frac{1}{2}(\hat{e}_{\alpha\beta,AB} + \hat{e}_{\beta\alpha,AB})$
	$AB\alpha 3$	$\frac{1}{2}(\hat{e}_{\alpha 3,AB} + \hat{v}_{\alpha,AB})$
	$AB33$	$\hat{v}_{,AB}^3$
$\tilde{\mathbf{B}}_{II}^0$	$AB\alpha\beta$	$\frac{1}{2}(\hat{x}_{\alpha\beta,AB} + \hat{x}_{\beta\alpha,AB} - B_{\alpha}^{\lambda}\hat{e}_{\lambda\beta,AB} - B_{\beta}^{\lambda}\hat{e}_{\lambda\alpha,AB})$
	$AB\alpha 3$	$\frac{1}{2}(\hat{x}_{3\alpha,AB} - B_{\alpha}^{\lambda}\hat{v}_{\lambda,AB})$
	$A33$	0
$\tilde{\mathbf{B}}_{III}^0$	$AB\alpha\beta$	$\frac{1}{2}(-B_{\alpha}^{\lambda}\hat{x}_{\lambda\beta,AB} - B_{\beta}^{\lambda}\hat{x}_{\lambda\alpha,AB})$
	$AB\alpha 3$	0
	$AB33$	0

Tabla IV. Componentes de la matriz $\tilde{\mathbf{B}}_R^0$. $R = I, II, III$.

Por otra parte, de (14) y (62) se tiene que

$$\begin{aligned}
 \delta\mathbf{E}^* &= \mathbf{B} \cdot \Delta\mathbf{u} = (\mathbf{B}_I + \eta\mathbf{B}_{II} + \eta^2\mathbf{B}_{III}) \cdot \Delta\mathbf{u} \\
 &= \mathbf{B}_I \cdot \Delta\mathbf{u} + \eta\mathbf{B}_{II} \cdot \Delta\mathbf{u} + \eta^2\mathbf{B}_{III} \cdot \Delta\mathbf{u} \\
 &= \delta\mathbf{E}_I + \eta\delta\mathbf{E}_{II} + \eta^2\delta\mathbf{E}_{III}
 \end{aligned} \tag{68}$$

donde

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B}_R &= \mathbf{B}_R^0 + \mathbf{B}_R^1 \\
 \delta\mathbf{E}_R &= \delta\mathbf{E}_R^0 + \delta\mathbf{E}_R^1
 \end{aligned} \tag{69}$$

$R = I, II, III$. Ahora bien, en una formulación 2D del problema laminar, partiendo de la misma hipótesis cinemática, las deformaciones 3D se pueden expresar en función de las generalizadas como^{1,2,4,10}

$$\mathbf{E}^* = \mathbf{E} + \eta\mathbf{k} + \eta^2\boldsymbol{\Omega} \tag{70}$$

por lo que

$$\delta\mathbf{E}^* = \delta\mathbf{E} + \eta\delta\mathbf{k} + \eta^2\delta\boldsymbol{\Omega} \tag{71}$$

Matriz	Componentes	EXPRESION
$\tilde{\mathbf{B}}_I^1$	$AB\alpha\beta$	$\frac{1}{2}(\hat{e}_{\alpha,A}^i \hat{e}_{\beta,B} + \hat{e}_{\alpha,B}^i \hat{e}_{\beta,A} + \hat{e}_{\alpha,AB}^i \hat{e}_{\beta} + \hat{e}_{\alpha}^i \hat{e}_{\beta,AB})$
	$AB\alpha 3$	$\frac{1}{2}(\hat{v}_{,A}^i \hat{e}_{i\alpha,B} + \hat{v}_{,B}^i \hat{e}_{i\alpha,A} + \hat{v}_{,AB}^i \hat{e}_{i\alpha} + \hat{v}^i \hat{e}_{i\alpha,AB})$
	$AB33$	$(\hat{v}_{,B}^i \hat{v}_{i,A} + \hat{v}^i \hat{v}_{i,AB})$
$\tilde{\mathbf{B}}_{II}^1$	$AB\alpha\beta$	$\frac{1}{2}(\hat{e}_{\alpha,A}^k \hat{x}_{k\beta,B} + \hat{e}_{\alpha,B}^k \hat{x}_{k\beta,A} + \hat{e}_{\beta,A}^k \hat{x}_{k\alpha,B} + \hat{e}_{\beta,B}^k \hat{x}_{k\alpha,A} + \hat{e}_{\alpha,AB}^k \hat{x}_{k\beta} + \hat{e}_{\alpha}^k \hat{x}_{k\beta,AB} + \hat{e}_{\beta,AB}^k \hat{x}_{k\alpha} + \hat{e}_{\beta}^k \hat{x}_{k\alpha,AB})$
	$AB\alpha 3$	$\frac{1}{2}(\hat{v}_{,A}^i \hat{x}_{i\alpha,B} + \hat{v}_{,B}^i \hat{x}_{i\alpha,A} + \hat{v}_{,AB}^i \hat{x}_{i\alpha} + \hat{v}^i \hat{x}_{i\alpha,AB})$
	$AB33$	0
$\tilde{\mathbf{B}}_{III}^1$	$AB\alpha\beta$	$\frac{1}{2}(\hat{x}_{\alpha,A}^k \hat{x}_{k\beta,B} + \hat{x}_{\alpha,B}^k \hat{x}_{k\beta,A} + \hat{x}_{\alpha,AB}^k \hat{x}_{k\beta} + \hat{x}_{\alpha}^k \hat{x}_{k\beta,AB})$
	$AB\alpha 3$	0
	$AB33$	0

Tabla V. Componentes de la matriz $\tilde{\mathbf{B}}_R^1. R = I, II, III$.

que comparada con (68) conduce a la inmediata identificación de las matrices \mathbf{B}_I , \mathbf{B}_{II} y \mathbf{B}_{III} con las derivadas de Frechet de las deformaciones generalizadas \mathbf{E} , \mathbf{k} y $\mathbf{\Omega}$ respectivamente, con lo cual se pueden establecer comparaciones entre uno y otro caso, realizar análisis paramétricos sobre la influencia de determinados términos de deformación generalizada con este elemento finito o despreciar el efecto de los que se saben inapreciables por otros análisis 2D paralelos.

Por último, para ilustrar el éxito en la disminución del tiempo de computación que se consigue con el método propuesto, se incluye en la Figura 4 la comparación entre el que se requiere para procesar un mismo elemento laminar, con número creciente de puntos de integración en el espesor, con los algoritmos descritos en la Figuras 2 (inicial) y 3 (modificado). Para independizar los resultados de las características del ordenador con que se ha procesado el ejemplo se presentan adimensionalizados dividiendo por el tiempo usado para un solo punto en el espesor por el algoritmo modificado. Cabe destacar que, mientras el tiempo necesario para procesar un problema con 8 o 10 puntos de integración en el espesor (necesarios en un caso elastoplástico) es 2.2 y 2.6 veces, respectivamente, el necesario para hacerlo con 2 puntos (suficientes en un caso elástico), si se usa el algoritmo modificado, si se utiliza el inicial es 3.9 y 4.8 veces aquel. La determinación de todos estos tiempos se ha realizado tomando la Ley de Hooke Generalizada como ecuación constitutiva, puesto que se trataba de comparar el

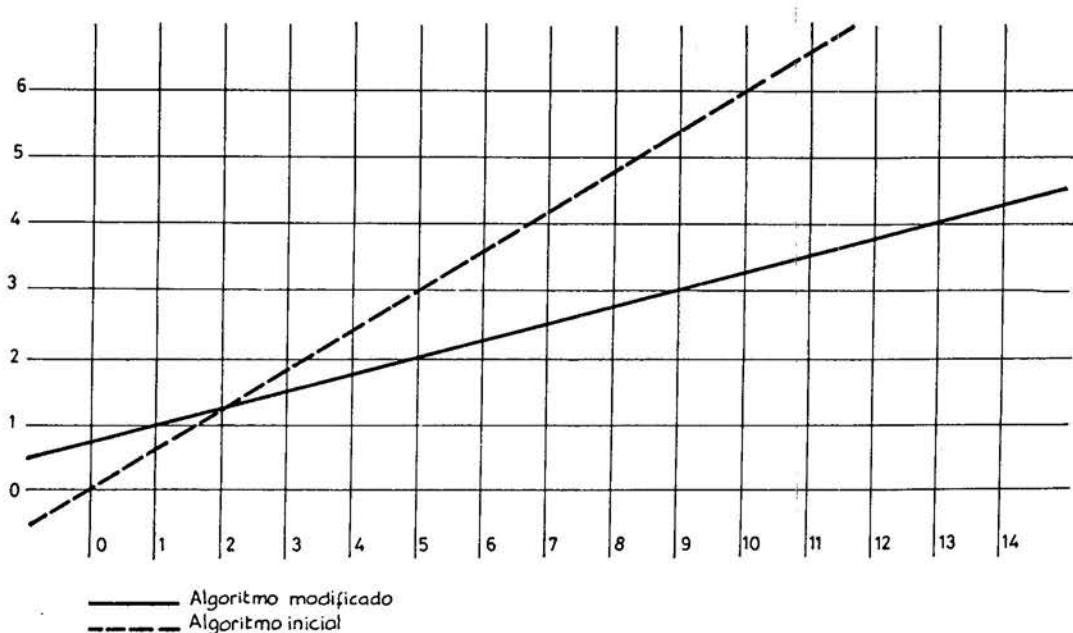


Figura 4. Tiempo de montaje de la matriz de rigidez en función del número de puntos de integración en el espesor (Newton-Raphson puro).

tiempo empleado en el ensamblaje de las matrices cinemáticas, para lo cual no sirve un ejemplo elastoplástico, puesto que en él hubiese incluido también el tiempo utilizado para la integración de las ecuaciones del flujo plástico, el cual es variable según el proceso sea elástico o elastoplástico en cada punto, y, en este último caso, según las iteraciones requeridas por el algoritmo que efectúe dicha integración. Esto significa que al procesar un ejemplo elastoplástico no crecerá el tiempo según lo prescrito en la tabla anterior, sino más rápidamente y sin una ley fija, en función del progreso de la plastificación, pero el tiempo adicional sobre el determinado en dicha Tabla es propio del tratamiento de las ecuaciones constitutivas y no puede modificarse actuando sobre el elemento finito, sino sobre el algoritmo de integración de estas, quedando, por lo tanto, fuera del alcance de este escrito.

Asimismo, otro modo de disminuir el tiempo global de proceso es prescindir de la matriz de tensiones iniciales, sustituyendo entonces el método de Newton-Raphson puro por otro derivado de aquel, que ha mostrado buen comportamiento. La Figura 5 presenta la misma comparación de tiempos anterior en este caso, bajo las mismas condiciones. El algoritmo modificado sigue mostrándose netamente superior al inicial, aunque no en la proporción del caso anterior. La gran ventaja de este modo de proceder estriba en la disminución del tiempo global de cómputo conseguida al omitir una de las subrutinas más laboriosas. A título de ejemplo se indica que procesar el problema de un solo punto (referencia de tiempos), con el algoritmo modificado, ha requerido en este caso un 18% del tiempo que se necesitó en el anterior. La importancia de esta cifra es muy relativa, ya que está muy condicionada por el equipo utilizado, puesto que en el primer caso el montaje de la matriz de tensiones iniciales, por necesidades de espacio en memoria, utilizaba abundantemente el almacenamiento secundario, con un

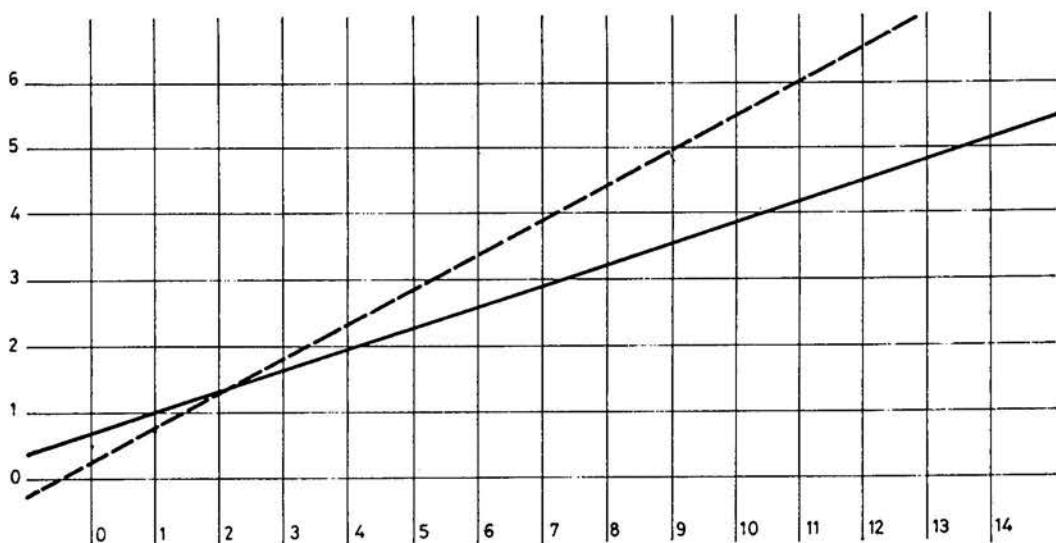


Figura 5. Tiempo de montaje de la matriz de rigidez en función del número de puntos de integración en el espesor (Newton-Raphson modificado).

número importante de accesos a disco, que ralentizan notablemente el proceso, y esto con otro equipo puede no ser así; lo que es indiscutible es que prescindiendo de esta matriz se disminuye considerablemente el tiempo requerido por cada iteración, aunque la cuantificación de tal decremento dependerá de la máquina y el programa.

EJEMPLOS

El elemento que se ha presentado es muy sencillo comparado con otros de los utilizados en el análisis de láminas con cinemática no lineal y relación canto/luz moderada o grande, pues en lugar de las componentes del director \mathbf{v} que aquí se han utilizado suelen usarse como desplazamientos característicos los ángulos entre la normal inicial y la deformada, con lo cual el papel de las variables que aquí se han interpolado lo representan en otros casos combinaciones de las razones trigonométricas de estos ángulos, conduciendo a expresiones mucho más complejas (véase, por ejemplo^{6,10}). No obstante, con este elemento se obtienen buenos resultados, sin necesidad de mallas excesivamente finas, y es razonable pensar que, dado que es más simple, su proceso será más rápido. Los ejemplos que a continuación se presentan, contrastados con otros conocidos en la literatura técnica, demuestran este buen comportamiento. Se han procesado con material elástico, puesto que a los efectos de lo que se trata de mostrar es suficiente, como se razonó en el punto anterior, y las ventajas para el análisis elastoplástico, que no son sino de tiempo de proceso, quedaron sobradamente demostradas en dicho punto.

El primero de los ejemplos que se presenta, definido en la Figura 6, consiste en un cilindro sometido a dos cargas puntuales en dirección radial. Los datos del problema, así como los resultados de comparación, se han tomado de D.G. Ashwell²², y J.F. Moyá¹. Se ha procesado sólo un octante de la pieza, por razones de simetría. En primer

lugar se presentan las flechas en el punto de aplicación de la carga, en régimen lineal, para distintas mallas, comparándolas con las obtenidas por otros autores (Tabla VI), observándose un comportamiento similar al de otros elementos, pese a la simplicidad de éste. Seguidamente se recoge la trayectoria de equilibrio de esta flecha para cargas crecientes, con la malla de 1×9 , que dió el mejor resultado en el caso anterior, y ya con cinemática no lineal (Figura 7).

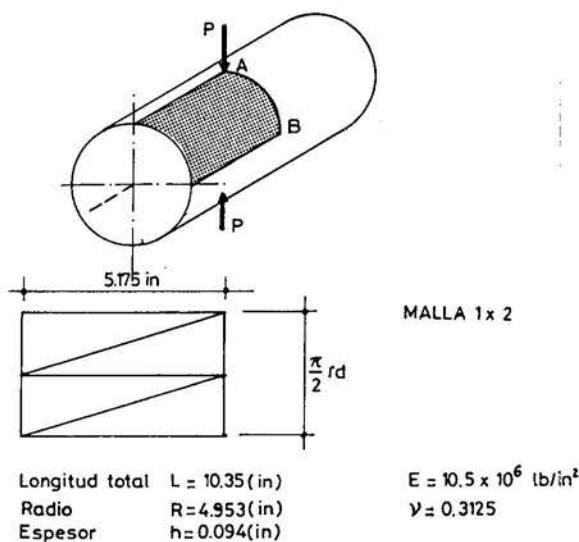


Figura 6. Definición del ejemplo número 1.

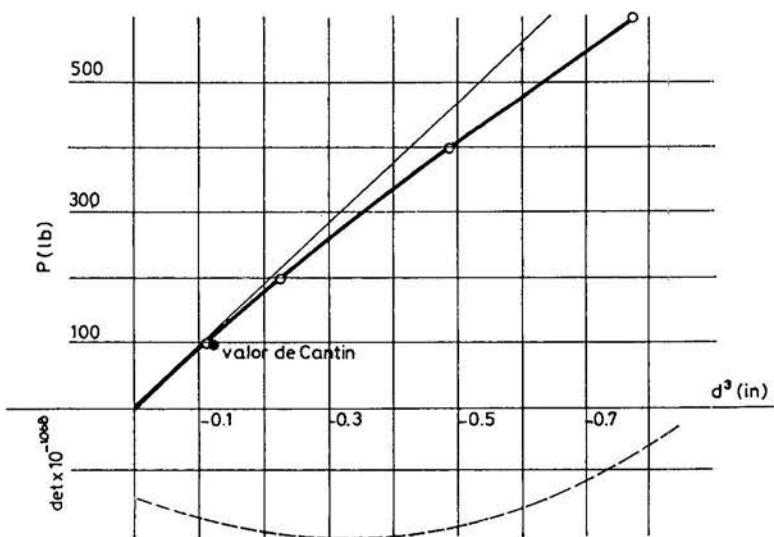


Figura 7. Trayectoria de equilibrio de las flechas en el punto de aplicación de la carga.

Malla en un octavo	Modelo propuesto	Cantin y Clough	Bogner & Al.	Ashwell y Sabir	Thomas y Gallagher	Cantin	Moyá
1x1	—	—	0.0025	0.1040	0.0048	—	—
1x2	0.0137	—	0.0802	—	—	—	—
1x3	0.0512	0.0297	—	—	—	—	0.0954
1x4	0.0784	—	0.1087	0.1106	0.1107	—	—
1x5	0.0920	0.0769	—	—	—	—	—
1x7	0.1030	0.0987	—	—	—	—	—
1x8	—	—	—	—	0.1119	—	—
1x9	0.1068	0.1057	—	—	—	—	—
2x2	—	—	0.0808	0.1103	—	0.1103	—
2x3	0.0514	—	—	—	—	—	0.1108
2x9	—	0.1073	—	—	—	—	—
4x4	—	—	—	0.1129	—	0.1126	—
6x6	—	—	—	0.1135	—	0.1137	—
8x8	—	—	—	0.1137	—	0.1139	—
10x10	—	—	—	0.1137	—	0.1139	—
3 x 49	—	0.1128	—	—	—	—	—

TABLA VI. Comparación de resultados de diversos autores (Ejemplo 1).

A continuación se presenta el análisis de un sector de cilindro apoyado en sus generatrices extremas y sometido a una carga puntual en el centro de la luz (Figura 8), cuyos datos y contraste se han tomado de K.S. Surana⁸. Aprovechando la simetría, se ha procesado sólo un cuarto de la pieza, con malla de 3x3. La trayectoria de equilibrio de la flecha en el punto de aplicación de la carga (Figura 9) presenta un excelente acuerdo con la dada por Surana, pese a ser nuestro elemento mucho más simple que el suyo. Asimismo, los resultados son prácticamente coincidentes con los de Oliver⁶.

Por último se presenta el análisis de una placa simplemente apoyada, de 200x200 cm, sometida a carga uniforme de 0.01 kg/cm², para distintos espesores y mallas, en régimen elástico y con cinemática lineal. La definición del problema se da en la Figura 10. Se ha procesado con dos tipos de condiciones de contorno, imponiendo que el giro de torsión en los cuatro lados es nulo (apoyo fuerte), o dejándolo libre y haciendo nulo,

por lo tanto, el momento torsor (apoyo débil). En la Figura 11 se representa la flecha adimensional en el centro de la luz, dada por

$$\alpha = \frac{wD}{qa^4}$$

(donde w representa la flecha, D la rigidez de la placa, q la carga repartida y a el lado del cuadrado) frente a la relación canto/luz, con los valores obtenidos con nuestro elemento para malla de 3×3 y los obtenidos por Reddy²³ mediante series. Esta flecha adimensional, para el caso de apoyo fuerte y con malla de 3×3 , fue de 4.0299×10^{-3} en nuestro caso, con relación canto/luz de $1/100$ (placa delgada), frente al valor 4.0694×10^{-3} obtenido por Reddy mediante desarrollos en serie, con un error del 1%, y de 4.1077×10^{-3} frente a 4.1150×10^{-3} (error 0.2%) para placa gruesa de relación canto/luz de $1/20$. Para finalizar, en la Tabla VII, se presentan los valores de esta flecha adimensional obtenidos con nuestro elemento frente a los de Tocher y Kapur (tomados de Zienkiewicz⁵) y el valor teórico de Reddy, para una relación canto/luz de $1/100$.

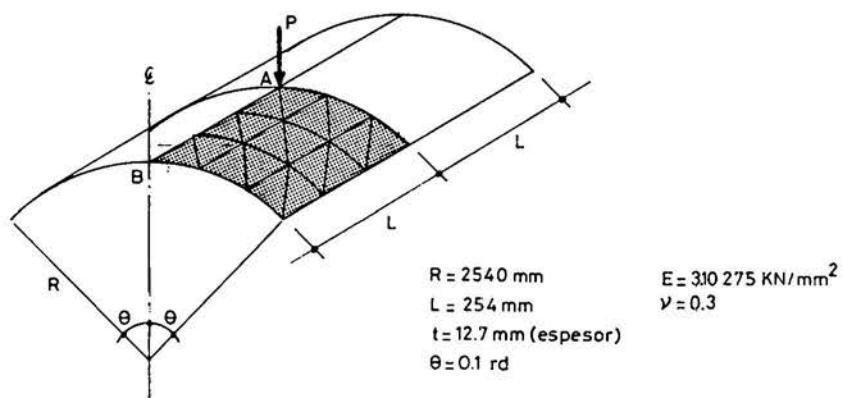


Figura 8. Definición del ejemplo 2.

Con los ejemplos anteriores se muestra el excelente comportamiento del elemento finito presentado, tanto para piezas delgadas como gruesas, aunque hay que remarcar que es mejor en estas últimas, y que las primeras requieren una discretización más fina, lo cual no es un problema dada la simplicidad del elemento y velocidad de proceso que permite, y también tanto con geometría lineal como no lineal, y con desplazamientos muy importantes.

NOTA ADICIONAL

El lector habrá observado que en el apartado segundo se dijo que se mantenía el carácter no lineal en los parámetros nodales de la función de interpolación con conveniencia para desarrollos posteriores, y ello no ha sido utilizado. Se ha procedido así para que las expresiones finales de dicho apartado (Tabla I), le sean útiles para

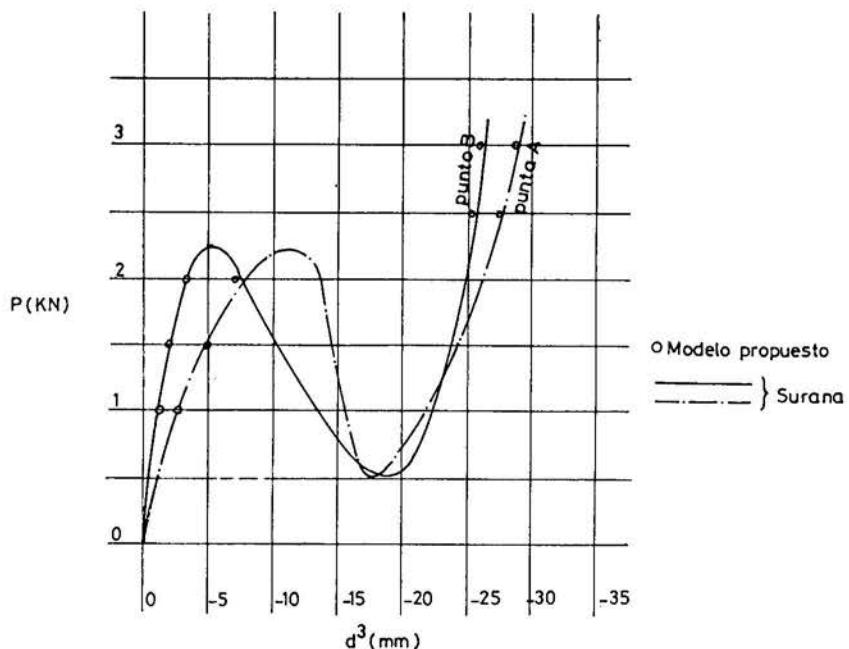
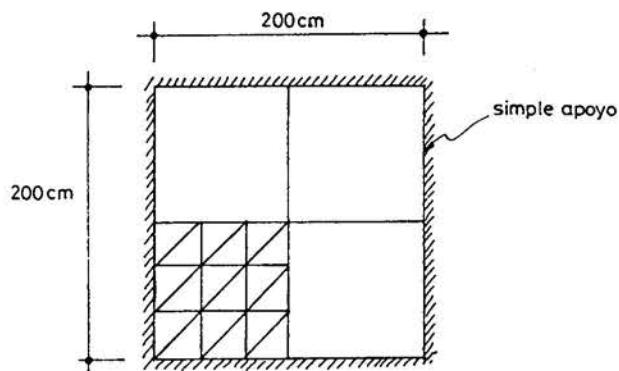


Figura 9. Trayectoria de equilibrio en el punto de aplicación de la carga (Ejemplo 2).



$$E = 2.1 \times 10^6 \text{ kp/cm} \quad \text{carga transversal: } 0.01 \text{ kp/cm}^2$$

Figura 10. Definición del ejemplo 3.

desarrollar, si lo desea, un elemento similar pero basado en la Hipótesis de Love-Kirchhoff,

$$\mathbf{d}^* = \mathbf{d} + \eta(\mathbf{a}_3 - \mathbf{A}_3) \quad (72)$$

en lugar del modelo CT1 (32), ya que en este caso \mathbf{d}^* resulta no lineal en dichos parámetros. En (72), \mathbf{a}_3 es el vector normal unitario a la superficie de referencia en configuración actual, y \mathbf{A}_3 el mismo vector pero en configuración de referencia. Las expresiones de dichos vectores, así como las de los sistemas \mathbf{e}_{ij} y \mathbf{x}_{ij} en este caso pueden

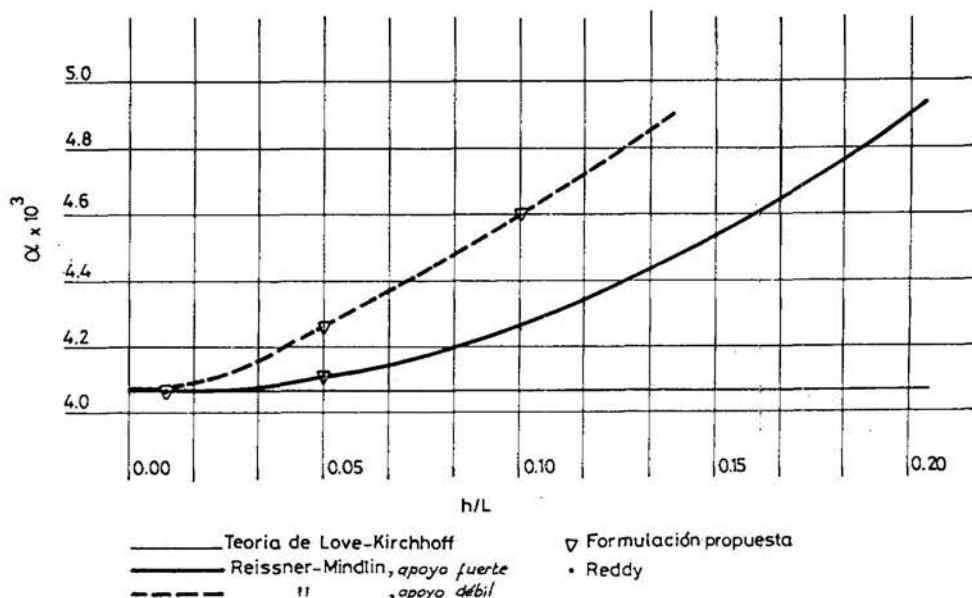


Figura 11. Flecha adimensional en el centro de la luz para distintas relaciones canto/luz y condiciones de contorno.

Malla	Tocher y Kapur	Modelo propuesto
1x1	3.446×10^{-3}	—
2x2	3.939×10^{-3}	3.9061×10^{-3}
3x3	—	4.0429×10^{-3}
4x4	4.033×10^{-3}	4.0655×10^{-3}
6x6	4.050×10^{-3}	—
8x8	4.056×10^{-3}	—

Exacta (Reddy): 4.06923×10^{-3}

TABLA VII. Flecha adimensional en el centro de la luz, para diversas mallas de discretización (Ejemplo 3). $h/L = 10^{-2}$.

consultarse en ⁹.

CONCLUSIONES

Se ha presentado un elemento finito 3D para análisis de estructuras laminares, basado en el modelo de comportamiento transversal CT1, cuya principal característica es que permite aumentar notablemente el número de puntos de integración considerados en el espesor sin un incremento notable del tiempo de cálculo empleado en la

determinación de las matrices geométricas, lo que le hace muy adecuado para los análisis elastoplásticos. Asimismo, una parte del trabajo realizado es útil para desarrollar otros elementos, con la misma metodología, basados en otra hipótesis cinemática. Es notable la versatilidad para analizar con el mismo modelo otros tipos estructurales derivados del laminar, y la sencillez con que permite tratar las más diversas geometrías de la superficie de referencia. Por último, con diversos ejemplos, se ha mostrado el buen comportamiento de este elemento con distintas relaciones canto/luz y con cinemática lineal y no lineal, incluso con grandes desplazamientos.

REFERENCIAS

1. J.F. Moyá, "Una teoría variacional para el análisis de láminas hiperelásticas basada en la jerarquización a orden N del modelo cinemático transversal: aplicación de primer orden al estudio del comportamiento no lineal y de la estabilidad", *Tesis Doctoral*, E.T.S. de Ing. de Caminos, Canales y Puertos, Universidad Politécnica de Valencia, (1984).
2. S. Monleón, J.F. Moyá y P. Fuster, "Teoría variacional de láminas", *Hormigón y Acero*, no. 152, pp. 155-213, (1984).
3. S. Monleón, J.F. Moyá y P. Fuster, "Formulaciones lagrangianas en el análisis no lineal de láminas", *Revista Internacional de Métodos Numéricos para el Cálculo y Diseño en Ingeniería*, Vol. 1, no. 3, pp. 3-25, (1985).
4. J. Casanova, "Una aportación al análisis elastoplástico, cinemáticamente no lineal, de estructuras laminares", *Tesis Doctoral*, Escuela Técnica Superior de Ing. de Caminos, Canales y Puertos, Universidad Politécnica de Valencia, (1987).
5. O.C. Zienkiewicz, "El método de los elementos finitos", Traducción al castellano de la 3a. edición inglesa, Ed. Reverté, Barcelona, (1967).
6. J. Oliver, "Una formulación quasi-intrínseca para el estudio, por el método de los elementos finitos, de vigas, arcos, placas y láminas, sometidas a grandes corrimientos, en régimen elastoplástico", *Tesis Doctoral*, Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Barcelona, Universidad Politécnica de Cataluña, (1982).
7. J. Oliver y E. Oñate, "A total lagrangian finite element formulation for the geometrically non -linear analysis of shells" en *Flexible shells*, Editores E.L. Axelrad y F.A. Emmerling, Ed. Springer-Verlag, Berlín, (1984).
8. K.S. Surana, "Geometrically nonlinear formulations for the curved shell element", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 19, pp. 581-615, (1983).
9. J. Casanova, J.F. Moyá, S. Monleón y P. Fuster, "An algorithmic generation of shape functions on the nonlinear analysis of shells", Proceedings de la *International Conference on Computational Plasticity*, Barcelona, (1987).
10. S. Monleón, J.F. Moyá y P. Fuster, "Cinemática de láminas", *Hormigón y Acero*, no. 152, pp. 39-76, (1984).
11. J.E. Marsden, y T.J.R. Hughes, *Mathematical formulations of elasticity*, Prentice-Halls Inc. Englewood Cliffs, N.J., (1983).
12. C. Lanczos, "The variational Principles of mechanics", University of Toronto Press, (1970).
13. S. Cescotto, F. Frey y G. Fonder, "Total and updated lagrangian description in nonlinear structural analysis" en *Energy Methods in finite element analysis*, Editores Glowinsky, Rodin y Zienkiewicz, John Wiley and sons, Nueva York, (1979).
14. J. Simó y R.L. Taylor, "Consistent tangent operators for rate independent elastoplasticity",

- Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. **48**, pp. 101–118, (1985).
- 15. J. Simó y M. Ortiz, "An unified approach to finite deformation elastoplasticity based on the use of hyperelastic constitutive equations", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. **49**, pp. 221–245, (1985).
 - 16. A.A. Ilyushin, *Plasticité*, Editions Eyrolles, París, (1959).
 - 17. M.A. Crisfield, "On an approximate yield criterion for thin steel shells", *TRRL Rept. LR658, Transport and Road Research Laboratory*, Crowthorne, Bershire, (1974).
 - 18. M.A. Crisfield, "Ivanov's yield criterion for thin plates and shells using finite elements", *TRRL Rept. LR919, Transport and Road Research Laboratory*, Crowthorne, Berkshire, (1979).
 - 19. M. Dikmen, "Theory of thin elastic shells", Pitman Books Ltd., (1982).
 - 20. O.M. Eidsheim y P.K. Larsen, "Non-linear analysis of elasto-plastic shells by hibrid stress finite elements", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. **34**, pp.989–1018, (1982).
 - 21. M.P. Bieniek y J.R. Funaro, "Elasto-plastic behaviour of plates and shells", *Tech. Rept. DNA 3954T*, Defence Nuclear Agency, Weidleinger Associates, Nueva York, (1976).
 - 22. D.G. Ashwell, "Strain elements with applications to arches, rings and cylindrical shells", en *Finite elements for thin shells and curved members*, Editores D.G. Ashwell y R.H. Gallagher, John Wiley and sons, Londres, (1976).
 - 23. J.N. Reddy, *Energy and variational methods in applied mechanics*, John Wiley and sons, Nueva York, (1984).