

**Monografías de Ingeniería Sísmica**  
Edited by A. H. Barbat

# **Modelación estocástica de la acción sísmica**

J.E. Hurtado

# **Modelación estocástica de la acción sísmica**

J.E. Hurtado

Monografía CIMNE IS-33 1999



CENTRO INTERNACIONAL DE MÉTODOS NUMÉRICOS EN INGENIERÍA  
Edificio C1, Campus Norte UPC  
Gran Capitán s/n  
08034 Barcelona, España

MONOGRAFÍAS DE INGENIERÍA SÍSMICA  
Editor A.H. Barbat

ISSN: 1134-3249

**MODELACIÓN ESTOCÁSTICA DE LA ACCIÓN SÍSMICA**  
Monografía CIMNE IS-33  
© El autor

ISBN: 84-89925-34-8  
Depósito Legal: B-4679-99

IMPRESO EN ESPAÑA-PRINTED IN SPAIN



## Abstract

This work deals with the stochastic modeling of the seismic action. The emphasis is placed on those methods useful for engineering purposes, i.e. those concerning the probabilistic description of strong ground motions which can be applied for structural safety studies via random vibration methods. In the first chapter the most useful stationary and nonstationary models are reviewed. Special emphasis is given to the application of the evolutionary model of Yeh and Wen to the Clough-Penzien and Kanai-Tajimi power spectral density models. The next chapter treats the identification of the stochastic model parameters and the simulation of earthquake accelerograms according to a prescribed model. Some of the concepts and methods described in these chapters are employed in the last one to the estimation of an adequate stochastic model for the city of Manizales (Colombia) on the basis of the earthquakes recorded there. The model so constructed is then used to an assessment of the fragility of a model of non-seismically designed reinforced concrete buildings using Monte Carlo simulation.



# Índice

<b>Introducción</b>	iv
<b>1. Modelos generales</b>	1
1.1 Introducción	1
1.2 Modelos estacionarios	1
1.2.1 Modelo de Kanai-Tajimi	2
1.2.2 Modelo de Clough-Penzien	5
1.2.3 Modelos sismológicos	6
1.2.4 Modelos estocásticos derivados de espectros de respuesta	7
1.3 Modelos no estacionarios	8
1.3.1 Modelos con modulación uniforme	9
1.3.2 Modelos evolutivos	11
<b>2. Estimación de modelos y simulación</b>	17
2.1 Introducción	17
2.2 Estimación de modelos espectrales a partir de acelerogramas	17
2.2.1 Estimación de la densidad espectral de potencia	17
2.2.2 Estimación de la función de modulación de amplitud	19
2.2.3 Modelación de un espectro instantáneo	21
2.2.4 Estimación de los parámetros de modelos espectrales de filtro	23
2.3 Simulación de acelerogramas sísmicos	27
2.3.1 Simulación de ruido blanco filtrado	28
2.3.2 Simulación de acelerogramas no estacionarios	30
2.3.3 Corrección del acelerograma sintético	31

<b>3. Modelo estocástico de los movimientos sísmicos en Manizales (Colombia)</b>	<b>35</b>
3.1 Introducción	35
3.2 Registros sísmicos obtenidos en Manizales	35
3.3 Estimación de parámetros del modelo estocástico	37
3.4 Generación de acelerogramas artificiales para Manizales	37
3.5 Vulnerabilidad de edificios sin diseño sismo-resistente	44
<b>A Variables aleatorias</b>	<b>53</b>
A.1 Definición de probabilidad	53
A.2 Variables, procesos y campos aleatorios	55
A.3 Funciones de distribución	55
A.4 Distribución de múltiples variables	57
A.5 Valor esperado y momentos	59
A.6 Función característica	60
A.7 Modelos probabilistas	62
A.8 Generación de variables aleatorias	68
<b>B Procesos estocásticos</b>	<b>71</b>
B.1 Definición	71
B.2 Elementos de cálculo estocástico	73
B.3 Procesos estacionarios	77
B.3.1 Autocorrelación y densidad espectral de potencia	78
B.3.2 Ruido blanco	81
B.3.4 Ergodicidad	83
B.4 Procesos no estacionarios	83
<b>Referencias</b>	<b>87</b>

# Introducción

En la ingeniería sísmica ha habido desde sus comienzos un interés persistente por considerar tanto las acciones como las respuestas estructurales desde una perspectiva probabilista, debido a las múltiples causas de estocasticidad e incertidumbre presentes en las variables que gobiernan el diseño. Si bien los códigos de construcción, que gobiernan la práctica corriente, incluyen algunos conceptos y parámetros probabilistas de manera explícita o implícita, también es cierto que éstos resultan abiertamente insuficientes para determinar de manera clara la respuesta estructural en términos probabilistas y, especialmente, la probabilidad de fallo. Para este propósito la ingeniería estructural dispone de varios métodos, los cuales pueden clasificarse en dos grandes grupos, a saber (cf. Casciati y Faravelli 1991):

1. Métodos analíticos.
2. Métodos pseudo-estadísticos, también llamados *métodos de Monte Carlo*.

Mientras los primeros enfocan el problema desde una perspectiva basada en una combinación de la teoría de probabilidades y la dinámica de estructuras, con lo cual se obtienen ecuaciones diferenciales de algunas medidas probabilistas, los segundos buscan generar una muestra artificial de las respuestas estructurales por medio de la solución de múltiples problemas deterministas con datos aleatorios correspondientes a la acción sísmica y a las variables estructurales estocásticas (Hurtado y Barbat 1998). En ambos casos se requiere de modelos probabilistas. Variables tales como la resistencia de los materiales, las dimensiones de los elementos, etc. pueden ser modeladas simplemente por medio de su función de distribución de probabilidad. En el caso de del movimiento del terreno se requiere un modelo estocástico de la variación temporal de las ondas condicionada a la ocurrencia del fenómeno, además de la descripción probabilista de ésta, que usualmente se asume de tipo Poisson. A partir de este modelo es posible generar los múltiples acelerogramas artificiales requeridos por el método de Monte Carlo, cuya aplicación se facilita cada día más debido al rápido avance de la tecnología de computación.

En este trabajo se desarrolla la estimación de un modelo estocástico de dicha variación temporal de las ondas sísmicas para la ciudad de Manizales (Colombia) con base en los registros obtenidos allí en años recientes. En el Capítulo 1 se exponen algunos de los principales modelos propuestos en la literatura especializada. Por su parte, el Capítulo 2 versa sobre la estimación de los parámetros de los modelos, con especial énfasis en el modelo escogido para la aplicación a la ciudad de Manizales, cual es el modelo de espectro evolutivo de Yeh y Wen (1990). Asimismo, se examinan las técnicas para simulación de acelerogramas a partir de modelos estocásticos. En el Capítulo 3 se exponen los criterios generales que ha guiado la identificación de los parámetros del modelo para Manizales a partir de los acelerogramas registrados y se discuten los resultados obtenidos. Para ello se han empleado técnicas de identificación no lineal de parámetros así como de procesamiento de señales aleatorias. Igualmente, y como aplicación del modelo propuesto para la ciudad, se presentan los resultados de un análisis de Monte Carlo de una estructura representativa de la época en la que no se practicaba el diseño sismo-resistente en la ciudad, que corresponde a los años anteriores a 1981. El objetivo es examinar la vulnerabilidad de dicho tipo de construcción ante un sismo que tenga una probabilidad de excedencia de 10 % en 50 años, lo que corresponde a un período de retorno de, grosso modo, 500 años. El trabajo se cierra con unas conclusiones sobre los resultados obtenidos.

Como complemento se incluyen dos anexos sobre las teorías de variables aleatorias y de procesos estocásticos, respectivamente, que constituyen el fundamento matemático del tema tratado.



## Capítulo 1

# Modelos generales

### 1.1 Introducción

Los sismos son aleatorios en un doble sentido. De hecho, no solamente su ocurrencia es estocástica en el tiempo sino también la trayectoria espacial impone a sus ondas una forma altamente errática. Esto explica por qué, junto con otras acciones estructurales, tal como el empuje del viento y las ondas del océano, ha habido un interés persistente en la ingeniería estructural en examinarlos desde el punto de vista estocástico a lo largo de los últimos decenios.

Este capítulo versa sobre los modelos estocásticos de la acción sísmica. Se tratará de cubrir tres aspectos del tema, a saber, los modelos estacionarios y no estacionarios, la estimación de sus parámetros a partir de registros verdaderos y la simulación digital de acelerogramas para análisis de dinámica de estructuras. Este último punto constituye la base de la simulación de Monte Carlo emprendida en el capítulo siguiente como aplicación del modelo estocástico de sismos para Manizales desarrollado en él.

### 1.2 Modelos estacionarios

Las primeras propuestas de modelos estocásticos de la acción sísmica consideraban que para el análisis estructural sería suficiente utilizar solamente la parte más fuerte de un acelerograma, correspondiente a las ondas de corte, que normalmente son mayores en amplitud que las de compresión y las superficiales. Consiguientemente, esta porción se describía como un proceso estacionario (Newmark y Rosenblueth 1971).

Esta consideración se basaba en gran medida en registros como el de Imperial Valley - El Centro (1940) (Figura 1.1) en el que puede observarse una parte inicial ascendente, un intervalo corto subsiguiente de grandes amplitudes y finalmente una larga zona de ondas de amplitud decreciente. El periodograma de esta señal se muestra en la Figura 1.2. Se puede ver que en su sector más impor-

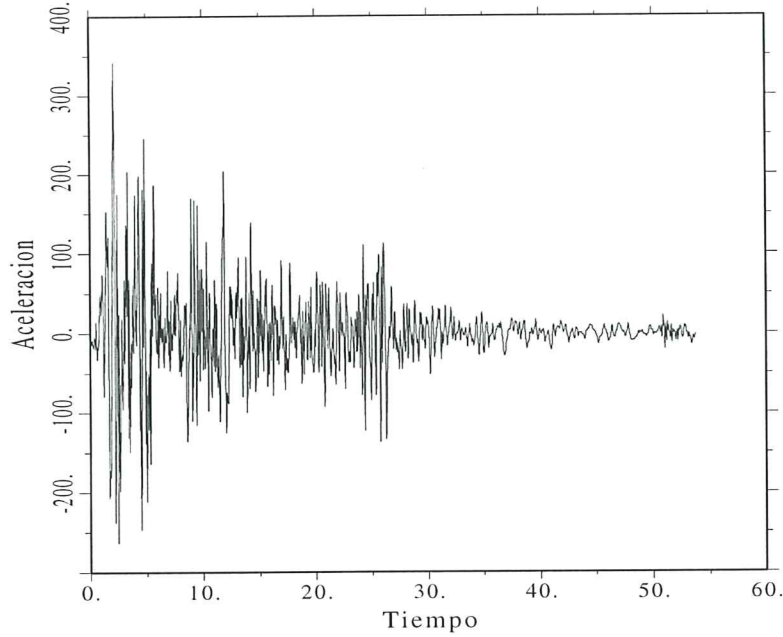


Figura 1.1 Registro del sismo de El Centro (unidades: s,  $\text{cm/s}^2$ )

tante hay una oscilación alrededor de  $100 \text{ cm}^2/\text{s}^3$ , que sugiere un ruido blanco limitado en banda como modelo grueso del sismo (Bycroft 1960). En años subsiguientes se propusieron modelos estacionarios más sofisticados de la fase fuerte de movimiento. En el presente trabajo se describirá en primer lugar los modelos de filtros lineales, los cuales pueden integrarse fácilmente en las ecuaciones de dinámica estructural - un aspecto deseable que se encuentra ausente en otros modelos espectrales, orientados principalmente hacia aplicaciones puramente sismológicas, así como en los modelos compatibles con espectros de respuesta.

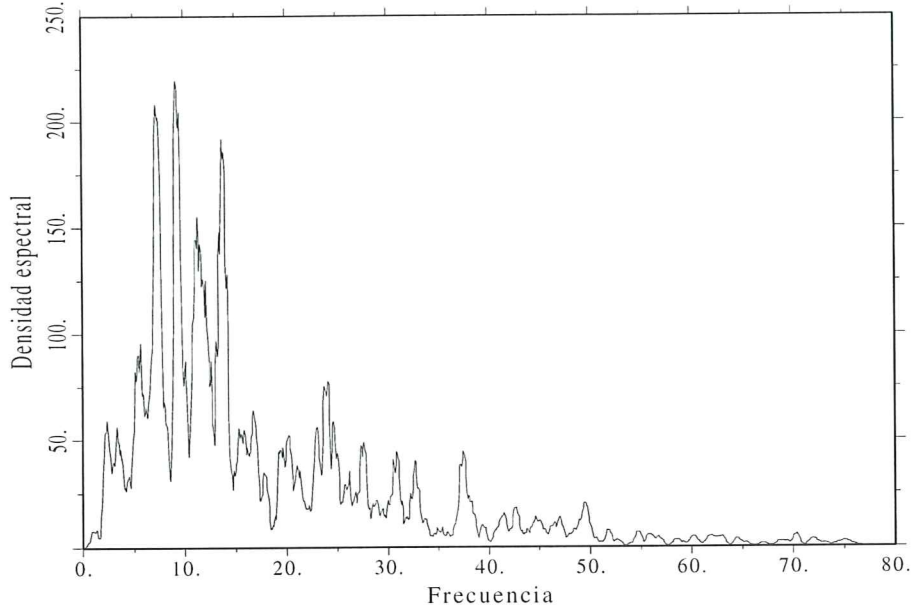
### 1.2.1 Modelo de Kanai y Tajimi

El modelo de Kanai-Tajimi de aceleración sísmica horizontal,  $M^{\text{KT}}$ , se define como

$$M^{\text{KT}} = 2\nu_g\omega_g\dot{U}_g + \omega_g^2 U_g \quad (1.1)$$

donde  $U_g$  es la respuesta de un filtro de segundo orden a un ruido blanco  $W(t)$ :

$$\ddot{U}_g + 2\nu_g\omega_g\dot{U}_g + \omega_g^2 U_g = -W(t) \quad (1.2)$$



**Figura 1.2** Densidad espectral del sismo de El Centro (unidades: rad/s, cm<sup>2</sup>/s<sup>3</sup>)

El modelo está determinado por la densidad espectral de potencia del ruido  $G_W$  así como por los parámetros  $\nu_g$  y  $\omega_g$ . Aunque éstos se asocian usualmente al suelo local, realmente influyen en ellos igualmente otros factores, tales como la magnitud de sismo y la distancia hipocentral, entre otros. (Lai 1982; Kameda y Nojima 1988; Sawada *et al.* 1992).

Al aplicar la transformada de Fourier a ambos lados de la ecuación anterior se puede mostrar que la función de transferencia del movimiento de compuesto  $M^{KT}$  es

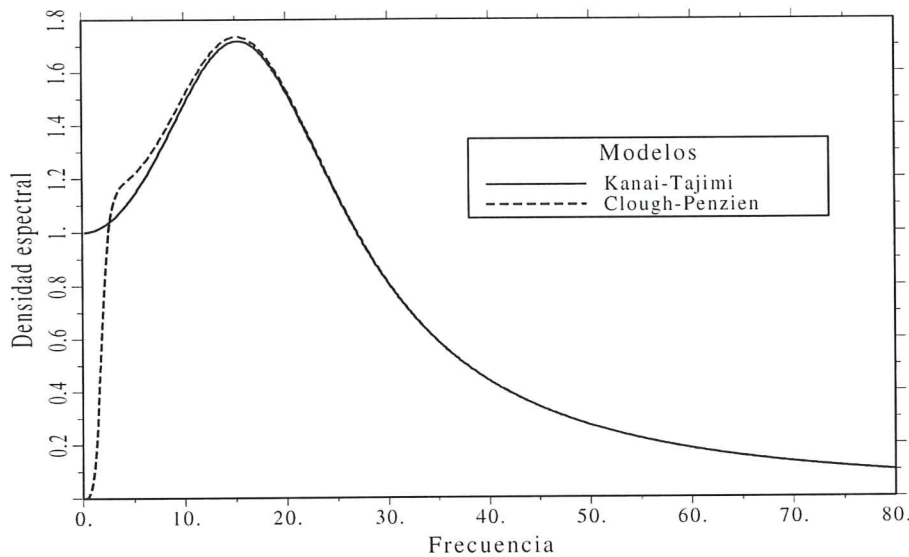
$$H(i\omega) = \frac{\omega_g^2 + i2\nu_g\omega_g\omega}{\omega_g^2 - \omega^2 + i2\nu_g\omega_g\omega} \quad (1.3)$$

y por tanto la densidad espectral unilateral de potencia de esta respuesta combinada está dada por

$$G_M(\omega)^{KT} = |H(i\omega)|^2 G_W = \frac{\omega_g^4 + 4\nu_g^2\omega_g^2\omega^2}{(\omega_g^2 - \omega^2)^2 + 4\nu_g^2\omega_g^2\omega^2} G_W \quad (1.4)$$

La varianza del proceso, dada por la integral de la densidad espectral de potencia sobre el eje de frecuencias (ecuación B.45b), es

$$\sigma_M^2 = \pi \frac{\omega_g (1 + 4\nu_g^2)}{4\nu_g} G_W \quad (1.5)$$



**Figura 1.3** Modelos de filtro de la densidad espectral sísmica (unidades: rad/s,  $\text{cm}^2/\text{s}^3$ )

En la Figura 1.3 se muestra un esquema del espectro de potencia de Kanai-Tajimi junto con el correspondiente al modelo de Clough-Penzien que se introduce en el párrafo siguiente. Los parámetros de filtro son  $\omega_g = 19 \text{ rad/s}$  y  $\nu_g = 0.65$ . Ellos dan el espectro una forma total similar al del espectro de potencia del sismo de El Centro (figura 1.2).

### 1.2.2 Modelo de Clough y Penzien

La desventaja principal del modelo de Kanai y Tajimi yace en que asigna un valor espectral no nulo a la frecuencia cero, lo que no está de acuerdo con lo observado en espectros reales (cf. figura 1.2). Aunque este aspecto no representa un error serio en el análisis de sistemas lineales de altas frecuencias naturales, puede conducir a errores grandes para el análisis de estructuras inelásticas en

las que la plastificación induce vibraciones temporales de largo período. En tales casos el uso del filtro de Clough-Penzien en conjunto con el anterior es un modelo más adecuado. Este filtro reduce drásticamente las ordenadas del espectro K-T en las frecuencias muy bajas, mientras que conserva los valores asociados a las frecuencias mayores. (Clough y Penzien 1993). La dinámica del filtro adicional está regida por la ecuación lineal convencional

$$\ddot{U}_f + 2\nu_f\omega_f\dot{U}_f + \omega_f^2 U_f = -M^{KT} \quad (1.6)$$

donde los parámetros  $\nu_f$  y  $\omega_f$  deben ser seleccionados para el propósito mencionado. El modelo se define como la respuesta de aceleración del segundo filtro, es decir,

$$M^{CP} = \ddot{U}_f = -2\nu_f\omega_f\dot{U}_f - \omega_f^2 U_f - 2\nu_g\omega_g\dot{U}_g - \omega_g^2 U_g \quad (1.7)$$

Su densidad espectral de potencia es, en consecuencia,

$$G_M(\omega)^{CP} = \frac{\omega^4}{(\omega_f^2 - \omega^2)^2 + 4\nu_f^2\omega_f^2\omega^2} \times \frac{\omega_g^4 + 4\nu_g^2\omega_g^2\omega^2}{(\omega_g^2 - \omega^2)^2 + 4\nu_g^2\omega_g^2\omega^2} G_W \quad (1.8)$$

Finalmente, la varianza del proceso es

$$\sigma_M^2 = \pi \frac{A(\omega)}{2B(\omega)} G_W \quad (1.9)$$

donde

$$A(\omega) = \omega_g^4(\nu_g\omega_f + \nu_f\omega_g) + 4\nu_g^2\omega_g^2[\nu_g\omega_f^3 + \nu_f\omega_g^3 + 4\nu_g\nu_f\omega_g\omega_f(\nu_g\omega_f + \nu_f\omega_g)] \quad (1.10)$$

y

$$B(\omega) = 2\nu_g\nu_f[(\omega_g^2 - \omega_f^2)^2 + 4\omega_g^2\omega_f^2(\nu_g^2 + \nu_f^2) + 4\nu_g\nu_f\omega_g\omega_f(\omega_g^2 + \omega_f^2)] \quad (1.11)$$

En la figura 1.3 el modelo de Clough y Penzien se ha dibujado usando  $\omega_f = 2$  rad/s y  $\nu_g = 0.6$ . El conjunto de los cuatro parámetros ha sido calculado por Yeh (1989) a partir del registro de El Centro (figura 1.1).



### 1.2.3 Modelos sismológicos

La investigación desarrollada por Boore y otros a lo largo de las dos últimas décadas constituye un paso importante para la modelación de movimiento del terreno con un fuerte arraigo en la teoría de la sismología moderna (Boore y Joyner 1982; Boore 1986; Boore y Atkinson 1987). De hecho, el objetivo de estas propuestas es la estimación del espectro de Fourier  $\tilde{M}(\omega)$ , con base en las funciones y parámetros físicos correspondientes a la radiación de energía en la fuente y su atenuación con la distancia. La densidad espectral de potencia puede entonces estimarse como un periodograma, usando la duración de la fase de movimiento fuerte (cf. ecuación B.44).

En general, un modelo sismológico del espectro de Fourier  $\tilde{M}(\omega)$  consta de los espectros de la radiación en la fuente, la atenuación con la distancia además de algunos parámetros constantes relativos a la energía liberada. Entre las varias formulaciones de esta clase de espectros existentes en la literatura hemos elegido una versión dirigida a aplicaciones estructurales en dinámica, en la medida en que puede ser convertida a un sistema de filtros (Faravelli 1988a):

$$\tilde{M}(\omega) = C \tilde{M}_s(\omega) \tilde{M}_c(\omega) \tilde{M}_m(\omega) \tilde{M}_a(\omega) \quad (1.12)$$

En esta ecuación  $C$  es un factor de escala dado por

$$C = \frac{R_{\theta\phi} F V}{4\pi\rho\beta^3 R} \quad (1.13)$$

donde  $R_{\theta\phi}$  es la *patrón de radiación*, que expresa el direccionamiento espacial de la radiación de la energía en la fuente;  $F$  es la ampliación debida al contacto con la superficie libre (generalmente se toma  $F = 2$ );  $V$  es un factor referido a la partición de la energía en las dos direcciones ortogonales (para propósitos de cálculo se toma comúnmente como  $1/\sqrt{2}$ );  $\rho$  es la densidad del medio,  $\beta$  la velocidad de corte de las ondas y  $R$  la distancia hipocentral.

Los varios espectros contenidos en la ecuación (1.11) corresponden a los factores siguientes:

1. La energía de la fuente:

$$\tilde{M}_s(\omega) = \frac{M_0 \omega_s^2}{1 + (\frac{\omega_s}{\omega})^2} \quad (1.14)$$

donde  $M_0$  es el momento sísmico y  $\omega_s$  la frecuencia angular de esquina.

2. La amplificación de las ondas:

$$\tilde{M}_m(\omega) = \frac{2}{1 + \left(\frac{\omega_m}{\omega}\right)^2} \quad (1.15)$$

en donde  $\omega_m$  es una frecuencia de referencia.

3. La atenuación con la distancia:

$$\tilde{M}_a(\omega) = C_a \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_a}\right)^2} \quad (1.16)$$

donde  $\omega_a$  es una frecuencia de corte y  $C$  un factor de atenuación que generalmente se modela como una función exponencial de la frecuencia y la distancia hipocentral.

#### 1.2.4 Modelos estocásticos derivados de espectros de respuesta

En vista de la importancia práctica de los espectros de respuesta en el diseño sísmico de estructuras, algunos autores se han esforzado en hallar relaciones teóricas entre la densidad espectral de potencia y el espectro de respuesta de osciladores lineales, principalmente con el fin de generar acelerogramas compatibles con ellos (Vanmarcke, 1976). El objetivo es calcular dicha función a partir del espectro de velocidad máxima relativa  $S_v(\omega)$  correspondiente a un sistema lineal de un grado de libertad excitado en la base, caracterizado por una fracción de amortiguamiento crítico  $\nu$  y frecuencia natural  $\omega$ .

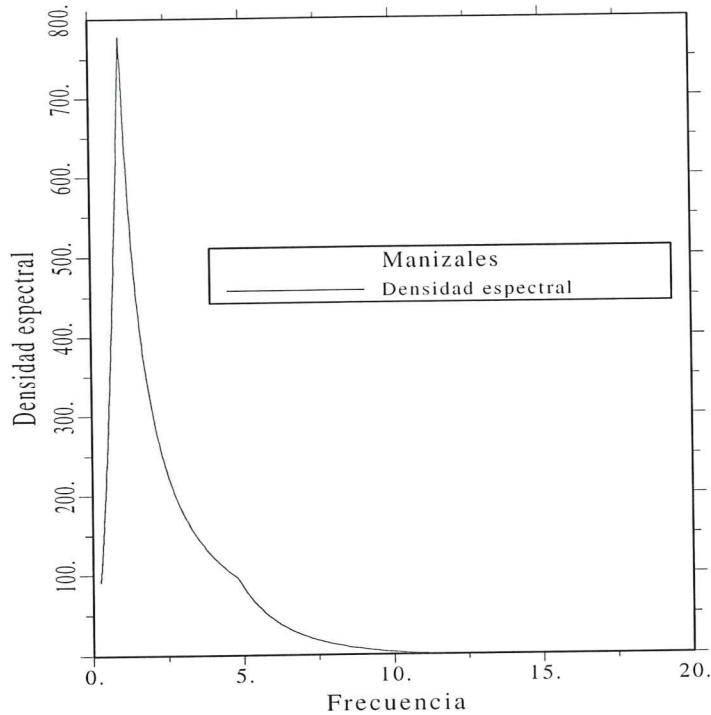
Dentro de los límites de este trabajo no es posible exponer en detalle la deducción de la relación propuesta entre el espectro de velocidad y la densidad espectral de potencia. Nos limitaremos a decir que sus fundamentos teóricos son los siguientes:

1. La relación estocásticas entrada-salida de sistemas lineales. De acuerdo con ella, la densidad espectral de potencia de una respuesta de un sistema lineal sencillo es igual al cuadrado del módulo de la función de transferencia de la respuesta multiplicado por la densidad espectral de la excitación (cf. ecuación 1.4).

2. La hipótesis de valor máximo de un proceso estocástico, realizada sobre información probabilista de segundo orden, como la dada por la función de autocorrelación o la densidad espectral. Esta hipótesis está basada en la teoría de cruce de niveles de procesos estocásticos.

La relación es la siguiente:

$$G(\omega) \approx \frac{1}{\omega \left(\frac{\pi}{4\nu_s} - 1\right)} \left[ \frac{\omega^2 S_v^2(\omega)}{\zeta(s, p)} - \int_0^\omega G(\omega) d\omega \right] \quad (1.17)$$



**Figura 1.4** Densidad espectral de potencia correspondiente al espectro de diseño de velocidades (unidades: Hz,  $\text{cm}^2/\text{s}^3$ )

donde  $\nu_s$  es un factor de amortiguamiento modificado por la evolución de la respuesta desde cero hasta el estado estacionario en un tiempo  $s$ :

$$\nu_s = \frac{\nu}{1 - \exp(-2\nu\omega)} \quad (1.18)$$

Por otra parte,  $\zeta(s, p)$  es una función que relaciona el valor máximo probable de la velocidad con su desviación estandar. Es, por tanto, un valor dependiente de la probabilidad de alcanzar ese máximo,  $p$ , y de la duración que toma el sistema en alcanzar la fase estacionaria,  $s$ :

$$\zeta(s, p) \approx \sqrt{2 \ln \left( -\frac{\omega s}{\pi \ln p} \left[ 1 - \exp \left\{ -\sqrt{4\nu_s \ln \left( -\frac{\omega}{\pi \ln p} \right)} \right\} \right] \right)} \quad (1.19)$$

La figura 1.4 muestra la densidad espectral obtenida a partir del espectro de diseño para Manizales propuesto por Hurtado *et al.* (1995), usando  $p = 0.5$  y  $\nu = 0.05$ .



### 1.3 Modelos no estacionarios

Es un hecho ampliamente reconocido que los registros de sismos son altamente no estacionarios. Esto se debe a las diferencias en el tiempo de llegada y frecuencia de sus ondas componentes. La acción sísmica puede ser modelada estocásticamente como un proceso aleatorio no estacionario en dos formas:

1. Como un proceso uniformemente modulado, es decir un proceso estacionario transformado en uno que es no estacionario únicamente en amplitud. La transformación se realiza mediante una función determinista  $\xi(t)$ , cuyos parámetros se estiman con base en registros reales (cf. ecuación B.55).

2. Como un proceso con una densidad espectral de potencia evolutiva, es decir, como un proceso que no solamente varía en amplitud sino también en el contenido frecuencial a lo largo del tiempo (cf. ecuación B.52). La estimación de los parámetros del modelo a partir de registros existentes es, por supuesto, más complicada que en el caso previo. A continuación expondremos estos modelos con más detalle.

#### 1.3.1 Modelos con modulación uniforme

Sea  $M(t)$  un proceso aleatorio estacionario Gaussiano con densidad espectral de potencia  $G_M(\omega)$ . Una realización  $a(t)$  del proceso  $A(t)$  correspondiente a la aceleración de movimiento de terreno con la modulación uniforme entonces está dada por

$$a(t) = \xi(t)m(t) \quad (1.20)$$

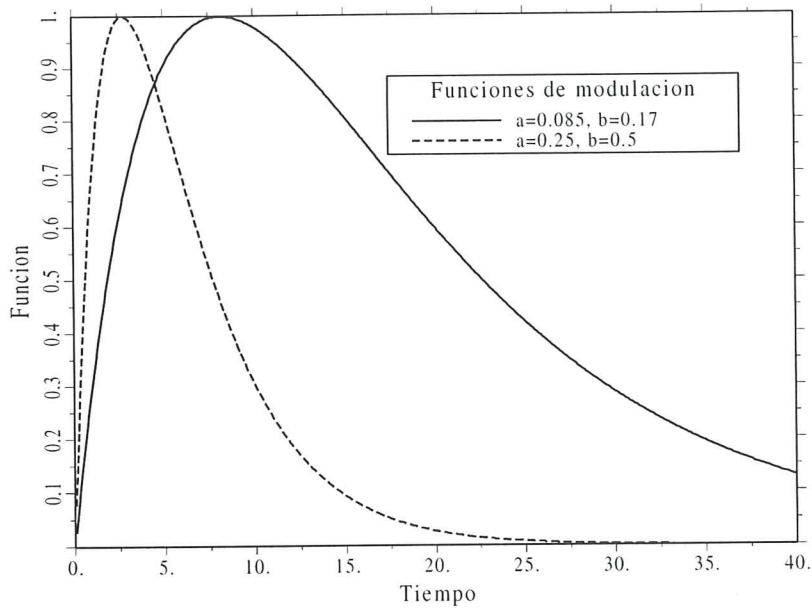
donde  $m(t)$  es una realización de un proceso estacionario y  $\xi(t)$  es una función determinista que define la variación de la amplitud en el tiempo. Según la teoría de procesos no estacionarios esbozada en el Anexo B, la densidad espectral de potencia del proceso  $a(t)$  es

$$G_A(\omega, t) = \xi(t)^2 G_M(\omega) \quad (1.21)$$

Las siguientes son algunas de las funciones más usualmente empleadas entre las varias que pueden encontrarse en la literatura:

1. Shinozuka y Sato (1967)

La expresión de esta función es



**Figura 1.7** Funciones de modulación de Shinozuka-Sato

$$\xi(t) = \frac{1}{c}(e^{-at} - e^{-bt}) \quad (1.22)$$

donde  $a, b$  y  $c$  son los parámetros. El valor de  $c$  puede elegirse para dar a la función un valor máximo unitario, con el fin de que los parámetros sean independientes de la amplitud del registro deseado. Esto da como resultado

$$c = \max(e^{-at} - e^{-bt}) = \left[ \left( \frac{a}{b} \right)^{\frac{a}{b-a}} - \left( \frac{a}{b} \right)^{\frac{b}{b-a}} \right] \quad (1.23)$$

Alternativamente se puede definir  $c$  según el criterio de energía como se explicará posteriormente. La figura 1.7 muestra dos funciones de este tipo que corresponden cualitativamente a duraciones sísmicas efectivas corta y larga.

## 2. Amin y Ang (1966)

La característica distintiva de esta función es que está definida por tres de ramas que imitan las fases respectivas del movimiento de terreno, es decir la ascendiente, la de movimiento fuerte y la de desvanecimiento de la aceleración.

Su expresión es

$$\xi(t) = \begin{cases} \frac{t}{t_1}, & t \leq t_1 \\ 1, & t_1 \leq t \leq t_2 \\ e^{-c(t-t_2)}, & t_2 \leq t \end{cases} \quad (1.24)$$

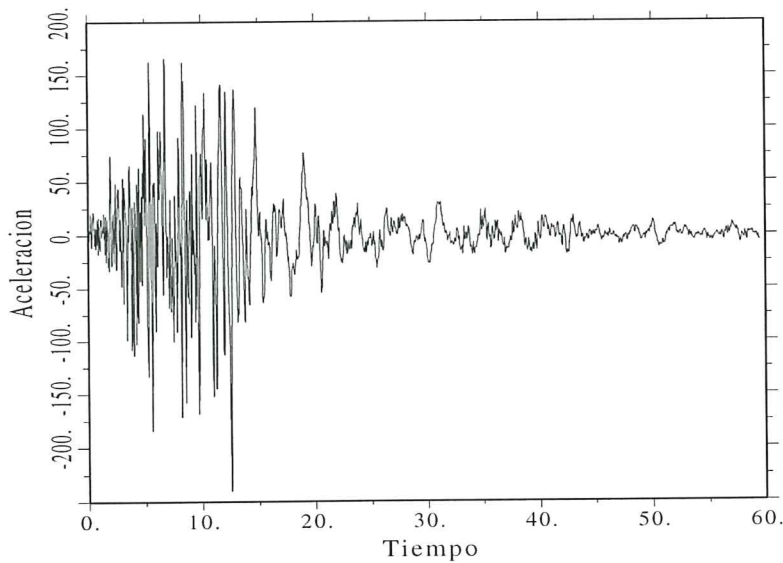
donde  $c$  es un parámetro,  $t_1$  corresponde aproximadamente al tiempo de llegada de las ondas de corte y la diferencia  $t_2 - t_1$  se asocia a la duración de la fase fuerte del movimiento.

### 3. Yeh y Wen (1990)

Esta función está dada por

$$\xi^2(t) = \frac{at^{-b} \exp(-ct)}{d + t^e} \quad (1.25)$$

donde  $a, b, c, d$  y  $e$  son parámetros.



**Figura 1.8** Registro del sismo de Orion Boulevard (unidades: s, cm/s<sup>2</sup>)

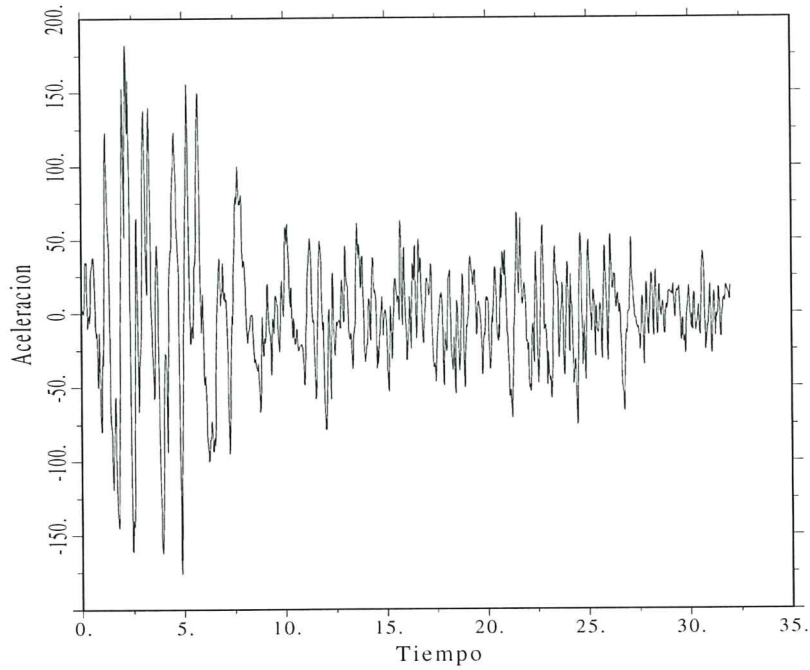
### 1.3.2 Modelos evolutivos

Con base en la física puramente teórica de sismos cabe esperar que un registro obtenido en la superficie libre tenga una naturaleza evolutiva. Por esta expresión se entiende que tanto la amplitud como las frecuencias dominantes varíen con el tiempo. Este comportamiento se debe a las diferentes energía y velocidad de las varias ondas que componen el movimiento y sus múltiples reflexiones, refracciones y difracciones. La evolución de las frecuencias aparece claramente en algunos registros tal como el San Fernando (Orion Boulevard, 1971) que se muestra en la figura 1.8, en la que se puede distinguir las zonas que corresponden respectivamente a las frecuencias altas y amplitudes pequeñas de las ondas P, la zona de grandes amplitudes de las ondas S y las bajas frecuencias de las ondas de superficie. Casos con una evolución tan clara como la mostrada en la figura son algo raros. En la mayoría de registros el aspecto evolutivo no resulta tan evidente debido a los efectos de distancia (en sismos de fuente cercana las frecuencias aparecen combinadas de manera caótica mientras a largas distancias las ondas de frecuencia alta aparecen amortiguadas) o es más o menos confuso debido a las múltiples distorsiones sufridas por las ondas a lo largo de su trayectoria. En el sismo de Tokachi-oki (1968), por ejemplo, las ondas de baja frecuencia aparecen en la última porción del registro en combinación con las frecuencia altas, mientras ondas de frecuencia baja dominan la porción central (figura 1.9).

Se han propuesto varios modelos para el análisis espectral de la acción sísmica con inclusión del comportamiento evolutivo. Algunos de ellos se basan de la teoría de procesos no estacionarios desarrollada por Priestley (Priestley 1981), de la cual se da un brevísimo resumen en el Anexo B. El proceso con modulación uniforme discutido anteriormente es, de hecho, un caso particular de tal modelo, en el que la función de modulación  $\xi(\omega, t)$  es únicamente una función del tiempo,  $\xi(t)$ . La función  $\xi(\omega, t)$  del sismo de México de 1985 ha sido estimada por Grigoriu *et al.* (1988) dividiendo el registro en las tres zonas típicas ya mencionadas. Otras propuestas son las debidas a Spanos *et al.* (1992), quienes proponen el uso de la energía de sistemas lineales como medida de la densidad evolutiva de la acción y la de Beck y Papadimitrou (1993), quienes desarrollaron un método Bayesiano para el ajuste de un espectro evolutivo de Kanai-Tajimi a registros de sismo. Enfoques similares han sido propuestos por Fan y Ahmadi (1990), Kameda y Nojima (1988) y otros. Finalmente, algunos interesantes modelos sismológicos evolutivos han sido propuestos por Faravelli (1988b) y Carli (1992, 1995), entre otros.

En este trabajo se concede particular atención a un modelo llamado de *espectro instantáneo* (Yeh y Wen 1990), debido a su facilidad de acoplamiento con las ecuaciones de la dinámica del sistema estructural, lo que facilita su uso en el





**Figura 1.9** Registro del sismo de Tokachi-oki (unidades: s,  $\text{cm/s}^2$ )

campo de los métodos analíticos de análisis de vibraciones aleatorias. Se basa en el concepto de la modulación de frecuencia que es corriente en teoría de comunicaciones, así como en el modelo de Bendat y Piersol (1971) de representación no estacionaria (ecuaciones B.56 y B.57).

Como se indica en el Anexo B, cualquier proceso estacionario tiene una representación espectral de la forma

$$X(\kappa) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega\kappa) dZ(\omega) \quad (1.26)$$

en donde  $Z(\omega)$  es proceso estocástico, en general complejo, con media nula e incrementos ortogonales, es decir

$$E[dZ(\omega_1)dZ(\omega_2)] = 0 \quad (1.27)$$

para  $\omega_1 \neq \omega_2$ , y

$$E[|dZ(\omega)|^2] = S_X(\omega)d\omega \quad (1.28)$$

donde  $S_X(\omega)$  es la densidad espectral de potencia de  $X(\kappa)$ . Sea el argumento del proceso  $X(\kappa)$  una función continua, estrictamente creciente del tiempo. Se puede crear un nuevo proceso en la forma

$$Y(t) = X(\kappa(t)) \quad (1.29)$$

cuya función de auto-correlación instantánea puede expresarse como (cf. ecuación 1.56)

$$R_Y(t, \tau) = E\left[X\left(t + \frac{\tau}{2}\right)X\left(t - \frac{\tau}{2}\right)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(i\omega_1\kappa\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - i\omega_2\kappa\left(t - \frac{\tau}{2}\right)\right) E[dZ(\omega_1)dZ(\omega_2)] \quad (1.30)$$

que, tomando en cuenta las propiedades del proceso  $Z(\omega)$ , se reduce a

$$R_Y(t, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega\tau\dot{\kappa}(t))S_X(\omega)d\omega \quad (1.31)$$

para un  $\tau$  infinitesimal. Haciendo el cambio de variable  $\bar{\omega} = \dot{\kappa}(t)\omega$  se obtiene finalmente la ecuación siguiente:

$$R_Y(t, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\bar{\omega}\tau) \frac{1}{\dot{\kappa}(t)} S_X\left(\frac{\bar{\omega}}{\dot{\kappa}(t)}\right) d\bar{\omega} \quad (1.32)$$

Esta expresión constituye la relación especial de Wiener-Jinchin del proceso  $Y(t)$ . La condición impuesta sobre la función  $\kappa(t)$  (específicamente, de ser una función estrictamente creciente) surge de la necesidad de tener que una densidad espectral positiva, lo que a la vez requiere una derivada positiva  $\dot{\kappa}(t)$  en la ecuación anterior. Con esta condición se supera la crítica principal dirigida contra el modelo de Bendat y Piersol mencionado en la sección B.7. Una función que satisface este requerimiento y que está estrechamente relacionada con la evolución de la frecuencia del registro sísmico es el número acumulado de cruces de la señal por el nivel cero de aceleración (*cruces-cero*) desde el inicio del registro hasta el tiempo  $t$ . La expresión propuesta por Yeh y Wen (1990) para la función de modulación de frecuencia es

$$\kappa(t) = \frac{n(t)}{\dot{n}(t_s)} \quad (1.33)$$

donde  $n(t)$  es una función polinomial del tiempo ajustada a la función real de cruces-cero y  $t_s$  es el tiempo de comienzo del movimiento fuerte. La densidad espectral evolutiva del proceso modulado  $y(t) = X(\kappa(t))$  es, en consecuencia,

$$G_Y(\omega, t)^{YW} = \frac{1}{\dot{\kappa}(t)} G_X\left(\frac{\omega}{\dot{\kappa}(t)}\right) \quad (1.34)$$

La aplicación de la modulación de amplitud  $\xi(t)$  conducirá entonces a una no estacionaridad completa del proceso  $A(t)$ , que está dado entonces por

$$A(t) = \xi(t)Y(t) = \xi(t)X(\kappa(t)) \quad (1.35)$$

Si los parámetros de  $\xi(t)$  se ajustan de tal suerte que la varianza del proceso estacionario  $X(\kappa)$  sea unitaria, la energía del proceso compuesto  $A(t)$  quedará controlada exclusivamente por la función de modulación de amplitud. Esto se debe a que la varianza de  $Y(t)$ , dada por

$$\int_{-\infty}^{\infty} G_Y(\omega, t)^{YW} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\dot{\kappa}(t)} G_X\left(\frac{\omega}{\dot{\kappa}(t)}\right) d\omega \quad (1.36)$$

no variará con el tiempo, como puede demostrarse haciendo el cambio de variable  $\theta = \omega/\dot{\kappa}(t)$  en la ecuación anterior. La expresión de la densidad espectral evolutiva del proceso no estacionario resultante  $A(t)$  es entonces

$$G_A(\omega, t)^{YW} = \xi(t)^2 \frac{1}{\dot{\kappa}(t)} G_X\left(\frac{\omega}{\dot{\kappa}(t)}\right) \quad (1.37)$$

Quizás la ventaja principal de este modelo para los propósitos estructurales es su versatilidad para modelar sismos por medio de filtros. De hecho, consideremos la siguiente ecuación que describe la dinámica de un filtro lineal excitado por una aceleración de terreno  $y(t)$  sobre un eje ficticio de tiempo  $\kappa$ :

$$x''(\kappa) + 2\nu\omega x'(\kappa) + \omega^2 x(\kappa) = -y(\kappa) \quad (1.38)$$

Aquí las comas representan derivadas con respecto a  $\kappa$ . Haciendo  $\kappa = \kappa(t)$  y aplicando la regla de cadena se tiene

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\kappa} \frac{d\kappa}{dt} = x' \dot{\kappa} \quad (1.39)$$

que implica que

$$x' = \frac{\dot{x}}{\dot{\kappa}} \quad (1.40)$$

Luego,

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{dx'}{d\kappa} \frac{d\kappa}{dt} \dot{\kappa} + \frac{d^2\kappa}{dt^2} x' \quad (1.41)$$

lo que es equivalente a

$$\ddot{x} = x'' \dot{\kappa}^2 + \ddot{\kappa} x' \quad (1.42)$$

De aquí se tiene que

$$x'' = \left( \ddot{x} - \frac{\ddot{\kappa}}{\dot{\kappa}} \dot{x} \right) \frac{1}{\dot{\kappa}^2} \quad (1.43)$$

Al reemplazar estas expresiones en la ecuación (1.38), la forma final de la ecuación dinámica del filtro en términos de  $\kappa(t)$  es

$$\ddot{x} + (2\nu\omega\dot{\kappa} - \frac{\ddot{\kappa}}{\dot{\kappa}})\dot{x} + \omega^2 \dot{\kappa}^2 x = -\dot{\kappa}^2 y(\kappa(t)) \quad (1.44)$$

Sobre esta base es posible introducir la modulación de frecuencia en los filtros convencionales de Kanai-Tajimi o de Clough-Penzien. En el primer caso se tiene

$$\ddot{U}_g + (2\nu_g\omega_g\dot{\kappa} - \frac{\ddot{\kappa}}{\dot{\kappa}})\dot{U}_g + \omega_g^2 \dot{\kappa}^2 U_g = -\dot{\kappa}^2 \xi(t)W(\kappa(t)) \quad (1.45)$$

donde la función de amplitud  $\xi(t)$  se ha aplicado al ruido  $W(\kappa(t))$ . En el segundo caso se tiene, además,

$$\ddot{U}_f + (2\nu_f\omega_f\dot{\kappa} - \frac{\ddot{\kappa}}{\dot{\kappa}})\dot{U}_f + \omega_f^2 \dot{\kappa}^2 U_f = -2\nu_g\omega_g\dot{\kappa}\dot{U}_g - \omega_g^2 \dot{\kappa}^2 U_g \quad (1.46)$$

Según las ecuaciones (B.55), (1.37) y (1.44), el ruido blanco modulado de fondo tiene una densidad espectral evolutiva igual a

$$G_W(\omega, t)^{YW} = \frac{1}{\dot{\kappa}(t)} \pi \xi^2(t) \dot{\kappa}^4(t) G_W\left(\frac{\omega}{\dot{\kappa}(t)}\right) = \pi \xi^2(t) \dot{\kappa}^3(t) G_W \quad (1.47)$$

donde  $G_W$  es la densidad unilateral del ruido no modulado. De otra parte, la aceleración de la base en el modelo variable de Kanai-Tajimi (ecuación 1.1) es

$$M^{KT} = \frac{1}{\dot{\kappa}^2} (2\nu_g\omega_g\dot{\kappa}\dot{U}_g + \omega_g^2 \dot{\kappa}^2 U_g) = \frac{2\nu_g\omega_g}{\dot{\kappa}} \dot{U}_g + \omega_g^2 U_g \quad (1.48)$$



mientras que para el espectro tipo Clough-Penzien es

$$M^{\text{CP}} = \frac{2\nu_f\omega_f}{\dot{\kappa}}\dot{U}_f + \omega_f^2 U_f + \frac{2\nu_g\omega_g}{\dot{\kappa}}\dot{U}_g + \omega_g^2 U_g \quad (1.49)$$

Esto completa la definición de la acción sísmica por medio de filtros lineales variables en el tiempo.



## *Capítulo 2*

# **Estimación de modelos y simulación**

### **2.1 Introducción**

Después de haber examinado los principales modelos estocásticos de la acción sísmica en el capítulo anterior, en este se examinará la caracterización paramétrica de los mismos a partir de acelerogramas reales de sismos. Igualmente, se describirán algunas de las técnicas para simulación de acelerogramas artificiales a partir de los modelos así definidos, lo cual constituye un paso necesario para el estudio probabilista de la respuesta sísmica de estructuras.

### **2.2 Estimación de modelos espectrales a partir de acelerogramas**

En esta sección se abordará la estimación de las funciones que caracterizan de manera estocástica la acción sísmica a partir de registros reales. En particular, se describirá la estimación de los parámetros de las funciones propias del modelo de espectro instantáneo, el cual será usado en el capítulo siguiente.

#### **2.2.1 Estimación de la densidad espectral de potencia**

Como en múltiples situaciones del mundo físico, la estimación de las características espectrales de un sismo dado debe realizarse a partir de un registro único. Esto obliga a introducir la hipótesis de ergodicidad (cf. sección B.3.4), la cual permite suponer que las medidas probabilistas obtenidas en el eje del tiempo de una realización equivalen a las que se hubieran podido obtener en el eje de muestras si más de una de ellas estuviera disponible.

En el caso de sismos se debe enfrentar el problema adicional de la no estacionariedad de los registros. Como el énfasis en ingeniería sísmica ha caído sobre

los alores máximos de las respuestas y éstos suelen ocurrir en la fase fuerte del movimiento, ha sido práctica comun el calcular la densidad espectral sobre dicha fase, tomada como estacionaria (Soong y Grigoriu 1993). En este caso, el estimativo de densidad espectral es

$$\hat{G}_A(\omega) = \frac{|\tilde{A}(\omega)|^2}{\pi s_0} \quad (2.1)$$

donde  $\tilde{A}(\omega)$  es la transformada de Fourier de la aceleración del suelo  $a(t)$  y  $s_0$  es un estimativo de la duración de la fase de movimiento fuerte. Con base en la teoría de procesos estocásticos, Vanmarcke y Lai (1980) proponen la siguiente expresion para dicha duración:

$$s_0 = 2 \ln\left(\frac{2s_0}{T_s}\right) \frac{E_\infty}{\max(a(t))}, \quad s_0 \geq 1.36T_s \quad (2.2)$$

y

$$s_0 = 2 \frac{E_\infty}{\max(a(t))}, \quad s_0 \leq 1.36T_s \quad (2.3)$$

donde  $T_s$  es el período dominante de las ondas en la fase fuerte y  $E_\infty$  es la energía del registro dada por

$$E_\infty = \int_0^\infty a^2(t) dt \quad (2.4)$$

Como se indica en el Anexo B, la gran varianza de este estimador de densidad espectral suele reducirse por medio de ventanas espectrales que se aplican sobre el registro original  $a(t)$  (Oppenheim y Schaffer 1989; Priestley 1981). Con el fin de suavizar el espectro, es posible igualmente promediar los estimadores de densidad espectral de  $N$  diferentes porciones de la fase fuerte del movimiento (Soong y Grigoriu 1993):

$$\hat{G}_A(\omega) = \frac{1}{s_0} \sum_{n=1}^N |\tilde{A}_n(\omega)|^2 \quad (2.5)$$

con

$$\tilde{A}_n(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{s_0} a_n(t) e^{-i\omega t} dt \quad (2.6)$$

El desarrollo de modelos evolutivos, unido a la observación de que la omisión de las fases ascendente y decadente del movimiento puede conducir a subestimaciones de la respuesta de la respuesta no lineal de estructuras, ha impulsado el uso de una técnica más elaborada de estimación de la densidad espectral, que se realiza sobre un registro estacionaria y duración igual a la del registro original, obtenido de este último por estabilización de la variación de amplitudes y frecuencias. Esta técnica, que se utilizará en el capítulo siguiente para estimar un modelo estocástico adecuado para Manizales, se explicará en el contexto de la modelación del espectro instantáneo.

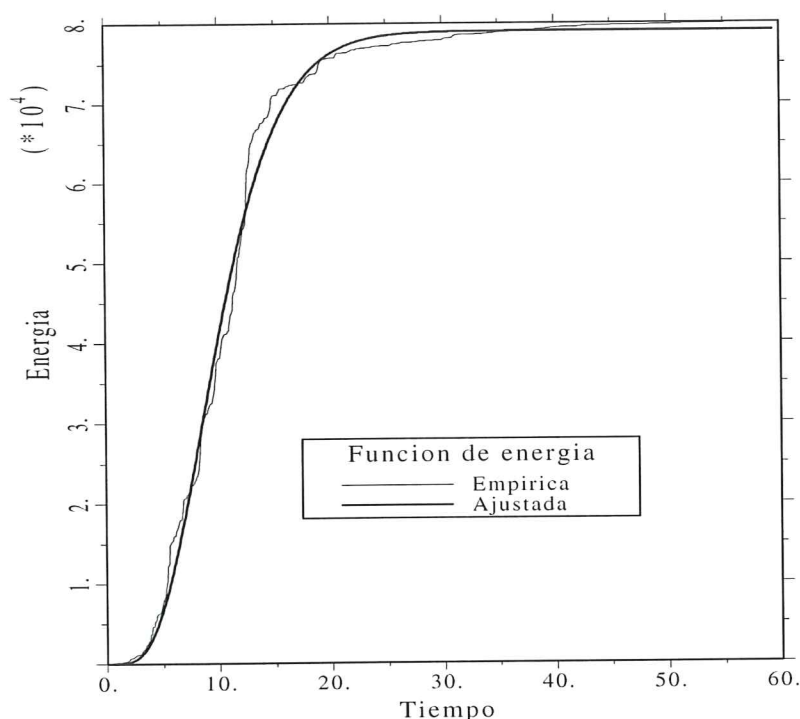


Figura 2.1 Funciones de energía del sismo de Orion (unidades: s, cm<sup>2</sup>/s<sup>3</sup>)

### 2.2.2 Estimación de la función de modulación de amplitud

Los parámetros de la función de modulación de amplitud  $\xi(t)$  se determinan generalmente a partir de la función de energía del registro (ecuación 2.4), cuyo valor total es proporcional a la conocida *Intensidad de Arias* usada como medida

del potencial de daño sísmico. Igualmente, está relacionada con la transformada de Fourier a través del teorema de Parseval:

$$\int_0^{\infty} a^2(t)dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |\tilde{A}(\omega)|^2 d\omega \quad (2.7)$$

En procesos uniformemente modulados se tiene

$$A(t) = \xi(t)M(t) \quad (2.8)$$

y por tanto

$$\sigma_A^2(t) = \xi^2(t)\sigma_M^2(t) \quad (2.9)$$

puesto que  $\xi(t)$  es determinista y  $M(t)$  tiene media nula. El valor esperado de la energía es en consecuencia

$$E[E(t)] = \int_0^t \xi^2(t)E[M^2(t)]dt \quad (2.10)$$

Como la distribución relativa de la energía entre  $\xi(t)$  y  $M(t)$  es arbitraria, siempre se puede fijar  $E[M^2(t)] \equiv 1$  de manera que la energía esperada esté completamente controlada por  $\xi(t)$ :

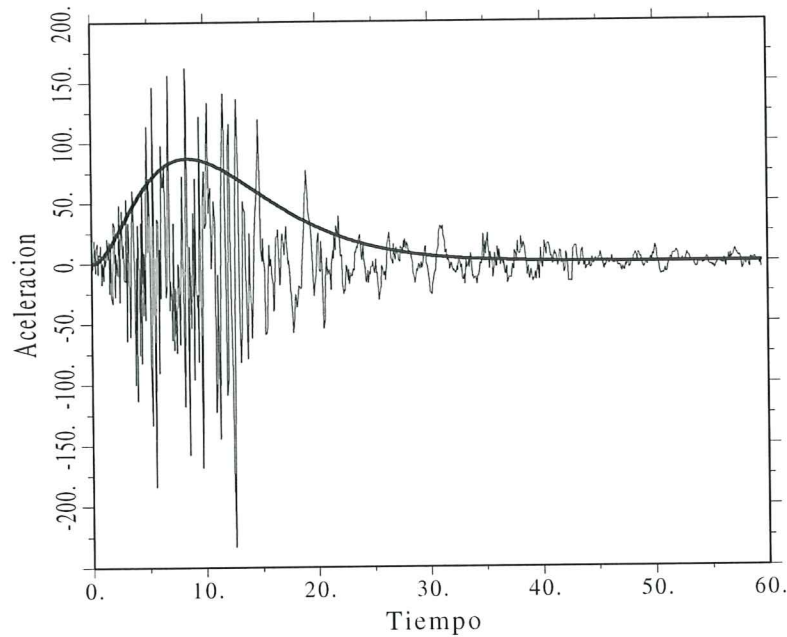
$$E[E(t)] = \int_0^t \xi^2(t)dt \quad (2.11)$$

La identificación de los parámetros de una función dada  $\xi(t)$  puede entonces realizarse forzando la equivalencia de las energías asociadas a la función y al registro original, es decir

$$\int_0^t \xi^2(t)dt \equiv \int_0^t a^2(t)dt \quad (2.12)$$

Para este fin se hace necesario usar técnicas de identificación no lineal (Bard 1974; Press *et al.* 1992)

La figura 2.1 muestra una comparación de las energías asociadas al registro de Orion Boulevard (sismo de San Fernando, 1971, componente NS) y a la función ajustada de Yeh-Wen, cuyos parámetros fueron calculados por medio del algoritmo de Levenberg-Marquart (Press *et al.*, 1992). éstos son:  $a = 0.5577E02$ ,  $b = 0.3214E02$ ,  $c = 0.5093E00$ ,  $d = 0.0$  y  $e = 0.2782E02$ . Puede verse que existe una similitud aceptable entre la curva empírica y la ajustada. En la figura 2.2 se repite el trazo del registro junto con la función estimada  $\xi(t)$ .



**Figura 2.2** Registro del sismo de Orion y función de amplitudes de Yeh - Wen (unidades: s,  $\text{cm/s}^2$ )

### 2.2.3 Modelación de un espectro instantáneo

Además del cálculo de la función de modulación de la amplitud, la construcción de un modelo de espectro instantáneo requiere los siguientes pasos:

1. Ajustar un modelo de función de modulación de frecuencias  $\kappa(t)$ .
2. Transformar la señal no estacionaria original en una estacionaria usando las funciones ajustadas de modulación de amplitudes y frecuencias.
3. Calcular la densidad espectral de potencia de la señal modificada y ajustar un modelo suave a ella, tal como el de Kanai-Tajimi o el de Clough-Penzien.

Como se dijo anteriormente, la función de frecuencia se puede obtener ajustando un polinomio de orden  $M$  a la función empírica de cruces por cero del registro:

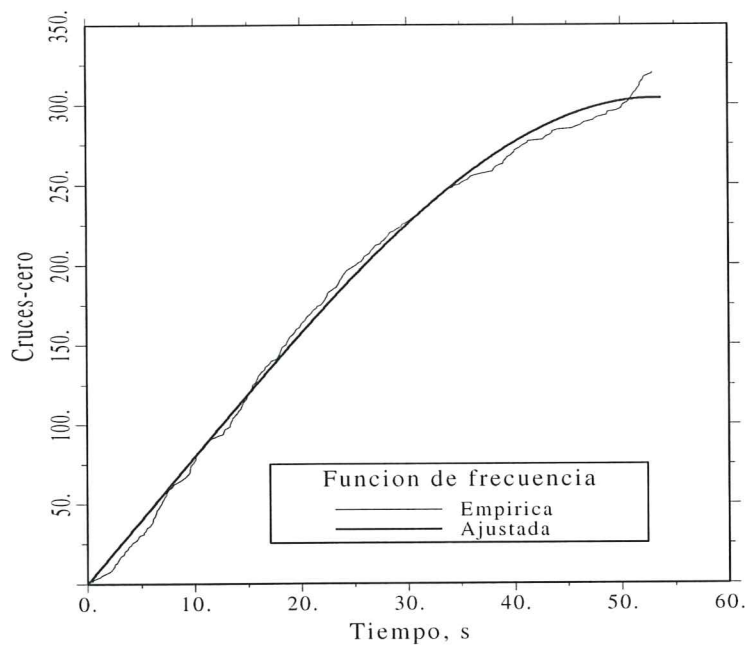
$$\hat{\kappa}(t) = \frac{n(t)}{\dot{n}(t_s)} \quad (2.13)$$

donde



$$n(t) = \sum_{i=1}^M r_i t^i \quad (2.14)$$

El tiempo  $t_s$ , que corresponde al inicio de la fase fuerte, se puede estimar por inspección visual como el primer punto de inflexión de la función de energía  $E(t)$  del registro (ver figura 2.1). La precisión en la estimación de este parámetro no es crítica, ya que la densidad espectral final es escasamente sensible a él.



**Figura 2.3** Función de modulación de frecuencia del sismo de El Centro

Las figuras 2.3 y 2.4 muestran las regresiones correspondientes a los cruces por cero de los registros de El Centro y Orion Boulevard, respectivamente. Sus parámetros se consignan en la tabla 2.1 junto con los del sismo de SMART 45. Al comparar las figuras 1.1 y 1.8 se puede ver que la evolución de frecuencias altas a bajas es mucho más fuerte en el registro de Orion que en el de El Centro. El de SMART corresponde a una situación intermedia entre ambos. La figura 2.5 muestra dos instantes de la evolución de un espectro de Clough-Penzien de la figura 1.3 calculados con la función  $\kappa(t)$  del registro de Orion Boulevard y  $\xi(t) = 1$ .



**Tabla 2.1** Parámetros de las funciones de modulación de frecuencia ajustadas

Sismo	$r_1$	$r_2$	$r_3$	$t_s$	$\dot{n}(t_s)$
Imperial Valley	0.7826 e 01	0.2733 e -01	-0.1260 e -02	2.0	0.7921 e 01
SMART 45	0.9806 e 01	-0.1980 e 00	0.1833 e -02	7.5	0.7145 e 01
San Fernando	0.9585 e 01	-0.2291 e 00	0.2298 e -02	2.5	0.8148 e 01

El paso siguiente es la transformación de la señal original no estacionaria en estacionaria. Esto se realiza en dos fases. Inicialmente se estabiliza el registro en amplitudes dividiendo la señal por la función de amplitudes empírica o ajustada:

$$m_1(t) = \frac{a(t)}{\xi(t)} \quad (2.15)$$

Luego, la señal así obtenida se mapea del eje de tiempo ficticio constituido por la función de modulación de frecuencias al eje de tiempo real:

$$m(t) = m_1(\kappa(t)) \quad (2.16)$$

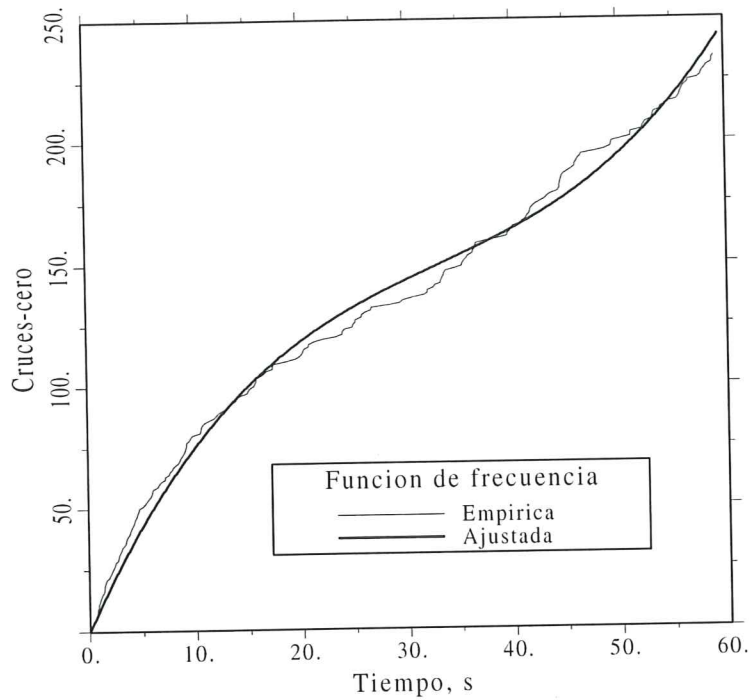
Este resultado puede usarse para estimar la densidad espectral de potencia usando la duración total del registro en la ecuación (2.1). Como ilustración de este proceso, la figura 2.6 muestra la historia de aceleración original del registro del sismo de Belalcázar (agosto 15 de 1992), componente EW, registrado en el sitio de El Cable en Manizales. La figura 2.7 hace lo propio con el registro estabilizado obtenido por la técnica descrita.

#### 2.2.4 Estimación de los parámetros de modelos espectrales de filtro

Lai (1982) y Faravelli (1988a) han propuesto estimar los parámetros de modelos simples y compuestos del modelo de Kanai-Tajimi por minimización del error que media entre los primeros momentos espectrales del registro y del modelo. Dichos momentos están definidos por

$$\lambda_j = \int_0^\infty \omega^j G(\omega) d\omega \quad (2.17)$$

Como el modelo de Kanai está definido por tres parámetros, se impone resolver un igual número de ecuaciones no lineales simultáneamente, que corresponden a los momentos de órdenes 0, 1 y 2. El proceso se facilita por la disponibilidad de



**Figura 2.4** Función de modulación de frecuencia del sismo de Orion

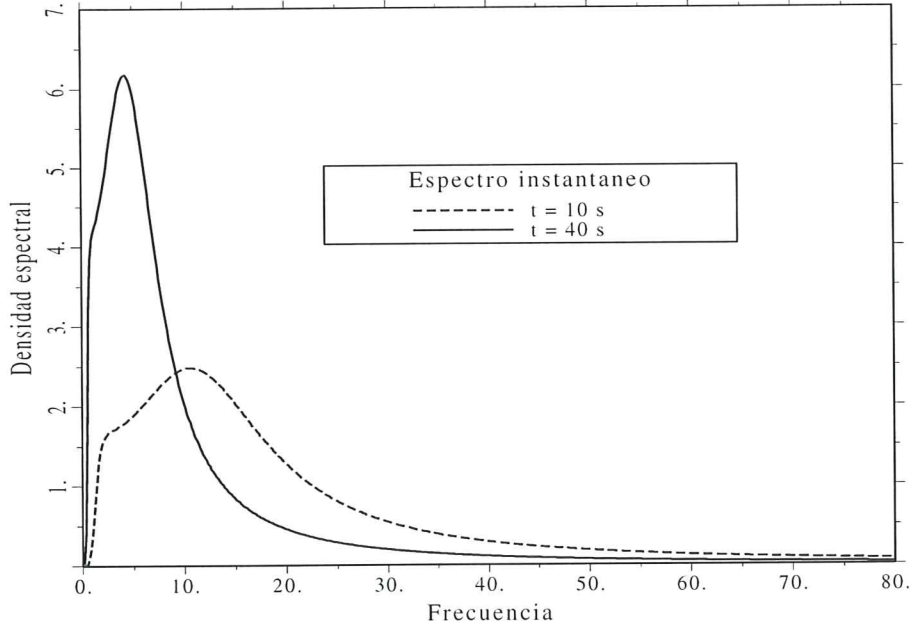
la siguientes expresiones explícitas para tales momentos calculadas por Faravelli (1988a):

$$\lambda_i = \lambda'_i + \frac{4\nu_g^2 \lambda'_{i+2}}{\omega_g^2} \quad (2.18)$$

con

$$\lambda'_0 = G_W \left[ \frac{\omega_g}{8\sqrt{1-\nu_g^2}} (H_1 - H_2) + \frac{\omega_g}{4\nu_g} (T_1 + T_2) \right] \Big|_0^{\omega_{\max}} \quad (2.19)$$

$$\lambda'_1 = G_W \left[ -\frac{\omega_g^2}{4\nu_g \sqrt{1-\nu_g^2}} (T_1 - T_2) \right] \Big|_0^{\omega_{\max}} \quad (2.20)$$



**Figura 2.5** Densidad evolutiva tipo Clough-Penzien (unidades: rad/s, cm<sup>2</sup>/s<sup>3</sup>)

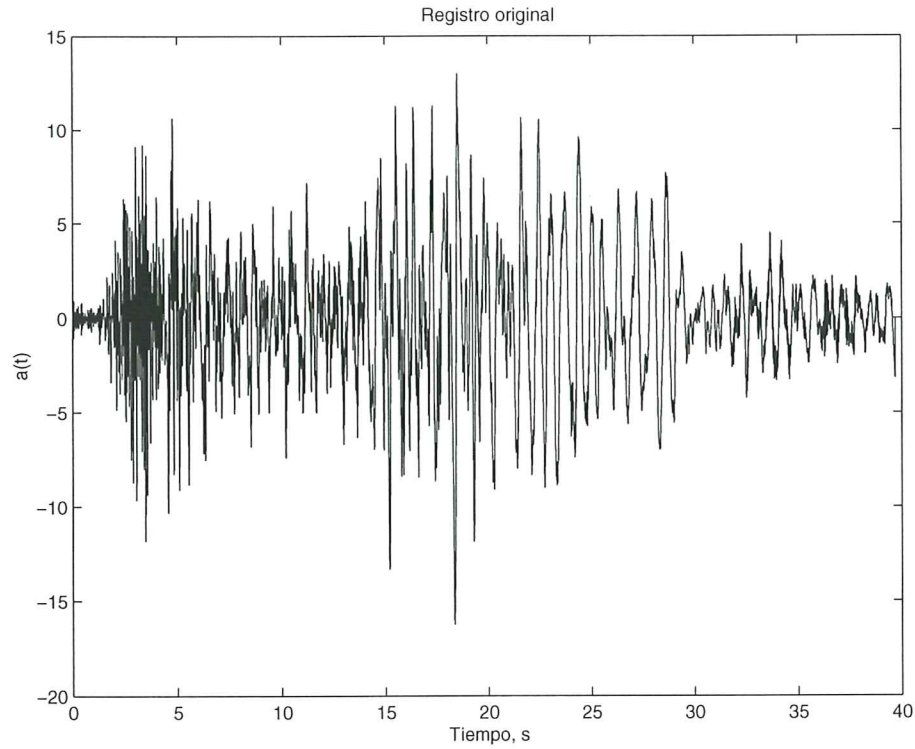
$$\lambda'_2 = G_W \left[ -\frac{\omega_g^3}{8\sqrt{1-\nu_g^2}}(H_1 - H_2) + \frac{\omega_g^3}{4\nu_g}(T_1 + T_2) \right] \Big|_0^{\omega_{\max}} \quad (2.21)$$

$$\lambda'_3 = G_W \left[ \frac{\omega_g^4}{4}(H_1 + H_2) - \frac{\omega_g^4(1-2\nu_g^2)}{4\nu_g\sqrt{1-\nu_g^2}}(T_1 - T_2) \right] \Big|_0^{\omega_{\max}} \quad (2.22)$$

$$\lambda'_4 = G_W \left[ \omega - \frac{\omega_g(3-4\nu_g^2)}{8\sqrt{1-\nu_g^2}}(H_1 - H_2) + \frac{\omega_g}{4\nu_g}(1-4\nu_g^2)(T_1 + T_2) \right] \Big|_0^{\omega_{\max}} \quad (2.23)$$

donde  $\omega_{\max}$  es la frecuencia máxima de integración, estimada sobre consideraciones sismológicas y

$$H_1 = \ln(\omega_g^2 + 2\omega_g\omega\sqrt{1-\nu_g^2} + \omega^2) \quad (2.24)$$



**Figura 2.6** Sismo de Belalcázar (unidades: s, cm/s<sup>2</sup>)

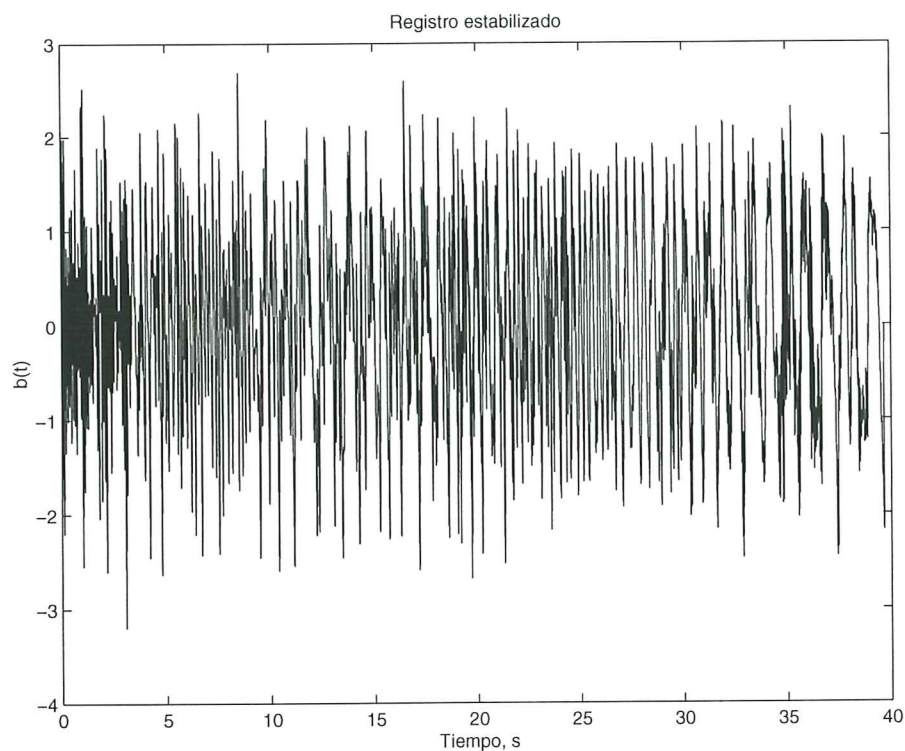
$$H_2 = \ln(\omega_g^2 - 2\omega_g\omega\sqrt{1-\nu_g^2} + \omega^2) \quad (2.25)$$

$$T_1 = \tan^{-1}\left(\frac{\omega + \omega_g\sqrt{1-\nu_g^2}}{\omega_g\nu_g}\right) \quad (2.26)$$

$$T_2 = \tan^{-1}\left(\frac{\omega - \omega_g\sqrt{1-\nu_g^2}}{\omega_g\nu_g}\right) \quad (2.27)$$

Para otros modelos, tales como los de Clough-Penzien y Boore se requiere evaluar las integrales del modelo de manera numérica en cada paso.

Un importante estudio estadístico sobre la forma de la densidad espectral de potencia fue realizado por Moayyad y Mohraz (1982) sobre una muestra



**Figura 2.7** Acelerograma estacionario obtenido del sismo de Belalcázar (unidades:  $\text{cm/s}^2$ )

de registros de E.U. Los autores agruparon los registros en tres categorías, correspondientes a tipos diferentes de suelos, específicamente duros, medios y blandos y promediaron los espectros normalizados. Sues *et al.* (1983) calcularon los modelos de Kanai-Tajimi que se ajustasen a los promedios resultantes. Los resultados se muestran en la tabla 2.2.

Es importante observar que cuando se ajusta el modelo Kanai-Tajimi a registros individuales se observan valores inferiores de  $\nu_g$  a los recogidos en la tabla anterior. De hecho, Lai (1982) ha encontrado que  $\nu_g$  se concentra alrededor de una media de 0.32 con coeficiente de variación de 0.421. Esto significa que los altos valores del estudio de Moayyad y Mohraz (1982) confieren a los espectros una banda más amplia de frecuencias que para la generación de seales aleatorias puede resultar poco realista. Esto puede interpretarse como una consecuencia del promediado de densidades espectrales correspondientes a



**Tabla 2.2** Parámetros del modelo de Kanai-Tajimi (según Sues *et al.* 1983)

Suelo	$\omega_g$	$\nu_g$
Blando	10.9	0.96
Intermedio	16.5	0.80
Duro	16.9	0.94

condiciones dinámicas muy diversas. En el capítulo siguiente, el caso Manizales servirá para ilustrar que la dispersión de estos parámetros para condiciones más homogéneas lleva a una dispersión menor.

### 2.3 Simulación de acelerogramas sísmicos

La simulación sintética de procesos estocásticos y, específicamente, de acelerogramas ha sido un área activa de investigación desde el surgimiento de computadoras rápidas. En la actualidad hay un espectro amplio de algoritmos para ese propósito. La elección entre ellos depende de la información disponible, las características que se pretenda dar a la señal, la eficiencia computacional y la exactitud (Nigam y Narayanan 1994).

En este trabajo se hará uso de los algoritmos que se exponen a continuación, que corresponden a procesos Gaussianos. Esta restricción se debe al hecho que en el caso Gaussiano el proceso está completamente definidos por la información estadística de segundo orden. Como ésta está dada indirectamente por la densidad espectral de potencia del proceso, se tiene la certeza que las realizaciones así obtenidas corresponden fielmente al modelo probabilista. Esto no es válido en el caso de procesos no Gaussianos, los cuales requieren información espectral de mayor orden.

#### 2.3.1 Simulación de ruido blanco filtrado

Hay, en general, dos maneras de hacer este tipo de simulación. La primera consiste en generar una realización de un proceso blanco  $w(t)$  (cf. Anexo B) y luego calcular la respuesta de los filtros resolviendo sus ecuaciones dinámica, que pueden expresarse sucintamente como

$$L[x, t] = w(t) \quad (2.28)$$

donde  $L[\cdot]$  es el operador matemático del filtro. La segunda técnica se basa en la disponibilidad de una expresión matemática o empírica de la función de

densidad espectral de potencia del proceso,  $S_X(\omega)$ . Las realizaciones pueden ser generadas por el algoritmo (Shinozuka 1987):

$$x(t) = \sum_{j=1}^M 2\sqrt{S_X(\omega_j)\Delta\omega} \cos(\omega_j t + \zeta_j) \quad (2.29)$$

donde la densidad espectral ha sido discretizada en  $M$  frecuencias, que tienen un ángulo asociado de fase aleatorio  $\zeta_j$  uniformemente distribuido entre 0 y  $2\pi$ . Evidentemente,

$$\Delta\omega = \frac{\omega_{\max}}{M} \quad (2.30)$$

donde  $\omega_{\max}$  es la frecuencia máxima por dar a la señal, seleccionada sobre consideraciones sismológicas y estructurales. Las frecuencias  $\omega_j$  se asignan o bien en medio de cada intervalo o bien aleatoriamente dentro suyo. El algoritmo está basado en la representación espectral de procesos estocásticos descrita en el Anexo B. En particular (cf. ecuación B.36) la varianza total calculada sobre las realizaciones sintéticas

$$x(t) = \sum_{j=1}^M Z_j \cos(\omega_j t + \zeta_j) \quad (2.31)$$

es

$$\sigma_X^2 = \frac{1}{2} \sum Z_j^2 \quad (2.32)$$

Por otra parte, la varianza está dada también por

$$\sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega) d\omega \quad (2.33)$$

Consiguientemente, se puede asignar a las amplitudes  $Z_j$  el valor

$$Z_j \equiv 2\sqrt{S_X(\omega_j)\Delta\omega} \quad (2.34)$$

Puede demostrarse que la función de densidad de las señales  $x(t)$  obtenidas por este método tiende a la del proceso  $X(t)$  como  $M \rightarrow \infty$  (Shinozuka 1987).

Al expresar el coseno en la ecuación (2.31) como la parte real de un exponencial complejo, la simulación puede ser efectuada mucho más eficientemente

por medio de la transformada rápida de Fourier (Shinozuka y Lenoé 1976). De hecho, la ecuación (2.31) puede ponerse en la forma

$$x(t) = \Re \left\{ \sum_{j=1}^M 2\sqrt{S_X(\omega_j)\Delta\omega} \exp(i\zeta_j) \times \exp(i\omega_j t) \right\} \quad (2.35)$$

que indica que  $x(t)$  puede calcularse como la parte real ( $\Re(\cdot)$ ) de la transformada discreta de Fourier del conjunto complejo

$$\{2\sqrt{S_X(\omega_j)\Delta\omega} \exp(i\zeta_j)\} \quad (2.36)$$

### 2.3.2 Simulación de acelerogramas no estacionarios

La simulación de realizaciones de procesos no estacionarios Gaussianos de media nula caracterizados por una densidad espectral de potencia variable en el tiempo  $S_X(\omega_j, t)$  puede realizarse por una modificación simple del algoritmo anterior:

$$x(t) = \sum_{j=1}^M 2\sqrt{S_X(\omega_j, t)\Delta\omega} \cos(\omega_j t + \zeta_j) \quad (2.37)$$

En el caso particular de procesos modelados según el modelo evolutivo de Priestley, es decir

$$S_X(\omega, t) = |\xi(t, \omega)|^2 S_Y(\omega) \quad (2.38)$$

se tiene

$$x(t) = |\xi(t, \omega)| \sum_{j=1}^M 2\sqrt{S_Y(\omega_j)\Delta\omega} \cos(\omega_j t + \zeta_j) \quad (2.39)$$

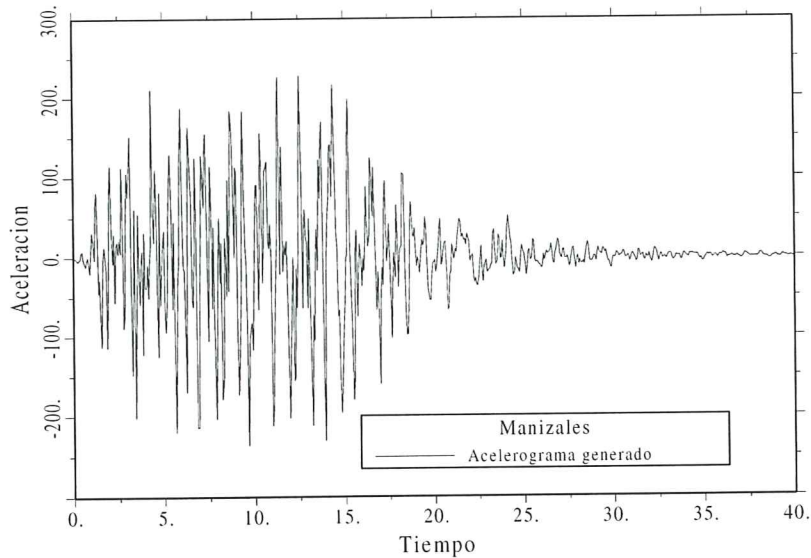
que en el supuesto de modulación uniforme se reduce a

$$x(t) = \xi(t) \sum_{j=1}^M 2\sqrt{S_Y(\omega_j)\Delta\omega} \cos(\omega_j t + \zeta_j) \quad (2.40)$$

La figura 2.8 muestra un acelerograma artificial generado por este método utilizando como base el espectro de diseño propuesto para Manizales por Hurtado *et al.* (1995). Para darle el carácter no estacionario se utilizó la función de



modulación de amplitudes de Amin y Ang (1966) (ecuación 1.24) con  $t_1 = 2$  s y  $c = 0.18$ . En la figura 2.9 aparece el espectro de velocidades dado junto con el espectro del acelerograma sintético. Puede verse que, para efectos prácticos, las diferencias entre ambos espectros son poco significativas.

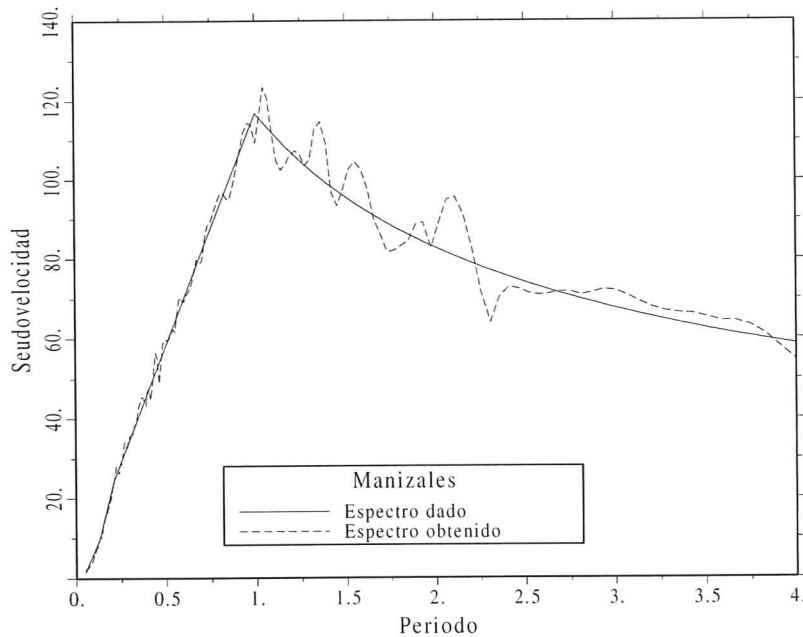


**Figura 2.8** Acelerograma artificial generado a partir del espectro de diseño propuesto para Manizales (Hurtado *et al.* 1995) (unidades: s,  $\text{cm/s}^2$ )

La simulación de acelerogramas según el modelo de espectro instantáneo puede realizarse al resolver las ecuaciones de movimiento de los filtros variables en el tiempo excitados por las realizaciones sintéticas del ruido blanco de fondo (ecuaciones 1.45 y 1.46).

### 2.3.3 Corrección del acelerograma sintético

La señal generada por el método descrito presenta aún algunas deficiencias que pueden ser fácilmente eliminadas o atenuadas. El error más importante corresponde al posible valor no nulo de la velocidad final del terreno. Para esto se puede emplear la misma técnica usada en el caso de acelerogramas registrados por medios analógicos. Ésta consiste en una corrección parabólica de la línea de base del acelerograma, donde los coeficientes de la corrección son elegidos de manera tal que minimicen el valor cuadrático medio de la velocidad.



**Figura 2.9** Espectros de pseudovelocidad de diseño y del registro sintético (unidades: s, cm/s)

Si  $a(t)$  es un acelerograma obtenido mediante el procedimiento descrito, el acelerograma corregido  $a'(t)$ , tiene la forma:

$$a'(t) = a(t) + c_0 + c_1 \frac{t}{s} + c_2 \left(\frac{t}{s}\right)^2 \quad (2.41)$$

donde  $s$  es la duración de la señal. La velocidad se obtiene integrando la ecuación anterior con condiciones iniciales nulas y los coeficientes  $c_0$ ,  $c_1$  y  $c_2$  se seleccionan de manera tal que el valor cuadrático medio de ésta sea mínimo en el intervalo  $[0, s]$ . Con todo esto se llega a la relación:

$$\begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -300 & 900 & -630 \\ 1800 & -5760 & 4200 \\ -1890 & 6300 & -4725 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix} \quad (2.42)$$

donde

$$b_k = s^{-k-3} \int_0^s v(t) t^{k+1} dt \quad k = 0, 1, 2 \quad (2.43)$$

y donde  $v(t)$  es la velocidad correspondiente a  $a(t)$ .

Las integrales de la ecuación (2.43) se pueden evaluar numéricamente, bajo el supuesto de que la aceleración  $a(t)$  varía linealmente entre dos instantes de tiempo consecutivos. Después de esta corrección, la doble integración de  $a'(t)$  proporciona las velocidades y desplazamientos, respectivamente. Aunque normalmente las funciones  $a(t)$  y  $a'(t)$  son muy similares, es importante la modificación en la velocidad  $v(t)$ .



## Capítulo 3

# Modelo estocástico de los movimientos sísmicos en Manizales (Colombia)

)

### 3.1 Introducción

Después de haber examinado en el capítulo anterior algunos de los principales modelos estocásticos de la acción sísmica publicados en la literatura especializada, así como los pasos necesarios para la obtención de sus parámetros, en el presente capítulo se aplican tales conceptos y métodos para obtener una aproximación razonable de un modelo tal para el caso de Manizales (Colombia), a partir de los registros disponibles. En primer lugar se describen y se relacionan dichos registros; a continuación se describen los pasos de cálculo del programa de obtención de los parámetros del modelo y finalmente se analizan los resultados en comparación con algunos referentes a otras regiones sísmicas.

### 3.2 Registros sísmicos obtenidos en Manizales

La tabla 3.1 presenta los datos generales de los registros obtenidos en la ciudad que se han utilizado para este estudio. Los cinco primeros fueron obtenidos en un acelerómetro tipo Montana de registro fotográfico en papel, instalado en la ciudad por el U. S. Geological Survey y administrado por el Instituto Geofísico de los Andes. Cuatro de estos registros fueron digitados por Córdoba y Gómez (1987), y el quinto por Hurtado *et al.* (1981). Los registros restantes han sido obtenidos en los equipos digitales marca *Kinematics* gestionados por el autor entre 1991 y 1993 en la Universidad Nacional, Sede Manizales.

Puede decirse que casi todos los registros corresponden al perfil típico de los suelos de la ciudad, descrito por Aguirre y Gutierrez (1992), formado por limos arenosos de origen volcánico de gran espesor. A este perfil típico pertenecen

Tabla 3.1 Registros sísmicos en Manizales

Sismo No.	Registros No.	Epicentro	Fecha	Estación
1	1	Dabeiba	08.31.77	Banco del Comercio
2	2	Pereira	04.13.75	Banco del Comercio
3	3	Versalles	06.25.80	Banco del Comercio
4	4	Umpala	03.22.77	Banco del Comercio
5	5	La Tebaida	05.18.76	Banco del Comercio
6	6, 7	Belalcázar	08.15.92	El Cable
	8, 9	Belalcázar	08.15.92	Universidad Nacional
7	10, 11	Murindó	10.17.92	El Cable
	12, 13	Murindó	10.17.92	Universidad Nacional
8	14, 15	Murindó	10.18.92	El Cable
	16, 17	Murindó	10.18.92	Universidad Nacional
9	18, 19	Murindó	10.18.92	El Cable
	20, 21	Murindó	10.18.92	Universidad Nacional
10	22, 23	Toribío	06.06.94	J. Hada
	24, 25	Toribío	06.06.94	E.P.M.
11	26, 27	Tauramena	01.19.95	E.P.M.
12	28, 29	Calima	02.08.95	El Cable
	30, 31	Calima	02.08.95	Confamiliares
	32, 33	Calima	02.08.95	E.P. M.
13	34, 35	Risaralda	08.19.95	El Cable
	36, 37	Risaralda	08.19.95	E. P. M.
	38, 39	Risaralda	08.19.95	Acueducto

los sitios indicados en la tabla 3.1 como El Cable, Banco del Comercio, Universidad Nacional, Confamiliares y E. P. M. Las principales variaciones que pueden hallarse a lo largo y ancho del casco urbano corresponden a la presencia de algunos rellenos mecánicos o hidráulicos de diferente espesor, los cuales alteran el comportamiento de las ondas sísmicas en una medida que resulta difícil de ponderar. Las estaciones que figuran en la tabla como Universidad



Nacional, El Cable y Confamiliares presentan un perfil similar, con la diferencia de que en el último hay una capa de espesor moderado de dichos rellenos que, aparentemente, parece haber ocasionado pequeñas amplificaciones en ciertos períodos. Por otra parte, el suelo del edificio E.P.M. y zonas aledañas presenta características excepcionales que han causado tradicionalmente mayores intensidades allí que en otras partes de la ciudad. Particularmente, la zona sufrió una masiva destrucción de viviendas de bahareque en el año de 1979, lo que se refleja en las altas intensidades obtenidas en el sismo del 23 de noviembre de 1979 (no registrado), las cuales alcanzaron allí un valor de IX.

### 3.3 Estimación de parámetros del modelo estocástico

Como se dijo en el capítulo anterior, un modelo estocástico riguroso de la acción sísmica debe incluir su no estacionaridad en amplitud y en frecuencia. Para ello se ha adoptado el modelo de espectro instantáneo (Yeh y Wen 1990) descrito en detalle en el capítulo anterior. El proceso de cálculo de los parámetros espectrales del modelo es el siguiente:

1. Cálculo de las funciones empíricas de modulación de amplitudes,  $\hat{\xi}(t)$  y de frecuencias  $\hat{\kappa}(t)$ .

2. Estabilización estacionaria del registro, es decir, cálculo de un registro estacionario equivalente obtenido al remover las tendencias no estacionarias en amplitud y frecuencia caracterizadas por  $\xi(t)$  y  $\kappa(t)$ , tal como se explicó en el capítulo anterior. En este estudio se utilizaron las funciones empíricas de amplitud y frecuencia en lugar de modelos no lineales ajustados a ellas. Esto se debe a que la última opción tiene sentido cuando se busca generar acelerogramas sintéticos similares a uno dado (por ejemplo, en estudios de daños caudados por un evento que haya sido registrado) o cuando se persigue realizar un estudio estadístico de los parámetros de las funciones  $\xi(t)$  y  $\kappa(t)$ . Como en el caso presente no se trata de modelar un evento dado y, además, la base de datos disponible no es lo suficientemente amplia como para obtener una modelación fiable de los múltiples parámetros de ambas funciones, se ha optado por utilizar las funciones empíricas directamente en la estabilización estacionaria de cada registro, explicada en el capítulo anterior, y concentrar el estudio estadístico en los parámetros de la densidad espectral que son, con mucho, los más importantes del modelo evolutivo completo. Las densidades espectrales de potencia de los registros estabilizados se calcularon como el promedio de las densidades de tres segmentos de los mismos. Para el cálculo se utilizó la ventana espectral de Hanning (cf. Priestley 1981).

3. Cálculo de la duración del segmento de fase fuerte,  $s_0$ , según la definición de Vanmarcke y Lai (1980) (ecuaciones 2.3 y 2.3). Esta duración se utilizará para modelar la modulación de amplitudes en la generación de acelerogramas

sintéticos que se discute más adelante.

4. Cálculo de los parámetros espectrales del modelo. En el presente caso se adoptó el espectro de Clough y Penzien, cuya densidad espectral está dada por

$$G(\omega) = \frac{\omega^4}{(\omega_f^2 - \omega^2)^2 + 4\nu_f^2\omega_f^2\omega^2} \times \frac{\omega_g^4 + 4\nu_g^2\omega_g^2\omega^2}{(\omega_g^2 - \omega^2)^2 + 4\nu_g^2\omega_g^2\omega^2} G_W \quad (3.1)$$

A los parámetros  $\omega_f$  y  $\nu_f$  se les asignaron unos valores fijos que se juzgaron adecuados a la vista de los espectros empíricos de los registros estabilizados, mientras que los parámetros de la parte de Kanai - Tajimi del espectro se calcularon siguiendo el método de ajuste de los momentos espectrales expuesto en el capítulo anterior. Para ello se utilizaron las ecuaciones explícitas de los momentos espectrales del filtro de Kanai - Tajimi obtenidas por Faravelli (1988a) (ecuaciones 2.18 a 2.27). El algoritmo de ajuste no lineal utilizado fue el Levenverg - Marquart. Por otra parte, con el fin de evitar un sesgo en la estadística de los valores se prescindió de algunos registros del sismo No. 8 y de todos los del No. 9, que es una réplica del anterior.

La tabla 3.2 reúne los valores de los parámetros  $s_0$ ,  $\omega_g$  y  $\nu_g$ . En las figuras 3.1 y 3.2 se presentan histogramas de los dos últimos valores junto con las funciones de densidad siguientes (tipos Weibull y Lognormal, respectivamente) que se han juzgado adecuadas para ellas:

$$f(\omega_g) = \frac{1.55}{5.1} \left( \frac{\omega_g - 7.5}{5.1} \right)^{0.55} \exp \left[ - \left( \frac{\omega_g - 7.5}{5.1} \right)^{1.55} \right] \quad (3.2)$$

$$f(\nu_g) = \frac{1}{0.3865\sqrt{2\pi\nu_g}} \exp \left[ - \frac{1}{2} \left( \frac{\ln \nu_g + 1.9442}{0.3865} \right)^2 \right] \quad (3.3)$$

La figura 3.3 muestra la densidad espectral evolutiva del registro 7 correspondiente al modelo de Yeh-Wen:

$$G(\omega, t) = \xi(t)^2 \frac{1}{\hat{\kappa}(t)} G\left(\frac{\omega}{\hat{\kappa}(t)}\right) \quad (3.4)$$

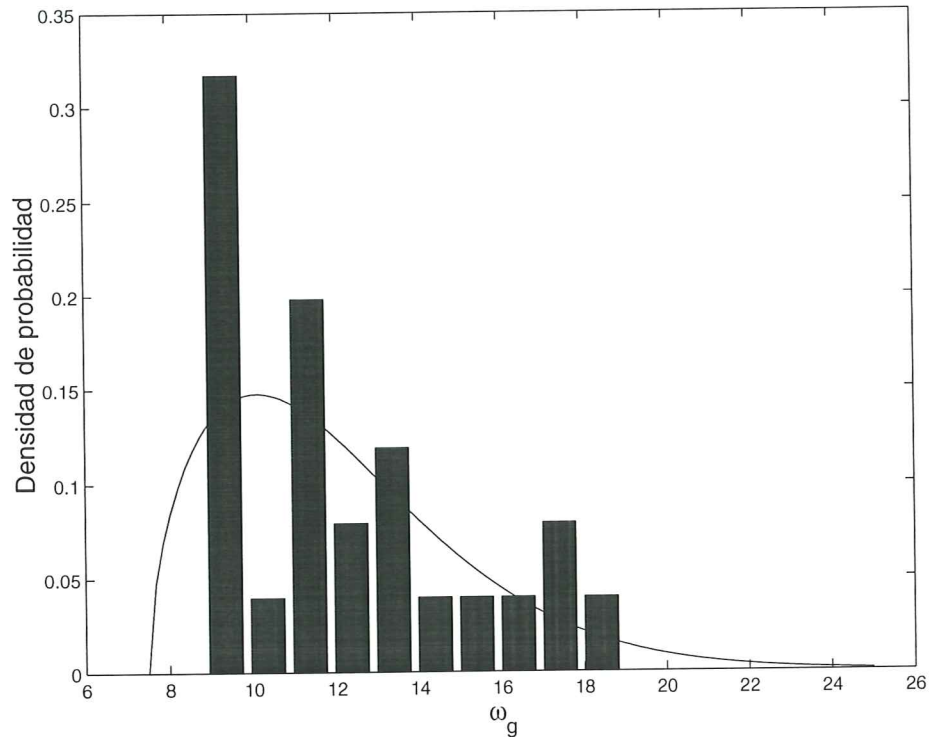
La densidad ha sido calculada con los parámetros que aparecen en la tabla 3.2 y usando su función empírica de evolución de frecuencias  $\hat{\kappa}(t)$  y como modulación de amplitudes la función de Amin y Ang (1966) (ecuación 1.24)

$$\xi(t) = \begin{cases} \left(\frac{t}{t_1}\right)^2, & t \leq t_1 \\ 1, & t_1 \leq t \leq t_2 \\ e^{-c(t-t_2)}, & t_2 \leq t \end{cases} \quad (3.5)$$

**Tabla 3.2** Valores calculados de los parámetros del modelo estocástico

Registro No.	$s_0$ (s)	$a_{\max}$ (cm/s <sup>2</sup> )	$\omega_g$ (rad/s)	$\nu_g$
5	9.73	48.60	8.85	0.150
6	12.04	16.30	16.34	0.247
7	20.24	16.25	17.49	0.262
8	14.31	16.29	13.93	0.250
9	13.33	14.88	15.55	0.233
10	21.34	6.22	10.92	0.093
11	21.36	6.75	10.86	0.135
12	22.17	6.34	10.17	0.093
13	22.85	5.86	9.11	0.119
14	30.70	14.83	12.09	0.145
15	32.99	13.92	11.03	0.149
24	21.46	9.44	8.83	0.052
25	29.93	5.90	9.24	0.069
26	20.34	12.30	9.11	0.077
27	13.16	19.99	9.32	0.086
28	16.53	26.42	13.66	0.191
29	20.46	38.02	13.48	0.184
30	25.34	22.98	11.23	0.133
31	14.10	28.53	11.31	0.122
32	12.94	55.86	9.01	0.136
33	25.46	35.38	9.53	0.110
34	16.14	51.58	17.03	0.229
35	11.91	46.78	18.93	0.231
36	19.30	35.26	13.22	0.181
37	24.46	34.06	12.16	0.178

con parámetros  $t_1 = 2$  s,  $c = 0.18$  y  $t_2 = t_1 + s_0$ .

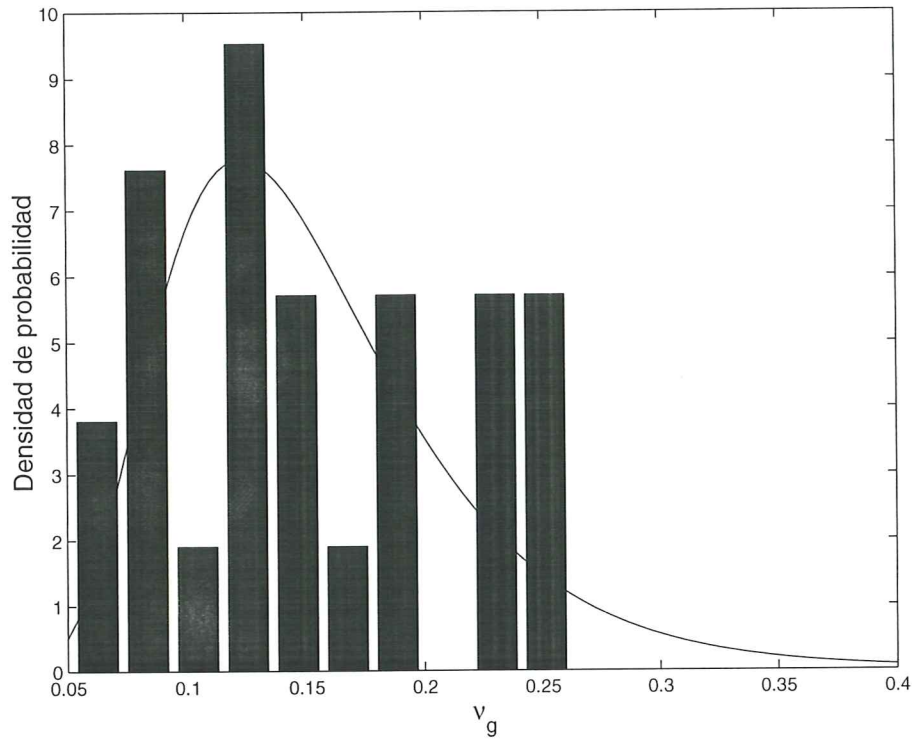


**Figura 3.1** Histograma y modelo probabilista de la frecuencia de Kanai-Tajimi para Manizales (unidades: rad/s)

### 3.4 Generación de acelerogramas artificiales para Manizales

Con el fin de utilizar el modelo espectral así definido para generar acelerogramas artificiales adecuados para Manizales, consistentes con su amenaza sísmica, se hace necesario examinar la relación existente entre los valores  $s_0$ ,  $\omega_g$  y  $\nu_g$  de un lado y la aceleración máxima,  $a_{\max}$ , por otro, debido a que la amenaza se encuentra definida para todo el territorio nacional en términos de ésta (García *et al.* 1984). La figura 3.4 muestra la relación existente entre  $s_0$  y  $a_{\max}$ . En ella también se recogen los datos de la costa oeste norteamericana evaluados por Lai (1982). Puede observarse que los datos de Manizales muestran la misma tendencia a una correlación negativa de  $s_0$  con respecto a  $a_{\max}$ , lo cual se explica principalmente por el hecho de que la duración crece con la distancia epicentral al contrario que la aceleración máxima. Asimismo, se puede ver que la dis-



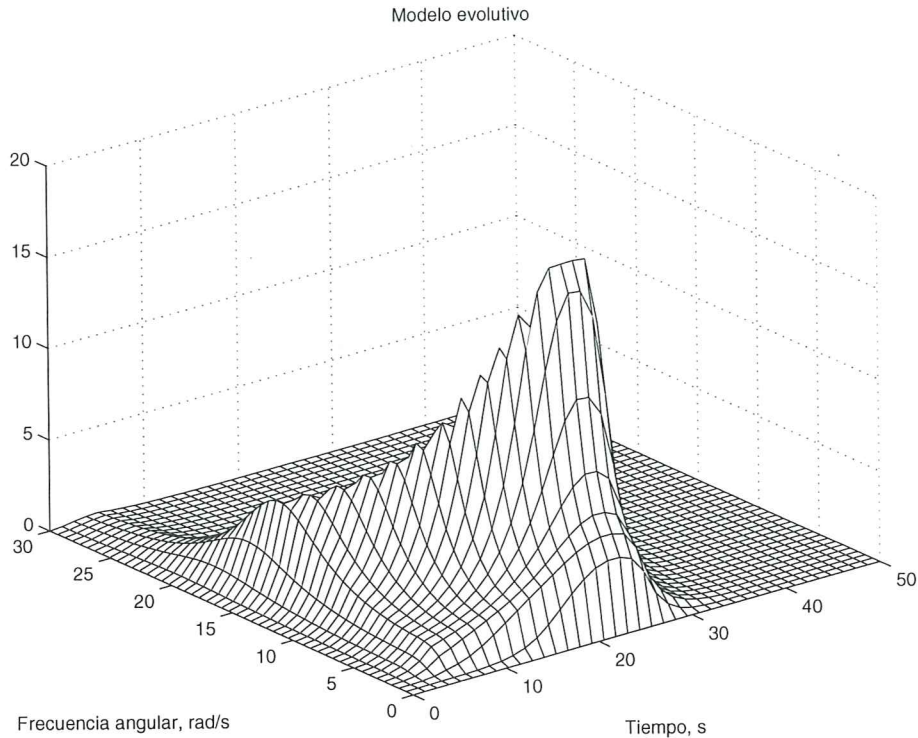


**Figura 3.2** Histograma y modelo probabilista del amortiguamiento de Kanai-Tajimi para Manizales

persión de los datos de Manizales, en el pequeño rango de aceleraciones que ha sido posible registrar hasta el momento, muestran una dispersión muy inferior que los usados por Lai (1982), lo que se debe a la mayor homogeneidad de la muestra de una misma ciudad empleada en este caso. Esto ilustra la inconveniencia de utilizar información de bases de datos correspondientes a regiones diversas en estudios de objetivo local como aquellos para los cuales este trabajo pretende servir de insumo, es decir, la generación de acelerogramas artificiales para estudios de vulnerabilidad y riesgo en Manizales.

Sobre la base de la información reunida en la tabla 3.2 se ha calculado la siguiente regresión entre duración de la fase fuerte y aceleración máxima:

$$\ln s_0 = -0.0102 a_{\max} + 3.1707 + \epsilon \quad (3.6)$$

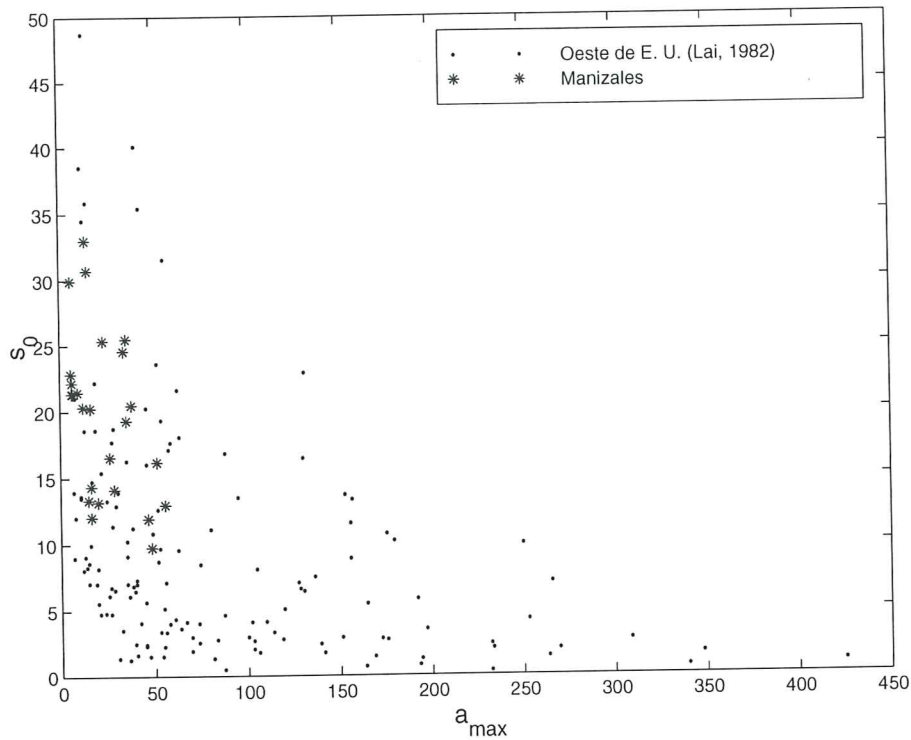


**Figura 3.3** Densidad espectral evolutiva basada en el registro No. 7 (unidades:  $s, cm/s^2$ )

En esta expresión  $\epsilon$  es una variable aleatoria normal con media cero y desviación estándar 0.2867. Como quiera que para valores altos de aceleración se puede obtener duraciones muy pequeñas, se propone fijar un valor mínimo de 1 s.

De otra parte, las figuras 3.5 y 3.6 muestran las relaciones  $\omega_g - a_{max}$  y  $\nu_g - a_{max}$ , respectivamente. En consonancia con lo observado por Lai (1982), ninguna de las dos variables muestra una tendencia definida a crecer o disminuir con la aceleración máxima, lo cual hace que, para efectos prácticos, puedan ser consideradas efectivamente como propiedades (estocásticas) de los suelos de la región bajo estudio, modeladas por las ecuaciones (3.2) y (3.2). Para estudios de vulnerabilidad y riesgo, en los cuales se hace necesario generar acelerogramas artificiales para un amplio rango de aceleraciones máximas, esta independencia de los parámetros espectrales del nivel de aceleración sísmica permite generar los acelerogramas a partir de una misma densidad espectral caracterizada ella





**Figura 3.4** Relación aceleración máxima / duración de la fase fuerte (unidades: s,  $\text{cm/s}^2$ )

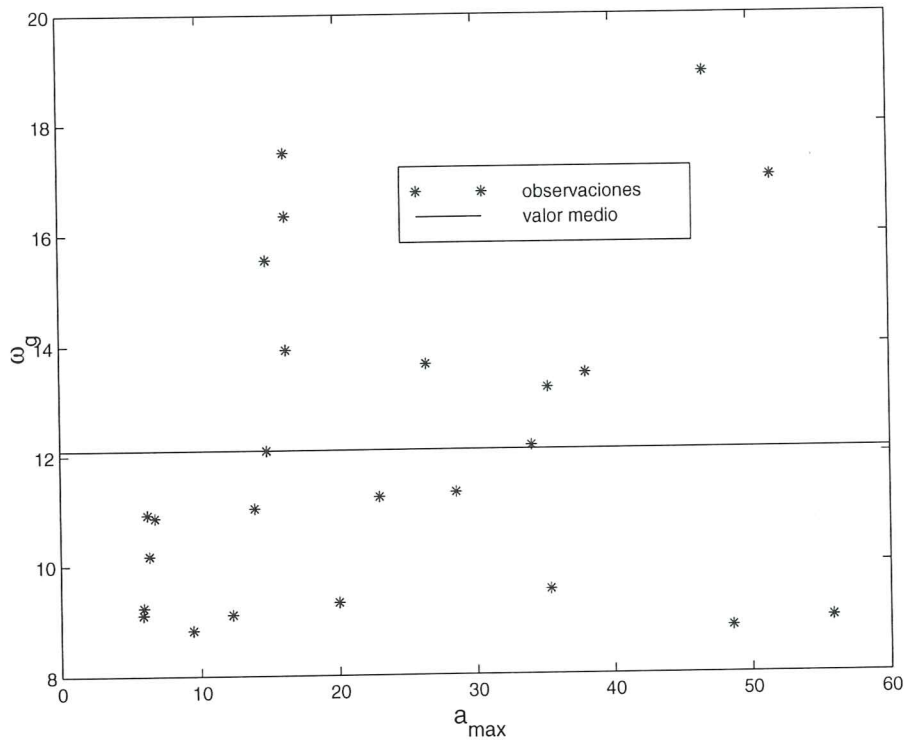
misma por parámetros aleatorios. En consecuencia, el proceso de generación de acelerogramas artificiales propuesto para la ciudad, a partir del modelo estocástico así definido, es el siguiente:

1. Definir la aceleración máxima objetivo del registro.
2. Generar una duración aleatoria de la fase fuerte, teniendo en cuenta que el parámetro  $\epsilon$  en la ecuación (3.6) es aleatorio.
3. Generar valores aleatorios de los parámetros de la densidad espectral de potencia de acuerdo a sus distribuciones (ecuaciones 3.2 y 3.3).
4. Generación de un ruido blanco de duración equivalente a la duración total del evento (cf. Anexo B, sección B.5) y aplicación de la función de modulación

de Amin y Ang (ecuación 3.5).

5. Simulación del acelerograma por medio de la solución de la dinámica del filtro variable de Clough - Penzien (ecuaciones 1.45 y 1.46).

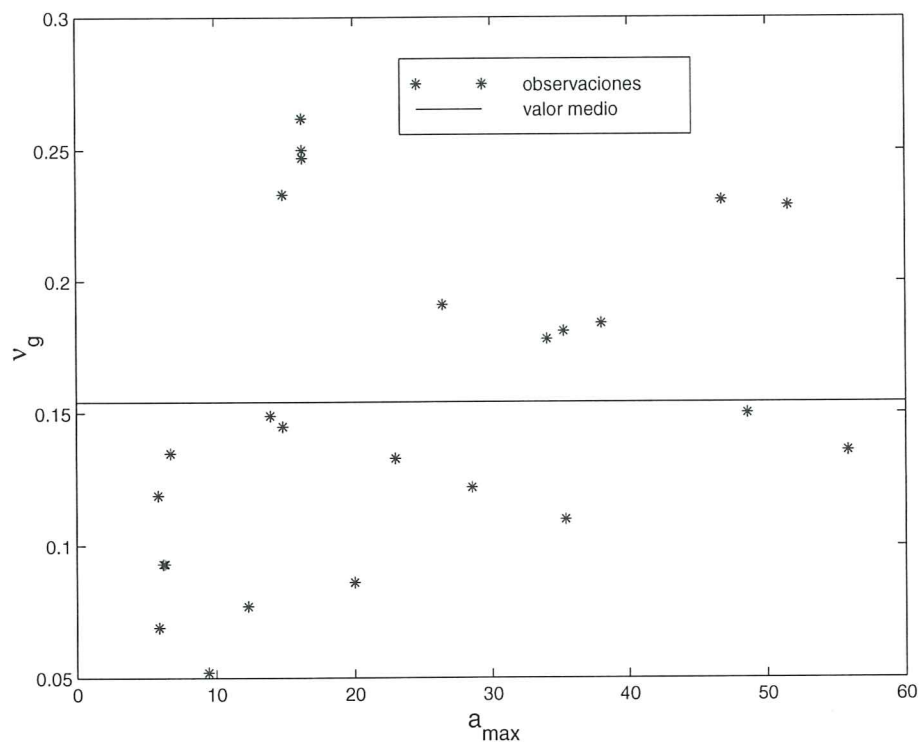
6. Corrección de la línea base (cf. Sección 2.3.3).



**Figura 3.5** Relación aceleración máxima / frecuencia del filtro (unidades:  $\text{cm/s}^2$ ,  $\text{rad/s}$ )

### 3.5 Vulnerabilidad de edificios sin diseño sismo-resistente

Como una primera aplicación práctica del modelo estocástico expuesto, en este apartado se hará uso de él para estimar la vulnerabilidad de una estructura representativa de las construcciones de concreto reforzado carentes de diseño sismo-resistente bajo condiciones de un sismo fuerte. Como valor indicativo de



**Figura 3.6** Relación aceleración máxima / amortiguamiento del filtro

este último se toma el correspondiente a una probabilidad de excedencia de 10% en 50 años, caracterizado por una celeración máxima de 0.25 g y reglamentado por el código de diseño sismo-resistente de la ciudad para las construcciones nuevas. La meta de este análisis es la obtención de una función de distribución de probabilidad del daño de una estructura representativa de los edificios de la ciudad de la época anterior a la expedición de la primera norma sísmica, la cual permite estimar el escenario posible de daños y pérdidas en ese grupo de edificios\*.

El método que se seguirá para esta evaluación es el *método de Monte Carlo* (Hurtado y Barbat 1998; cf. Anexo A), que consiste en la realización de un amplio número de análisis deterministas de la estructura con datos aleatorios con el fin de disponer de una muestra sobre la cual realizar las estadísticas

\* El diseño de este modelo representativo fue realizado por Samuel D. Prieto y Josué Galvis.

correspondientes. Los pasos requeridos por el método en un caso como este son los siguientes:

1. Diseño de una estructura altamente representativa de la época. La estructura en cuestión es un edificio de concreto reforzado de seis plantas, con cinco marcos de dos vanos cada uno, que soportan losas de concreto y cargas vivas de tipo vivienda. El diseño se realizó de acuerdo a las normas y costumbres de las décadas de los sesenta y setenta.

2. Definición de un índice de daño. En los últimos años se ha impuesto en la literatura internacional el modelo de Park y Ang (Park 1984; Ang 1987) el cual estima el daño producido en cada elemento estructural como función de la deformación máxima y de la energía disipada. La ecuación del índice para un elemento  $i$  es

$$d_i = \frac{\delta_m}{\delta_u} + \frac{\beta}{F_y \delta_u} \int dE \Big|_i \quad (3.7)$$

donde  $\delta_m$  y  $\delta_u$  son la deformación máxima bajo carga sísmica y bajo carga monotónica, respectivamente,  $F_y$  la resistencia a cedencia del elemento y  $\beta$  un coeficiente de peso de la energía disipada por histéresis,  $E$ . Park (1984) propone expresiones para las variables mencionadas y modelos de histéresis para cada tipo de carga a los que típicamente se ven sometidos los elementos estructurales bajo sismos: flexo-compresión, corte y adherencia. Asimismo, para un edificio en su conjunto, propone tomar como índice de daño global la expresión

$$D = \frac{\sum E_i d_i}{\sum E_i} \quad (3.8)$$

que implica el tomar la energía disipada como factor de ponderación. La mayor ventaja de este índice es que ha sido cuidadosamente calibrado con respecto a daños sísmicos realmente ocurridos por medio de análisis no lineales de historia de respuesta de varios edificios sometidos a los registros de los terremotos correspondientes (Ang 1987). La tabla 3.3 muestra los rangos de valores del índice correspondientes a varias calificaciones del daño, los cuales suelen ser tomados como referencia en diferentes estudios de este tipo (Barbat *et al.* 1996; Singhal y Kiremidjian 1996).

3. Definición de las variables aleatorias. En este caso se tomarán las variables que se indican en la tabla 3.4 con las distribuciones y parámetros que allí se indican. La variable  $f'_c$  es la resistencia última del concreto a compresión, cuya media se toma igual a 1.14 veces la resistencia nominal del concreto de

**Tabla 3.3** Rangos del índice de Park y Ang para diferentes estados de daño (Singhal y Kiremidjian 1996)

Estado de daño	Rango
Leve	0.1 - 0.2
Moderado	0.2 - 0.5
Fuerte	0.5 - 1.0
Colapso	> 1.0

**Tabla 3.4** Descripción de las variables aleatorias

No.	Variable	Distribución	$\mu$	$\sigma$
1	$\epsilon$	Normal	0	0.2867
2	$\omega_g$	Weibull	12.096	3.022
3	$\nu_g$	Lognormal	0.154	0.062
4	$f_c$	Normal	0.0239	0.00335
5	$f_y$	Lognormal	0.4410	0.04851

diseño común en la época, 0.02058 kN/mm<sup>2</sup>. En cuanto a la media de la resistencia última del acero  $f_y$ , se toma un cinco por ciento superior a la nominal, 0.4116 kN/mm<sup>2</sup>.

4. Generación de conjuntos de datos aleatorios y combinación de los mismos de acuerdo a una técnica de reducción de la varianza, que para este caso será la de *muestreo descriptivo* (Ziha 1995) comentada en el Anexo A.

5. Generación de un conjunto igual de acelerogramas sintéticos por medio de la solución para  $\ddot{U}_f$  de las ecuaciones del filtro variable de Clough-Penzien:

$$\ddot{U}_g + (2\nu_g\omega_g\dot{\kappa} - \frac{\ddot{\kappa}}{\dot{\kappa}})\dot{U}_g + \omega_g^2\kappa^2U_g = -\dot{\kappa}^2\xi(t)W(\kappa(t)) \quad (3.9)$$

$$\ddot{U}_f + (2\nu_f\omega_f\dot{\kappa} - \frac{\ddot{\kappa}}{\dot{\kappa}})\dot{U}_f + \omega_f^2\kappa^2U_f = -2\nu_g\omega_g\dot{\kappa}\dot{U}_g - \omega_g^2\kappa^2U_g \quad (3.10)$$

6. Análisis de historia de respuesta no lineal de todos los modelos con los grupos de datos aleatorios. Para este propósito se utilizó el programa IDARC (Kunnath *et al.* 1992), desarrollado para el análisis inelástico de estructuras de concreto reforzado.

7. Análisis estadístico de los resultados.



Tabla 3.5 Probabilidades de excedencia del índice de daño

$d$	$P[D > d]$
0.1	1.000 E 00
0.2	7.452 E -01
0.3	4.214 E -03
0.4	3.322 E -07

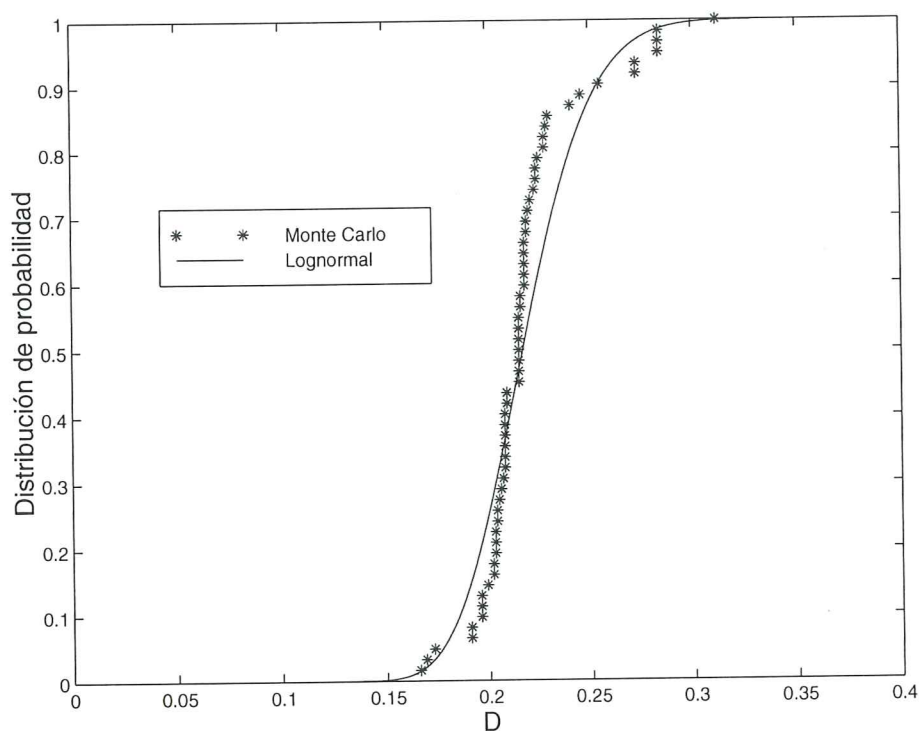
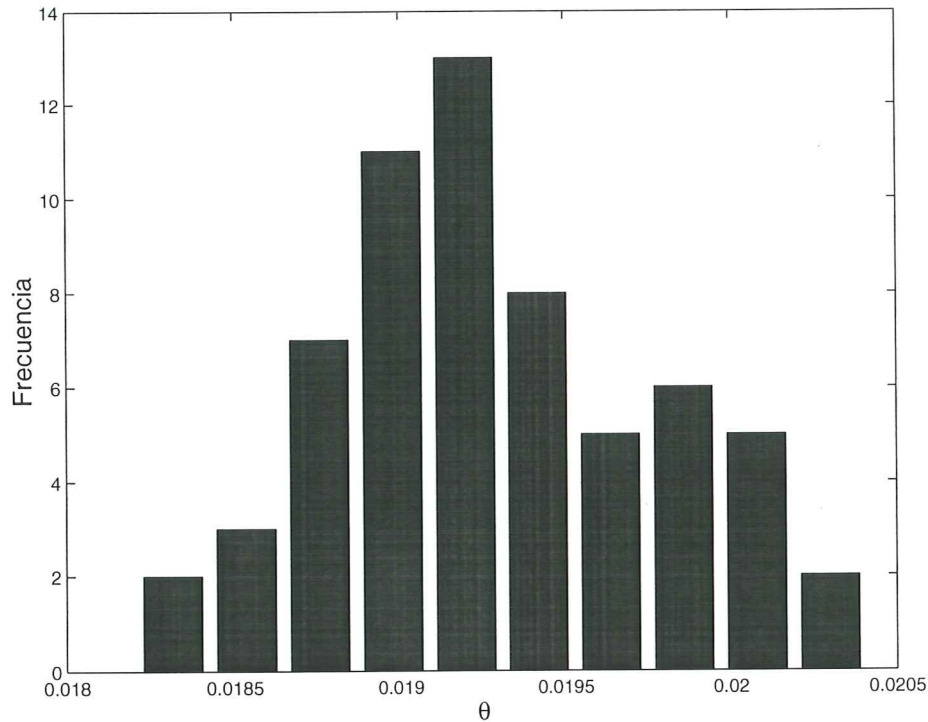


Figura 3.7 Funciones de distribución del índice de daño de Park y Ang

Se realizaron en total 66 análisis inelásticos del modelo. La figura 3.7 recoge los valores de la distribuciones empírica del índice de daño. A ellos se ha ajustado una función lognormal, la cual permite estimar las probabilidades asociadas a estados no observados en la simulación, indicados en la tabla 3.5. En ella puede observarse que para el grado de daño leve y en parte para el grado moderado





**Figura 3.8** Histograma del radio de deriva máxima

hay casi total certeza de su ocurrencia, mientras que las probabilidades correspondientes a niveles de daño mayores son muy reducidas. El fuerte contraste entre estos valores de probabilidad de excedencia entre los grados leve y moderado, de una parte, y los mayores, de otra, se explica por el reducido valor del coeficiente de variación del índice de daño, que es tan sólo de 0.123. Este comportamiento claramente positivo de los edificios sin diseño sismo-resistente se explica en parte por la correlación negativa que guardan la aceleración máxima y la duración de la fase fuerte, la cual hace que para sismos fuertes el número de pulsos de máxima intensidad sea menor. Por esta razón no resulta sorprendente que la vulnerabilidad de esta clase de estructuras ante sismos más moderados sea semejante a la correspondiente a los sismos fuertes considerados, tal como indican algunos análisis preliminares realizados. Nótese que la carencia de registros de una aceleración máxima semejante a la considerada obliga a estimar

los valores de  $s_0$  a partir de la información de sismos débiles, lo cual genera una cierta incertidumbre sobre estas conclusiones. Sin embargo, los datos de Lai (1982) incluidos en la figura 3.4 muestran que son poco probables los valores altos de  $s_0$  correspondientes a grandes aceleraciones máximas.

Una dispersión menor que la del índice de daño se obtuvo en el caso del radio de deriva máxima (definida como la relación entre la deriva de piso y su altura), cuyo histograma se muestra en la figura 3.8. La media y el coeficiente de variación de esta variable fueron, respectivamente, 0.0193 y 0.026. Con el fin de valorar este resultado, es conveniente mencionar que los códigos de diseño sismo-resistente especifican un valor máximo del radio de deriva entre 0.01 y 0.015. Esto indica que, en general, pueden esperarse grandes daños en elementos no estructurales en edificios de esta clase ante el tipo de evento considerado. Con el fin de complementar esta diagnóstico preliminar deben efectuarse estudios similares en estructuras con diseño sismo-resistente, así como un estudio más amplio y detallado de las que se han examinado preliminarmente en este trabajo. Por ejemplo, deben considerarse las distribuciones reales de  $f'_c$  y  $f_y$  de acuerdo a los datos disponibles en laboratorios de ensayos correspondientes a las diferentes épocas bajo estudio, las cuales aquí han sido meramente supuestas.

## Anexo A

# Variables aleatorias

### A.1 Definición de probabilidad

Un *suceso aleatorio* puede definirse como el resultado de un experimento no causal, esto es, de un experimento en el que a una causa determinada no está asociado un efecto preciso sino varios efectos posibles y el resultado final depende del azar. Alternativamente, puede interpretarse también como un resultado determinista en el que intervienen múltiples causas desconocidas, lo que hace imposible conocer por anticipado el resultado del experimento. En ambos casos se está ante un *espacio* de resultados posibles del experimento. Por esa razón interesa distinguir entre resultados más probables que otros. La definición clásica de probabilidad afirma que si, previamente a la realización de un experimento alguno, podemos afirmar que en  $n$  resultados igualmente probables del experimento, hay un número  $n_a$  de resultados a favor de cierto suceso  $A$ , la probabilidad de éste es

$$P[A] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_a}{n} \quad (\text{A.1})$$

El hecho de que haya múltiples resultados posibles en el experimento aleatorio sugiere el uso de la teoría de conjuntos para la definición de los conceptos básicos de probabilidad. Así, el espacio de resultados posibles  $\xi_i$  del experimento, mencionado anteriormente, se denomina *espacio de probabilidad*,  $U$ . Obviamente, el tamaño de tal espacio depende de la manera como haya sido definido. Así, en el caso del lanzamiento de un dado el espacio tiene seis elementos, si se define como el conjunto de apariciones de cada número, o dos elementos, si sólo interesa la obtención de un número par o impar. Por otra parte, en el espacio pueden considerarse diversos subconjuntos de resultados posibles, los cuales son justamente los sucesos aleatorios. Si, por ejemplo, el experimento consiste en el lanzamiento de una moneda dos veces al aire, el espacio de probabilidad consistirá de los elementos  $aa, ar, ra, rr$ , donde  $a$  y  $r$

indican el anverso y reverso de la moneda. Dentro de este espacio se podrían definir un subconjunto  $A$ , que consistiese de los elementos correspondientes a salidas repetidas de cualquiera de las caras:  $A = aa, rr$ .

Los siguientes enunciados de la teoría de conjuntos se interpretan de la manera descrita a continuación en la teoría de probabilidades:

1.  $A$  (conjunto  $A$ ):  $A$  ocurre.
2.  $\bar{A}$  (complemento de  $A$ ):  $A$  no ocurre.
3.  $A \cup B$  (unión de  $A$  y  $B$ ): Ocurre al menos  $A$  ó  $B$ .
4.  $AB = A \cap B$  (intersección de  $A$  y  $B$ ): Ocurren  $A$  y  $B$ .
5.  $AB = \mathcal{O}$  (la intersección de  $A$  y  $B$  es el conjunto vacío): Los sucesos  $A$  y  $B$  son *mutuamente excluyentes*.
6.  $A \subset B$  ( $A$  es subconjunto de  $B$ ): La ocurrencia de  $A$  conlleva necesariamente la de  $B$ .

La definición de probabilidad que hoy se acepta universalmente es la dada por Kolmogorov y está fundada en la teoría de conjuntos. La definición se conoce con el nombre de *axiomática*, ya que se expresa por los siguientes axiomas:

1.  $P[A] \geq 0$
2.  $P[\mathcal{U}] = 1$
3. Si  $A \cap B = \mathcal{O}$ , entonces  $P[A + B] = P[A] + P[B]$ .

Según el primer axioma, la probabilidad es un número real, no negativo e inferior a la unidad. El segundo establece que el espacio de todos los resultados posibles,  $\mathcal{U}$ , es un *suceso cierto*, ya que hay certeza total de que siempre se realice. Por el contrario, el conjunto vacío  $\mathcal{O}$  denota un *suceso imposible*. Finalmente, el tercer axioma se refiere a la probabilidad de sucesos mutuamente excluyentes como la suma de las probabilidades individuales.

Para cualquier conjunto o espacio de probabilidad  $\mathcal{U}$ , compuesto por  $m$  elementos  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  y del cual  $A, B$ , etc. son subconjuntos (definidos como *sucesos*), se dan los siguientes axiomas:

1.  $P[\mathcal{O}] = 0$ .
2.  $P[\hat{A}] = 1 - P[A]$
3. Para cualesquier  $A, B$ ,  $P[A + B] = P[A] + P[B] - P[AB]$ .

El tercer axioma de Kolmogorov es un caso particular de este último enunciado, cuando el producto (la intersección) de  $A$  y  $B$  es el conjunto vacío.

Finalmente, se define la probabilidad condicional del evento  $A$ , dado el evento  $B$ , como

$$P[A|B] = \frac{P[AB]}{P[B]} \quad (\text{A.2})$$

La noción de *independencia* de dos sucesos se basa en este concepto. De



hecho, se afirma que dos sucesos  $A$  y  $B$  son independientes cuando la probabilidad condicional de que suceda  $A$  dado  $B$  es igual a la probabilidad  $P[A]$ . En este caso se tiene

$$P[AB] = P[A]P[B] \quad (\text{A.3})$$

Los siguientes teoremas son de gran importancia:

*Teorema de la probabilidad total.* Si los sucesos  $B_1, B_2, \dots, B_n$  son mutuamente excluyentes y exhaustivos (esto es, su unión agota el espacio  $\mathcal{U}$ ), entonces, para un suceso  $A$  cualquiera

$$P[A] = \sum_{j=1}^n P[A|B_j]P[B_j] \quad (\text{A.4})$$

Esto se desprende de la definición de probabilidad condicional y de la condición de exclusión mutua. Aunque a simple vista parece que la ecuación anterior implica un rodeo para obtener la probabilidad de  $A$ , en la práctica resulta muy útil, debido a que suelen ser más asequibles empíricamente las probabilidades condicionales que las absolutas.

*Teorema de Bayes.* Sean  $A$  y  $B$  dos sucesos arbitrarios de probabilidad diferente de cero. Entonces

$$P[B|A] = \frac{P[A|B]P[B]}{P[A]} \quad (\text{A.5})$$

y a partir del teorema anterior

$$P[B_i|A] = \frac{P[A|B_i]P[B_i]}{\sum_{j=1}^n P[A|B_j]P[B_j]} \quad (\text{A.6})$$

Este teorema tiene amplia aplicación en las situaciones en que se trata de predecir el comportamiento posterior de una variable a partir del conocimiento actual del mismo.

## A.2 Variables, procesos y campos aleatorios

Se denomina *realización* de un suceso al elemento  $\xi$  del espacio  $\mathcal{U}$  que resulta del experimento, como puede ser el obtener la misma cara de la moneda en el experimento de lanzarla dos veces, dentro de las cuatro posibilidades existentes. Una *variable aleatoria*  $X(\xi)$  es un número asociado a una realización  $\xi$  de un experimento, por medio de una regla de correspondencia o función determinada. Así definida, una variable aleatoria no se diferencia de una función determinística cualquiera, mas que por el hecho de que su valor está asociado a una ocurrencia al azar de un suceso.

Matemáticamente, el número  $X(\xi)$  es una variable aleatoria si la función  $X$ , real o compleja, está definida en el espacio  $\mathcal{U}$  del experimento aleatorio y si, además, el conjunto de todas las realizaciones  $\xi$ , tales que sus correspondientes  $X(\xi)$  sean menores o iguales que cierto valor  $x$ , es un subconjunto de  $\mathcal{U}$ . A diferencia del caso determinista, este conjunto, denotado por  $[X(\xi) \leq x]$ , no constituye un rango de dado de valores, sino un conjunto de resultados experimentales posibles en el espacio  $\mathcal{U}$ , y que solamente puede ser apreciado con respecto a otros intervalos por medio de una probabilidad de ocurrencia. Lo mismo es válido para otros sucesos, tales como  $[X(\xi) = x]$ ,  $[x_1 \leq X(\xi) \leq x_2]$ , etc. Una condición adicional de la teoría de probabilidades estipula que la probabilidad de los sucesos  $[X(\xi) = \infty]$  y  $[X(\xi) = -\infty]$  es nula.

En lo que sigue se omitirá la indicación de la realización  $\xi$ . Igualmente, las variables aleatorias asociadas a una determinista se denotarán por medio de letras mayúsculas.

Un *proceso estocástico o aleatorio*  $X(t)$  es una colección de variables aleatorias  $X$  asociadas a una variable independiente  $t$ , que en general denota el tiempo. El movimiento del terreno en un sismo como función del tiempo, así como la respuesta estructural pueden ser considerados como *realizaciones* de un proceso estocástico. Por otra parte, en un *campo aleatorio* las variables aleatorias se asocian a variables independientes cualesquiera, tales como el espacio, el tiempo o ambos. Ejemplos típicos son el de la variación aleatoria de las propiedades de un material en el espacio, o la variación espacial y temporal del movimiento sísmico considerada en el análisis de estructuras de gran longitud.

## A.3 Funciones de distribución

Intuitivamente se comprende que de los múltiples resultados posibles de un experimento puede anticiparse en ciertos casos que unos son más probables que otros, o en otros que todos son igualmente probables, como en el caso del lanzamiento del dado. La función de *distribución de probabilidad* (o su derivada, si existe, llamada de *densidad de probabilidad*) caracteriza completamente la



probabilidad de obtener un valor o rango de valores de la variable aleatoria, los cuales pueden formar un campo continuo, como el eje real, o discreto, como valores enteros, racionales, etc.

Tanto para el caso discreto como para el continuo, la función de distribución de probabilidad  $F_X(x)$  se define como la probabilidad de que la variable aleatoria  $X$  sea menor que una cierta cantidad  $x$ :

$$F_X(x) = P[X \leq x] \quad (\text{A.7})$$

Es evidente que cuando  $x \rightarrow \infty$ ,  $F_X(x) \rightarrow 1$ , ya que  $x$  agota todo el campo real. Análogamente  $F_X(x) \rightarrow 0$  cuando  $x \rightarrow -\infty$ . En términos generales, puede decirse que la función de distribución es no-negativa, no decreciente, continua por la derecha y acotada entre 0 y 1.

La probabilidad de que una variable aleatoria tome valores entre dos números  $a$  y  $b$ , tales que  $a < b$  viene dada por

$$P[a < X \leq b] = F_X(b) - F_X(a) \quad (\text{A.8})$$

Si la función de distribución es continua en el intervalo  $(a, b]$ , de acuerdo al teorema fundamental del cálculo integral la ecuación anterior puede escribirse como

$$P[a < X \leq b] = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f(x)dx \quad (\text{A.9})$$

lo que define la función de densidad de probabilidad

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} \quad (\text{A.10})$$

o también

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_U(u)du \quad (\text{A.11})$$

Si la función  $f_X(x)$  es continua sobre todo el eje real, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1 \quad (\text{A.12})$$

En el caso de variables aleatorias que solamente puedan tomar valores discretos  $x_i, i = 1, 2, \dots, n$ , se define la *función de masa de probabilidad* como

$$p_X(x_i) = P[X = x_i] \quad (\text{A.13})$$

En consecuencia,

$$0 < p_X(x_i) \leq 1 \quad (\text{A.14})$$

$$\sum_{i=1}^n p_X(x_i) = 1 \quad (\text{A.15})$$

Las funciones de masa y de distribución de probabilidad guardan en este caso las siguientes relaciones:

$$p_X(x_i) = F_X(x_i) - F_X(x_{i-1}) \quad (\text{A.16})$$

$$F_X(x) = \sum_{i:x_i \leq x} p_X(x_i) \quad (\text{A.17})$$

Para efectos de cálculo, resulta útil darle a la función de masa una expresión analítica usando la función delta de Dirac:

$$f_X(x_i) = \sum_{i=1}^n p_X(x_i) \delta(x - x_i) \quad (\text{A.18})$$

#### A.4 Distribución de múltiples variables

Todo lo dicho en el apartado anterior se refiere al comportamiento probabilista de una sola variable aleatoria. En la práctica, se requiere con frecuencia conocer el comportamiento de dos o más variables aleatorias de manera aislada o relativamente de unas a otras. Se define la *función de distribución conjunta de dos variables* como

$$F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = P([X_1 \leq x_1] \cap [X_2 \leq x_2]) \quad (\text{A.19})$$

y de manera análoga para más de dos variables. De acuerdo a lo dicho anteriormente, se cumplen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} F_{X_1, X_2, \dots, X_n}(\infty, \infty, \dots) &= 1, \\ F_{X_1, X_2, \dots, X_n}(-\infty, -\infty, \dots) &= 0, \\ F_{X_1, X_2, \dots, X_n}(\infty, \infty, x_j, \infty, \dots) &= F_{X_j}, \forall j \end{aligned} \tag{A.20}$$

Esta última ecuación indica que la distribución de una variable cualquiera (o *distribución marginal*) puede obtenerse a partir de la distribución conjunta haciendo tender a infinito las variables restantes. Por su parte, la *función de densidad conjunta de múltiples variables* se calcula derivando parcialmente la función de distribución con respecto a las variables de interés. Por ejemplo, para el caso de dos variables,

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \frac{\partial F_{X_1, X_2}}{\partial x_1 \partial x_2} \tag{A.21}$$

La relación inversa a la anterior es, por tanto,

$$F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} f_{U_1, U_2}(u_1, u_2) du_1 du_2 \tag{A.22}$$

Teniendo en cuenta la primera de las relaciones asintóticas de la función de distribución conjunta, se demuestra fácilmente que la densidad de una variable cualquiera (o *densidad marginal*) puede obtenerse a partir de la densidad conjunta integrando sobre las variables restantes:

$$f_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) dx_2 \tag{A.23}$$

De acuerdo a la definición de probabilidad condicional dada más arriba, para el caso de dos variables  $X$  e  $Y$  se puede definir una *función de densidad condicional de probabilidad* dada por

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} \tag{A.24}$$

a partir de la cual la condición de independencia de las dos variables es

$$f_{X|Y}(x|y) = f_X(x) \tag{A.25}$$

ó

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y) \tag{A.26}$$

### A.5 Valor esperado y momentos

A pesar de que las funciones mencionadas en los apartados anteriores describen completamente la distribución de la probabilidad de una o muchas variables aleatorias sobre sus valores posibles, en la mayoría de los casos resulta conveniente calificar el comportamiento de las mismas con unos pocos índices que describen los rasgos generales de la distribución.

Se define el *valor esperado* o *esperanza matemática* de una función  $g(X)$  de la variable aleatoria  $X$  a la expresión

$$E[g(X)] = \sum_i g(x_i) p_X(x_i) \quad (\text{A.27})$$

si  $X$  es discreta y

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx \quad (\text{A.28})$$

si  $X$  es continua. En estas definiciones se ha asumido que tanto el sumatorio como la integral impropia convergen absolutamente.

De acuerdo con esta definición, el valor esperado de una función se calcula como el promedio ponderado de la función, según los pesos dados por la función de densidad o de masa de probabilidad. Para el caso específico en que la función  $g(X)$  es igual a la potencia  $n$ -ésima de la variable, el valor esperado se denomina *momento  $n$ -ésimo* de  $X$ :

$$\nu_{X,n} = E[X^n] = \sum_i x_i^n p_X(x_i) \quad (\text{A.29})$$

$$\nu_{X,n} = E[X^n] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f_X(x) dx \quad (\text{A.30})$$

Un momento de máxima importancia es el de orden  $n = 1$ ,  $\nu_{X,1}$  (denotado simplemente como  $m_X$  ó  $E(X)$ ), que corresponde al caso en el que la función  $g(X)$  es la variable aleatoria misma, y se conoce con el nombre de *media* o *valor medio esperado*.

Los *momentos centrales* están dados por

$$\mu_{X,n} = E[(X - m_X)^n] = \sum_i (x_i - m_x)^n p_X(x_i) \quad (\text{A.31})$$

$$\mu_{X,n} = E[(X - m_X)^n] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^n f_X(x) dx \quad (\text{A.32})$$

El momento central de orden dos  $\mu_{X,2}$ , que se denota usualmente como  $\text{Var}(X)$ , se denomina *varianza* de la variable aleatoria, y constituye una medida de la dispersión o concentración de la función de densidad o de masa alrededor de la media. Otras medidas de dispersión son la *desviación estándar*,  $\sigma_X$ , que es la raíz cuadrada positiva de la varianza, y el coeficiente de variación, dado por

$$\rho_X = \frac{\sigma_X}{m_X} \quad (\text{A.33})$$

La asimetría de la distribución es calificada por el *coeficiente de sesgamiento*

$$\gamma_{X,1} = \frac{\mu_{X,3}}{\sigma_X^3} \quad (\text{A.34})$$

que es positivo cuando la función de densidad es sesgada hacia la derecha, y negativo en caso contrario. Finalmente, el *coeficiente de curtosis* califica lo plana que sea la densidad:

$$\gamma_{X,2} = \frac{\mu_{X,4}}{\sigma_X^4} \quad (\text{A.35})$$

Un valor de  $\gamma_{X,2}$  menor que 3 implica una distribución un tanto plana, mientras que en el caso contrario la función de densidad tiene una forma esbelta y aguda.

## A.6 Función característica

Una forma alternativa de definir la distribución de probabilidad de una variable aleatoria es mediante la *función característica* dada por la transformada de Fourier de la función de densidad de probabilidad:

$$\Phi_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} f_X(x) dx \quad (\text{A.36})$$

donde  $i^2 = -1$  y  $t$  es una variable real arbitraria. Se observa que

$$\begin{aligned} \Phi_X(0) &= 1 \\ \Phi_X(-t) &= \Phi_X^*(t) \\ |\Phi_X(t)| &\leq 1 \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

La importancia de la función característica reside en que, como puede demostrarse fácilmente, permite generar los momentos de todo orden:



$$\nu_{X,j} = i^{-j} \Phi_X^{(j)}(0) \quad (\text{A.38})$$

donde  $\Phi_X^{(j)}(t)$  es la derivada  $n$ -ésima de  $\Phi_X(t)$ . Igualmente, los momentos están relacionados con los llamados *acumulantes*, definidos por

$$\kappa_X^{(j)} = i^{-j} \frac{d^j}{dt^j} \Phi_X^{(j)}(t)|_{t=0} \quad (\text{A.39})$$

En los órdenes inferiores, los acumulantes se relacionan directamente con los primeros momentos. Así, el primero es igual a la media, el segundo a la varianza y el tercero al tercer momento central. Para órdenes superiores al tercero las relaciones entre acumulantes y momentos son más complejas.

Además de las posibilidades descritas, el conocimiento de la función característica permite, para el caso de funciones continuas, calcular la función de densidad por medio de la transformada inversa de Fourier:

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} \Phi_X(x) dx \quad (\text{A.40})$$

En el caso de distribuciones de dos variables, la *función característica conjunta* se define por

$$\Phi_{XY}(t) = E[e^{i(xt+ys)}] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(xt+ys)} f_{XY}(x, y) dx dy \quad (\text{A.41})$$

donde el significado de  $i$  y  $t, s$  es igual al descrito anteriormente. También en este caso se cumplen las relaciones

$$\begin{aligned} \Phi_{XY}(0, 0) &= 1 \\ \Phi_X(-t, -s) &= \Phi_{XY}^*(t, s) \\ |\Phi_{XY}(t, s)| &\leq 1 \end{aligned} \quad (\text{A.42})$$



## A.7 Modelos probabilistas

Empíricamente, la distribución de probabilidades puede calcularse a partir de la distribución de frecuencias, utilizando la definición de probabilidad dada por la ecuación (A.3.1). Para efectos analíticos, no obstante, resulta preferible ajustar los datos a una función de masa o de probabilidad conocida, la cual corresponde a un modelo determinado sobre la naturaleza de la variable aleatoria bajo análisis, o calcular teóricamente el modelo correspondiente a una variable previamente a su obtención empírica. A continuación describiremos brevemente algunos de los modelos más usuales en forma secuencial, de manera que resalte su encadenamiento y relaciones mutuas.

**1. Modelo binomial o de Bernoulli.** Sea  $p$  la probabilidad de obtener un éxito en un experimento determinado; por lo tanto,  $1-p$  será la probabilidad de fracaso. Si el experimento se repite  $n$  veces, de manera tal que los resultados son independientes entre sí y  $p$  se mantiene constante, el número aleatorio de éxitos  $X$  tendrá por función de masa de probabilidad

$$p_X(x) = (nx)p^x(1-p)^{n-x} \quad (\text{A.43})$$

La media y la varianza de  $X$  vendrán dadas por

$$m_X = np \quad (\text{A.44})$$

$$\sigma_X^2 = np(1-p) \quad (\text{A.45})$$

**2. Modelo de Poisson.** Si en el modelo anterior se aumenta hasta el infinito el número  $n$  de intentos pero se mantiene constante el valor esperado de éxitos  $\lambda = pn$ , la función de masa de probabilidad tiende asintóticamente a

$$p_X(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \quad (\text{A.46})$$

Al calcular el valor medio esperado se obtiene el valor  $\lambda$ . La desviación estándar también resulta igual a éste valor.

$$m_X = \lambda \quad (\text{A.47})$$

$$\sigma_X^2 = \lambda^2 \quad (\text{A.48})$$

Una modificación usual de este modelo consiste en hacer constante la tasa de ocurrencia de los éxitos  $\nu$ , antes que el número total de ellos, con el fin de dejar libre la variable temporal. Haciendo entonces  $\lambda = \nu t$ , se tiene

$$p_X(x) = \frac{(\nu t)^x e^{-\nu t}}{x!} \quad (\text{A.49})$$

Este modelo encuentra amplia aplicación en la teoría de procesos estocásticos.

**3. Distribución exponencial.** Mientras que el modelo anterior es útil para describir la ocurrencia de éxitos, el modelo exponencial, que se deduce de él, caracteriza *el intervalo aleatorio  $X$  de tiempo transcurrido entre dos éxitos*. Su formulación, así como la de los modelos restantes, se da en el campo continuo.

$$f_X(x) = \nu e^{-\nu x}, \quad x \geq 0 \quad (\text{A.50})$$

$$m_X = \frac{1}{\nu} \quad (\text{A.51})$$

$$\sigma_X^2 = \frac{1}{\nu^2} \quad (\text{A.52})$$

**4. Distribución Gamma.** Finalmente, dentro de la mención de modelos útiles para la estimación probabilística de procesos temporales, mencionaremos la distribución del *tiempo  $X$  necesario para alcanzar el  $k$ -ésimo éxito*, y que se deduce igualmente del modelo de Poisson. Para el caso discreto,

$$f_X(x) = \frac{\nu(\nu x)^{k-1} e^{-\nu x}}{(k-1)!} \quad (\text{A.53})$$

En el caso continuo,

$$f_X(x) = \frac{\nu(\nu x)^{k-1} e^{-\nu x}}{\Gamma(k)} \quad (\text{A.54})$$

donde  $\Gamma(\cdot)$  es la función gama, dada por

$$\Gamma(k) = \int_0^{\infty} e^{-u} u^{k-1} du \quad (\text{A.55})$$

En ambos casos, la media y la desviación estándar están dadas por

$$m_X = \frac{k}{\nu} \quad (\text{A.56})$$

$$\sigma_X^2 = \frac{k}{\nu^2} \quad (\text{A.57})$$

Puede observarse que el modelo exponencial es un caso particular de la distribución Gamma, con  $k = 1$

**5. Distribución normal o de Gauss.** La preponderancia de esta función se debe al hecho de que surge asintóticamente y bajo ciertas condiciones relativamente débiles, como la distribución de una variable que es la suma de múltiples variables aleatorias. Las condiciones mencionadas se refieren justamente a la relación y distribución de estos sumandos. Los detalles sobre este tema, que corresponde al conocido *teorema central límite* pueden encontrarse en cualquier libro general de teoría de probabilidades. Para nuestro propósito nos interesa destacar solamente que el origen aditivo de esta distribución la hace adecuada para modelar las variables y procesos estocásticos que surgen como superposición de múltiples efectos aleatorios.

La función de densidad normal es

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad (\text{A.58})$$

donde  $m$  y  $\sigma$  son la media y la desviación estándar, respectivamente, y son, por tanto, los únicos parámetros necesarios para definirla. Una variable aleatoria que se caracterice por esta función se denota como  $N(m, \sigma)$ .

Esta función puede obtenerse a partir del modelo binomial, haciendo  $np(1-p) > 1$  por medio de la expresión asintótica dada por el *teorema de De Moivre - Laplace*:

$$\binom{nx}{x} p^x (1-p)^{n-x} \approx \frac{1}{\sqrt{np(1-p)}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-np)^2}{2np(1-p)}} \quad (\text{A.59})$$

lo cual indica que la distribución de Bernoulli tiende a  $N(np, \sqrt{np(1-p)})$

La función de distribución normal se expresa como

$$F_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx \quad (\text{A.60})$$

La lista siguiente reúne los modelos de densidad más usados comunmente en diversas aplicaciones.

*Binomial*

$$p_X(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \quad x = 1, 2, \dots, n \quad (\text{A.61a})$$

$$E(X) = np \quad (\text{A.61b})$$

$$\text{Var}(X) = np(1 - p) \quad (\text{A.61c})$$

*Geométrica*

$$p_X(x) = p(1 - p)^{x-1} \quad x = 1, 2, \dots \quad (\text{A.62a})$$

$$E(X) = 1/p \quad (\text{A.62b})$$

$$\text{Var}(X) = (1 - p)/p^2 \quad (\text{A.62c})$$

*Poisson*

$$p_X(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \quad x = 1, 2, \dots \quad (\text{A.63a})$$

$$E(X) = vt, \quad vt = \lambda \quad (\text{A.63b})$$

$$\text{Var}(X) = vt \quad (\text{A.63c})$$

*Exponencial*

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad x \geq 0 \quad (\text{A.64a})$$

$$E(X) = 1/\lambda \quad (\text{A.64b})$$

$$\text{Var}(X) = 1/\lambda^2 \quad (\text{A.64c})$$

*Gamma*

$$f_X(x) = \frac{v(vx)^{k-1} e^{-vx}}{\Gamma(k)} \quad x \geq 0 \quad (\text{A.65a})$$

$$E(X) = k/v \quad (\text{A.65b})$$

$$\text{Var}(X) = k/v^2 \quad (\text{A.65c})$$

*Normal (o Gaussiana)*

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x - m_X}{\sigma_X}\right)^2\right] \quad -\infty < x < \infty \quad (\text{A.66a})$$

$$E(X) = m_X \quad (\text{A.66b})$$

$$\text{Var}(X) = \sigma_X^2 \quad (\text{A.66c})$$

*Lognormal*

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\zeta x} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \lambda}{\zeta}\right)^2\right] \quad x \geq 0 \quad (\text{A.67a})$$

$$E(X) = \exp\left(\lambda + \frac{1}{2}\zeta^2\right) \quad (\text{A.67b})$$

$$\text{Var}(X) = E^2(X)[e^{\zeta^2} - 1] \quad (\text{A.67c})$$

*Rayleigh*

$$f_X(x) = \frac{x}{\alpha^2} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2\right] \quad x \geq 0 \quad (\text{A.68a})$$

$$E(X) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\alpha \quad (\text{A.68b})$$

$$\text{Var}(X) = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right)\alpha^2 \quad (\text{A.68c})$$

*Uniforme*

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a} \quad a < x < b \quad (\text{A.69a})$$

$$E(X) = (a+b)/2 \quad (\text{A.69b})$$

$$\text{Var}(X) = \frac{1}{12}(b-a)^2 \quad (\text{A.69c})$$

*Triangular*

$$f_X(x) = \frac{2}{b-a} \left(\frac{x-a}{u-a}\right) \quad a \leq x \leq u \quad (\text{A.70a})$$

$$f_X(x) = \frac{2}{b-a} \left(\frac{b-x}{b-u}\right) \quad u \leq x \leq b \quad (\text{A.70b})$$

$$E(X) = \frac{1}{3}(a+b+u) \quad (\text{A.70c})$$



$$\text{Var}(X) = \frac{1}{18}(a^2 + b^2 + u^2 - ab - au - bu) \quad (\text{A.70d})$$

*Beta*

$$f_X(x) = \frac{1}{B(q, r)} \frac{(x-a)^{q-1}(b-x)^{r-1}}{(b-a)^{q+r-1}} \quad a \leq x \leq b \quad (\text{A.71a})$$

$$E(X) = a + \frac{q}{q+r}(b-a) \quad (\text{A.71b})$$

$$\text{Var}(X) = \frac{qr}{(q+r)^2(q+r+1)}(b-a)^2 \quad (\text{A.71c})$$

*Gumbel (Tipo I-máximos)*

$$f_X(x) = \alpha e^{-\alpha(x-u)} \exp[-e^{-\alpha(x-u)}] \quad -\infty < x < \infty \quad (\text{A.72a})$$

$$E(X) = u + \frac{0.577}{\alpha} \quad (\text{A.72b})$$

$$\text{Var}(X) = \frac{\pi^2}{6\alpha^2} \quad (\text{A.72c})$$

*Fréchet (Tipo II-máximos)*

$$f_X(x) = \frac{k}{u} \left(\frac{u}{k}\right)^{k+1} e^{(u/k)^k} \quad x \geq 0 \quad (\text{A.73a})$$

$$E(X) = u\Gamma\left(1 - \frac{1}{k}\right) \quad (\text{A.73b})$$

$$\text{Var}(X) = u^2\left[\Gamma\left(1 - \frac{2}{k}\right) - \Gamma^2\left(1 - \frac{1}{k}\right)\right] \quad (\text{A.73c})$$

*Weibull (Tipo III-mínimos)*

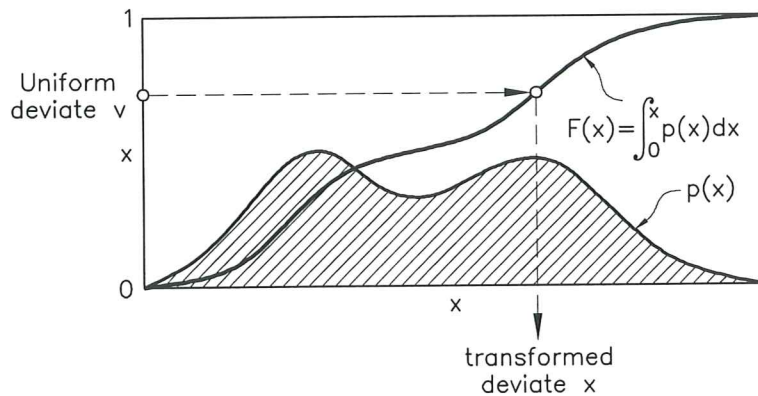
$$f_X(x) = \frac{k}{\omega - \varepsilon} \left(\frac{x - \varepsilon}{\omega - \varepsilon}\right)^{k-1} \exp\left[-\left(\frac{x - \varepsilon}{\omega - \varepsilon}\right)^k\right] \quad x > \varepsilon \quad (\text{A.74a})$$

$$E(X) = \varepsilon + (\omega - \varepsilon)\Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right) \quad (\text{A.74b})$$

$$\text{Var}(X) = (\omega - \varepsilon)^2\left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{k}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right] \quad (\text{A.74c})$$

### A.8 Generación de variables aleatorias

La generación de variables aleatorias ocupa un lugar importante en las aplicaciones modernas de la teoría de probabilidades en aquellas situaciones en que se requiera conocer el comportamiento estocástico de un sistema por medio de simulación intensa por computador. El objetivo de la generación es obtener una muestra sintética (es decir, artificial) de valores de una variable cuya función de densidad empírica se ajuste lo más fielmente posible a la dada como modelo probabilista de ella. La figura A.1 muestra el concepto básico de generación de valores aleatorios por el llamado *método de inversión*, el cual abarca los siguientes pasos:



**Figura A.1** Generación de valores aleatorios por el método de inversión

1. Generar un número con distribución uniforme entre 0 y 1, el cual representa así un valor de la función de distribución de la variable  $F_X(x) = u$ .
2. Calcular la función inversa de la distribución, lo que da como resultado el valor buscado,

$$x = F_X^{-1}(u) \tag{A.75}$$

Evidentemente, la forma de la función de distribución hace que sea más probable obtener valores en la zonas de fuerte pendiente, que corresponden a

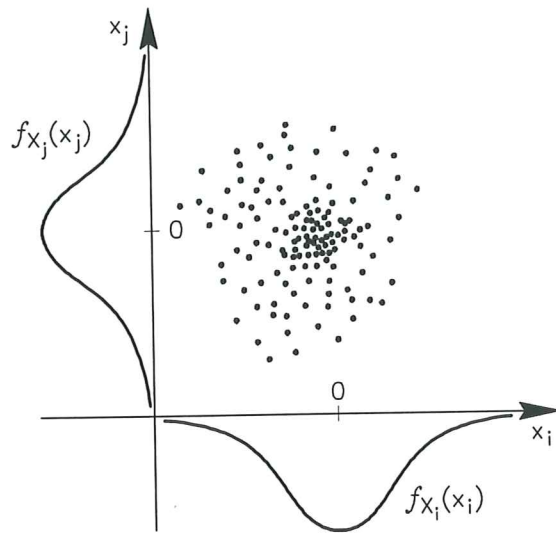


Figura A.2 Combinación de valores aleatorios de dos variables

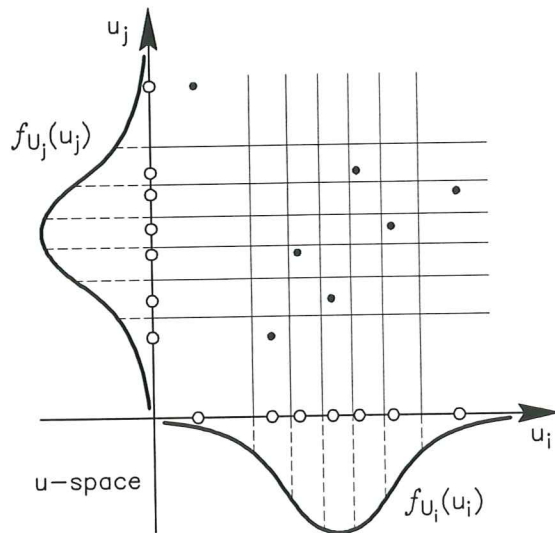


Figura A.3 Métodos de combinación óptima de valores aleatorios

los picos de la función de densidad, que en las zonas extremas correspondientes a valores poco frecuentes.

Esta idea de generar poblaciones aleatorias artificiales es la base del llamado *método de Monte Carlo*, el cual consiste en generar una muestra sintética de respuestas de un sistema cualquiera a partir de una población semejante de datos del mismo. Estos últimos pueden ser obtenidos de la manera indicada, combinando las muestras correspondientes a cada dato aleatorio, tal como indica la figura A.2. Estas combinaciones pueden ser dadas como insumo a un algoritmo determinista en forma secuencial o paralela, con el fin de obtener la población artificial de respuestas cuyo estudio estadístico se pretende realizar. Sin embargo, puede verse en la figura A.2 que la combinación de valores allí representada es sólo una de las muchas posibles. Se han propuesto varios métodos que buscan generar una muestra óptima, en el sentido de que sea mínimo el número de combinaciones posibles entre los valores aleatorios sin perjuicio de la distribución de probabilidad de cada una de las variables. Algunos de ellos son el *muestreo estratificado* (Press *et al.* 1992), el *hipercubo latino* (Florian 1992), el *muestreo descriptivo* (Ziha 1995), etc. Los dos últimos, en particular, dividen el rango de las variables en zonas y realizan una selección aleatoria de las combinaciones posibles entre ellos de tal manera que no se muestree dos veces en una misma zona (figura A.3). Con esto se logra la máxima economía en el número de análisis deterministas del sistema (cf. Hurtado and Barbat, 1998)





## Anexo B

# Procesos estocásticos

### B.1 Definición

El término *proceso estocástico* hace referencia a una variable aleatoria escalar o vectorial que evoluciona en el tiempo. Esto quiere decir que el valor de una función  $x(t)$  en cualquier instante  $t$  es impredecible con certeza y, por tanto, es una variable aleatoria  $X(t)$  que sólo puede ser tratada de manera probabilista. De acuerdo con esta definición, la relación existente entre la teoría de procesos estocásticos y la de variables aleatorias es paralela a la existente entre la dinámica y la estática de estructuras.

La figura B.1 muestra un acelerograma de un sismo. A diferencia de la visión determinista corriente en dinámica estructural, que toma este registro como el acelerograma verdadero, desde el punto de vista estocástico es sólo cuestión de azar que ésta y no otra historia de aceleraciones haya sido registrada y muchas otras con una estructura probabilista de fondo semejante podrían igualmente haber ocurrido. Sin embargo, las respuestas estructurales ante cada realización posible serán en cada caso diferentes, especialmente si el sistema es no lineal. En consecuencia, tanto la excitación como la respuesta deben ser consideradas como procesos estocásticos.

La mencionada estructura probabilista de fondo es el objeto de estudio de la teoría de vibraciones aleatorias. Es decir, si los estados discretos de la variable aleatoria vectorial  $\mathbf{X}(t)$  son  $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3, \dots$  en los instantes  $t_1 \leq t_2 \leq t_3, \dots$ , la descripción de la variable debe hacerse por medio de medidas probabilistas comunes para todas las realizaciones posibles  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \dots$ . En dependencia de la información disponible se pueden obtener una serie de medidas que conviene distinguir jerárquicamente. Así, la descripción probabilista más completa del proceso es el conjunto de funciones de distribución de probabilidad conjunta del tipo

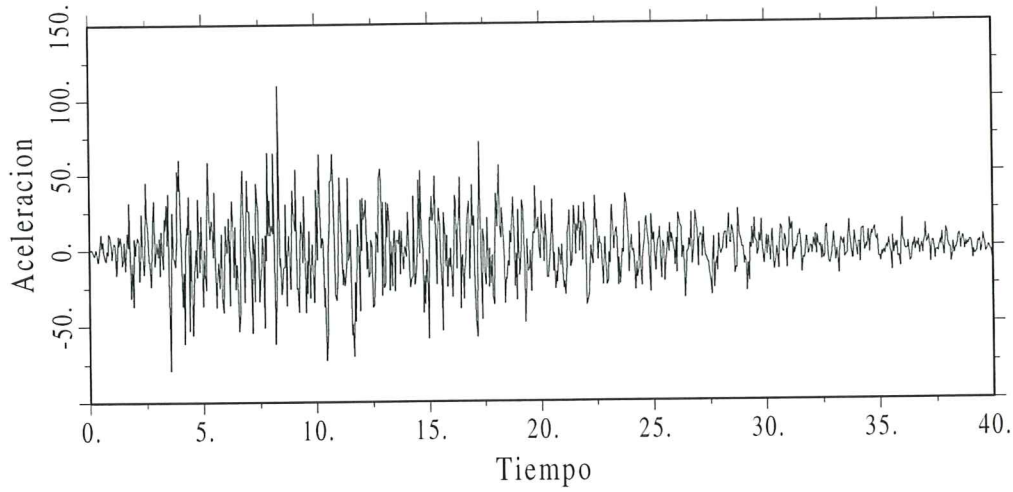


Figure B.1 Registro de aceleraciones sísmicas (unidades: s, cm/s<sup>2</sup>)

$$\begin{aligned}
 F(\mathbf{x}_1, t_1) &= P[\mathbf{X}_1(t_1) \leq \mathbf{x}_1] \\
 F(\mathbf{x}_1, t_1; \mathbf{x}_2, t_2) &= P[\mathbf{X}_1(t_1) \leq \mathbf{x}_1 \cap \mathbf{X}_2(t_2) \leq \mathbf{x}_2] \\
 F(\mathbf{x}_1, t_1; \mathbf{x}_2, t_2 \dots \mathbf{x}_m, t_m) &= P[\mathbf{X}_1(t_1) \leq \mathbf{x}_1 \cap \dots \mathbf{X}_m(t_m) \leq \mathbf{x}_m]
 \end{aligned} \tag{B.1}$$

Las correspondientes densidades de probabilidad se obtienen derivando parcialmente con respecto a todos los argumentos. Para un proceso escalar se tiene

$$f(x_1, t_1; x_2, t_2 \dots x_m, t_m) = \frac{\partial^m F(x_1, t_1; x_2, t_2 \dots x_m, t_m)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_m} \tag{B.2}$$

Una clase importante de procesos para los cuales la descripción (B.1) se puede simplificar en gran medida es la de *procesos difusivos de Markov*. Tales procesos pueden ser especificados completamente por densidades condicionales del tipo

$$f(\mathbf{x}_2, t_2 | \mathbf{x}_1, t_1) \tag{B.3}$$

que expresan la probabilidad de que el proceso pase por el estado  $\mathbf{x}_2$  en el instante  $t_2$  dado que se hallaba en el estado  $\mathbf{x}_1$  en el instante  $t_1$ . Esta noción ha permitido el desarrollo de la teoría de ecuaciones diferenciales estocásticas.

En muchos casos, sin embargo, aún la determinación de tales funciones de probabilidad condicional resulta difícil y solamente es posible estimar algunos momentos del vector de respuesta, dados por

$$\mu_{|\mathbf{k}|}(\mathbf{X}; t) = \int x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n} f(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \quad (\text{B.4})$$

donde  $\mathbf{k}$  es un multi-índice que denota las potencias de las variables del vector

$$\mathbf{k} = [k_1, k_2, \dots] \quad (\text{B.5})$$

y  $|\mathbf{k}|$  es la suma de sus elementos,

$$|\mathbf{k}| = k_1 + k_2 + \dots \quad (\text{B.6})$$

Dichos momentos constituyen, obviamente, una descripción probabilista del proceso más pobre que las densidades. El grado más bajo de la jerarquía de información ocurre cuando sólo se dispone de los momentos probabilistas de primero y segundo órdenes ( $|\mathbf{k}| = 1, 2$ ). Empero, si el proceso es Gaussiano (es decir, si las densidades marginales y conjuntas obedecen la ley normal), tal descripción es equivalente a la densidad de probabilidad, debido a que la ley Gaussiana puede ser especificada completamente por los dos primeros momentos (Papoulis 1991). Si el proceso no es Gaussiano, la información de primer y segundo orden es, de todas formas, relevante para la descripción aproximada de características del proceso tales como máximos esperados, sobrepaso de umbrales, etc.

## B.2 Elementos de cálculo estocástico

Como las realizaciones de un proceso estocástico son inciertas, las nociones convencionales del cálculo de Riemman, tales como límite, continuidad, diferenciabilidad, etc., requieren un reformulación en este contexto. Es decir, la incertidumbre sobre la trayectoria temporal de la función precisa la introducción de definiciones específicas de tales conceptos en forma probabilista. A continuación se presenta un resumen de tales nociones.

### 1. Norma de una variable aleatoria.

Se dice que una variable aleatoria  $X$  es de *segundo orden* si su varianza  $E[X^2]$  es finita. Para tal situación se define su *norma* como

$$\|X\| = (E[X^2])^{\frac{1}{2}} \quad (\text{B.7})$$

Se puede demostrar que el valor esperado anterior cumple con las propiedades de producto interno.

2. *Distancia entre variables aleatorias.*

La distancia entre las variables aleatorias  $X_1$  y  $X_2$  se define como

$$d(X_1, X_2) = \|X_1 - X_2\| \quad (\text{B.8})$$

Se llama espacio  $L_2$  a uno provisto de producto interno, norma y distancia de variables aleatorias. Para las nociones siguientes es importante la propiedad de que en tal espacio hay un límite único para una secuencia  $X_n$ .

3. *Convergencia en media cuadrática.*

Se dice que la secuencia  $X_n$  de variables aleatorias *converge en media cuadrática* a la variable aleatoria  $X$  si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|X_n - X\| = \text{m.s.} \lim_{n \rightarrow \infty} X_n = 0 \quad (\text{B.9})$$

4. *Continuidad en media cuadrática.*

Un proceso estocástico es *continuo en media cuadrática* si la función

$$R_X(t, s) = E[X(t)X(s)] \quad (\text{B.10})$$

es continua en  $s = t$ . Esta función se denomina *función de auto-correlación* y cumple un importante rol en la teoría y de procesos estocásticos.

5. *Derivación en media cuadrática.*

La *derivada en media cuadrática*  $\dot{X}(t)$  de un proceso  $X(t)$  se define como el límite

$$\text{m.s.} \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{X(t + \tau) - X(t)}{\tau} \quad (\text{B.11})$$

si éste existe. Para ello debe cumplirse que la derivada generalizada de la función de auto-correlación, dada por

$$\lim_{\tau, \sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\tau\sigma} [R_X(t + \tau, s + \sigma) - R_X(t + \tau, s) - R_X(t, s + \sigma) + R_X(t, s)] \quad (\text{B.12})$$



exista en  $(t, t)$  y sea finita. Un resultado importante de la derivación en media cuadrática es que si un proceso estocástico es derivable en media cuadrática  $N$  veces, se cumple que

$$\mathbb{E}\left[\frac{d^n X(t)}{dt^n}\right] = \frac{d^n}{dt^n} \mathbb{E}[X(t)] \quad (\text{B.13})$$

Igualmente, si  $X^{(n)}(t)$  denota la derivada  $\frac{d^n X(t)}{dt^n}$ , luego

$$R_X^{(n,m)}(t, s) = \mathbb{E}[X^{(n)}(t)X^{(m)}(s)] = \frac{\partial^{n+m} R_X(t, s)}{\partial t^n \partial s^m} \quad (\text{B.14})$$

si las derivadas implicadas existen.

### 6. Integración en media cuadrática

El concepto de integrales de Riemann o Riemann-Stieltjes en media cuadrática requiere de algunas definiciones previas. Considérese una partición del intervalo  $[t_0, t_N] \subset T$  en  $N$  puntos. Es decir, los puntos  $t_k, k = 0, 1, 2, \dots, N$  son tales que  $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N$ . Sean

$$\Delta_N = \max(t_k - t_{k-1}) \quad (\text{B.15})$$

y  $X(t)$  un proceso estocástico con momentos de segundo orden finitos y definidos en  $[t_0, t_N]$ . Finalmente, sea  $f(t, u)$  una función determinista definida en el mismo intervalo e integrable en sentido ordinario de Riemann para todo  $u \in U$ . La variable

$$Y_N(u) = \sum_{k=1}^N f(\tau_k, u) X(\tau_k) (t_k - t_{k-1}) \quad (\text{B.16})$$

donde  $\tau_k$  es un punto arbitrario en el intervalo  $(t_{k-1}, t_k)$ , es una variable aleatoria dependiente de  $\mathcal{U}$  definida para tal partición. Si para todo  $u \in \mathcal{U}$  y una secuencia de subdivisiones  $[t_0, t_N]$  existe el límite

$$\text{m.s.} \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Delta_N \rightarrow 0}} Y_N = Y(u) \quad (\text{B.17})$$

éste se denomina *integral de Riemann en media cuadrática* de  $f(t, u)$  en el intervalo  $[t_0, t_N]$  y se denota por



$$Y(u) = \int_{t_0}^{t_N} f(t, u) X(t) dt \quad (\text{B.18})$$

La condición necesaria y suficiente para la existencia de esta integral en media cuadrática es que la integral ordinaria

$$\int_{t_0}^{t_N} \int_{t_0}^{t_N} f(t, u) f(s, u) R_X(t, s) dt ds \quad (\text{B.19})$$

exista y sea finita.

Las *integrales de Riemann-Stieltjes en media cuadrática* se pueden plantear de manera similar. Por ejemplo, la integral

$$I = \int_{t_0}^{t_N} X(t) dF(t) \quad (\text{B.20})$$

en la que  $X(t)$  es un proceso estocástico y  $F(t)$  es una función determinista o estocástica no necesariamente continua, puede expresarse como el límite en media cuadrática

$$I = \text{m.s.} \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Delta_N \rightarrow 0}} I_N \quad (\text{B.21})$$

donde

$$I_N(u) = \sum_{k=1}^N X(\tau_k) [F(t_k) - F(t_{k-1})] \quad (\text{B.22})$$

Una condición suficiente para la existencia de este límite es que  $F(t)$  varíe de manera acotada, es decir,

$$\sum_{k=1}^N |F(t_k) - F(t_{k-1})| < M \quad (\text{B.23})$$

donde  $M$  es un valor finito. Esta condición es violada por funciones estocásticas tales como el proceso de Wiener (conocido en física como *movimiento Browniano*).

### B.3 Procesos estacionarios

Una clase importante de procesos está formada por aquellos cuya estructura probabilista no varía en el tiempo. Más claramente, un *proceso estacionario en sentido estricto* se define como aquel para el cual sus distribuciones probabilistas (B.1) permanecen inalteradas para una traslación arbitraria  $\tau$  del eje de tiempo, o sea,

$$F(x_1, x_2, \dots, x_m; t_1, t_2, \dots, t_m) = F(x_1, x_2, \dots, x_m; t_1 + \tau, t_2 + \tau, \dots, t_m + \tau) \quad (\text{B.24})$$

Haciendo  $\tau = -t_1$  se puede ver que las distribuciones no dependen de la posición absoluta en el eje de tiempo sino del retraso temporal  $\tau$  solamente.

Para el caso específico de la distribución de primer orden ( $m = 1$ ) no hay dependencia temporal en absoluto, por lo cual los momentos del proceso serán constantes:

$$E[X^i(t)] = \text{const}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (\text{B.25})$$

Por su parte, los momentos de segundo orden dependerán solamente de la diferencia  $\tau = t_2 - t_1$  y en consecuencia

$$E[X(t_1)X(t_2)] = E[X(t)X(t + \tau)] = R_X(\tau) \quad (\text{B.26})$$

Por tanto, la *función de auto-covarianza*, definida como

$$\Sigma_X(t_1, t_2) = E[\{X(t_1) - \mu(t_1)\}\{X(t_2) - \mu(t_2)\}] \quad (\text{B.27})$$

donde  $\mu(t_i)$  es la *media* del proceso en el tiempo  $t_i$ ,

$$\mu(t_i) = E[X(t_i)], \quad i = 1, 2 \quad (\text{B.28})$$

se reduce a

$$\Sigma_X(t_1, t_2) = R_X(\tau) - \mu^2 \quad (\text{B.29})$$

para  $\tau = t_2 - t_1$ .

La exigente condición, mencionada anteriormente, para considerar un proceso como estacionario en sentido estricto puede ser relajada para dar lugar a los *procesos estacionarios en sentido débil*. Éstos se definen por las condiciones siguientes: (a) los momentos de primer y segundo órdenes son constantes y (b)

la función de auto-correlación depende sólomente del retraso temporal, como en la ecuación (B.26). Como los procesos estacionarios en sentido estricto cumplen estas condiciones, puede decirse que la estacionaridad en sentido débil no implica la estacionaridad en sentido fuerte. La única excepción la constituyen los procesos Gaussianos, por estar definidos completamente por los momentos de los dos primeros órdenes.

### B.3.1 Auto-correlación y de densidad espectral de potencia

Una clase importante de procesos estacionarios en sentido débil es la de los llamados *procesos con incrementos ortogonales*. Su definición matemática se puede deducir a partir del examen del siguiente proceso:

$$X(t) = Z_1 e^{i\omega_1 t} + Z_2 e^{i\omega_2 t} \quad (\text{B.30})$$

donde  $Z_1$  y  $Z_2$  son variables aleatorias complejas de media nula,  $i^2 = -1$  y  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  son constantes. La media del proceso es, evidentemente,

$$E[X(t)] = 0 \quad (\text{B.31})$$

debido a la naturaleza armónica de la función exponencial compleja. La función de auto-correlación es

$$\begin{aligned} E[X(t)X^C(t+\tau)] &= E[Z_1 Z_1^C] e^{-i\omega_1 \tau} + E[Z_1 Z_2^C] e^{i[\omega_1 t - \omega_2(t+\tau)]} + \\ &E[Z_2 Z_1^C] e^{i[\omega_2 t - \omega_1(t+\tau)]} + E[Z_2 Z_2^C] e^{-i\omega_2 \tau} \end{aligned} \quad (\text{B.32})$$

Para que el proceso sea estacionario en sentido débil se requiere que  $E[Z_1 Z_2^C] = E[Z_2 Z_1^C] = 0$ , de manera que la función de auto-correlación no dependa del tiempo  $t$  (de ahí el nombre de ortogonal). Bajo estas condiciones la función de auto-correlación se reduce a

$$E[X(t)X^C(t+\tau)] = E[|Z_1|^2] e^{-i\omega_1 \tau} + E[|Z_2|^2] e^{-i\omega_2 \tau} \quad (\text{B.33})$$

Generalizando, un proceso estacionario con auto-correlación

$$R_X(\tau) = E[X(t)X^C(t+\tau)] = \sum_{k=1}^n E[|Z_k|^2] e^{-i\omega_k \tau} \quad (\text{B.34})$$

puede ser construído con la suma de armónicos

$$X(t) = \sum_{k=1}^n Z_k e^{i\omega_k t} \quad (\text{B.35})$$

bajo la condición de que  $E[Z_j Z_k^C] = 0, j \neq k$ .

La versión continua de este proceso da origen a la llamada *representación espectral* de procesos estacionarios, la cual está dada por la integral estocástica de Fourier-Stieltjes

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dZ(\omega) \quad (\text{B.36})$$

en la que  $Z(\omega)$  es un proceso estocástico complejo con incrementos ortogonales, o sea,

$$E[dZ(\omega_1)dZ(\omega_2)^C] = 0, \omega_1 \neq \omega_2 \quad (\text{B.37})$$

y

$$E[|dZ(\omega)|^2] = d\Phi(\omega) \quad (\text{B.38})$$

donde  $\Phi(\omega)$  es una función aleatoria no necesariamente continua. La diferencia entre esta representación y la de una integral convencional de Fourier-Stieltjes reside en que la función  $Z(\omega)$  es también un proceso estocástico, lo cual implica que es diferente para las diversas realizaciones del proceso  $X(t)$ . Por tanto, los diferenciales en integrales involucrados en esta representación deben ser entendidos en sentido estocástico (o sea, en media cuadrática), tal como se explicó anteriormente. Según las anteriores derivaciones, la función de auto-correlación de este proceso está dada por

$$R_X(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} E[|dZ(\omega)|^2] e^{-i\omega\tau} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} d\Phi(\omega) \quad (\text{B.39})$$

Si la función  $\Phi(\omega)$  es absolutamente continua su diferencial poder representarse como

$$d\Phi(\omega) = S_X(\omega) d\omega \quad (\text{B.40})$$

y entonces la función de auto-correlación está dada por la siguiente transformada de Fourier :

$$R_X(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} S_X(\omega) d\omega \quad (\text{B.41})$$

La función  $S_X(\omega)$ , que puede ser obtenida por inversión de la expresión anterior

$$S_X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} R_X(\tau) d\tau \quad (\text{B.42})$$

se llama la *densidad espectral de potencia* del proceso. Estas relaciones de Fourier se conocen con el nombre de *fórmulas de Wiener-Jinchin*.

La densidad espectral es una función real y no negativa que juega un papel similar al que la transformada de Fourier hace en el análisis de señales deterministas. De hecho, provee una descripción de la distribución de la energía esperada asociada a las varias frecuencias que están presentes en las realizaciones del proceso. El nexo entre ambas funciones frecuenciales está dado por la definición de la densidad espectral usada en la teoría de señales

$$S_X(\omega) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}[|\tilde{X}(\omega)|^2]}{2\pi s} \quad (\text{B.43})$$

Aquí  $\tilde{X}(\omega)$  indica la transformada de Fourier de las realizaciones de un proceso estacionario  $X(t)$  de duración  $s$ . Mediante una derivación algo tediosa puede mostrarse que esta ecuación reduce a la anterior definición de la densidad espectral (B.42). En la práctica cotidiana de proceso de señales, la densidad se estimada por la aproximación

$$\hat{S}_X(\omega) \approx \frac{|\tilde{X}(\omega)|^2}{2\pi s} \quad (\text{B.44})$$

que se conoce con el nombre de *periodograma*. La gran varianza inherente a esta estimación se suele reducir por medio de las llamadas *ventanas espectrales* (Priestley 1981). Alternativamente, el espectro de potencia puede ser estimado con base en el principio de máxima entropía, que coincide con del modelo Auto-Regresivo (AR) (Papoulis 1991).

Nótese que de las definiciones de las funciones de auto-correlación y espectral de potencia se sigue que la varianza de un proceso con media nula está dada por

$$\sigma^2 = R_X(0) \quad (\text{B.45a})$$

así como por



$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega) d\omega \quad (\text{B.45b})$$

Finalmente, debe anotarse que el uso de la *densidad espectral unilateral de potencia*

$$G_X(\omega) = 2S_X(\omega), \quad \omega > 0 \quad (\text{B.45c})$$

es convencional en aplicaciones de ingeniería debido a la no-negatividad de las frecuencias físicas.

### B.3.2 Ruido blanco

Un importante proceso estocástico estacionario es el *ruido blanco*,  $W(t)$ , que puede definirse como un proceso que tiene una densidad espectral constante sobre todo el eje de frecuencias, es decir,

$$S_W(\omega) = \text{const} \quad (\text{B.46})$$

lo que significa que a cada frecuencia se asocia una cantidad igual de energía (lo que explica el término “blanco”). La función de autocorrelación se obtiene por transformación de Fourier, o sea

$$R_W(\tau) = 2\pi S_W \delta(\tau) \quad (\text{B.47})$$

donde  $\delta(\cdot)$  es la función delta de Dirac. El significado de esta ecuación es que cualquier valor del proceso se correlaciona únicamente con sí mismo. Si, además, el ruido es Gaussiano, éste es completamente independiente de los valores próximo o previo. Esta es, por supuesto, una situación altamente idealizada que es imposible encontrar en el mundo físico. No obstante, el proceso de ruido blanco es muy útil en derivaciones teóricas y el análisis práctico de vibraciones aleatorias y sus realizaciones se pueden simular por medio del algoritmo siguiente (Clough y Penzien 1993; Nigam y Narayanan 1994):

1. Generar un conjunto de números aleatorios con distribución uniforme  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  en el rango  $[0, 1]$ .
2. Hacer la transformación

$$\begin{aligned} y_i &= \sqrt{-2 \ln x_i} \cos 2\pi x_{i+1} \\ y_{i+1} &= \sqrt{-2 \ln x_i} \sin 2\pi x_{i+1} \end{aligned} \quad (\text{B.48})$$

3. Multiplicar todos los números  $y_i$  por la intensidad del proceso  $2\pi S_W$  y asignarlos a valores de tiempo igualmente espaciados a intervalos  $h$ .

Puede demostrarse que el proceso resultante tiende al un ruido blanco según  $h \rightarrow 0$ . La figura B.2 muestra una realización de un ruido blanco de  $S_W = 1$  obtenida de esta manera. La importancia de ruido blanco en la mecánica yace en el hecho que muchas cargas aleatorias (y, en general, muchos fenómenos naturales) pueden modelarse o bien como ruido blanco o bien como la respuesta de filtros lineales o no lineales a excitación blanca. Este punto se tratará en el capítulo siguiente en el caso específico de excitación sísmica.

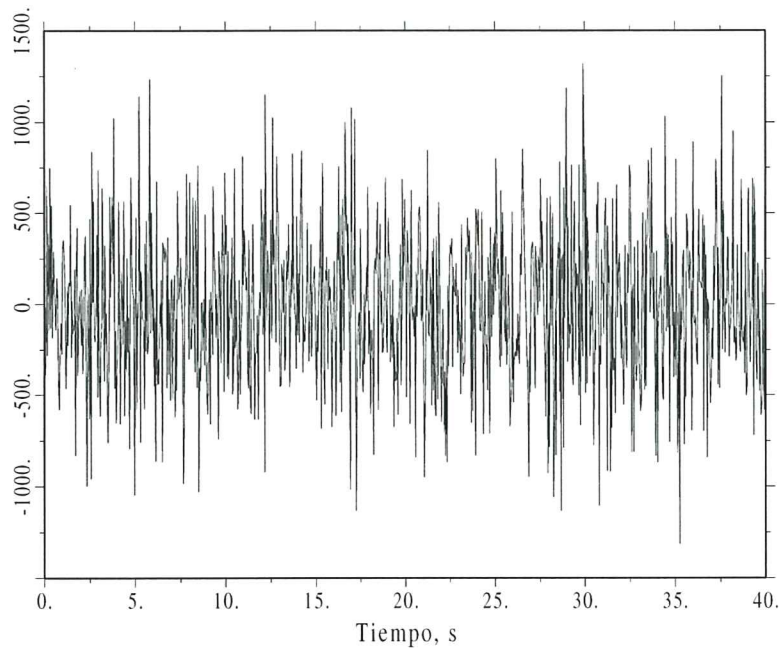


Figura B.2 Realización de un ruido blanco

### B.3.3 Ergodicidad

Una hipótesis importante para la obtención de los parámetros estadísticos de un proceso estocástico estacionario a partir de sus realizaciones físicas es la de *ergodicidad*, por que se establece una equivalencia entre los promedios obtenidos en el espacio de muestreo y los calculados a partir de una realización única sobre el eje temporal. Específicamente, si  $x(t)$  es una realización del proceso

estocástico  $X(t)$ , el promedio de tiempo de una función determinista de esta realización,  $g[x(t)]$  está dado por

$$\langle g[x(t)] \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T g[x(t)] dt \quad (\text{B.49})$$

Consiguientemente, un proceso estocástico se denomina *ergódico* con respecto al espacio de funciones  $\mathcal{G}$  si, para cada  $g[x(t)] \in \mathcal{G}$  el promedio obtenido sobre el eje de tiempo  $g[\cdot]$  iguala el promedio de conjunto con probabilidad uno. Esto es,

$$\langle g[X(t)] \rangle = E[g[X(t)]] \quad (\text{B.50})$$

En la práctica, el mayor interés reside principalmente sobre la ergodicidad con respecto a promedios comunes tales como la media, media cuadrática y la auto-correlación. Las condiciones para la existencia de tales tipos de ergodicidad se puede hallar en textos básicos sobre procesos aleatorios.

#### B.4 Procesos no estacionarios

Como se dijo anteriormente, un proceso aleatorio estacionario admite una representación espectral del tipo

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dZ(\omega) \quad (\text{B.51})$$

donde  $Z(\omega)$  es un proceso aleatorio con incrementos independientes que en general debe ser representado en el campo complejo. Esta ecuación indica que cualquier proceso estacionario puede descomponerse en una suma infinita de armónicos de amplitudes aleatorias, que pueden ser relacionados estadísticamente con su frecuencia respectiva mediante una función aleatoria que tenga una naturaleza espectral. Esta descomposición constituye, de hecho, el fundamento de la simulación de procesos aleatorios continuos, como se mostrará en el capítulo siguiente. En el caso de procesos no estacionarios, sin embargo, no es posible representarlos como una suma de funciones seno y coseno porque estas son completamente estacionarias. Como la representación espectral es atractiva tanto en sentido teórico (para cálculos analíticos) como práctico (para fines de simulación) por el hecho de que el espectro del proceso está implícito en su definición, algunos autores han propuesto modelos no estacionarios basados en la representación espectral. La propuesta más divulgada es la debida a Priestley (1981). Debido a que la transformada de Fourier de una función seno o coseno

es un pulso de Dirac ubicado en la frecuencia respectiva, mientras el de un armónico amortiguado exponencialmente es una función Gaussiana centrada a su alrededor, Priestley propuso interpretar esto último como la transformada de Fourier de una onda con amplitud evolutiva y, consiguientemente, desarrolló la teoría de *funciones oscilatorias* y de *espectro evolutivo*. La teoría generaliza el concepto de frecuencia y permite la conservación del significado de densidad espectral en el caso de procesos no estacionarios. En este trabajo, sin embargo, sólo es posible resumir brevemente la noción de espectro evolutivo, el cual está dado por

$$S_X(\omega, t) = |\xi(\omega, t)|^2 S_Y(\omega) \quad (\text{B.52})$$

donde  $S_Y(\omega)$  es la densidad espectral de potencia de un proceso asociado  $Y(t)$  y  $\xi(\omega, t)$  es una función oscilatoria suave (en general, compleja) que controla la evolución del proceso tanto en amplitud como en frecuencia. Esta ecuación es la base de la representación espectral de procesos no estacionarios propuesta por Priestley

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi(\omega, t) e^{i\omega t} dZ(\omega) \quad (\text{B.53})$$

que es posible si se cumplen algunas condiciones impuestas sobre  $\xi(\omega, t)$ . Una simplificación ampliamente usada de este modelo es el de *modulación uniforme*, en que la función de modulación es real e independiente de la frecuencia, es decir,

$$\xi(\omega, t) \equiv \xi(t) \quad (\text{B.54})$$

por lo cual controla únicamente la amplitud del proceso. La densidad espectral evolutiva se reduce a

$$S_X(\omega, t) = \xi(t)^2 S_Y(\omega) \quad (\text{B.55})$$

Otro enfoque para la descripción espectral de procesos no estacionarios se debe a Bendat y Piersol (1971) quienes proponen describir el proceso por medio de la función local de auto - correlación

$$R_X(t, \tau) = E\left[X\left(t - \frac{\tau}{2}\right) X\left(t + \frac{\tau}{2}\right)\right] \quad (\text{B.56})$$

Una densidad espectral de potencia dependiente del tiempo puede derivarse como la transformada de Fourier

$$S_X(\omega, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} R_X(t, \tau) d\tau \quad (\text{B.57})$$

Se ha observado, sin embargo, que en el anterior modelo no siempre se respeta la no negatividad que por definición debe tener el espectro de potencia (Priestley 1981).





# Referencias

- Abrams, D. P. y Shinozuka, M (editors) (1997): Loss Assessment of Memphis Buildings. Technical Report NCEER-97-0018, National Center for Earthquake Engineering Research, State University of New York at Buffalo.
- Aguirre, M., Gutierrez, J. C. (1992): Modelo tridimensional de las formaciones superficiales de Manizales. Tesis de grado. Universidad de Caldas
- Ang, A.H.S. (1987): Seismic damage analysis of reinforced concrete buildings, in *Stochastic methods in structural dynamics*, edited by G. I. Schuëller and M. Shinozuka. Martinus Nijhoff Publishers.
- Amin, M. y A.H.S. Ang (1966): *A nonstationary stochastic model for strong motion earthquakes*. Structural Research Series, 306, University of Illinois, Department of Civil Engineering
- Arango, W. I., Jaramillo, J. H. (1994): Sismicidad histórica de Manizales. Tesis de grado. Universidad Nacional, Manizales.
- Augusti, G., A. Baratta y F. Casciati (1984): *Probabilistic Methods in Structural Engineering*. Chapman and Hall, London.
- Barbat, A., Yepez, F. y Canas, J. A. (1996): Damage Scenario Simulation for Risk Assessment in Urban Zones. *Earthquake Spectra*, 12:371-394.
- Bard, Y. (1974): *Nonlinear Parameter Estimation*. Academic Press, San Diego.
- Beck, J. L. y C. Papadimitrou (1993): Moving resonance in nonlinear response to fully nonstationary stochastic ground motion. *Probabilistic Engineering Mechanics* 8:157-167.
- Bendat, J. S y A. G. Piersol (1971): *Random Data: Analysis and Measurement Procedures*. John Wiley and Sons, New York.
- Benjamin, J. R. y C.A. Cornell (1970): *Probability, Statistics and Decisions for Civil Engineers*. McGraw-Hill, New Jersey.
- Boas, M. L. (1983): *Mathematical Methods in the Physical Sciences*. John Wiley and Sons, New York.

- Boore, D. M. y W. B. Joyner (1982): The empirical prediction of ground motion. *Bulletin of the Seismological Society of America* 72:S43-S60.
- Boore, D. M. (1986): Short-period P- and S- wave radiation from large earthquakes: implications for spectral scaling relations. *Bulletin of the Seismological Society of America* 76:43-64.
- Boore, D. M. y G. M. Atkinson (1987): Stochastic prediction of ground motion and spectral parameters at hard-rock sites in eastern north- America. *Bulletin of the Seismological Society of America* 77:440-467.
- Bratley, P., B. L. Fox y L. E. Schrage (1987): *A Guide to Simulation*. Springer-Verlag, New York.
- Bucher, C. G. (1988): Adaptive Sampling: An Iterative Fast Monte-Carlo Procedure, *Structural Safety*, 5(2), 119-126.
- Bullen, K. E. y B. A. Bolt (1985): *An Introduction to the Theory of Seismology*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Bycroft, G. N. (1960): White noise representation of earthquakes. *Journal of the Engineering Mechanics Division ASCE*, 86:1-16.
- Cardona, O. D. (1986): Estudios de vulnerabilidad y evaluación del riesgo sísmico: Planeación física y urbana en zonas propensas. *Boletín técnico No. 33*. Asociación Colombiana de Ingeniería Sísmica, Bogotá.
- Carli, F. (1992): Nonstationary models of earthquake accelerograms, in *Earthquake Engineering. Proceedings of the Tenth World Conference*, held in Madrid, 1992. 2:829-834. Balkema, Rotterdam.
- Carli, F. (1995): Smooth frequency modulating function for strong ground motion. in *Proceedings of the 10th European Conference on Earthquake Engineering* held in Vienna, 1994, edited by G. Duma. 1:155-160. Balkema, Rotterdam.
- Casciati, F. y L. Faravelli (1985a): Reliability assessment for non-linear random frames, in *Probabilistic Methods in the Mechanics of Solids and Structures*, edited by S. Eggwertz and N. C. Lind. Springer-Verlag, Berlin.
- Casciati, F. (1987b): Approximate methods in non linear stochastic dynamics, in *Stochastic methods in structural dynamics*, edited by G. I. Schuëller and M. Shinozuka. Martinus Nijhoff Publishers.
- Casciati, F. y L. Faravelli (1988): Non linear stochastic dynamics of frames, in *Proceeding of the 3rd. International Conference on Recent Advances in Structural Dynamics* 781-789. Southampton.
- Casciati, F. y L. Faravelli (1991): *Fragility Analysis of Complex Structural Systems*. Research Studies Press Ltd., Taunton.

- Clough, R. W. y J. Penzien (1993): *Dynamics of Structures*, 2nd edition. McGraw Hill, New York, U. S. A.
- Córdoba, S. L., Gómez, H. D. (1987): Acelerogramas, espectros de respuesta y variaciones temporales de las frecuencias de sismos colombianos. Tesis de grado. Universidad Nacional, Medellín.
- Eliopoulos, D. E. y Y. K. Wen (1991): Evaluation of response statistics of moment resisting steel frames under seismic excitation, in: *Computational Stochastic Mechanics*, edited by P. D. Spanos and C. A. Brebbia, pp.673-684. Computational Mechanics Publications, Southampton and Elsevier Applied Science, London.
- Fan, F. y G. Ahmadi (1990): Nonstationary Kanai-Tajimi models for El Centro 1940 and Mexico City 1985 earthquakes. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 5:171-181.
- Faravelli, L. (1988a): Stochastic modeling of the seismic excitation for structural dynamics purposes, *Probabilistic Engineering Mechanics*, 3:189-195.
- Faravelli, L. (1988b): Source-to-site seismic models in structural dynamics, in *Proceeding of the 3rd. International Conference on Recent Advances in Structural Dynamics*, held in Southampton, 1988. 1021-1032.
- Florian, A. (1992): An Efficient Sampling Scheme: Updated Latin Hypercube Sampling, *Probabilistic Engineering Mechanics*, 7, 123-130.
- García, L. E., Sarria, A., Espinosa, A., Bernal, C. E. y Puccini, M. (1984): Estudio general del riesgo sísmico de Colombia. Asociación Colombiana de Ingeniería Sísmica, Bogotá.
- Grigoriu, M., S. E. Ruiz, E. Rosenblueth (1988): The Mexico earthquake of September 19, 1985 - Nonstationary models of seismic ground acceleration. *Earthquake Spectra*, 4:551-568.
- Housner, G. W. (1947): Characteristics of strong motion earthquakes. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 37:1-19.
- Hurtado, J. E. (1993): Análisis de registros sísmicos en Manizales y recomendaciones para el diseño. *Cuadernos de Investigación No. 20*. Universidad Nacional, Manizales.
- Hurtado, J. E., Prieto, S. D., Hincapié, J. E. (1981): Estudios para la recuperación post-sísmica de la Universidad de Caldas. *IV Jornadas Estructurales de la Ingeniería de Colombia*. SCI, Bogotá.
- Hurtado, J. E., Salgado, L. E. (1991): Mapa de intensidades del sismo del 23-XI-1979. Reporte de investigación. Universidad Nacional, Manizales.



- Hurtado, J. E. (1993): Análisis de registros sísmicos en Manizales y recomendaciones para el diseño. *Cuadernos de Investigación No. 20*. Universidad Nacional, Manizales.
- Hurtado, J. E., Prieto, S. R., Galvis, J. y Jaramillo, J. O. (1995): Investigaciones sísmicas y espectros de diseño en Manizales. *XI jornadas estructurales de la ingeniería de Colombia*, pgs. 302-325. Sociedad Colombiana de Ingenieros, Santa Fé de Bogotá.
- Hurtado, J.E. y A.H. Barbat (1996a): Improved stochastic linearization method using mixed distributions. *Structural Safety*, 18:49-62
- Hurtado, J.E. y A.H. Barbat (1996b) Stochastic control of base isolated structures, in *Proceedings of the First European Conference on Structural Control*, held in Barcelona, 1996, edited by A. Baratta and J. Rodellar. World Scientific, Singapore
- Hurtado, J.E., A.H. Barbat y A. A. M. F. da Cunha (1996c): Nonlinear random vibration of base isolated buildings under evolutionary seismic input, in *Earthquake Engineering. Proceedings of the Eleventh World Conference*, held in Acapulco, Mexico, 1996, paper 249. Balkema, Rotterdam.
- Hurtado, J.E. y A.H. Barbat (1998): Monte Carlo Techniques in Computational Stochastic Mechanics. *Archives of Computational Methods in Engineering* 5:3-30
- Hurtado, J. E. (1998): Stochastic dynamics of hysteretic structures. Application to the seismic analysis of base isolated buildings. Tesis Doctoral. Universidad Politécnica de Cataluña, Barcelona.
- Johnson, N. L., S. Kotz y N. Balakrishnan (1994): *Continuous Univariate Distributions*, 2nd. edition. John Wiley and Sons, New York.
- Kameda, H. y Nojima, N. (1988): Simulation of risk-consistent earthquake motion. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 16:1007-1019.
- Kanai, K. (1961): An empirical formula for the spectrum of strong earthquake motions. *Bulletin of the Earthquake Research Institute*, University of Tokio. 39:85-95.
- Kunnath, S. K., Reinhorn y A. M., Lobo, R. F. (1992): IDARC Version 3.0: A program for the inelastic damage analysis of reinforced concrete structures. Technical Report NCEER-92-0022, National Center for Earthquake Engineering Research, State University of New York at Buffalo.
- Lai, S. P. (1982): Statistical characterization of strong ground motions using power spectral density function. *Bulletin of the Seismological Society of America* 72:259-274.



- Lin, B.C., I. G. Tadjbakhsh, A.S. Papageorgiu y G. Ahmadi (1989): Response of base-isolated building to random excitations described by the Clough-Penzien spectral model. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 18:49-62.
- Lin, Y. K., F. Kozin, Y. K. Wen, F. Casciati, G. I. Schuëller, A. Der Kiureghian, O. Ditlevsen y E. H. Vanmarcke (1986): Methods of stochastic structural dynamics. *Structural Safety*, 3:167-194
- Lin, Y. K. (1987a): Evolutionary Kanai-Tajimi earthquake models. *Journal of Engineering Mechanics*, 113:1119-1137
- MacCann, M. W. y Shah, H. C. (1979): A statistically rational approach to ground motion studies, in *Proceedings of the Speciality Conference on Probabilistic Mechanics and Structural Reliability*, held in Tucson, Arizona, 1979, edited by A.H.S. Ang and M. Shinozuka. American Society of Civil Engineers, New York.
- Moayyad, P. y B. Mohraz (1982): A study of power spectral density of earthquake accelerograms. Civil Engineering department, Southern Methodist University, Dallas.
- Newmark, N. M. y E. Rosenblueth (1971): *Fundamentals of Earthquake Engineering*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs.
- Nigam, N. C. (1983): *Introduction to random vibrations*. The MIT Press, Cambridge, Massachussets.
- Nigam, N. C. y S. Narayanan (1994): *Applications of random vibrations*. Springer Verlag - Narosa Publishing House, Delhi.
- Oppenheim, A. V. y R. W. Schaffer (1989): *Discrete-Time Signal Processing*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- Papoulis, A. (1991): *Probability, random variables and stochastic processes*, 3rd edition. McGraw-Hill, Singapore.
- Park, Y. J. (1984): Seismic damage analysis and damage - limiting design of R/C structures. Doctoral Thesis. University of Illinois.
- Press, W. H., S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling y B. P. Flannery (1992): *Numerical Recipes in FORTRAN*, 2nd edition. Cambridge University Press, Cambridge.
- Priestley, M. B. (1981): *Spectral Analysis and Time Series*. Academic Press, London.
- Quek, S, Teo, Y. y Balendra, T. (1990): Non-stationary structural response with evolutionary spectra using seismological input model. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 19:275-288.

- Ripley, B. D. (1987): *Stochastic Simulation*. John Wiley, New York.
- Rubinstein, R. Y. (1981): *Simulation and the Monte Carlo Method*. John Wiley and Sons, New York.
- Sawada, T., K. Hirao, O. Tsujihara y H. Yamamoto (1992): Relationship between maximum amplitude ratio ( $\frac{a}{v}$ ,  $\frac{ad}{v^2}$ ) and spectral parameters of earthquake ground motion", *Earthquake Engineering. Proceedings of the Tenth World Conference*, 2:617-621. Balkema, Rotterdam.
- Schuëller, G. I. y Stix, R. (1987): A Critical Appraisal of Methods to determine Failure Probabilities, *Structural Safety*, 4, 293-309.
- Shinozuka, M. (1964): Probability of failure under random loading. *Journal of Engineering Mechanics ASCE* 90:147-171.
- Shinozuka, M. y Y. Sato (1967): Simulation of nonstationary random processes. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 93:11-40.
- Shinozuka, M. y Lenoe, R. (1976): A Probabilistic model for spatial distribution of material properties. *Engineering Fracture Mechanics*, 8:217-227.
- Shinozuka, M. (1983): Basic analysis of structural safety. *Journal of Structural Engineering ASCE* 109:721-740.
- Shinozuka, M. (1987): Stochastic fields and their digital simulation, in *Stochastic Methods in Structural Dynamics*, edited by G. I. Schuëller and M. Shinozuka. Martinus Nijhoff Publishers.
- Singhal, A. y Kiremidjian, A. S. (1996): Method for probabilistic evaluation of seismic structural damage. *Journal of Structural Engineering*, 122: 1459-1467.
- Soong, T. T. y M. Grigoriu (1993): *Random Vibration of Mechanical and Structural Systems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- Spanos, P. D., W. Y. Tein y R. Ghanem (1992): Spectral estimation of bivariate non-stationary processes, in *Earthquake Engineering. Proceedings of the Tenth World Conference*, held in Madrid, 1992. 2:839-844. Balkema, Rotterdam.
- Sues, R. H., Y. K. Wen y A. H.-S. Ang (1983): *Stochastic seismic performance evaluation of buildings*, Structural Research Series, 506, University of Illinois, Department of Civil Engineering
- Sues, R. H., Y. K. Wen y A. H.-S. Ang (1985): Stochastic evaluation of seismic structural performance, *Journal of Structural Engineering*, 111:1204-1218.
- Sues, R. H., S. T. Mau y Y. K. Wen (1988): Systems identification of degrading hysteretic restoring forces. *Journal of Engineering Mechanics*, 114:833-846.

- Tajimi, H. (1960): A statistical method of determining the maximum response of a building structure during an earthquake, in *Proceedings of the Second World Conference on Earthquake Engineering*, held in Tokio and Kyoto, 1960. Science Council. 2:781-797.
- Vanmarcke, E. H. (1976): Structural response to earthquakes, in *Seismic Risk and Engineering Decisions*, edited by C. Lomnitz and E. Rosenblueth. Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam.
- Vanmarcke, E. H. y S. P. Lai (1980): Strong-motion duration and RMS amplitude of earthquake records. *Bulletin of the Seismological Society of America* 70:1293-1307.
- Wen, Y. K. (1980): Equivalent linearization for hysteretic systems under random excitation. *Journal of Applied Mechanics*, 47:150-154.
- Wen, Y.K. y C. H. Yeh (1989): Biaxial and torsional response of inelastic structures under random excitation. *Structural Safety*, 6:137-152
- Wen, Y.K. (1990): *Structural Load Modeling and Combination for Performance and Safety Evaluation*. Elsevier, Amsterdam.
- Wen, Y.K. (1991): Application of nonlinear stochastic dynamics and damage accumulation in seismic engineering, in *Reliability Problems: General Principles and Applications in Mechanics of Solids and Structures*, edited by F. Casciati and J. B. Roberts. Springer-Verlag, Wien.
- Wen, Y. K. y D. Eliopoulos (1994): Method for nonstationary random vibration of inelastic structures. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 9:115-123.
- Yang, J.N. y S.C. Liu (1981): Distribution of maximum and statistical response spectra. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 107:1089-1102.
- Yeh, C.H. (1989): Modelling of nonstationary earthquake ground motion and biaxial and torsional response of inelastic structures. Ph. D. thesis. University of Illinois.
- Yeh, C.H. y Y. K. Wen (1990): Modeling of nonstationary ground motion and analysis of inelastic structural response. *Structural Safety*, 8:281-298.
- Ziha, K. (1995): Descriptive Sampling in Structural Safety, *Structural Safety*, 17, 33-41.





## CENTRO INTERNACIONAL DE METODOS NUMERICOS EN INGENIERIA

### Lista de monografías publicadas en la Serie de Ingeniería Sísmica

Las monografías pueden adquirirse dirigiéndose al Departamento de Publicaciones del Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, Edificio C1, Campus Norte UPC, c/ Gran Capitán s/n, 08034 Barcelona, teléfono: 93-401.60.37, Fax: 93-401-65-17.

- IS-1 *Qualitative Reasoning for Earthquake Resistant Buildings*, Luís M. Bozzo, 149 pp., ISBN 84-87867-36-7, 1993.
- IS-2 *Control predictivo en sistemas de protección sísmica de estructuras*, R. Andrade Cascante, J. Rodellar, F. López Almasa, 143 pp., ISBN 84-87867-37-5, 1993.
- IS-3 *Simulación numérica del comportamiento no lineal de presas de hormigón ante acciones sísmicas*, M. Galindo, J. Oliver, M. Cervera, 255 pp., ISBN 84-87867-38-3, 1994.
- IS-4 *Simulación del daño sísmico en edificios de hormigón armado*, A. Hanganu, A.H. Barbat, S. Oller, E. Oñate, 96 pp., ISBN 84-87867-40-5, 1994.
- IS-5 *Edificios con aislamiento de base no lineal*, N. Molinares, A.H. Barbat, 96 pp., ISBN: 84-87867-41-3, 1994.
- IS-6 *Vulnerabilidad sísmica de edificios*, C. Caicedo, A.H. Barbat, J.A. Canas, R. Aguiar 100 pp., ISBN 84-87867-43-X, 1994.
- IS-7 *Análisis de terremotos históricos por sus efectos*, J. R. Arango Gonzalez, 119 pp., ISBN 84-87867-44-8, 1994.
- IS-8 *Control activo no lineal de edificios con aislamiento de base*, A.H. Barbat, N. Molinares, J. Rodellar, 124 pp., ISBN 84-87867-46-4, 1994.
- IS-9 *Análise estocástica da resposta sísmica nao-linear de estruturas*, A.M. F. Cunha, 199 pp., ISBN: 84-87867-47-2, 1994
- IS-10 *Definición de la acción sísmica*, A.H. Barbat, L. Orosco, J.E. Hurtado, M. Galindo, 122 pp., ISBN: 84-87867-448-0, 1994
- IS-11 *Sismología y peligrosidad sísmica*, J.A. Canas Torres, C. Pujades Beneit, E. Banda Tarradellas, 87 pp., ISBN: 84-87867-49-9, 1994
- IS-12 *Riesgo, peligrosidad y vulnerabilidad sísmica de edificios de mampostería*, F. Yépez, A.H. Barbat, J.A. Canas, 104 pp., ISBN: 84-87867-50-2, 1995
- IS-13 *Estudios de ingeniería sismológica y sísmica*, J.A. Canas, ISBN: 84-87867-57-X, 13 pp., 1995
- IS-14 *Simulación de escenarios de daño para estudios de riesgo sísmico*, F. Yépez, A.H. Barbat y J.A. Canas, ISBN: 84-87867-58-8, 103 pp., 1995
- IS-15 *Diseño sismorresistente de edificios de hormigón armado*, L. Bozzo, A.H. Barbat, ISBN: 84-87867-59-6, 185 pp., 1995
- IS-16 *Modelo tridimensional de atenuación anelástica de las ondas sísmicas en la Península Ibérica*, J.O. Caselles, J. A. Canas, Ll. G. Pujades, R.B. Herrmann, ISBN: 84-87867-60-X, 119 pp., 1995



- IS-17 *Índices de daño sísmico en edificios de hormigón armado*, R. Aguiar  
ISBN: 84-87867-43-X, 99 pp., 1996
- IS-18 *Experimental study of a reduced scale model seismically base isolated with Rubber-Layer Roller Bearings (RLRB)*, D. Foti, J.M. Kelly  
ISBN: 84-87867-82-0, 112 pp., 1996
- IS-19 *Modelos de evaluación del comportamiento sísmico no lineal de estructuras de hormigón armado*, F. Yépez Moya  
ISBN: 84-87867-80-4., 96pp., 1996
- IS-20 *Evaluación probabilista de la vulnerabilidad y riesgo sísmico de estructuras de hormigón armado por medio de simulación*, F. Yépez Moya, A.H. Barbat, J.A. Canas, ISBN: 84-87867-81-2, 1996
- IS-21 *Modelización de la peligrosidad sísmica. Aplicación a Cataluña*, J.A. Canas, J.J. Egozcue, J. Miquel Canet y A.H. Barbat, ISBN: 84-87867-83-9, 101pp., 1996
- IS-22 *Evaluación del daño sísmico global en edificios porticados de hormigón armado*, R. Aguiar, A.H. Barbat and J. Canas, ISBN: 84-87867-96-0, 173pp., 1997
- IS-23 *Daño sísmico global en edificios con muros de cortante*, R. Aguiar,  
ISBN: 84-89925-00-3, 101 pp., 1997
- IS-24 *Conceptos de cálculo de estructuras en las normativas de diseño sismorresistente*, A.H. Barbat y S. Oller, ISBN: 84-89925-10-0, 107pp., 1997
- IS-25 *Stochastic dynamics of hysteretic structures*, J.E. Hurtado, ISBN: 84-89925-09-7, 205pp., 1998
- IS-26 *Análisis de los acelerogramas de la serie de Adra (Almería). Diciembre 1993 a Enero 1994*, R. Blázquez, A. Suárez, E. Carreño y A.J. Martín,  
ISBN: 84-89925-11-9, 91pp., 1998
- IS-27 *Respuesta de puentes frente a acciones sísmicas*, E. Maldonado, J.A. Canas, J.R. Casas, L.G. Pujades, ISBN: 84-89925-23-2, 107pp., 1998
- IS-28 *Estudio de parámetros en la vulnerabilidad sísmica de puentes*, E. Maldonado, J.A. Canas y J.R. Casas, ISBN: 84-89925-16-X, 97pp., 1998
- IS-29 *Metodologias para o cálculo sísmico não-linear de barragens de betão*, R. Faria  
ISBN: 84-89925-25-9, 113pp., 1998
- IS-30 *Acciones para el diseño sísmico de estructuras*, R. Aguiar, ISBN: 84-89925-27-5, 122pp., 1998
- IS-31 *Avaliação do comportamento sísmico de barragens de betão*, R. Faria,  
ISBN: 84-89925-28-3, 88pp., 1998
- IS-32 *Vulnerabilidad sísmica de hospitales. Fundamentos para ingenieros y arquitectos*, O.D. Cardona, ISBN:84-89925-33-X, 165pp., 1999

Los autores interesados en publicar monografías en esta serie deben contactar con el editor para concretar las normas de preparación del texto.

