

## Elementos finitos híbridos com descontinuidades fortes incorporadas

Oswaldo L. Manzoli

Departamento de Engenharia Civil, Faculdade de Engenharia,  
Universidade Estadual Paulista (UNESP)  
Av. Luiz Edmundo C. Coube, S/N  
17033-360 Bauru, SP, Brasil  
Tel.: 55 14 3103 61112; Fax: 55 14 3103 6101  
e-mail: omanzoli@feb.unesp.br

Benson Shing

Department of Structural Engineering,  
University of California at San Diego  
92093 La Jolla, CA, USA  
e-mail: pshing@ucsd.edu

### Resumen

A fim de tornar os elementos finitos híbridos aplicáveis no contexto da mecânica da fratura, apresenta-se uma técnica para incorporar fissuras no interior desses elementos que permite, de maneira simples e direta, extensões para a representação de múltiplas fissuras, assim como de modos de descontinuidade não-uniformes. Apresentam-se alguns exemplos numéricos para demonstrar a eficiência da formulação, destacando-se a importância da consideração de modos de descontinuidade não-uniformes para eliminar o travamento de tensões em situações envolvendo expressiva rotação relativa entre as partes do elemento dividido pela linha de descontinuidade.

**Palavras-chave:** *Elementos finitos híbridos, mecânica da fratura, elementos finitos com fissuras incorporadas, descontinuidades fortes.*

### STRESS HYBRID FINITE ELEMENTS WITH EMBEDDED STRONG DISCONTINUITIES

### Summary

A technique to embed displacement discontinuities into stress hybrid elements is presented to make this kind of element suitable for fracture mechanics analyses. This technique can be extended to account for multiple discontinuities in the element, as well as non-uniform discontinuity modes. It is shown that the later capability can be essential to prevent stress locking when the element is subjected to bending-type deformation, involving an expressive relative rotation between the two fragments of the element divided by the discontinuity line. Numerical tests are carried out to assess the performance of the proposed technique.

**Keywords:** *Stress hybrid finite elements, fracture mechanics, embedded crack elements, strong discontinuities.*

## INTRODUÇÃO

Nos últimos anos, os elementos finitos com descontinuidade de deslocamentos incorporada têm demonstrado ser uma valiosa ferramenta para descrever a propagação de fissuras de maneira independente da posição dos contornos dos elementos<sup>1,2,3,4,5,8</sup>, o que os tornam vantajosos no que se refere à objetividade da resposta com respeito ao tamanho e orientação da malha de elementos finitos, sem a necessidade de técnicas de reconstrução adaptativa da malha para capturar a fissura que se desenvolve durante o processo de carregamento. A maioria das propostas foi dedicada à formulação de elementos com fissuras incorporadas a partir de elementos convencionais baseados em deslocamentos<sup>3</sup>.

O elemento finito híbrido de Pian<sup>11</sup>, por apresentar aproximações independentes dos campos de deslocamentos e de tensões, tem sido reconhecido pela melhor performance ao reduzir travamentos por cisalhamento ou incompressibilidade. Tais benefícios podem ser importantes em simulações numéricas que envolvam desenvolvimento de descontinuidades, uma vez que a adequada determinação do estado de tensões é fundamental para estabelecer as condições de iniciação e propagação. Além disso, a abertura de uma descontinuidade pode propiciar em sua vizinhança complexos modos de deformações, produzindo um forte travamento por cisalhamento em elementos convencionais baseados em deslocamentos.

A primeira proposta de incorporação de descontinuidades de deslocamentos no elemento finito híbrido foi feita recentemente por Spencer e Shing<sup>14</sup>, partindo de um princípio variacional específico para a inclusão da descontinuidade. No presente trabalho a formulação do elemento finito híbrido segue o procedimento geral de incorporação de descontinuidades de deslocamentos proposto por Manzoli e Shing<sup>6</sup>. Diferentemente da formulação de Spencer e Shing, o princípio variacional empregado para desenvolver o elemento híbrido original é mantido para descrever a parte contínua do elemento atravessado pela linha de descontinuidade.

O procedimento se baseia na decomposição dos campos cinemáticos do elemento em uma parte correspondente ao movimento relativo de corpo rígido devido à descontinuidade, e outra associada à deformação da parte contínua do elemento. Assim, o mesmo princípio variacional do elemento básico (sem descontinuidade) é usado para descrever a parte contínua. Essa técnica permite, de maneira simples e direta, extensões para a representação de múltiplas fissuras, assim como de modos de descontinuidade não-uniformes no elemento.

## DECOMPOSIÇÃO DO CAMPO DE DESLOCAMENTOS

O campo de deslocamentos de um elemento finito dividido por uma interface de descontinuidade  $S$  pode ser decomposto em uma componente que corresponde à deformação da porção contínua,  $\mathbf{u}^C$ , e outra relacionada ao movimento relativo de corpo rígido,  $\mathbf{u}^R$ , entre as duas partes do elemento

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^C + \mathbf{u}^R \quad (1)$$

com

$$\mathbf{u}^R = \mathcal{H}(x) [[\mathbf{u}]] \quad (2)$$

onde  $x$  é a coordenada material do ponto pertencente ao elemento de acordo com o sistema de coordenadas local  $(x,y)$ , no qual o eixo  $x$  é normal à interface de descontinuidade (ver Figura 1).  $\mathcal{H}$  é a função de Heaviside definida no domínio do elemento ( $\mathcal{H}(x) = 1$  se  $x > 0$  and  $\mathcal{H}(x) = 0$  caso contrário) e  $[[\mathbf{u}]]$  representa o vetor contendo as componentes da descontinuidade de deslocamentos, consideradas uniformes ao longo da interface. Os valores de  $\mathbf{u}^R$  nos nós do elemento podem ser agrupados em um vetor  $\mathbf{d}^R$ , tal que

$$\mathbf{d}^R = \mathbf{P} [[\mathbf{u}]] \tag{3}$$

onde  $\mathbf{P}$  é a matriz contendo os valores da função de Heaviside nos nós

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathcal{H}(x_1) & 0 \\ 0 & H(x_1) \\ \vdots & \vdots \\ \mathcal{H}(x_{n_{ed}}) & H(x_{n_{ed}}) \end{bmatrix} \tag{4}$$

onde  $n_{ed}$  é o número de nós do elemento e  $x_i$  ( $i = 1, 2, n_{ed}$ ) são as coordenadas nodais.

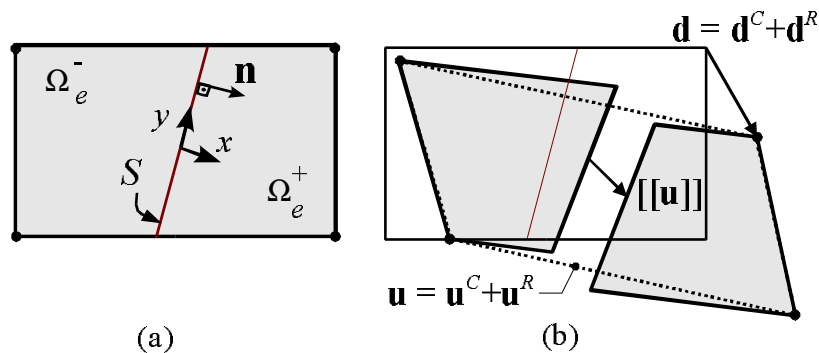


Figura 1. Decomposição do campo de deslocamentos

### ELEMENTO FINITO HÍBRIDO

Considere o equilíbrio de um corpo bi-dimensional  $\Omega$  de contorno  $\Gamma$  inserido em um sistema de coordenadas globais  $(X, Y)$ . O corpo é vinculado ao longo de parte do contorno  $\Gamma_u$  mediante a imposição de deslocamento prescritos,  $\mathbf{u}^\Gamma$ , e é submetido a forças de superfície,  $\mathbf{t}^\Gamma$ , prescritas na parte restante do contorno,  $\Gamma_t$  ( $\Gamma_u \cup \Gamma_t = \Gamma$ ,  $\Gamma_u \cap \Gamma_t = \emptyset$ ), e a forças de volume  $\mathbf{b}$ .

O campo de deformações é obtido a partir do campo de deslocamentos  $\mathbf{u}$ , mediante a emprego do operador diferencial  $\mathbf{D}$ , tal que

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{D}\mathbf{u} \tag{5}$$

Considerando-se que a parte contínua tem comportamento elástico linear, o campo de tensões correspondente fica dado por

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}\boldsymbol{\epsilon} \tag{6}$$

onde  $\mathbf{E}$  é a matriz de constantes elásticas do material.

### Funcional Híbrido

O princípio variacional de Hellinger-Reissner para o contínuo pode ser expresso por

$$\begin{aligned} \Pi = \int_{\Omega} \left[ -\frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{E}^{-1} \boldsymbol{\sigma} - (\mathbf{D}^T \boldsymbol{\sigma})^T \mathbf{u} - \mathbf{b}^T \mathbf{u} \right] d\Omega \\ + \int_{\Gamma_t} (\mathbf{t} - \mathbf{t}^\Gamma)^T \mathbf{u} d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \mathbf{t}^T \mathbf{u}^\Gamma d\Gamma \end{aligned} \quad (7)$$

onde  $\mathbf{t}$  é o vetor de forças de superfície no contorno, obtidas a partir das tensões  $\boldsymbol{\sigma}$ .

Considerando-se que a condição de contorno

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^\Gamma \text{ on } \Gamma_u \quad (8)$$

e as equações de equilíbrio

$$\mathbf{D}^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = 0 \quad (9)$$

são satisfeitas a priori, o funcional (7) transforma-se em

$$\begin{aligned} \Pi' = - \int_{\Omega} \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{E}^{-1} \boldsymbol{\sigma} d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{t}^T \mathbf{u} d\Gamma \\ - \int_{\Gamma_t} \mathbf{t}^{\Gamma T} \mathbf{u} d\Gamma \end{aligned} \quad (10)$$

na qual tanto as tensões quanto os deslocamentos são variáveis independentes.

Para simplificar a formulação, considere-se o elemento finito de quatro nós com os contornos alinhados com o sistema global de coordenadas (X,Y). As tensões no interior do elemento podem ser aproximadas por uma interpolação envolvendo quatro parâmetros,  $a_i (i = 1, 2, \dots, 5)$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{S} \mathbf{a} \quad (11)$$

com

$$\boldsymbol{\sigma}^T = [\sigma_{XX} \quad \sigma_{YY} \quad \sigma_{XY}] \quad (12)$$

$$\mathbf{a}^T = [a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5] \quad (13)$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & Y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & X \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Note que a equação de equilíbrio (9) é satisfeita para a aproximação adotada.

O vetor de forças de superfície pode ser expresso em termos dos parâmetros de tensões mediante a seguinte relação

$$\mathbf{t} = \mathcal{N}_\nu \boldsymbol{\sigma} = \mathcal{N}_\nu \mathbf{S} \mathbf{a} = \mathbf{R} \mathbf{a} \quad (15)$$

na qual

$$\mathcal{N}_\nu = \begin{bmatrix} \nu_X & 0 & \nu_Y \\ 0 & \nu_Y & \nu_X \end{bmatrix} \quad (16)$$

onde  $\nu_X$  e  $\nu_Y$  são as componentes do vetor unitário,  $\nu$ , normal ao contorno do elemento.

Os deslocamentos ao longo dos contornos do elemento são aproximados por interpolações lineares dos deslocamentos nodais

$$\mathbf{u} = \mathbf{Ld} \quad (17)$$

onde  $\mathbf{L}$  é a matriz de interpolação dos deslocamentos do contorno e  $\mathbf{d}$  é o vetor dos deslocamentos nodais.

Substituindo-se as equações (11), (15) e (17) na equação (10), chega-se a

$$\Pi' = -\frac{1}{2}\mathbf{a}^T \mathbf{H} \mathbf{a} + \mathbf{a}^T \mathbf{G} \mathbf{d} - \mathbf{f}_{ext}^T \quad (18)$$

com

$$\mathbf{H} = \int_{\Omega_e} \mathbf{S}^T \mathbf{E}^{-1} \mathbf{S} d\Omega \quad (19)$$

$$\mathbf{G} = \oint_{\Gamma_e} \mathbf{R}^T \mathbf{L} d\Gamma \quad (20)$$

$$\mathbf{f}_{ext} = \int_{\Gamma_{et}} \mathbf{L}^T \mathbf{t}^\Gamma d\Gamma \quad (21)$$

onde  $\Omega_e$  é o domínio do elemento,  $\Gamma_e$  é o contorno do elemento e  $\Gamma_{et}$  é a parte do contorno do elemento com força de superfície prescrita.

A estacionaridade do funcional (18) com respeito aos parâmetros de tensão  $\mathbf{a}$  implica em

$$-\mathbf{H} \mathbf{a} + \mathbf{G} \mathbf{d} = \mathbf{0} \quad (22)$$

A partir da Equação (22) é possível expressar os parâmetros de tensão em termos dos deslocamentos nodais

$$\mathbf{a} = \mathbf{H}^{-1} \mathbf{G} \mathbf{d} \quad (23)$$

Substituindo-se a identidade (23) na equação (11), as tensões ficam expressar por

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{S} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{G} \mathbf{d} \quad (24)$$

As deformações correspondentes são dadas por

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{E}^{-1} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}^{-1} \mathbf{S} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{G} \mathbf{d} = \mathbf{B}^H \mathbf{d} \quad (25)$$

com  $\mathbf{B}^H = \mathbf{E}^{-1} \mathbf{S} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{G}$ .

Tomando-se a variação do funcional (18) com respeito aos deslocamentos nodais  $\mathbf{d}$ , e considerando-se a equação (23), obtém-se o vetor de forças internas

$$\mathbf{f}_{int} = \mathbf{K}^H \mathbf{d} \quad (26)$$

onde  $\mathbf{K}^H = \mathbf{G}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{G}$  é a matriz de rigidez do elemento de Pian.

### Elemento finito com descontinuidade de deslocamentos

Se o elemento é atravessado por uma interface de descontinuidade de deslocamentos, é necessário assegurar que ocorra uma total relaxação da porção contínua do elemento no caso em que os deslocamentos nodais correspondam somente ao movimento de corpo rígido produzido pela descontinuidade, ou seja

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \text{ se } \mathbf{d} = \mathbf{d}^R (= \mathbf{P}[[\mathbf{u}]]) \quad (27)$$

Note que essa condição é satisfeita se, ao invés da equação (23), for utilizada a seguinte expressão para os parâmetros de tensão

$$\mathbf{a} = \mathbf{H}^{-1} \mathbf{G}(\mathbf{d} - \mathbf{P}[[\mathbf{u}]]) \quad (28)$$

O emprego da equação (28) corresponde à consideração somente da parte contínua dos deslocamentos no funcional (18).

Nesse caso, as tensões, deformações e forças internas ficam expressas respectivamente por

$$\boldsymbol{\sigma}^C = \mathbf{E} \mathbf{B}^H(\mathbf{d} - \mathbf{P}[[\mathbf{u}]]) \quad (29)$$

$$\boldsymbol{\epsilon}^C = \mathbf{B}^H(\mathbf{d} - \mathbf{P}[[\mathbf{u}]]) \quad (30)$$

$$\mathbf{f}_{\text{int}} = \mathbf{K}^H(\mathbf{d} - \mathbf{P}[[\mathbf{u}]]) \quad (31)$$

### COMPORTAMENTO NÃO-LINEAR DA INTERFACE DE DESCONTINUIDADE

O comportamento não-linear da interface de descontinuidade pode ser descrito através de uma relação constitutiva entre as tensões de superfície na interface,  $\mathbf{t}_S$ , e as componentes do salto de deslocamentos,  $[[\mathbf{u}]]$ . No contexto da mecânica de fratura não-linear, essa equação constitutiva é dada por uma lei discreta da forma

$$\mathbf{t}_S = \Sigma^d([[ \mathbf{u} ]]) \quad (32)$$

onde  $\Sigma^d(\bullet)$  fornece as tensões em função dos saltos e de suas histórias.

Por outro lado, na chamada aproximação de descontinuidades fortes<sup>7,9,12</sup>, o comportamento da interface é descrito por uma lei constitutiva não-linear contínua (entre tensões e deformações), a partir da qual uma lei constitutiva discreta é induzida mediante a degeneração do contínuo de maneira consistente. Nesse caso, o vetor de forças de superfície na interface fica expresso por

$$\mathbf{t}_S = \mathcal{N}_n \Sigma^c(\epsilon_S) \text{ em } S \quad (33)$$

onde  $\Sigma^c(\bullet)$  retorna as tensões a partir das deformações em  $S$ ,  $\epsilon_S$ . A matriz  $\mathcal{N}_n$  contém as componentes do vetor unitário normal à interface,  $\mathbf{n}$ , de acordo com a estrutura apresentada na equação (16).

O campo de deformações totais é obtido do campo de deslocamentos, que pode ser expresso por

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^C + \mathbf{u}^R = \mathbf{u}^C + \mathcal{H}(x) [[\mathbf{u}]] \quad (34)$$

O gradiente da equação (34) fornece

$$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}^C + \delta_S \mathcal{N}_n^T [[\mathbf{u}]] \quad (35)$$

onde  $\delta_S$  é a distribuição de Dirac situada em  $S$ .

O último termo da equação (35) introduz ao campo de deformações totais uma componente não-limitada em  $S$ .

Levando-se em consideração as equações (30) e (35), a equação (33) pode ser expressa por

$$\mathbf{t}_S = \mathcal{N}_n \Sigma^c \left( \mathbf{B}^H (\mathbf{d} - \mathbf{P} [[\mathbf{u}]]) + \frac{1}{k} \mathcal{N}_n^T [[\mathbf{u}]] \right) \quad (36)$$

Para finalidades computacionais, na equação (36) o valor de  $\delta_S$  foi substituído pela seguinte aproximação<sup>8</sup>

$$\delta_S(\mathbf{x}) \approx \begin{cases} \frac{1}{k} & \text{se } \mathbf{x} \in S, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (37)$$

de maneira que, quando o parâmetro de regularização  $k$  tende a zero a aproximação (37) se transforma na forma exata da distribuição de Dirac.

## MODELO CONSTITUTIVO PARA A INTERFACE

Como mencionado anteriormente, na *aproximação de descontinuidades fortes* o comportamento não-linear da interface pode ser descrito por uma lei constitutiva do tipo contínuo. No presente artigo, emprega-se um modelo constitutivo elasto-plástico, que pode ser descrito pelo seguinte conjunto de equações<sup>13</sup>

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{E}(\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p) \quad (38)$$

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (39)$$

$$\dot{q} = H(\lambda) \dot{\lambda} \quad (40)$$

onde  $\boldsymbol{\epsilon}^p$  representa as deformações plásticas,  $\phi$  é a função de fluência plástica,  $q$  é a variável interna tipo deformação,  $H$  é o módulo de endurecimento/abrandamento e  $\lambda$  é o multiplicador plástico.

As situações de carga e descarga são diferenciadas pelas condições de Kuhn-Tucker

$$\phi(\boldsymbol{\sigma}, q) \leq 0, \quad \dot{\lambda} \geq 0, \quad \dot{\lambda} \phi(\boldsymbol{\sigma}, q) = 0 \quad (41)$$

onde  $\phi$  define o limite do domínio elástico formado pelos estados de tensão satisfazendo a desigualdade  $\phi(\boldsymbol{\sigma}, q) \leq 0$ .

Para que as equações constitutivas apresentadas sejam compatíveis com campos de deformações não-limitados, típicos da aproximação de descontinuidades fortes, o inverso do módulo  $H$  deve apresentar um caráter distribucional<sup>12</sup>, ou seja

$$\lambda = \delta_S \bar{\lambda} \approx \frac{1}{k} \bar{\lambda} \quad (42)$$

$$\frac{1}{H(\lambda)} = \delta_S \frac{1}{H(\bar{\lambda})} \approx \frac{1}{k} \frac{1}{H(\bar{\lambda})} \quad (43)$$

Nesse trabalho adotam-se as seguintes expressões para a superfície de fluência e a lei de endurecimento

$$\phi(\boldsymbol{\sigma}, q) = \sqrt{\frac{2}{3}} \|\mathbf{S}\| + p - q \quad (44)$$

$$\bar{H}(\bar{\lambda}) = -0.95 \frac{f_t^2}{G_F} e^{-\frac{f_t}{G_F} \bar{\lambda}} \quad (45)$$

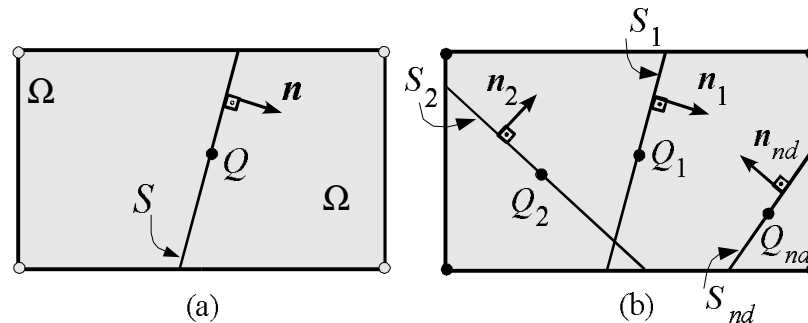
onde  $\mathbf{S}$  representa a parte desviadora das tensões,  $p$  é a tensão normal média,  $f_t$  é a resistência à tração e  $G_F$  é a energia de fratura.

### ACOPLAMENTO ENTRE CONTÍNUO E INTERFACE

O contínuo e a interface podem ser acoplados através da seguinte condição:

$$\mathbf{t}_S - \mathcal{N}_n \boldsymbol{\sigma}^C = \mathbf{0} \quad \text{em } Q \in S \quad (46)$$

que estabelece a continuidade das tensões de superfície em um ponto de colocação  $Q$  da interface de descontinuidade (ver Figura 2a).



**Figura 2.** Pontos de colocação: a) interface única; b) múltiplas interfaces

Tendo em consideração a relação constitutiva para o contínuo (29), as equações de equilíbrio (46), ficam expressas por

$$\mathbf{t}_S(\mathbf{d}, [[\mathbf{u}]]) - \mathbf{K}^S(\mathbf{d} - \mathbf{P} [[\mathbf{u}]]) = \mathbf{0} \quad \text{em } Q \in S \quad (47)$$

onde

$$\mathbf{K}^S = \mathcal{N}_n \mathbf{E} \mathbf{B}^H \quad (48)$$

A expressão de  $\mathbf{t}_S(\mathbf{d}, [[\mathbf{u}]])$  é dada pela equação (32) para o caso de aproximação discreta, ou pela equação (36), se a aproximação de descontinuidades fortes regularizada for adotada para representar a interface.



### Múltiplas descontinuidades no elemento

Se o elemento é atravessado por mais de uma interface de descontinuidade (Figura 2), movimento de corpo rígido resultante será dado pela soma daqueles relacionados a cada interface

$$\mathbf{u}^R = \sum_{k=1}^{nd} H_k [[\mathbf{u}]]_k \quad (49)$$

onde  $nd$  é o número de interfaces de descontinuidade no elemento.  $H_k$  e  $[[\mathbf{u}]]_k$  representam as função de Heaviside e os modos de descontinuidade da  $k$ -ésima interface de descontinuidade,  $S_k$ .

O vetor de deslocamentos nodais correspondente fica dado por

$$\mathbf{d}^R = [\mathbf{P}] \{ [[\mathbf{u}]] \} \quad (50)$$

onde  $[\mathbf{P}]$  e  $\{ [[\mathbf{u}]] \}$  agrupam, respectivamente, as matrizes  $\mathbf{P}$  e os vetores  $[[\mathbf{u}]]$  de cada interface.

A continuidade de tensões (47) deve ser escrita para o ponto de colocação de cada interface do elemento, fornecendo o seguinte conjunto de equações

$$\{ \mathbf{t}_S(\mathbf{d}, [[\mathbf{u}]] \} - [\mathbf{K}^S](\mathbf{d} - [\mathbf{P}] \{ [[\mathbf{u}]] \}) = \mathbf{0} \quad (51)$$

onde

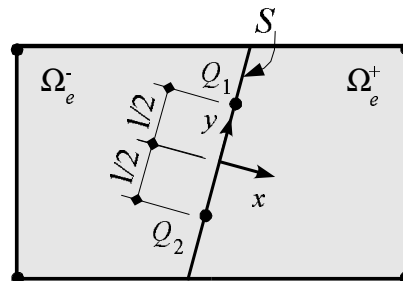
$$\{ \mathbf{t}_S \}^T = \{ \mathbf{t}_{S_1} \ \mathbf{t}_{S_2} \ \dots \ \mathbf{t}_{S_{nd}} \} \quad (52)$$

$$[\mathbf{K}^S]^T = [\mathbf{K}_1^S \ \mathbf{K}_2^S \ \dots \ \mathbf{K}_{nd}^S] \quad (53)$$

agrupam, respectivamente, os vetores  $\mathbf{t}_{S_j}$  e as matrizes  $\mathbf{K}_j^S$  de cada ponto de colocação  $Q_j$  ( $j = 1, 2, \dots, nd$ ).

### Modos de descontinuidade não-uniformes

Considere uma interface de descontinuidade com dois pontos de colocação  $Q_1$  e  $Q_2$ , como ilustra a Figura 3.



**Figura 3.** Pontos de colocação em uma interface com modos de descontinuidade não-uniformes

Cada ponto de colocação introduz um salto de deslocamentos  $[[\mathbf{u}]]_i$  ( $i = 1, 2$ ). Pode-se definir matrizes  $\mathbf{P}_1$  and  $\mathbf{P}_2$  relacionadas aos pontos de colocação, tal que

$$\mathbf{d}^R = [\mathbf{P}] \{ [[\mathbf{u}]] \} \quad (54)$$

onde

$$[\mathbf{P}] = [\mathbf{P}_1 \ \mathbf{P}_2] \quad (55)$$

$$\{ [[\mathbf{u}]] \}^T = \{ [[\mathbf{u}]]_1 \ [[\mathbf{u}]]_2 \} \quad (56)$$

A formulação que resulta ao escreverem-se a continuidade de tensões (47) para cada ponto de colocação é similar à formulação de múltiplas descontinuidades descrita anteriormente.

As matrizes  $\mathbf{P}_1$  e  $\mathbf{P}_2$  podem ser escritas da seguinte forma

$$\mathbf{P}_j = \begin{bmatrix} M_j(\mathbf{x}_1) & 0 \\ 0 & M_j(\mathbf{x}_1) \\ \vdots & \vdots \\ M_j(\mathbf{x}_{nen}) & 0 \\ 0 & M_j(\mathbf{x}_{nen}) \end{bmatrix} \quad (j = 1, 2) \quad (57)$$

onde  $\mathbf{x}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, nen$ ) são as coordenadas do ponto do elemento de acordo com o sistema de referência da interface  $(x, y)$ . Como exemplo, as funções  $M_j(\mathbf{x})$  podem ser construídas a partir das seguintes funções interpoladoras lineares ao longo de  $S$ , como ilustrado na Figura 4

$$M_1(\mathbf{x}) = \mathcal{H}(x) \frac{l/2 + y}{l}; M_2(\mathbf{x}) = \mathcal{H}(x) \frac{l/2 - y}{l} \quad (58)$$

onde  $l$  é a distância entre os dois pontos de colocação.

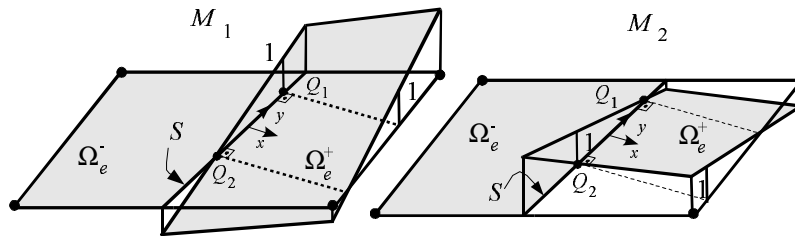


Figura 4. Funções de interpolação lineares  $M_1$  e  $M_2$

## ESQUEMA DE SOLUÇÃO

Em um esquema incremental e iterativo de solução, as equações de equilíbrio do elemento são dadas pelas equações (31) e (51), relacionando as variáveis do elemento da  $i$ -ésima iteração do  $n$ -ésimo passo de carga

$$\mathbf{f}_{int}^{n,i} = \mathbf{K}^H (\mathbf{d}^{n,i} - [\mathbf{P}] \{ [[\mathbf{u}]] \}^{n,i}) \quad (59)$$

$$\{ \mathbf{t}_S(\mathbf{d}^{n,i}, \{ [[\mathbf{u}]] \}^{n,i}) \} - [\mathbf{K}^S] (\mathbf{d}^{n,i} - [\mathbf{P}] \{ [[\mathbf{u}]] \}^{n,i}) = \mathbf{0} \quad (60)$$

Para um dado  $\mathbf{d}^{n,i}$ , o sistema de equações não-lineares (60) pode ser resolvido obtendo-se  $\{[\mathbf{u}]\}^{n,i}$  e então o vetor de forças internas pode ser calculado com a equação (59).

A formas em taxa das equações (59) e (60) podem ser expressas como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^{dd} & \mathbf{K}^{du} \\ \mathbf{K}^{ud} & \mathbf{K}^{uu} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{d}} \\ \{[\dot{\mathbf{u}}]\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{f}}_{int} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (61)$$

Fazendo-se a condensação de  $\{[\dot{\mathbf{u}}]\}$ , resulta

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}^{dd} - \mathbf{K}^{du} (\mathbf{K}^{uu})^{-1} \mathbf{K}^{ud} \quad (62)$$

## EXEMPLOS NUMÉRICOS

### Elemento híbrido com duas fissuras

A fim de avaliar a capacidade da formulação proposta para representar mais de uma interface de descontinuidade no interior do elemento, estuda-se o teste proposto por Willam e colaboradores<sup>15</sup>, que consiste na imposição de uma rotação progressiva das deformações principais em um único elemento quadrado em estado de tensão plana, como ilustra a Figura 5. Os parâmetros adotados para o material são os seguintes: módulo de Young,  $E=30000$  MPa; coeficiente de Poisson,  $\nu = 0,2$ ; resistência à tração,  $f_t = 3,0$  MPa e energia de fratura,  $G_F = 0,1$  N/mm. O parâmetro de regularização,  $k$ , é considerado constante e igual a 0,1 mm.

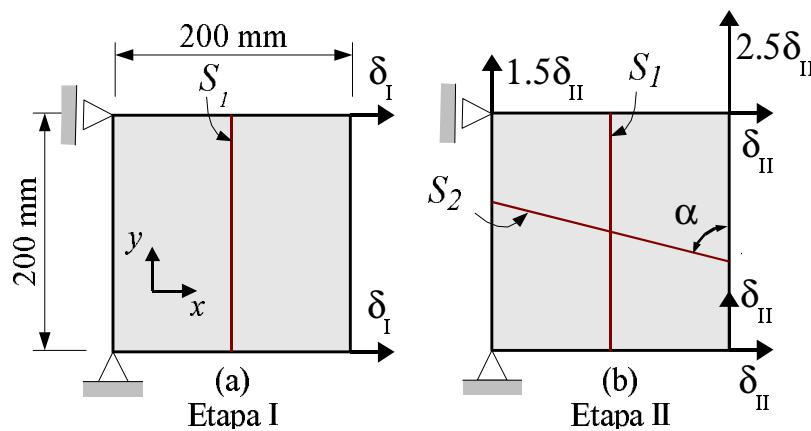
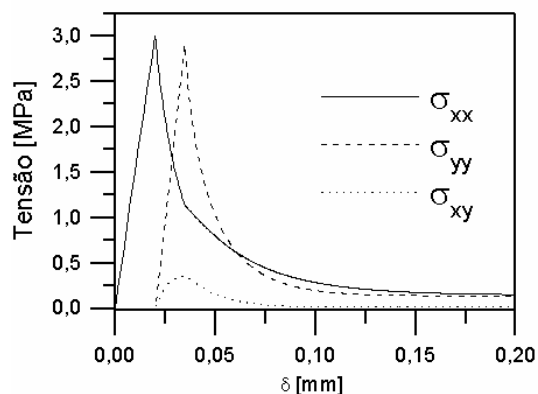


Figura 5. Teste de Willam

O elemento é submetido a duas etapas consecutivas de carregamento. Na primeira etapa, aplica-se uma tensão uniaxial crescente na direção  $x$  através da imposição de um aumento gradativo dos deslocamentos horizontais dos nós da direita (ver Figura 5a). A primeira etapa de carregamento termina no instante em que a tensão atinge a resistência à tração do material e a primeira fissura se forma perpendicularmente à máxima tensão principal. A segunda etapa de carregamento consiste na imposição de deslocamentos crescentes aos nós do elemento, de acordo com o esquema representado na Figura 5b. Como conseqüência, as deformações totais  $\epsilon_{xx}$ ,  $\epsilon_{yy}$  e  $\epsilon_{xy}$  crescem gradativamente na proporção de 1,0: 1,5: 1,0. Permite-se a formação de uma segunda fissura perpendicular à máxima tensão principal se o estado de tensões da porção contínua do elemento volta a violar o critério de iniciação.

A Figura 6 mostra a evolução das componentes  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  e  $\sigma_{xy}$ . Na segunda etapa de carregamento, antes da iniciação da segunda fissura, a componente de tensão  $\sigma_{xx}$  decresce enquanto as outras crescem em decorrência da rotação progressiva das direções principais das deformações. O regime de abrandamento do modelo constitutivo na primeira fissura causa uma redução rápida da componente normal  $\sigma_{xx}$  e inibe um aumento significativo da componente transversal  $\sigma_{xy}$ .

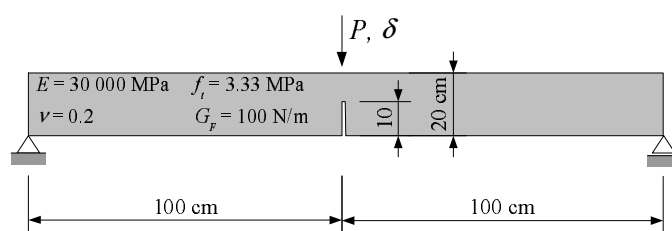


**Figura 6.** Teste de Willam: evolução das componentes de tensão

Como a evolução da componente normal  $\sigma_{yy}$  não é afetada pela presença da primeira fissura vertical, o estado de tensões passa gradualmente de um estado uniaxial na direção  $x$  para um estado uniaxial na direção  $y$ . No instante em que as tensões atingem o critério de iniciação novamente, abre-se uma segunda fissura formando um ângulo  $\alpha = 77,9^\circ$  com a horizontal (ver Figura 5b). Note na Figura 6 que, após a formação da Segunda fissura, todas componentes de tensão decrescem, conduzindo a uma completa relaxação do elemento.

### Teste de viga entalhada com forças em três pontos

A fim de avaliar a eficiência da formulação com modos de descontinuidade não-uniformes ao longo da interface, estuda-se a viga entalhada de concreto testada por Peterson<sup>10</sup>. A geometria, condições de contorno e parâmetros do material estão apresentados na Figura 7.

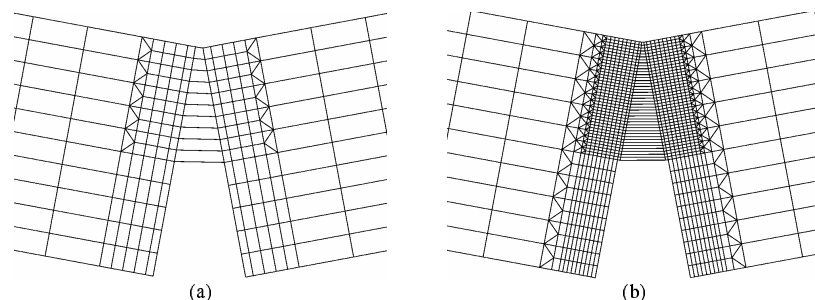


**Figura 7.** Teste de viga de concreto<sup>10</sup>

A análise numérica é levada a cabo utilizando-se elementos finitos híbridos com modos de descontinuidade uniformes e não-uniformes. Nesse caso, somente a formação de uma fissura vertical é permitida no interior dos elementos.

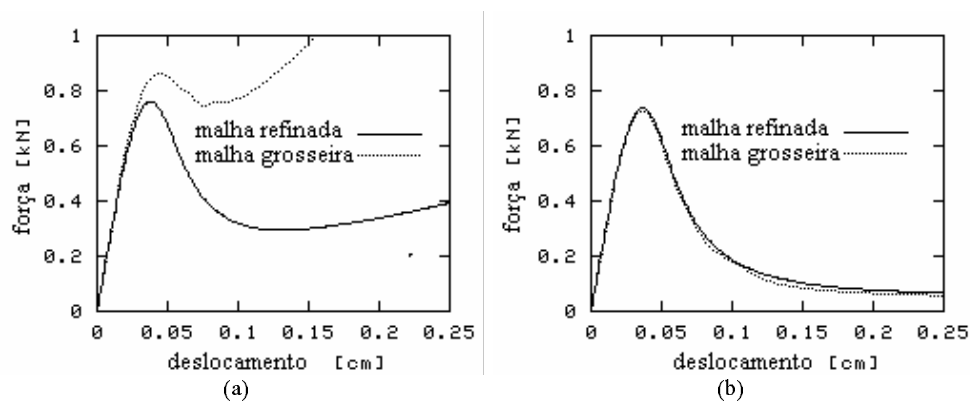
A Figura 8 mostra as diferentes malhas de elementos finitos utilizadas, na configuração deformada para um deslocamento prescrito  $\delta = 0,2$  cm. Verifica-se que a linha de fissura, que se propaga verticalmente a partir do ponto do entalhe, produz uma forte rotação relativa entre as duas partes dos elementos atravessados pela linha de fissuração.

Como os elementos finitos com modos de descontinuidade uniformes não são capazes de reproduzir uma rotação relativa de corpo rígido, as deformações na parte contínua são mobilizadas para acomodar as rotações relativas dos contornos opostos do elemento. Isso impede a relaxação do elemento, produzindo um elevado travamento de tensões, que pode ser evidenciado na curva de resposta estrutural da Figura 9a. Note que, embora de maneira menos acentuada, também ocorre travamento para a análise com malha bastante refinada.



**Figura 8.** Malhas deformadas ( $\delta = 0.2$  cm): a) malha grosseira b) malha refinada

Na Figura 9b observa-se que o travamento de tensões é completamente removido pela consideração de modos de descontinuidade não-uniformes. Note que as curvas estruturais obtidas com as malhas grosseira e refinada são bastante similares.



**Figura 9.** Respostas estruturais: a) modos uniformes; b) modos não-uniformes

## CONCLUSÕES

Apresentou-se uma técnica para a incorporação de interfaces de descontinuidade no interior de elementos finitos híbridos, na qual o campo de deslocamentos é dividido em duas partes: uma referente ao movimento de corpo rígido produzido pelo salto de deslocamentos e outra associada à deformação da porção contínua do elemento. Dessa forma, a formulação do elemento finito híbrido com descontinuidade incorporada é deduzida a partir do mesmo princípio variacional que dá origem ao elemento original (sem descontinuidade), mas aplicado somente à parte contínua do elemento.

O comportamento não-linear da interface de descontinuidade pode ser representado por uma lei constitutiva do tipo discreta ou por uma do tipo contínua, dentro do contexto da

aproximação de descontinuidades fortes<sup>12</sup>. A porção contínua e a interface são acopladas através da imposição da continuidade de tensões em pontos de colocação na interface.

Os exemplos numéricos apresentados demonstram a eficiência da formulação, tanto no que se refere à representação de múltiplas fissuras, como de modos de descontinuidade não-uniformes. A última característica se mostrou essencial para remediar o travamento de tensões decorrentes da significativa rotação relativa entre as partes do elemento atravessado pela fissura. É importante destacar que, nessas condições, a necessidade de modos de descontinuidade não-uniformes não é exclusiva para elementos finitos híbridos. Como foi demonstrado no trabalho de Manzoli e Shing<sup>6</sup>, elementos finitos quadriláteros baseados em deslocamentos também requerem modos não-uniformes para eliminar problemas de travamento de tensões.

O presente trabalho possibilita o emprego de elementos finitos híbridos além da análise de meios sólidos contínuos, tornando-os aptos também para a representação de propagação de descontinuidades. Nesse contexto, o elemento híbrido pode propiciar um estudo mais preciso para solicitações impostas (ou decorrentes da própria aparição da descontinuidade) que sejam tipicamente aquelas para as quais essa classe de elementos apresenta reconhecida vantagem.

## REFERÊNCIAS

- 1 J. Alfaiate, G.N. Wells e L.J. Sluys, "The use of embedded discontinuity elements with crack path continuity for mode-I and mixed-mode fracture", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. **69**, pp. 661-686, (2001).
- 2 E.N. Dvorkin, A.M. Cuitino e G. Gioia, "Finite Elements with Displacement Interpolated Embedded Localization Lines Insensitive to Mesh Size and Distortions", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. **30**, pp. 541-564, (1990).
- 3 M. Jirásek, "Comparative Study on Finite Elements with Embedded Discontinuities", *Comp. Methods Appl. Mech. Engineering*, pp. 307-330, (2000).
- 4 M. Klisinski, K. Runesson e S. Sture, "Finite element with inner softening band", *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, Vol. **117**, N° 3, pp. 575-587, (1991).
- 5 H. R. Lotfi e P.B. Shing, "Embedded representation of fracture in concrete with mixed finite elements", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. **38**, pp. 1307-1325, (1995).
- 6 O.L. Manzoli e P.B. Shing, "Finite Elements with embedded multiple cracks and non-uniform discontinuity modes", In A. Benallal e S.P.B. Proença (ed.), *Recent Developments in the Modeling of Rupture in Solids*, pp. 99-104, Paris (2003).
- 7 J. Oliver, "Modeling Strong Discontinuities in Solid Mechanics via Strain Softening Constitutive Equations. Part 1: Fundamentals", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. **39**, N° 21, pp. 3575-3600, (1996).
- 8 J. Oliver, "Modeling Strong Discontinuities in Solid Mechanics via Strain Softening Constitutive Equations. Part 2: Numerical simulation", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. **39**, ° 21, pp. 3601-3623, (1996).
- 9 J. Oliver, M. Cervera e O.L. Manzoli, "Strong Discontinuities and Continuum Plasticity Models: The Strong Discontinuity Approach", *Int. J. of Plasticity*, Vol. **15**, N° 3, pp. 319-351, (1999).
- 10 P. E. Peterson, "Crack Growth and Development of Fractures Zones in Plain Concrete and Similar Materials", *Report n° TVBM-1006*, Division of Building Materials, Lund Institute of Technology, Lund, Sweden (1981).
- 11 T.H.H. Pian, "State-of-the-art development of hybrid/mixed finite element method", *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. **21**, pp. 5-20, (1995).

- 12 J.C. Simo, J. Oliver e F. Armero, “An analysis of strong discontinuities induced by strain-softening in rate-independent inelastic solids, *Computational Mechanics*, Vol. **12**, pp. 277-296, (1993).
- 13 J.C. Simo e T.J.R. Hughes, “Computational Inelasticity, Springer-Verlag, (1998).
- 14 B. W. Spencer e P.B., “Shing, Stress hybrid embedded crack element for analysis of concrete fracture”, In K. Willam e T. Tanabe (ed.), *Finite Element Analysis in Reinforced Concrete Structures*; American Concrete Institute Special Publication, SP 205, (2002).
- 15 K. Willam, E. Pramono e S. Sture, “Fundamental issues of smeared crack models”, In S.P. Shah e S.E. Swartz (ed.), *Int. Conf. on Fracture of Concrete and Rock*, Society of Engng. Mech., pp. 192-207, Connecticut (1987).