

Contribuciones a la simulación numérica del fallo material en deformaciones infinitesimales. Modelos de degradación y daño continuo

M. Dolores G. Pulido y Javier Oliver

Departamento de Resistencia de Materiales y Estructuras en Ingeniería
ETS de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos
Universidad Politécnica de Cataluña
Campus Norte, Edificio C1
08034 Barcelona, España
Tel.: 34 93 401 64 73/64 90; Fax: 34 93 401 10 48
e-mail: pulido@cimne.upc.edu; oliver@cimne.upc.edu

Resumen

El presente artículo se basa en la denominada *Aproximación de continuo de discontinuidades fuertes (CSDA)* para modelar el fenómeno de localización de deformaciones y discontinuidades del campo de desplazamientos. Mediante el análisis de discontinuidad fuerte, y adoptando un modelo de daño continuo (tensión-deformación) isótropo, se deriva el modelo constitutivo discreto proyectado (vector tracción *versus* salto del campo de desplazamiento), junto con las condiciones de discontinuidad fuerte que restringen los estados tensionales en el régimen discontinuo. Se detallan un modelo de ancho de banda variable, con objeto de inducir automáticamente las condiciones de discontinuidad fuerte, y un procedimiento de bifurcación discontinua con el que determinar el inicio y la propagación de la discontinuidad. Al final del artículo se expone una serie de ensayos numéricos.

Palabras clave: *Aproximación de continuo de discontinuidades fuertes, fallo material, localización, fractura, daño*

CONTRIBUTIONS TO MATERIAL FAILURE NUMERICAL SIMULATION IN INFINITESIMAL DEFORMATION SETTINGS. DAMAGE MODELS

Summary

The paper focus on the so called *Continuum strong discontinuity approach (CSDA)* for modeling displacement discontinuities and strain localization phenomena. By means of the strong discontinuity analysis, and for damage continuum (stress-strain) constitutive models, projected discrete (tractions-displacement jumps) constitutive models are derived, together with the strong discontinuity conditions that restrict the stress states at the discontinuous regime. Also a variable bandwidth model, to automatically induce those strong discontinuity conditions, and a discontinuous bifurcation procedure, to determine the initiation and propagation of the discontinuity, are sketched. Numerical simulation issues are tackled at the end of the paper.

Keywords: *Continuum strong discontinuity approach, material failure, localization, fracture, damage*

INTRODUCCIÓN

La modelización del inicio y desarrollo de discontinuidades materiales (fisuras, líneas de deslizamiento, fracturas, etc.) ha sido objeto de intensa investigación en mecánica del sólido durante las últimas décadas. Junto a las aproximaciones de la mecánica de fractura clásica no lineal³⁵, un modo común de modelar discontinuidades en el campo de los desplazamientos, desde el punto de vista de la mecánica del continuo, ha sido la simulación de los fenómenos de localización de la deformación empleando modelos constitutivos provistos de ablandamiento por deformación. Esto puede justificarse no sólo desde un punto de vista físico (este modo de deformación puede observarse tanto en materiales dúctiles^{20,46} como en materiales cuasi frágiles⁴⁸, sino también desde un punto de vista cinemático al inducir la localización de la deformación desplazamientos relativos a ambos lados de la discontinuidad que pueden ser interpretados como saltos en el campo de desplazamientos. Sin embargo, es bien sabido hoy en día que los modelos disipativos continuos invíscidos clásicos con ablandamiento por deformación presentan problemas de valor de contorno mal puestos. Esto es particularmente evidente en simulaciones numéricas donde los resultados obtenidos (empleando elementos finitos) exhiben una fuerte dependencia según el tipo de malla y falta de convergencia con el refinamiento de la misma.

En la literatura se encuentran diferentes remedios a este problema, basados, fundamentalmente, en la modificación de la respuesta constitutiva invíscida clásica mediante la adición de gradientes de deformación de alto orden, dependencia no local o dependencia con la tasa en la ecuación constitutiva tensión-deformación⁶.

En los últimos años se está desarrollando un segundo grupo de procedimientos basados en el concepto de *discontinuidad fuerte*. Dichos procedimientos emplean la *cinemática de discontinuidad fuerte* consistente en la modificación de la descripción cinemática estándar del continuo con objeto de permitir la aparición de campos de desplazamientos discontinuos a través de interfaces materiales en el sólido^{3,14,15,23,37,41}. Una característica común asociada a estos métodos es la tecnología del elemento finito, la cual debería permitir capturar saltos en el campo de desplazamientos. A tal efecto, ha surgido una nueva familia de *elementos con discontinuidades incrustadas*^{5,8,11,16,23}.

La consideración de la cinemática de discontinuidad fuerte presenta consecuencias interesantes, tales como qué modelos constitutivos estándar *de continuo* (tensión-deformación) que exhiben dicha cinemática inducen modelos constitutivos *discretos* (tracción-salto de desplazamientos) en la interfaz de discontinuidad²⁵ (una condición crucial para que esto ocurra es que la cinemática de discontinuidad fuerte esté conectada con el modelo constitutivo continuo a través de la regularización del parámetro de endurecimiento/ablandamiento, permitiendo al modelo relacionar tracciones acotadas con deformaciones no acotadas). Estos modelos discretos pueden asociarse con proyecciones de los modelos constitutivos originales sobre la interfaz de discontinuidad, heredando las características básicas del modelo continuo del que procede²⁵. Sin embargo, los modelos discretos sólo pueden inducirse cuando se alcanza un estado tensional particular en la interfaz, denominándose *condiciones de discontinuidad fuerte* a dichas restricciones en el campo tensional.

Dependiendo de cómo los diferentes modelos hagan uso de los discretos inducidos y del formato en el que son introducidos en el análisis, pueden clasificarse las aproximaciones de la siguiente forma:

1. *Aproximaciones discretas*^{16,37}: Introducen en la interfaz un modelo constitutivo discreto que es completamente independiente del continuo. Su conexión con la cinemática de discontinuidad fuerte reside en aspectos numéricos, esencialmente en el empleo de elementos finitos que presentan discontinuidades incrustadas.

2. *Aproximaciones discreto-continuas*^{1,3,9,14}: Introducen la ecuación constitutiva discreta inducida en el problema en un *formato discreto*, es decir, se deduce analíticamente la ecuación constitutiva discreta para, posteriormente, introducirla de forma explícita como ley que gobierna el comportamiento de la interfaz discontinua.
3. *Aproximaciones de continuo*: Se basan en un uso total de las conexiones existentes entre los modelos constitutivos continuos y los discretos inducidos aunque, en realidad, estos últimos nunca se implementan explícitamente en la interfaz discontinua, sino que son inducidos implícitamente por los primeros como consecuencia de la activación de la cinemática de discontinuidad fuerte una vez se han verificado las condiciones de discontinuidad fuerte. Por ello, tanto el análisis como la simulación se mantienen en *formato de continuo*.

El presente trabajo se basa en el último enfoque, de aquí en adelante denominado *Aproximación de Discontinuidad Fuerte de Continuo (ADFC)*.

CINEMÁTICA DE MEDIOS DISCONTINUOS

Toda la descripción cinemática se centra en medios bidimensionales, pues la teoría desarrollada analiza casos de deformación y tensión plana, aunque su extensión a dominios tridimensionales resultaría inmediata.

Sean $\Omega \in \mathbb{R}^2$ el dominio constituido por los puntos materiales \mathbf{x} y la línea material \mathcal{S} en Ω , denominada *línea de discontinuidad*, de normal unitaria \mathbf{n} (Figura 1).

Considérese un sistema de coordenadas ortogonal curvilíneo ξ y η , donde la línea coordenada η coincide con la línea de discontinuidad \mathcal{S} ($\mathcal{S} := \{\mathbf{x}(\xi, \eta) \in \Omega ; \xi = 0\}$), siendo $\{\hat{\mathbf{e}}_\xi, \hat{\mathbf{e}}_\eta\}$ la base ortogonal asociada a dicho sistema; $r_\xi(\xi, \eta)$ y $r_\eta(\xi, \eta)$ los factores de escala correspondientes; ds_ξ y ds_η los diferenciales de longitud de arco a lo largo de las líneas coordenadas ξ y η , respectivamente, verificándose $ds_\xi = r_\xi d\xi$ y $ds_\eta = r_\eta d\eta$.

Sea Ω^h la banda de discontinuidad tal que $\Omega^h := \{\mathbf{x}(\xi, \eta) ; \xi \in [\xi^-, \xi^+]\}$, denominando a las líneas coordenadas $\xi = \xi^+$ y $\xi = \xi^-$ que delimitan dicha banda \mathcal{S}^+ y \mathcal{S}^- , respectivamente.

Se define el ancho representativo de Ω^h como *ancho de banda*, de valor $h(\eta) = r_\xi(0, \eta)(\xi^+ - \xi^-)$.

Los dominios Ω^+ y Ω^- vienen definidos como las regiones de $\Omega \setminus \Omega^h$ hacia las que se orientan los vectores \mathbf{n} y $-\mathbf{n}$, respectivamente, de modo que $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^- \cup \Omega^h$.

Detallados los conceptos anteriores, se define a continuación la descripción del movimiento y deformación de un cuerpo que, bajo condiciones determinadas, exhibe localización de las deformaciones.

Cinemática de discontinuidad débil

La cinemática de discontinuidades débiles caracteriza campos de desplazamientos continuos, donde las deformaciones se presentan discontinuas, aunque acotadas (Figura 1).

Considérese la descripción cinemática de la discontinuidad débil para un medio continuo Ω de la forma:

$$\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \dot{\bar{\mathbf{u}}}(\mathbf{x}, t) + \mathcal{H}_{\Omega^h}(\xi) \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket(\eta, t) \quad (1)$$

$$\mathcal{H}_{\Omega^h} = \begin{cases} 0 & \mathbf{x} \in \Omega^- (\xi \leq \xi^-) \\ 1 & \mathbf{x} \in \Omega^+ (\xi \geq \xi^+) \\ \frac{\xi - \xi^-}{\xi^+ - \xi^-} & \mathbf{x} \in \Omega^h (\xi^- < \xi < \xi^+) \end{cases} \quad (2)$$

donde $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ representa el campo de desplazamientos, constituido por las funciones $\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$ y $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket(\eta, t)$ de continuidad C^0 en Ω .

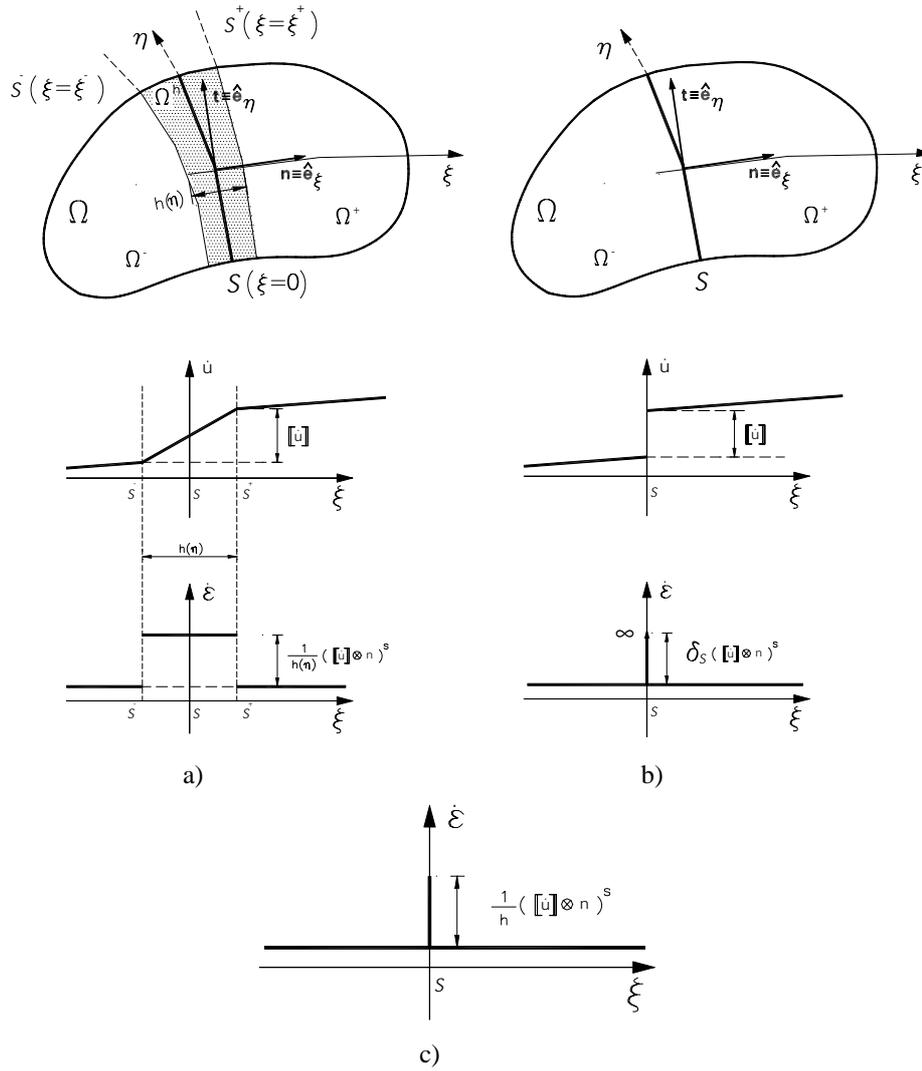


Figura 1. a) Cinemática de discontinuidad débil; b) cinemática de discontinuidad fuerte y c) expresión regularizada del campo tasa de las deformaciones representativa de discontinuidades débiles y fuertes

La función rampa $\mathcal{H}_\Omega(\xi, t)$ también es continua en Ω , exhibiendo un salto *aparente* unitario entre \mathcal{S}^+ y \mathcal{S}^- sobre una misma línea coordenada $\xi = ([[\mathcal{H}_\Omega^h]] = \mathcal{H}_\Omega^h(\xi^+, \eta) - \mathcal{H}_\Omega^h(\xi^-, \eta) = 1 \forall \eta)$.

El gradiente de \mathcal{H}_Ω^h se detalla a continuación:

$$\begin{aligned}
 \nabla \mathcal{H}_\Omega^h &= \frac{1}{r_\xi} \frac{\partial \mathcal{H}_\Omega^h}{\partial \xi} \hat{e}_\xi + \frac{1}{r_\eta} \frac{\partial \mathcal{H}_\Omega^h}{\partial \eta} \hat{e}_\eta = \mu_{\Omega^h} \frac{1}{h_\xi} \hat{e}_\xi = \mu_{\Omega^h} \frac{1}{h_\xi} \mathbf{n} \\
 h_\xi(\xi, \eta) &= r_\xi(\xi, \eta) (\xi^+ - \xi^-) \\
 h_\xi(0, \eta) &= r_\xi(0, \eta) (\xi^+ - \xi^-) = h(\eta)
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

donde μ_{Ω^h} es la denominada función de colocación, definida en Ω ($\mu_{\Omega^h} = 1 \forall \mathbf{x} \in \Omega^h$ y $\mu_{\Omega^h} = 0 \forall \mathbf{x} \in \Omega \setminus \Omega^h$).

El campo de deformaciones (tasa) cinemáticamente compatible con (1) sería

$$\dot{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) = \nabla^s \dot{\mathbf{u}} = \underbrace{\nabla^s \dot{\mathbf{u}} + \mathcal{H}_{\Omega^h} \nabla^s \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket}_{\text{término continuo}} + \underbrace{\mu_{\Omega^h} \frac{1}{h_\xi} (\llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket \otimes \mathbf{n})^s}_{\text{término discontinuo}} \quad (4)$$

La expresión $\nabla^s(\cdot)$ representa el operador gradiente simétrico de (\cdot) . El término discontinuo de (4) presenta saltos en \mathcal{S}^+ y \mathcal{S}^- (Figura 1).

Cinemática de discontinuidad fuerte. Expresión regularizada

La cinemática representativa de discontinuidades fuertes viene caracterizada por la presencia de campos de desplazamientos discontinuos en la línea de discontinuidad \mathcal{S} (Figura 1b), constituyendo el caso límite de la discontinuidad débil cuando el ancho de la banda de discontinuidad tiende a cero, $h(\eta) \rightarrow 0$, de donde $\Omega^h \rightarrow \mathcal{S}$.

La descripción cinemática para un medio Ω que exhibe una discontinuidad fuerte se expresa de la forma:

$$\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \dot{\hat{\mathbf{u}}}(\mathbf{x}, t) + \mathcal{H}_{\mathcal{S}} \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket(\mathbf{x}, t) \quad (5)$$

$$\dot{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) = \nabla^s \dot{\mathbf{u}} = \underbrace{\nabla^s \dot{\hat{\mathbf{u}}} + \mathcal{H}_{\mathcal{S}} \nabla^s \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket}_{\text{término acotado}} + \underbrace{\delta_{\mathcal{S}} (\llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket \otimes \mathbf{n})^s}_{\text{término no acotado}} \quad (6)$$

donde $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$ representa la función escalón situada en \mathcal{S} ($\mathcal{H}_{\mathcal{S}}(\mathbf{x}) = 0 \forall \mathbf{x} \in \Omega^-$ y $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}(\mathbf{x}) = 1 \forall \mathbf{x} \in \Omega^+$), transformada de la función rampa cuando el ancho de banda tiende a cero y $\delta_{\mathcal{S}}$ es la *distribución delta de Dirac* sobre \mathcal{S} ($\int_{\Omega} \varphi(\mathbf{x}) \delta_{\mathcal{S}} d\Omega = \int_{\mathcal{S}} \varphi(\mathbf{x}) d\mathcal{S} \forall \varphi(\mathbf{x}) \in \mathcal{C}^0(\Omega)$), obtenida de la derivación (en el sentido de las distribuciones) de la función escalón ($\nabla \mathcal{H}_{\mathcal{S}}(\mathbf{x}) = \delta_{\mathcal{S}} \mathbf{n}$)⁴⁵.

Con objeto de realizar simulaciones numéricas que involucren este tipo de cinemática, se emplea una versión regularizada de (6) mediante la aproximación de la distribución delta de Dirac a través de un parámetro de regularización h y una función de posición $\mu_{\mathcal{S}}$ sobre \mathcal{S} ($\mu_{\mathcal{S}} = 1 \forall \mathbf{x} \in \mathcal{S}$ y $\mu_{\mathcal{S}} = 0 \forall \mathbf{x} \in \Omega \setminus \mathcal{S}$), obteniéndose la función distribución regularizada delta de Dirac $\delta_{\mathcal{S}}^h$

$$\delta_{\mathcal{S}}^h(\mathbf{x}) = \frac{1}{h} \mu_{\mathcal{S}}(\mathbf{x}) \quad (7)$$

comprobándose que, en el sentido distribucional, $\lim_{h \rightarrow 0} \delta_{\mathcal{S}}^h(\mathbf{x}) = \delta_{\mathcal{S}}$.

Considerando (7) en (6) se obtienen las siguientes expresiones que definen la cinemática regularizada de una discontinuidad fuerte (Figura 1c)

$$\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \dot{\hat{\mathbf{u}}}(\mathbf{x}, t) + \mathcal{H}_{\mathcal{S}} \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket(\mathbf{x}, t) \quad (8)$$

$$\dot{\varepsilon}^h(\mathbf{x}, t) = \underbrace{\nabla^s \dot{\hat{\mathbf{u}}} + \mathcal{H}_{\mathcal{S}} \nabla^s \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket}_{\dot{\varepsilon} = \text{acotado}} + \underbrace{\mu_{\mathcal{S}} \frac{1}{h} (\llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket \otimes \mathbf{n})^s}_{\llbracket \dot{\varepsilon} \rrbracket = \text{no acotado cuando } h \rightarrow 0} \quad (9)$$

Es importante resaltar que, dependiendo del valor que adopte el parámetro de regularización h , las ecuaciones (8) y (9) pueden representar tanto la cinemática de discontinuidad débil como de discontinuidad fuerte (nótese que, excepto en el caso $h \rightarrow 0$, el campo de deformaciones (9) no es cinemáticamente compatible con (8), pues $\nabla \mathcal{H}_S = \delta_S \mathbf{n} \neq \frac{1}{h} \mu_S \mathbf{n}$).

Si denominamos $\dot{\varepsilon}(\mathbf{x}, t)$ al término acotado y $[[\dot{\varepsilon}]](\mathbf{x}, t)$ al no acotado, la ecuación (9) se puede expresar como:

$$\dot{\varepsilon}^h(\mathbf{x}, t) = \dot{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) + [[\dot{\varepsilon}]](\mathbf{x}, t) \quad (10)$$

Cuando $h \rightarrow 0$, como ya se ha expuesto en el presente subapartado, la cinemática regularizada recupera las expresiones de la cinemática de discontinuidad fuerte (5) y (6), mientras que para valores de $h \neq 0$, presenta la misma estructura de discontinuidad débil que (1) y (4).

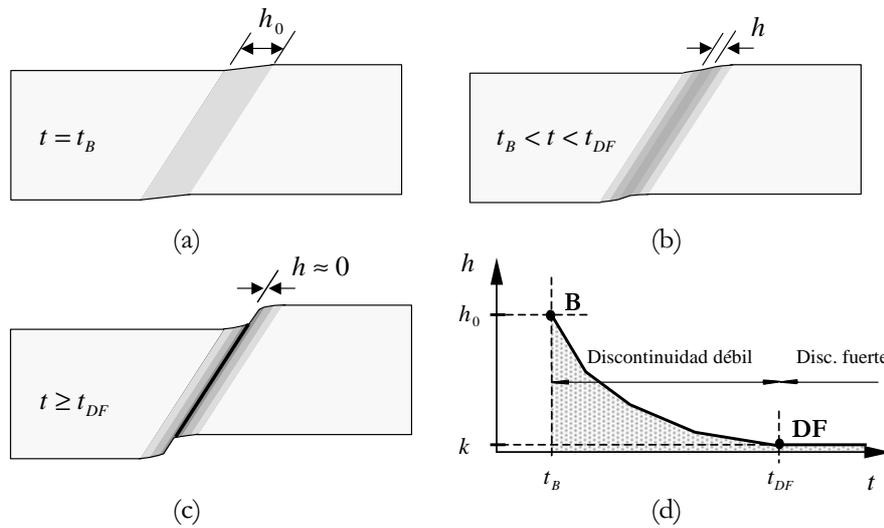


Figura 2. De a) a c) colapso de una discontinuidad débil ($h \neq 0$) en una discontinuidad fuerte ($h \rightarrow 0$) y d) evolución del ancho de banda

Si bien el presente trabajo se centra, fundamentalmente, en el concepto de discontinuidades fuertes, se considera que el mecanismo de formación de las mismas consiste en el colapso de una discontinuidad débil ($h \neq 0$) desarrollada en Ω en un instante determinado t_B , instante de bifurcación, donde se inicia una bifurcación discontinua local del campo de deformaciones (ver apartado *Formación de discontinuidad fuerte*) y en la posterior evolución del ancho de banda $h(t)$, decreciendo con el tiempo hasta colapsar en una discontinuidad fuerte en el instante t_{DF} ($h \equiv k \rightarrow 0$) (Figura 2). Integrando la ecuación (10) en un tiempo $t \geq t_{DF}$ obtenemos la siguiente expresión para la deformación:

$$\varepsilon^h(\mathbf{x}, t) \Big|_{t \geq t_{DF}} = \underbrace{\int_0^t \dot{\varepsilon} dt + \mu_S \int_0^{t_{DF}} \frac{1}{h} ([[\dot{\mathbf{u}}]] \otimes \mathbf{n})^s dt}_{\bar{\varepsilon}|_{t=t_{DF}}} + \mu_S \int_{t_{DF}}^t \frac{1}{h} ([[\dot{\mathbf{u}}]] \otimes \mathbf{n})^s dt \quad (11)$$

$$\varepsilon^h(\mathbf{x}, t) \Big|_{t \geq t_{DF}} = \underbrace{\bar{\varepsilon}|_{t=t_{DF}}}_{\text{acotado para } h \equiv k \rightarrow 0} + \underbrace{\mu_S \frac{1}{h} (\Delta [[\mathbf{u}]] \otimes \mathbf{n})^s}_{\text{no acotado para } h \equiv k \rightarrow 0} \quad (12)$$

donde se ha considerado el carácter material de la línea de discontinuidad \mathcal{S} ($\dot{\mathbf{n}} = \mathbf{0}$). El término $\Delta[\mathbf{u}]$ de la ecuación (12) representa el salto incremental desarrollado desde el inicio de la discontinuidad fuerte ($t = t_{DF}$) hasta el instante de análisis $t \geq t_{DF}$

$$\Delta[\mathbf{u}](\mathbf{x}, t) \stackrel{def}{=} [\mathbf{u}](\mathbf{x}, t) - [\mathbf{u}](\mathbf{x}, t_{DF}) \quad (13)$$

Por motivos computacionales, el valor del ancho de banda final se supone $h|_{t \geq t_{DF}} = k$, donde k es un parámetro de regularización tan pequeño como sea posible en función del grado de precisión del ordenador empleado.

DEFINICIÓN DEL PROBLEMA. ECUACIONES DE GOBIERNO

Sea $\Omega \in \mathbb{R}^2$ la configuración de referencia de un sólido y $\partial\Omega$ su contorno con normal hacia fuera ν (Figura 3). $\Gamma_u \subset \partial\Omega$ y $\Gamma_\sigma \subset \partial\Omega$ ($\Gamma_u \cup \Gamma_\sigma = \partial\Omega$, $\Gamma_u \cap \Gamma_\sigma = \emptyset$) representan subconjuntos de $\partial\Omega$ donde se prescriben las condiciones de contorno esenciales y naturales, respectivamente. La línea material de discontinuidad \mathcal{S} , con normal unitaria \mathbf{n} , divide al sólido en dos partes, Ω^+ y Ω^- .

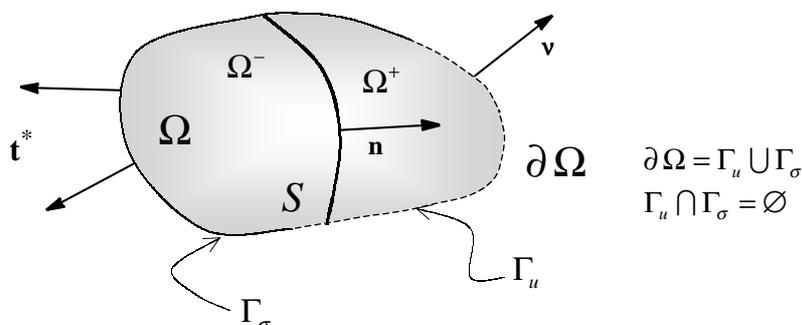


Figura 3. Problema de contorno en un medio que exhibe una discontinuidad

Las ecuaciones que gobiernan el problema de valores de contorno en forma local o fuerte, considerando por simplicidad el problema cuasiestático, en medios que exhiben discontinuidades pueden representarse de la forma:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} &= \mathbf{0} & \forall (\mathbf{x}, t) \in \Omega \setminus \mathcal{S} \times [0, T] & \quad (a) \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}^* & \forall (\mathbf{x}, t) \in \Gamma_u \times [0, T] & \quad (b) \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nu} &= \mathbf{t}^* & \forall (\mathbf{x}, t) \in \Gamma_\sigma \times [0, T] & \quad (c) \\ \boldsymbol{\sigma}^+ \cdot \mathbf{n} &= \boldsymbol{\sigma}^- \cdot \mathbf{n} & \forall (\mathbf{x}, t) \in \mathcal{S} \times [0, T] & \quad (d) \\ \mathcal{T} = \boldsymbol{\sigma}_s \cdot \mathbf{n} &= \boldsymbol{\sigma}^+ \cdot \mathbf{n} = \boldsymbol{\sigma}^- \cdot \mathbf{n} & \forall (\mathbf{x}, t) \in \mathcal{S} \times [0, T] & \quad (e) \end{aligned} \quad (14)$$

donde \mathbf{b} representa las fuerzas másicas, $\boldsymbol{\sigma}$ el tensor de tensiones, \mathbf{u}^* y \mathbf{t}^* los valores prescritos de los desplazamientos y tracciones en el contorno, respectivamente; \mathcal{T} el vector tracción y $[0, T]$ el intervalo de tiempo de interés. Las ecuaciones (14d) y (14e) establecen la continuidad del vector tracción a través de la línea de discontinuidad \mathcal{S} , siendo $\boldsymbol{\sigma}_s$ la tensión en los puntos que pertenecen a la línea de discontinuidad y $\boldsymbol{\sigma}^+$ y $\boldsymbol{\sigma}^-$ la tensión en los puntos pertenecientes a \mathcal{S}^+ y \mathcal{S}^- , respectivamente, es decir, a aquellos puntos que encontrándose en los subdominios Ω^+ y Ω^- delimitan con \mathcal{S} .

Las ecuaciones (14a), (14b) y (14c) constituyen las ecuaciones clásicas del problema de valores de contorno¹⁷ y la expresión (14d) se considera en medios que presentan discontinuidades débiles¹⁷, expresando la continuidad del vector tracción a ambos lados de \mathcal{S} .

En el contexto de las discontinuidades fuertes y de la cinemática regularizada presentada en la sección *Cinemática de discontinuidad débil* se extiende, como hipótesis *ad hoc*, la ecuación (14d) al interior de la interfaz de discontinuidad \mathcal{S} , obteniéndose la expresión (14e), donde $\boldsymbol{\sigma}_{\mathcal{S}} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)|_{\mathbf{x} \in \mathcal{S}}$ es el tensor de tensiones de Cauchy evaluado en \mathcal{S} . Esta hipótesis se sustenta en la percepción física de que si existen puntos materiales entre Ω^+ y Ω^- , la continuidad del vector tracción (equilibrio) debería aplicarse también a dichos puntos.

Junto a (14) se requiere establecer, con objeto de definir completamente el problema, tanto las ecuaciones constitutivas (relación entre tensión y deformación) como las relaciones cinemáticas (deformación función del campo de desplazamientos) en todo el dominio.

El estado tensodeformacional de la línea de discontinuidad puede representarse mediante una relación constitutiva discreta o continua.

En los modelos discretos se establece una relación entre el vector tracción $\mathcal{T}_{\mathcal{S}} = \boldsymbol{\sigma}_{\mathcal{S}} \cdot \mathbf{n}$ y el vector salto en el campo de desplazamientos producido a través de \mathcal{S} de la forma:

$$\mathcal{T}_{\mathcal{S}} = \Sigma^{dis}(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket) \quad (15)$$

donde Σ^{dis} representa la relación constitutiva discreta^{36,10}.

La relación (15) puede considerarse dato del material, independiente de la ecuación constitutiva utilizada en la descripción de la parte del sólido continuo $\Omega \setminus \mathcal{S}$, como ocurre en los modelos de fisura discreta cohesiva³⁴, donde una vez verificada la condición de inicio de fisuración, el comportamiento constitutivo de la interfaz producida viene gobernado por una ley de evolución de la ecuación tipo (15).

Por otro lado, la ecuación constitutiva discreta puede deducirse del modelo continuo considerado en el resto del dominio mediante un análisis consistente con el tipo de cinemática empleada, limitándose su aplicación a aquellas situaciones donde se cumplan, en el instante de inicio de la fisura (bifurcación), las condiciones verificadas en el análisis realizado. En este contexto se incluyen los trabajos presentados en^{2,3,1}.

La relación constitutiva continua en \mathcal{S} viene descrita por la misma ecuación constitutiva empleada en $\Omega \setminus \mathcal{S}$, es decir

$$\mathcal{T}_{\mathcal{S}} = \Sigma^{con}(\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathcal{S}}) \cdot \mathbf{n} \quad (16)$$

con Σ^{con} representando la función constitutiva empleada en el dominio $\Omega \setminus \mathcal{S}$. Esta segunda opción ha sido la empleada en el presente trabajo. Este tipo de relación constitutiva continua engloba tanto los modelos que contemplan la situación límite del concepto de discontinuidad, discontinuidad fuerte^{42,43,24,14}, como aquéllos que consideran en su cinemática tan sólo la discontinuidad débil⁴, donde el ancho de banda $h \neq 0$ es supuesto una constante adicional del problema. Resulta interesante notar que la relación (16) degenera en una ecuación discreta tipo (15) en régimen de discontinuidad fuerte ($h \rightarrow 0$, ver sección *Ecuación constitutiva discreta*), aunque explícitamente no se considere.

MODELO CONSTITUTIVO DE DAÑO CONTINUO ISÓTROPICO

Considérese el modelo (el concepto *ecuación constitutiva* se reserva para la descripción matemática que relaciona las tensiones y las deformaciones, constituyendo un elemento particular del *modelo constitutivo*, el cual involucra, además, definiciones de energía libre, variables internas, leyes de evolución, condiciones de carga-descarga y leyes de endurecimiento/ablandamiento) hiperelástico isótropo de daño continuo con ablandamiento definido a partir de la energía libre de Helmolz^{30,29}

$$\Psi(\boldsymbol{\varepsilon}, d) = (1 - d) \Psi^0(\boldsymbol{\varepsilon}) \quad (0 \leq d \leq 1) \quad (17)$$

$$\Psi^0(\varepsilon) = \frac{1}{2} \varepsilon : \mathbf{C}^e : \varepsilon \quad (18)$$

$$\sigma = \frac{\partial \Psi(\varepsilon, d)}{\partial \varepsilon} = (1-d) \mathbf{C}^e : \varepsilon = (1-d) \bar{\sigma} \quad (19)$$

$$\dot{\sigma} = (1-d) \mathbf{C}^e : \dot{\varepsilon} - \dot{d} \mathbf{C}^e : \varepsilon = \mathbf{C}^d : \dot{\varepsilon} \quad (20)$$

$$d = 1 - \frac{q(r)}{r} \quad (0 \leq d \leq 1) \quad (21)$$

donde Ψ representa la densidad de energía libre de Helmolz y Ψ^0 la densidad de energía libre elástica; ε , σ y $\bar{\sigma}$ son, respectivamente, los tensores de deformación infinitesimal, tensión y tensión efectiva; r representa una variable interna tipo deformación; \mathbf{C}^e es el tensor isótropo de propiedades elásticas definido como $\mathbf{C}^e = \lambda \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mu \mathbf{I}$ (siendo $\mathbf{1}$ e \mathbf{I} los tensores unitarios de segundo y cuarto orden, respectivamente y λ y μ los parámetros de Lamé); \mathbf{C}^d es el tensor constitutivo tangente; d la variable interna de daño, definida en términos de la variable de endurecimiento $q(r)$ que, a su vez, evoluciona en función del parámetro de endurecimiento/ablandamiento \mathcal{H} (salvo que se especifique lo contrario, se considera un parámetro $\mathcal{H} \leq 0$, es decir, sólo se analizan casos con ablandamiento por deformación).

El modelo presentado se complementa con la ecuación de evolución de la variable interna r , el criterio de daño, las condiciones de carga-descarga, la condición de persistencia y la ley de endurecimiento que se exponen a continuación:

$$\dot{r} = \gamma, \quad r \geq r_0, \quad r_0 = \frac{\sigma_u}{\sqrt{E}} \quad (22)$$

$$f(\sigma, q) \equiv \tau_\sigma - q, \quad \tau_\sigma = \sqrt{\sigma : \mathbf{C}^{e-1} : \sigma} = \sqrt{2\Psi} \quad (23)$$

$$\gamma \geq 0, \quad f \leq 0, \quad \gamma f = 0, \quad \gamma \dot{f} = 0 \quad (24)$$

$$\dot{q} = \mathcal{H}(r) \dot{r}, \quad \mathcal{H} = \frac{\partial q(r)}{\partial r}, \quad q_0 = r_0, \quad q_0 \geq q \geq 0 \quad (25)$$

donde el parámetro γ es el multiplicador de daño involucrado en las condiciones de Kuhn-Tucker; $f(\sigma, q) = 0$ define la superficie de daño en el espacio de tensiones, acotando el dominio elástico ($\mathbf{E}_\sigma := \{(\sigma, q); f(\sigma, q) \equiv \tau_\sigma - q \leq 0\}$), en función de la norma τ_σ y de la variable de endurecimiento q y r_0 determina el dominio elástico inicial, caracterizado en función del límite elástico uniaxial σ_u y del módulo de Young E .

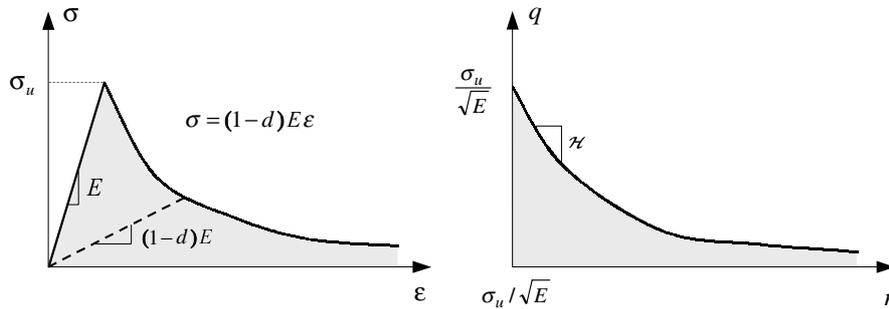


Figura 4. Modelo de daño continuo uniaxial

En la Figura 4 se representan las principales características del modelo constitutivo detallado, particularizado para el caso uniaxial.

Integración de la ecuación constitutiva

Una característica importante del modelo constitutivo expuesto en el apartado *Modelo constitutivo de daño continuo isótropo* es la posibilidad de integración analítica cerrada en términos de deformación, definiendo para ello la norma del tensor de deformaciones (en la métrica definida por \mathbf{C}^e) τ_ε siguiente:

$$\tau_\varepsilon \stackrel{def}{=} \|\bar{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\varepsilon})\|_{\mathbf{C}^{e-1}} = \sqrt{\bar{\boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C}^{e-1} : \bar{\boldsymbol{\sigma}}} = \sqrt{\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{C}^e : \boldsymbol{\varepsilon}} = \sqrt{2 \Psi_0(\boldsymbol{\varepsilon})} \quad (26)$$

$$\tau_\varepsilon = \sqrt{2 \Psi_0(\boldsymbol{\varepsilon})} \implies \tau_\sigma = (1-d) \tau_\varepsilon \quad (27)$$

donde se ha considerado la ecuación (19).

Se demuestra, teniendo en cuenta (26), la total equivalencia de los criterios de daño definidos en el espacio de tensiones o de deformaciones:

$$f(\boldsymbol{\sigma}, q) = 0 \implies \tau_\sigma - q = (1-d) \tau_\varepsilon - q = (1-d) \tau_\varepsilon - (1-d) r = 0 \quad (28)$$

$$f(\boldsymbol{\sigma}, q) = 0 \iff g(\boldsymbol{\varepsilon}, r) = (\tau_\varepsilon - r) = 0 \quad (29)$$

La integración de la variable interna r (el valor r_0 viene determinado a través de un ensayo uniaxial.; denominando σ_1 y ε_1 a la tensión y deformación obtenidas en la dirección de ensayo, r_0 equivale a $\sqrt{\boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\sigma}} = \sqrt{\varepsilon_1 \sigma_1} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{E}} = \frac{\sigma_u}{\sqrt{E}}$, tanto en casos de deformación plana como de tensión plana) en (22) puede realizarse ahora de modo directo aplicando la condición de persistencia (24) de la forma:

$$\left. \begin{array}{l} \dot{r} = \gamma \geq 0 \\ \dot{r} > 0 \implies f(\boldsymbol{\sigma}, q) = 0 \iff g(\boldsymbol{\varepsilon}, r) = 0 \iff r = \tau_\varepsilon \\ r_{t=0} = r_0 \end{array} \right\} \implies r = s \in (0, t) \max \{r_0, \tau_\varepsilon^s\} \quad (30)$$

coincidiendo con el resultado clásico obtenido para este tipo de familia de modelos constitutivos en función de la norma τ_ε^{29} . Nótese que una vez determinado el valor de r en términos de las deformaciones actuales, mediante la ecuación (30), las variables restantes ($d, \boldsymbol{\sigma}$) se obtienen de modo trivial.

Observación 1. *El modelo constitutivo detallado permite expresar las tensiones de la forma $\boldsymbol{\sigma}(t) = \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}_\tau)$, donde $\boldsymbol{\Sigma}$ es una función tensorial de la historia de deformaciones $\boldsymbol{\varepsilon}_\tau$ hasta el instante t ($\tau \in \{0, t\}$), que debe proporcionar valores acotados a las tensiones incluso para valores no acotados de las deformaciones. De modo similar, las tensiones (su tasa) pueden expresarse como $\dot{\boldsymbol{\sigma}}(t) = \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\varepsilon}_\tau, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_\tau)$, donde $\boldsymbol{\Gamma}$ debe proporcionar valores acotados a $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ incluso para valores no acotados de las deformaciones, $\boldsymbol{\varepsilon}_\tau$, y de sus tasas, $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_\tau$. Esta característica será analizada en posteriores apartados.*

ANÁLISIS DE DISCONTINUIDAD FUERTE

Mediante el análisis de discontinuidad fuerte se obtienen las condiciones que deben verificar las ecuaciones constitutivas estándar (tensión-deformación) con objeto de hacerlas compatibles con la cinemática de discontinuidad fuerte, es decir, las condiciones para las cuales la expresión (12) presente consistencia física y matemática cuando $h \rightarrow 0$ y $[[\dot{\mathbf{u}}]] \neq \mathbf{0}$ (discontinuidad fuerte).

Las hipótesis de partida consideradas en el análisis de discontinuidad fuerte son la continuidad del vector tracción (y de su derivada temporal) a través de la línea de discontinuidad \mathcal{S} (donde se ha considerado la ecuación (14d)), las cuales emergen del principio de conservación del momento de la cantidad de movimiento. Dichas hipótesis han sido consideradas en los trabajos pioneros^{44,3}; obteniéndose las siguientes expresiones:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{T}(\mathbf{x}, t) &= \underbrace{\boldsymbol{\sigma}_{\Omega \setminus \mathcal{S}}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})}_{\mathcal{T}_{\Omega \setminus \mathcal{S}}(\mathbf{x}, t)} = \underbrace{\boldsymbol{\sigma}_{\mathcal{S}}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})}_{\mathcal{T}_{\mathcal{S}}(\mathbf{x}, t)} \\ \dot{\mathcal{T}}(\mathbf{x}, t) &= \underbrace{\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\Omega \setminus \mathcal{S}}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})}_{\dot{\mathcal{T}}_{\Omega \setminus \mathcal{S}}(\mathbf{x}, t)} = \underbrace{\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathcal{S}}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})}_{\dot{\mathcal{T}}_{\mathcal{S}}(\mathbf{x}, t)} \end{aligned} \right\} \forall x \in \mathcal{S}, \forall t \in [t_{DD}, \infty) \quad (31)$$

donde \mathcal{T} representa el vector tracción, $\boldsymbol{\sigma}_{\mathcal{S}}$ el tensor de tensiones en un punto material situado en la línea de discontinuidad y $\boldsymbol{\sigma}_{\Omega \setminus \mathcal{S}}$ el tensor de tensiones en un punto material próximo al anterior situado sobre la parte continua del cuerpo $\Omega \setminus \mathcal{S}$.

La ecuación (31) puede representarse de la forma:

$$\left. \begin{aligned} \llbracket \mathcal{T} \rrbracket(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0} &= \mathcal{T}_{\Omega \setminus \mathcal{S}}(\mathbf{x}, t) - \mathcal{T}_{\mathcal{S}}(\mathbf{x}, t) \\ \llbracket \dot{\mathcal{T}} \rrbracket(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0} &= \dot{\mathcal{T}}_{\Omega \setminus \mathcal{S}}(\mathbf{x}, t) - \dot{\mathcal{T}}_{\mathcal{S}}(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \right\} \forall x \in \mathcal{S}, \forall t \in [t_{DD}, \infty) \quad (32)$$

Partiendo del conjunto de ecuaciones (32), se deducen las siguientes conclusiones:

1. El carácter regular de las deformaciones en el dominio $\Omega \setminus \mathcal{S}$ (presentan una naturaleza acotada) determina el carácter también acotado de las tensiones en dicho dominio, $\boldsymbol{\sigma}_{\Omega \setminus \mathcal{S}}$, y, por consiguiente, el del vector tracción \mathcal{T} (téngase en cuenta que $\|\mathbf{n}\| = 1$ y $\dot{\mathbf{n}} = \mathbf{0}$, obteniéndose un valor acotado de \mathbf{n}). De (32) se establece, por tanto, la naturaleza acotada del vector tracción $\mathcal{T}(\mathbf{x}, t)$ en cualquier punto material de la línea de discontinuidad \mathcal{S} . Dicha condición ($\mathcal{T}_{\Omega \setminus \mathcal{S}}$ (acotado) = $\mathcal{T}_{\mathcal{S}} = \boldsymbol{\sigma}_{\mathcal{S}} \cdot \mathbf{n}$ (acotado)) requiere la naturaleza acotada de todas las componentes de $\boldsymbol{\sigma}_{\mathcal{S}}$, con objeto de que las combinaciones lineales de las mismas también lo sean ($\mathcal{T}_{ij} = \sigma_{s_{ij}} \cdot n_j$).
2. El mismo proceso puede aplicarse a $\dot{\mathcal{T}}(\mathbf{x}, t)$, derivada temporal del vector tracción, estableciéndose el requerimiento de que el tensor derivada temporal de la tensión $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathcal{S}}$ sea acotado (aun cuando el tensor tasa de las deformaciones $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathcal{S}}$ sea no acotado).
3. La norma $\tau_{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma}_{\mathcal{S}}) = \|\boldsymbol{\sigma}_{\mathcal{S}}\|_{\mathbf{C}^{-1}} = \sqrt{\boldsymbol{\sigma}_{\mathcal{S}} : \mathbf{C}^{-1} : \boldsymbol{\sigma}_{\mathcal{S}}}$ y su derivada temporal $\dot{\tau}_{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{\tau_{\boldsymbol{\sigma}}} \boldsymbol{\sigma}_{\mathcal{S}} : \mathbf{C}^{-1} : \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathcal{S}}$ son acotadas al considerar el carácter acotado de $\boldsymbol{\sigma}_{\mathcal{S}}$ y $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathcal{S}}$.
4. La variable de ablandamiento/endurecimiento q sólo evoluciona ante situaciones de carga, una vez superado el régimen elástico, de lo que se deduce $\dot{r} = \gamma \neq 0 \Leftrightarrow \dot{q} \neq 0$ y aplicando la condición de persistencia $\gamma \dot{f} = 0$, se concluye $\dot{q} \neq 0 \Rightarrow \dot{f} = \dot{\tau}_{\sigma} - \dot{q} = 0 \Rightarrow \dot{q} = \dot{\tau}_{\sigma}$. En consecuencia, $\dot{q} \in \{0, \dot{\tau}_{\sigma}\}$ y, por tanto, queda establecido su carácter acotado.

Ecuación constitutiva discreta. Ley de ablandamiento discreto

Considérense, para un punto material de la línea de discontinuidad \mathcal{S} , las tensiones según la expresión detallada en (19), aplicando la cinemática (12) de la forma siguiente:

$$\boldsymbol{\sigma}_S = (1-d) \mathbf{C}^e : \boldsymbol{\varepsilon}_S = \frac{q(r_S)}{r_S} \mathbf{C}^e : \left[\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{1}{h} (\Delta[\mathbf{u}] \otimes \mathbf{n})^s \right] \quad (33)$$

El vector tracción en régimen de discontinuidad fuerte ($t \geq t_{DF} \Rightarrow h \equiv k \rightarrow 0$) puede expresarse como:

$$\begin{aligned} \mathcal{T} = \boldsymbol{\sigma}_S \cdot \mathbf{n} &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{q_S}{r_S} \mathbf{C}^e : \left[\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{1}{h} (\Delta[\mathbf{u}] \otimes \mathbf{n})^s \right] \cdot \mathbf{n} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{q_S}{h r_S} \mathbf{C}^e : [h \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + (\Delta[\mathbf{u}] \otimes \mathbf{n})^s] \cdot \mathbf{n} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{q_S}{h r_S} \mathbf{C}^e : (\Delta[\mathbf{u}] \otimes \mathbf{n})^s \cdot \mathbf{n} \right] \\ &= q_S \underbrace{\mathbf{Q}^e(\mathbf{n} \cdot \mathbf{C}^e \cdot \mathbf{n})}_{\text{término acotado}} \cdot \Delta[\mathbf{u}] \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{h r_S} \right) \\ &= \underbrace{q_S \mathbf{Q}^e \cdot \Delta[\mathbf{u}]}_{\text{término acotado}} \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{h r_S} \right) \end{aligned} \quad (34)$$

donde $\mathbf{Q}^e = \mathbf{n} \cdot \mathbf{C}^e \cdot \mathbf{n}$ es el denominado tensor acústico elástico⁴⁹ de carácter definido positivo. Analizando las expresiones (34), donde el vector tracción es acotado y el término $q_S \mathbf{Q}^e \cdot \Delta[\mathbf{u}]$ distinto de cero (la situación $\mathbf{Q}^e \cdot \Delta[\mathbf{u}] = \mathbf{0}$ con $\Delta[\mathbf{u}] \neq \mathbf{0}$ no se produce debido al carácter no singular de \mathbf{Q}^e), (excepto en el caso $\Delta[\mathbf{u}] = \mathbf{0}$, correspondiente a la situación de no desarrollo de la discontinuidad fuerte), se deduce, por consistencia matemática, el valor acotado del término $\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{h r_S} \right)$ y, por tanto,

$$\lim_{h \rightarrow 0} (h r_S) \neq 0 \quad \forall \Delta[\mathbf{u}] \neq \mathbf{0} \quad (35)$$

Con objeto de imponer dicha condición, se define la siguiente ley de evolución de la variable interna r_S

$$\dot{r}_S = \frac{1}{h} \dot{\bar{\alpha}} \quad \forall t \geq t_{DD} \quad \text{con } \bar{\alpha}|_{t=t_{DD}} = 0 \quad (36)$$

siendo $\bar{\alpha}$ una variable acotada (así como $\dot{\bar{\alpha}}$) denominada *variable interna discreta*.

Integrando (36) para un tiempo $t \geq t_{DF}$ (régimen de discontinuidad fuerte) se obtiene:

$$\begin{aligned} r_S &= \int_0^t \dot{r}_S dt \\ &= \underbrace{\int_0^{t_{DD}} \dot{r}_S dt}_{r_{DD}} + \int_{t_{DD}}^{t_{DF}} \frac{1}{h(\tau)} \dot{\bar{\alpha}}(\tau) d\tau + \int_{t_{DF}}^t \underbrace{\frac{1}{h(\tau)}}_{\text{constante } h \equiv k} \dot{\bar{\alpha}}(\tau) d\tau \\ &= r_{DD} + \underbrace{\int_{t_{DD}}^{t_{DF}} \frac{1}{h(\tau)} \dot{\bar{\alpha}}(\tau) d\tau}_{r_{DF}} + \frac{1}{h} \underbrace{\int_{t_{DF}}^t \dot{\bar{\alpha}}(\tau) d\tau}_{\Delta \bar{\alpha}} \\ &= r_{DF} + \frac{1}{h} \Delta \bar{\alpha} \end{aligned} \quad (37)$$

siendo

$$\begin{aligned}\Delta\bar{\alpha}_t &= \bar{\alpha}_t - \bar{\alpha}_{t_{DF}} \in [t_{DD}, \infty) \\ r_{DD} &= r_{\mathcal{S}}|_{t=t_{DD}} \\ r_{DF} &= r_{\mathcal{S}}|_{t=t_{DF}}\end{aligned}\quad (38)$$

por lo que la expresión (35) queda de la forma:

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow \mathbf{0}} (h r_{\mathcal{S}}) &= \lim_{h \rightarrow \mathbf{0}} (h r_{DF} + h \frac{1}{h} \Delta\bar{\alpha}) = \lim_{k \rightarrow \mathbf{0}} (k r_{DF} + k \frac{1}{k} \Delta\bar{\alpha}) \\ &= \Delta\bar{\alpha} \neq 0\end{aligned}\quad (39)$$

pues $\lim_{h \rightarrow \mathbf{0}} k r_{DF} = 0$ al ser r_{DF} un término acotado.

Una vez demostrado que la expresión propuesta como ley de evolución de la variable interna $r_{\mathcal{S}}$ es consistente con la ecuación (35) y permite obtener un valor acotado del vector tracción cuando $\Delta[\mathbf{u}] \neq \mathbf{0}$, el vector tracción \mathcal{T} de la ecuación (34) se expresa:

$$\mathcal{T} = \frac{q_{\mathcal{S}}}{\Delta\bar{\alpha}} \mathbf{Q}^e \cdot \Delta[\mathbf{u}] \quad \forall t \geq t_{DF} \quad (40)$$

Se resalta que la relación (40) emerge "de modo natural" de la relación constitutiva de continuo de daño isótropo en régimen de discontinuidad fuerte, no siendo necesaria la obtención, de forma explícita, de dicha relación discreta ni su implementación en el modelo numérico empleado en la simulación de la discontinuidad fuerte. Tanto el comportamiento de la parte continua del dominio Ω como el de la interfaz producida al generarse la discontinuidad pueden describirse mediante una única relación constitutiva de continuo (tensión *versus* deformación).

La ecuación (40) constituye la *ecuación constitutiva discreta*, estableciendo el valor del vector tracción \mathcal{T} en los puntos materiales de la discontinuidad en función del vector salto $\Delta[\mathbf{u}]$.

La imposición de la ley de evolución para $r_{\mathcal{S}}$ en (36) puede hacerse mediante la ley de evolución de la variable de endurecimiento q . Partiendo de (25) y (36) se tiene, para una partícula situada en \mathcal{S} y sometida al régimen de discontinuidad fuerte, la siguiente expresión:

$$\dot{q}_{\mathcal{S}} = \mathcal{H}(r_{\mathcal{S}}) \dot{r}_{\mathcal{S}} = \mathcal{H} \frac{1}{h} \dot{\bar{\alpha}} \quad (41)$$

donde tanto $\dot{q}_{\mathcal{S}}$ como $\dot{\bar{\alpha}}$ son términos de naturaleza acotada (ver sección *Normas discretas*), deduciéndose, por consistencia matemática de (41):

$$\lim_{h \rightarrow \mathbf{0}} \mathcal{H} \frac{1}{h} = \text{valor acotado y constante} \stackrel{def}{=} \bar{H} \quad (42)$$

denominando al parámetro $\bar{H} < 0$ *parámetro de ablandamiento intrínseco o discreto* (\bar{H} es considerado propiedad del material), en contraposición al parámetro de ablandamiento continuo \mathcal{H} de la ecuación (25).

Con objeto de satisfacer (42), se define \mathcal{H} de la forma:

$$\boxed{\mathcal{H}(t) = h(t) \bar{H} \quad \forall t \geq t_{DD}} \quad (43)$$

La expresión (43) se define tanto en régimen de discontinuidad fuerte (denominada entonces *condición de regularización del parámetro de ablandamiento*^{19,22}) como en régimen

de discontinuidad débil (en el contexto de modelo de ancho de banda variable referido en la sección *Cinemática de discontinuidad fuerte*).

La integración de la ecuación (41) a lo largo del tiempo, considerando (43), permite obtener la siguiente *ley discreta de ablandamiento*:

$$\dot{q}_S = \bar{H} \dot{\bar{\alpha}} \quad q_S \in [0, r_0] \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \bar{q}(\Delta\bar{\alpha}) &= q_S = \int_0^t \dot{q}_S dt \\ &= \int_0^{t_{DF}} \bar{H} \dot{\bar{\alpha}}(\tau) d\tau + \int_{t_{DF}}^t \bar{H} \dot{\bar{\alpha}}(\tau) d\tau \\ &= \underbrace{q_S|_{t=t_{DF}}}_{q_{DF}} + \bar{H} \underbrace{\int_{t_{DF}}^t \dot{\bar{\alpha}}(\tau) d\tau}_{\Delta\bar{\alpha}} \\ &= q_{DF} + \bar{H} \Delta\bar{\alpha} \not\leq 0 \end{aligned} \quad (45)$$

donde se constata la relación directa entre la variable de endurecimiento \bar{q} y la variable interna discreta $\Delta\bar{\alpha}$ en la línea de discontinuidad \mathcal{S} . La imposibilidad de adoptar valores negativos en q reside en la propia definición de la variable interna de daño d , ecuación (21), donde se limitan sus valores entre $0 \leq d \leq 1$.

La ecuación constitutiva discreta (40) se reescribe a continuación:

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \frac{q_S}{\Delta\bar{\alpha}} \mathbf{Q}^e \cdot \Delta[\mathbf{u}] = \frac{\bar{q}_S}{\Delta\bar{\alpha}} \mathbf{Q}^e \cdot \Delta[\mathbf{u}] \\ &= (1 - \omega) \frac{1}{l} \mathbf{Q}^e \cdot \Delta[\mathbf{u}] \quad \forall t \geq t_{DF} \\ \omega(\Delta\bar{\alpha}) &= 1 - \frac{\bar{q}_S}{\Delta\bar{\alpha}} l \quad \Delta\bar{\alpha} \in [0, \infty) \omega \in (-\infty, 1] \end{aligned} \quad (46)$$

entendiendo el término $\omega(\Delta\bar{\alpha})$ como una *variable discreta de daño* que varía de $\omega = -\infty$ (para $\Delta\bar{\alpha} = 0$) en el instante de inicio de la discontinuidad fuerte a $\omega = 1$ (para $\Delta\bar{\alpha} = \infty$) (el parámetro l desempeña, aquí, el papel de cualquier longitud, con el objetivo de proporcionar a $\frac{\bar{q}_S}{\Delta\bar{\alpha}} l$ un carácter adimensional). Se observa que la ecuación constitutiva discreta en (46) y la ecuación constitutiva continua en (19) y (21) exhiben el mismo formato, con la correspondencia entre variables discretas y continuas detallada en la Tabla I.

Modelo continuo	$\boldsymbol{\sigma}$	$\boldsymbol{\varepsilon}$	\mathbf{C}^e	d	r	$q(r)$
Modelo discreto	\mathcal{T}	$\Delta[\mathbf{u}]$	$\mathbf{Q}^e = \mathbf{n} \cdot \mathbf{C}^e \cdot \mathbf{n}$	ω	$\Delta\bar{\alpha}$	$\bar{q}(\Delta\bar{\alpha})$

Tabla I. Correspondencia entre variables del modelo continuo y discreto

Si se considera la base ortonormal $(\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3)$ de la Figura 5, donde el vector $\hat{\mathbf{e}}_1$ coincide con el vector unitario \mathbf{n} (normal a un punto material de la línea de discontinuidad \mathcal{S}), $\hat{\mathbf{e}}_2$ con el vector unitario \mathbf{t} (tangente a un punto material de la línea de discontinuidad \mathcal{S}) y $\hat{\mathbf{e}}_3$ con el vector unitario perpendicular al plano definido por $\hat{\mathbf{e}}_1$ y $\hat{\mathbf{e}}_2$; la ecuación constitutiva discreta (46) presenta el siguiente formato, tanto en régimen de deformación plana como de tensión plana

$$\mathcal{T} = (1 - \omega) \frac{1}{l} \mathbf{Q}^e \cdot \Delta[\mathbf{u}] = (1 - \omega) \frac{1}{l} \left[\mu \mathbf{1} + (\hat{\lambda} + \mu) \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \right] \cdot \Delta[\mathbf{u}]$$

$$\mathcal{T} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 - \omega) \frac{1}{l} (\hat{\lambda} + 2\mu) \Delta[u]_1 \\ (1 - \omega) \frac{1}{l} \mu \Delta[u]_2 \\ (1 - \omega) \frac{1}{l} \mu \Delta[u]_3 \end{bmatrix} \quad (47)$$

$$\hat{\lambda} = \begin{cases} \lambda & \text{deformación plana} \\ \frac{2\mu\lambda}{\lambda+2\mu} & \text{tensión plana} \end{cases}$$

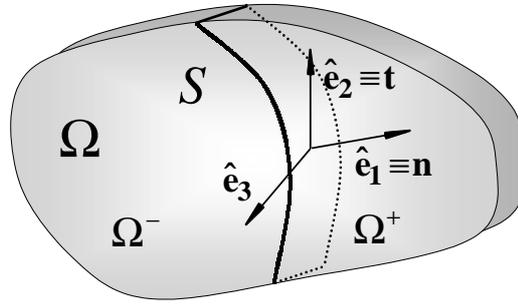


Figura 5. Base ortonormal en la superficie de discontinuidad

Energía libre discreta

Considérese la energía libre de Helmolz, ecuación (17), particularizada para una partícula perteneciente a la línea de discontinuidad \mathcal{S}

$$\Psi(\boldsymbol{\varepsilon}, r)|_{\mathbf{x} \in \mathcal{S}} = \Psi_s(\boldsymbol{\varepsilon}_s, r_s) = (1 - d_s) \Psi_s^0(\boldsymbol{\varepsilon}_s, r_s) = \frac{q_s}{r_s} \Psi_s^0(\boldsymbol{\varepsilon}_s, r_s) \quad (48)$$

donde la energía libre elástica Ψ^0 , según (18), vendría expresada como:

$$\begin{aligned} \Psi_s^0(\boldsymbol{\varepsilon}_s, r_s) &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}_s : \mathbf{C}^e : \boldsymbol{\varepsilon}_s \\ &= \frac{1}{2} \left[\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{1}{h} (\Delta[\mathbf{u}] \otimes \mathbf{n})^s \right] : \mathbf{C}^e : \left[\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{1}{h} (\Delta[\mathbf{u}] \otimes \mathbf{n})^s \right] \end{aligned} \quad (49)$$

Dentro del régimen de discontinuidad fuerte ($t \geq t_{DF} \rightarrow h \equiv k = \text{constante}$) se define la energía libre discreta φ de la forma:

$$\begin{aligned} \varphi &\stackrel{def}{=} \lim_{h \rightarrow 0} (h \Psi_s) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(h \frac{q_s}{r_s} \left[\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{1}{h} (\Delta[\mathbf{u}] \otimes \mathbf{n})^s \right] : \mathbf{C}^e : \left[\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{1}{h} (\Delta[\mathbf{u}] \otimes \mathbf{n})^s \right] \right) \\ &= (1 - \omega) \frac{1}{l} \underbrace{\Delta[\mathbf{u}] \cdot \mathbf{Q}^e \cdot \Delta[\mathbf{u}]}_{\varphi^0} \end{aligned} \quad (50)$$

$$\begin{aligned} \varphi(\omega, \Delta[\mathbf{u}]) &= (1 - \omega) \frac{1}{l} \varphi^0(\Delta[\mathbf{u}]) \\ \varphi^0(\Delta[\mathbf{u}]) &= \frac{1}{2} \Delta[\mathbf{u}] \cdot \mathbf{Q}^e \cdot \Delta[\mathbf{u}] \end{aligned} \quad (51)$$

obteniendo la denominada *energía libre de daño discreta* φ (se puede identificar como la energía libre por unidad de superficie de interfaz de discontinuidad \mathcal{S}) y su correspondiente término elástico φ^0 (al ser Ψ la energía libre por unidad de volumen, densidad de energía libre, y considerando un volumen elemental dV en la línea de discontinuidad, correspondiente a una superficie de discontinuidad diferencial dS con un ancho de banda h , se puede escribir $dV = h dS$; por lo tanto, la energía libre asociada a este volumen diferencial es $d\Psi = \Psi dV = \Psi h dS$ y la energía libre por unidad de superficie de discontinuidad resulta $\varphi = \frac{d\Psi}{dS} = h \Psi$). Nótese que tanto φ como Ψ exhiben el mismo formato en términos de las correspondientes variables detalladas en la Tabla I.

Realizando ciertas operaciones en el término Ψ_S se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi_S}{\partial \Delta[\mathbf{u}]} &= \partial_{\Delta[\mathbf{u}]} \Psi_S = \underbrace{\partial_{\varepsilon_S} \Psi_S}_{\sigma_S} : \partial_{\Delta[\mathbf{u}]} \varepsilon_S = \frac{1}{h} \sigma_S \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{h} \mathcal{T} \\ \mathcal{T} &= h \partial_{\Delta[\mathbf{u}]} \Psi_S \end{aligned} \quad (52)$$

se expresa:

$$\mathcal{T} = \lim_{h \rightarrow 0} (h \partial_{\Delta[\mathbf{u}]} \Psi_S) = \partial_{\Delta[\mathbf{u}]} \left[\lim_{h \rightarrow 0} (h \Psi_S) \right] = \partial_{\Delta[\mathbf{u}]} \varphi \quad (53)$$

que corresponde a un modelo hiperelástico discreto.

La ecuación (53) pone en evidencia una consecuencia crucial al considerar una cinemática de discontinuidades fuertes en modelos continuos (tensión-deformación): la proyección de dichos modelos continuos en modelos discretos (tracción-salto de desplazamiento). De hecho, la energía libre discreta φ , obtenida como la correspondiente energía libre del continuo Ψ en la superficie de discontinuidad, se convierte en un potencial del vector tracción \mathcal{T} , con relación al salto incremental de desplazamiento $\Delta[\mathbf{u}]$. Todo ello sugiere que puede derivarse de la energía libre discreta un modelo constitutivo discreto y, por tanto, de la inclusión de una cinemática de discontinuidad fuerte en el modelo continuo original. Esto se demuestra en los siguientes apartados.

Condiciones de discontinuidad fuerte

Como se detalló en el comienzo del apartado *Análisis de discontinuidad fuerte*, el análisis de discontinuidad fuerte se basa en el carácter acotado del vector tracción \mathcal{T} . Sin embargo, como se analizó en esa misma sección, no sólo \mathcal{T} sino también σ_S (tensor de tensiones en la línea de discontinuidad \mathcal{S}) presentan naturaleza acotada.

Considerando esta última característica de σ_S , junto a las ecuaciones (19), (21), (37), (45) y la cinemática (12), se obtiene, en régimen de discontinuidad fuerte,

$$\begin{aligned} \sigma_S = \frac{q(r_S)}{r_S} \mathbf{C}^e : \varepsilon_S &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{\bar{q}(\Delta\bar{\alpha})}{r_{DF} + \frac{1}{h} \Delta\bar{\alpha}} \mathbf{C}^e : \left[\bar{\varepsilon} + \frac{1}{h} (\Delta[\mathbf{u}] \otimes \mathbf{n})^s \right] \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{\bar{q}(\Delta\bar{\alpha})}{h r_{DF} + \Delta\bar{\alpha}} \mathbf{C}^e : [h \bar{\varepsilon} + (\Delta[\mathbf{u}] \otimes \mathbf{n})^s] \right] \\ &= \frac{\bar{q}}{\Delta\bar{\alpha}} \mathbf{C}^e : (\Delta[\mathbf{u}] \otimes \mathbf{n})^s \end{aligned} \quad (54)$$

Reescribiendo (54) se deduce la siguiente expresión:

$$(\Delta[\mathbf{u}] \otimes \mathbf{n})^s = \frac{\Delta\bar{\alpha}}{\bar{q}} \underbrace{\mathbf{C}^{e-1}}_{\hat{\varepsilon}} : \sigma_S = \frac{\Delta\bar{\alpha}}{\bar{q}} \hat{\varepsilon} \quad (55)$$

donde $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ es el *campo de deformación efectiva*, $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{C}^{e^{-1}} : \boldsymbol{\sigma} = (1 - d) \boldsymbol{\varepsilon}$. La ecuación (55) representa la denominada *ecuación de discontinuidad fuerte*^{21,22,24}, estableciendo una relación entre el tensor de tensiones $\boldsymbol{\sigma}_S$ y el vector salto de desplazamiento $\Delta[\mathbf{u}]$, que debe verificarse en régimen de discontinuidad fuerte.

Debido a la simetría de la ecuación tensorial (55), dicho sistema se reduce a un conjunto de seis ecuaciones algebraicas. Tres de estas expresiones representan las ecuaciones constitutivas discretas (40) ó (46), obteniéndose al multiplicar \mathbf{n} a ambos lados de (55) y realizar algunas operaciones algebraicas. De las tres ecuaciones restantes se obtienen expresiones que involucran a $\boldsymbol{\sigma}_S$, y constituyen las ecuaciones de discontinuidad fuerte.

Empleando la base ortonormal (Figura 5) anteriormente utilizada ($\hat{\mathbf{e}}_1 \equiv \mathbf{n}, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3$), la ecuación de discontinuidad fuerte puede expresarse de la forma:

$$\begin{bmatrix} \Delta[\mathbf{u}]_1 & \frac{1}{2} \Delta[\mathbf{u}]_2 & \frac{1}{2} \Delta[\mathbf{u}]_3 \\ \frac{1}{2} \Delta[\mathbf{u}]_2 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} \Delta[\mathbf{u}]_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{\Delta\bar{\alpha}}{\bar{q}} \begin{bmatrix} \hat{\varepsilon}_{11} & \hat{\varepsilon}_{12} & \hat{\varepsilon}_{13} \\ \hat{\varepsilon}_{12} & \hat{\varepsilon}_{22} & \hat{\varepsilon}_{23} \\ \hat{\varepsilon}_{13} & \hat{\varepsilon}_{23} & \hat{\varepsilon}_{33} \end{bmatrix} \quad (56)$$

de las que se obtienen las tres ecuaciones de discontinuidad fuerte siguientes:

$$\hat{\varepsilon}_{22} = \hat{\varepsilon}_{23} = \hat{\varepsilon}_{33} = 0 \Rightarrow [\mathbf{C}^{e^{-1}} : \boldsymbol{\sigma}_S]_{22} = [\mathbf{C}^{e^{-1}} : \boldsymbol{\sigma}_S]_{23} = [\mathbf{C}^{e^{-1}} : \boldsymbol{\sigma}_S]_{33} = 0 \quad (57)$$

Observación 2. *El sistema de ecuaciones (57) representa las condiciones de discontinuidad fuerte^{21,22,24} que imponen restricciones cruciales al estado tensional en el instante de inicio de formación de la discontinuidad fuerte. De no verificarse dichas condiciones en el momento de bifurcación del campo de deformaciones^{31,40}, instante que representa el comienzo de la formación de la discontinuidad, se imposibilitará el desarrollo de una discontinuidad fuerte ($h \rightarrow 0$), induciéndose, por tanto, una discontinuidad débil ($h \neq 0$).*

Normas discretas. Criterios de daño

Las condiciones de discontinuidad fuerte necesarias para el desarrollo del régimen de discontinuidad fuerte inducen un estado de tensiones que afecta, también, a la estructura de la norma del continuo $\tau_{\boldsymbol{\sigma}} = \|\boldsymbol{\sigma}\|_{\mathbf{C}^{e^{-1}}}$ definida en el modelo isótropo de daño continuo detallado al comienzo del presente capítulo.

Teniendo en cuenta la expresión (54):

$$\begin{aligned} \tau_{\boldsymbol{\sigma}_S} &= \sqrt{\boldsymbol{\sigma}_S : \mathbf{C}^{e^{-1}} : \boldsymbol{\sigma}_S} = \\ &= \left[\left(\frac{\bar{q}}{\Delta\bar{\alpha}} \right)^2 (\Delta[\mathbf{u}] \otimes \mathbf{n})^s : \mathbf{C}^e : (\Delta[\mathbf{u}] \otimes \mathbf{n})^s \right]^{1/2} = \\ &= \frac{\bar{q}}{\Delta\bar{\alpha}} [\Delta[\mathbf{u}] \cdot (\mathbf{n} \cdot \mathbf{C}^e \cdot \mathbf{n}) \cdot \Delta[\mathbf{u}]]^{1/2} = \frac{\bar{q}}{\Delta\bar{\alpha}} \sqrt{\Delta[\mathbf{u}] \cdot \mathbf{Q}^e \cdot \Delta[\mathbf{u}]} \end{aligned} \quad (58)$$

la ecuación (58) se reescribe, al considerar la ecuación constitutiva discreta (46) ($\Delta[\mathbf{u}] = \frac{\Delta\bar{\alpha}}{\bar{q}} \mathbf{Q}^{e^{-1}} \cdot \mathcal{T}$), de la forma:

$$\tau_{\boldsymbol{\sigma}_S} = \sqrt{\mathcal{T} \cdot \mathbf{Q}^{e^{-1}} \cdot \mathcal{T}} = \|\mathcal{T}\|_{\mathbf{Q}^{e^{-1}}} \stackrel{def}{=} \tau_{\mathcal{T}} \quad (59)$$

Las condiciones de discontinuidad fuerte (57), dentro de la interfaz de discontinuidad S , proyectan, así pues, la norma continua de las tensiones $\tau_{\boldsymbol{\sigma}} = \|\boldsymbol{\sigma}\|_{\mathbf{C}^{e^{-1}}}$ en la norma discreta de las tracciones $\tau_{\mathcal{T}} = \|\mathcal{T}\|_{\mathbf{Q}^{e^{-1}}}$ (en la métrica $\mathbf{Q}^{e^{-1}}$). Se constata, de nuevo, la correspondencia entre las variables detalladas en la Tabla I.

Se define una norma discreta del vector salto de los desplazamientos $\tau_{\Delta[\mathbf{u}]}$ en la interfaz de discontinuidad \mathcal{S} de la forma:

$$\begin{aligned} \tau_{\Delta[\mathbf{u}]} &= \sqrt{\Delta[\mathbf{u}] \cdot \mathbf{Q}^e \cdot \Delta[\mathbf{u}]} = \|\Delta[\mathbf{u}]\|_{\mathbf{Q}^e} \\ &\Downarrow \\ \tau_{\mathcal{T}} &= \frac{\bar{q}}{\Delta\bar{\alpha}} \tau_{\Delta[\mathbf{u}]} = (1 - \omega) \frac{1}{l} \tau_{\Delta[\mathbf{u}]} \end{aligned} \tag{60}$$

habiendo considerado las ecuaciones (58) y (46). La expresión (60) representa la ecuación discreta de la relación (27) que se establece entre las normas $\tau_{\boldsymbol{\varepsilon}}$ y $\tau_{\boldsymbol{\sigma}}$ del continuo.

Finalmente, el criterio de daño definido en (28) y las condiciones de carga-descarga detalladas en (24) corresponden, en su versión discreta, con:

$$f(\boldsymbol{\sigma}_{\mathcal{S}}, q) \equiv \tau_{\boldsymbol{\sigma}_{\mathcal{S}}} - q \equiv \tau_{\mathcal{T}} - \bar{q} \stackrel{def}{=} \mathcal{F}(\mathcal{T}, \bar{q}) \tag{61}$$

$$\mathcal{F} \leq 0, \quad \bar{\gamma} \geq 0, \quad \bar{\gamma} \mathcal{F} = 0, \quad \bar{\gamma} \dot{\mathcal{F}} = 0 \tag{62}$$

donde el multiplicador de daño discreto $\bar{\gamma}$ emerge de las leyes de evolución (36), (38) y (22)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta\bar{\alpha}) = \dot{\bar{\alpha}} = h\dot{r}_{\mathcal{S}} = h\gamma_{\mathcal{S}} \stackrel{def}{=} \bar{\gamma} \geq 0 \tag{63}$$

Modelo de daño discreto

En la ecuación (64) se resume el modelo constitutivo discreto que rige el comportamiento de la interfaz \mathcal{S} obtenido en el análisis de discontinuidad fuerte, que emerge del modelo constitutivo continuo (apartado *Modelo constitutivo de daño continuo isótropo*) a través de la imposición de la cinemática de discontinuidad fuerte [ecuación (9)].

El modelo constitutivo discreto (64) viene caracterizado por la variable de daño discreta ω (función de la variable interna discreta $\Delta\bar{\alpha}$) y el módulo constitutivo discreto secante (degradado) $\mathbf{Q}^s = (1 - \omega) \frac{1}{l} \mathbf{Q}^e$. Como se detalló en (46), ω varía entre $-\infty$ ($\Delta\bar{\alpha} = 0$) y 1 ($\Delta\bar{\alpha} = \infty$), obteniéndose un valor inicial de \mathbf{Q}^s infinito ($\mathbf{Q}^s = +\omega \mathbf{Q}^e$). El modelo discreto puede denominarse, por tanto, *modelo discreto de daño rígido*. En la Figura 6 pueden apreciarse los modelos constitutivos de daño continuo y discreto inducido para un caso unidimensional.

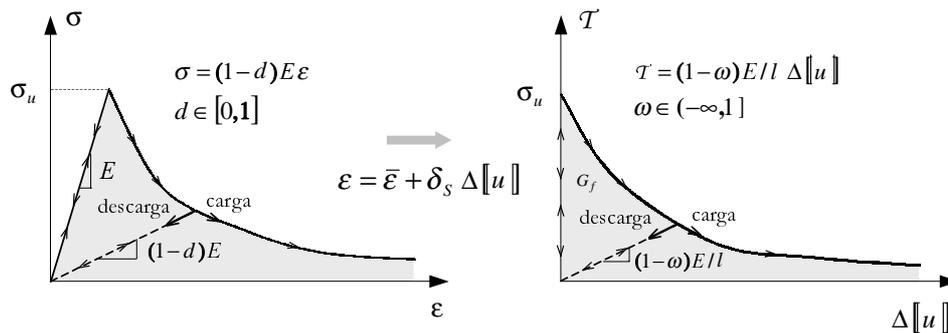


Figura 6. Modelos constitutivos de daño continuo y discreto inducido para un caso unidimensional

Conviene resaltar, de acuerdo con los razonamientos previos, que el modelo constitutivo discreto [ecuación (64)] es inducido implícitamente por la introducción de la condición de regularización del parámetro de ablandamiento [ecuación (43)] en el modelo constitutivo

continuo, por la presencia de deformaciones no acotadas que se desarrollan en la interfaz de discontinuidad, según la ecuación (12), y por la imposición de la continuidad del vector tracción (14e).

Estos ingredientes específicos son los únicos introducidos por la aproximación de discontinuidad fuerte, junto a un modelo constitutivo continuo estándar.

Energía libre	$\varphi = (1 - \omega) \frac{1}{l} \varphi^0$ $\varphi^0 = \frac{1}{2} \Delta[\mathbf{u}] \cdot \mathbf{Q}^e \cdot \Delta[\mathbf{u}]$ $\mathbf{Q}^e = \mathbf{n} \cdot \mathbf{C}^e \cdot \mathbf{n}$	(64)
Ecuación constitutiva	$\mathcal{T} = (1 - \omega) \frac{1}{l} \mathbf{Q}^e \cdot \Delta[\mathbf{u}]$	
Variable de daño	$\omega = 1 - \frac{\bar{q}(\Delta\bar{\alpha})}{\Delta\bar{\alpha}} l, \quad \omega \in (-\infty, 1]$	
Ley de evolución	$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta\bar{\alpha}) = \dot{\bar{\alpha}} = \bar{\gamma}, \quad \Delta\bar{\alpha} \in [0, \infty)$	
Criterio de daño	$\mathcal{F}(\mathcal{T}, \bar{q}) \equiv \tau_{\mathcal{T}} - \bar{q}, \quad \tau_{\mathcal{T}} = \ \mathcal{T}\ _{\mathbf{Q}^{e-1}}$	
Condiciones carga-descarga	$\mathcal{F} \leq 0, \quad \bar{\gamma} \geq 0, \quad \bar{\gamma} \mathcal{F} = 0, \quad \bar{\gamma} \dot{\mathcal{F}} = 0$	
Ley de endurecimiento	$\dot{\bar{q}} = \bar{H}(\Delta\bar{\alpha}) \dot{\bar{\alpha}} \quad (\bar{H} = \mathcal{H} \frac{1}{h}), \quad \bar{q} \in (0, q_{DF}]$ $\bar{q} _{t=t_{DF}} = q_{DF}$	

CONDICIÓN DE LOCALIZACIÓN

Partiendo del denominado análisis de bifurcación discontinua^{14,47,40,33,27,28,38,18}, se obtienen las condiciones de bifurcación de un campo de deformación inicialmente suave en uno de discontinuidad débil compatible con el equilibrio del cuerpo. Por tanto, en el instante $t = t_B$ se inicia un campo tasa de la deformación no suave, descrito en la ecuación (9).

Análisis de bifurcación discontinua en $t = t_B$

A continuación se exponen brevemente los principales puntos que constituyen el análisis de bifurcación discontinua.

La condición de equilibrio (14e), a través de la superficie de discontinuidad \mathcal{S} , requiere que el salto de la tasa del vector tracción sea cero:

$$[[\dot{\mathcal{T}}]](\mathbf{x}, t) = [\dot{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}_S, t) - \dot{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}_{\Omega^+}, t)] \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (65)$$

Suponiendo condiciones de carga en \mathcal{S} y carga neutra en $\Omega \setminus \mathcal{S}$ (mediante un análisis previo sencillo se demuestra que esta situación determina la primera posible bifurcación), y tras algunas operaciones algebraicas, se deduce de la ecuación (65) la siguiente expresión⁴⁰:

$$\mathbf{Q}^L \cdot [[\dot{\mathbf{u}}]] = \underbrace{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{C}^d \cdot \mathbf{n})}_{\mathbf{Q}^L} \cdot [[\dot{\mathbf{u}}]] = \mathbf{0} \quad (66)$$

donde \mathbf{C}^d es el tensor constitutivo tangente. El criterio para determinar el inicio de la bifurcación se basa en la detección de la singularidad del tensor de localización \mathbf{Q}^L , obteniéndose una solución no trivial para el vector velocidad del salto de desplazamientos ($[[\dot{\mathbf{u}}]] \neq \mathbf{0}$) en la ecuación (66):

$$\det [\mathbf{Q}^L(\mathbf{n}, \mathcal{H}_B)] = 0 \quad \text{para } t = t_B \quad (67)$$

representando \mathcal{H}_B un valor del módulo de ablandamiento compatible con la ecuación (67). El instante en el que dicha ecuación se verifica por primera vez, para un punto material

dado, determina el instante de bifurcación t_B para ese punto, además de permitir obtener el vector normal \mathbf{n} , el cual define la dirección de propagación de la interfaz de la discontinuidad \mathcal{S} . El valor del parámetro de ablandamiento en el instante de bifurcación es el máximo de todos los valores \mathcal{H}_B posibles⁴⁰.

En la ecuación (68) se expresan los valores del parámetro de ablandamiento continuo \mathcal{H}_B que verifican la ecuación $\det(\mathbf{Q}^L) = 0$, función de las variables de estado, tensiones, etc. y de la dirección de propagación de la discontinuidad:

$$\mathcal{H}_B = \frac{q}{r} \left[1 - \frac{r^2}{\mathbf{n} \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{Q}^{e-1} \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n}} \right] \quad (68)$$

De entre todos los valores de \mathcal{H}_B que verifican (68), el máximo de ellos, \mathcal{H}_{cr} , determinará la dirección de propagación de la discontinuidad⁴⁰, \mathbf{n}_{cr} :

$$\mathcal{H}_{cr} = \max [\mathcal{H} \in \mathcal{G}] \quad (69)$$

$$\mathcal{G} = \{ \mathcal{H} \in \mathbb{R} \mid \exists \mathbf{n} \in \mathbb{R}^{n_{\text{dim}}}; \|\mathbf{n}\| = 1; \det [\mathbf{Q}^L(\mathcal{H}, \mathbf{n})] = 0 \} \quad (70)$$

Donde \mathcal{G} representa el conjunto constituido por todos los valores de \mathcal{H} que verifican la ecuación $\det(\mathbf{Q}^L) = 0$ y presentan, al menos, una solución para \mathbf{n} y donde n_{dim} define la dimensión del problema.

Resulta interesante remarcar la posibilidad de obtener dos valores diferentes de la dirección de propagación de la discontinuidad que maximicen \mathcal{H}_B .

Si el conjunto \mathcal{G} es no vacío, las direcciones \mathbf{n}_{cr} que cumplen $\det(\mathbf{Q}^L) = 0$ para $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{cr}$ se corresponden con las posibles orientaciones de la banda de localización:

$$\mathbf{n}_{cr} \in \{ \mathbf{n} \in \mathbb{R}^{n_{\text{dim}}}; \|\mathbf{n}\| = 1; \det [\mathbf{Q}^L(\mathcal{H}_{cr}, \mathbf{n})] = 0 \} \quad (71)$$

La obtención de \mathcal{H}_{cr} y \mathbf{n}_{cr} puede llevarse a cabo mediante la aplicación del círculo de Mohr^{22,33} o empleando métodos analíticos³².

Bifurcación discontinua en régimen de discontinuidad fuerte

Los modelos elásticos degradables son susceptibles de experimentar bifurcación discontinua, produciéndose, una vez superado el régimen elástico, cuando el parámetro de ablandamiento continuo del sólido presente un valor igual o inferior a \mathcal{H}_{cr} , cota máxima del conjunto de todos los posibles parámetros de ablandamiento que verifican la condición de bifurcación discontinua $\det(\mathbf{Q}^L) = 0$. Iniciada la bifurcación discontinua, se activa la cinemática expresada en (9).

Si el estado tensional del sólido, en el instante de bifurcación, verifica las condiciones de discontinuidad fuerte (55), la cinemática requerida vendrá definida por la expresión (6), empleándose la versión regularizada (9) con fines computacionales donde $h \equiv k \rightarrow 0$.

De no verificarse las condiciones de discontinuidad fuerte en el inicio de la bifurcación discontinua, la cinemática requerida será la denominada cinemática de discontinuidad débil, caracterizada formalmente por la misma expresión regularizada (9) empleada en la representación de la discontinuidad fuerte, donde el parámetro de regularización h adopta valores no próximos a cero ($h \rightarrow 0$).

Al aplicar las condiciones de discontinuidad fuerte (55) a la ecuación (69), se obtiene un valor de \mathcal{H}_{cr} nulo, pudiéndose expresar los requisitos para el inicio de la discontinuidad fuerte en bifurcación tanto por el estado tensional descrito en (55) como por la condición $\mathcal{H}_{cr} = 0$.

Por tanto, podemos enunciar el siguiente teorema: *la condición necesaria y suficiente para que en el instante de bifurcación se produzca discontinuidad fuerte es que $\mathcal{H}_{cr} = 0$* . A continuación se detalla la demostración de dicho teorema.

Condición necesaria

Si la bifurcación se produce en régimen de discontinuidad fuerte, verificándose por tanto las condiciones de discontinuidad fuerte (55), el valor del parámetro \mathcal{H}_{cr} obtenido es nulo:

$$(\Delta[\mathbf{u}] \otimes \mathbf{n})^s = \frac{\Delta\bar{\alpha}}{\bar{q}} \mathbf{C}^{e-1} : \sigma_S \xrightarrow{t=t_{DF}=t_B} ([\dot{\mathbf{u}}]_{DF} \otimes \mathbf{n})^s = \frac{\dot{\bar{\alpha}}_{DF}}{\bar{q}_{DF}} \mathbf{C}^{e-1} : \sigma_{S_{DF}} \quad (72)$$

y premultiplicando ambos términos de la ecuación (72) por \mathbf{C}^e y posmultiplicando por \mathbf{n} se obtiene:

$$\mathbf{C}^e : ([\dot{\mathbf{u}}]_{DF} \otimes \mathbf{n})^s = \frac{\dot{\bar{\alpha}}_{DF}}{\bar{q}_{DF}} \sigma_{S_{DF}} \quad (73)$$

$$\underbrace{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{C}^e \cdot \mathbf{n})}_{\mathbf{Q}^e} \cdot [\dot{\mathbf{u}}]_{DF} = \frac{\dot{\bar{\alpha}}_{DF}}{\bar{q}_{DF}} \sigma_{S_{DF}} \cdot \mathbf{n} = \frac{\dot{\bar{\alpha}}_{DF}}{\bar{q}_{DF}} \mathcal{T}_{DF} \quad (74)$$

Considerando (36) se deduce:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\alpha}}_{DF} &= h \dot{r}_{DF} = h \frac{1}{r_{DF}} \bar{\sigma}_{S_{DF}} : \dot{\bar{\epsilon}}_{DF} = h \frac{1}{\bar{q}_{DF}} \sigma_{S_{DF}} : \dot{\bar{\epsilon}}_{DF} \\ &= h \frac{1}{\bar{q}_{DF}} \sigma_{S_{DF}} : \left[\dot{\bar{\epsilon}}_{DF} + \frac{1}{h} ([\dot{\mathbf{u}}]_{DF} \otimes \mathbf{n})^s \right] \\ &= \frac{1}{\bar{q}_{DF}} \sigma_{S_{DF}} : ([\dot{\mathbf{u}}]_{DF} \otimes \mathbf{n})^s = \frac{1}{r_{DF}} (\sigma_{S_{DF}} \cdot \mathbf{n}) \cdot [\dot{\mathbf{u}}]_{DF} \\ &= \frac{1}{\bar{q}_{DF}} \mathcal{T}_{DF} \cdot [\dot{\mathbf{u}}]_{DF} \end{aligned} \quad (75)$$

e incluyendo la última igualdad de (75) en (74) se obtienen las expresiones:

$$\mathbf{Q}^e \cdot [\dot{\mathbf{u}}]_{DF} - \frac{1}{\bar{q}_{DF}^2} (\mathcal{T}_{DF} \otimes \mathcal{T}_{DF}) \cdot [\dot{\mathbf{u}}]_{DF} = \mathbf{0} \quad (76)$$

$$\underbrace{\left[\mathbf{Q}^e - \frac{1}{\bar{q}_{DF}^2} \mathcal{T}_{DF} \otimes \mathcal{T}_{DF} \right]}_{\mathbf{A}_{DF}} \cdot [\dot{\mathbf{u}}]_{DF} = \mathbf{0} \quad (77)$$

Comparando la expresión (77) con la condición de bifurcación $\mathbf{Q}^L \cdot [\dot{\mathbf{u}}] = \mathbf{0}$ se constata el valor nulo del parámetro de ablandamiento en el inicio de la bifurcación, como se demuestra a continuación:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^L : [\dot{\mathbf{u}}] &= \mathbf{0} = \left[\frac{q}{r} \mathbf{Q}^e - \frac{1}{r^3} (q - \mathcal{H} r) \mathbf{n} \cdot \bar{\sigma} \otimes \bar{\sigma} \cdot \mathbf{n} \right] : [\dot{\mathbf{u}}] \\ &= \left[\frac{q}{r} \mathbf{Q}^e - \frac{1}{r q^2} (q - \mathcal{H} r) \mathbf{n} \cdot \sigma \otimes \sigma \cdot \mathbf{n} \right] : [\dot{\mathbf{u}}] \\ &= \frac{q}{r} \left[\mathbf{Q}^e - \frac{1}{q^3} (q - \mathcal{H} r) \mathcal{T} \otimes \mathcal{T} \right] : [\dot{\mathbf{u}}] \end{aligned} \quad (78)$$

$$\mathbf{A}_{DF} \cdot [\dot{\mathbf{u}}]_{DF} = \mathbf{0} = \left[\mathbf{Q}^e - \frac{1}{q^3} (q - \mathcal{H} r) \mathcal{T} \otimes \mathcal{T} \right] : [\dot{\mathbf{u}}] \Rightarrow \mathcal{H} = 0 = \mathcal{H}_{cr} \quad (79)$$

Condición suficiente

Si al bifurcar se obtiene un valor de \mathcal{H}_{cr} nulo, se verifican automáticamente las condiciones de discontinuidad fuerte, bifurcándose en régimen de discontinuidad fuerte.

Al ser $\mathcal{H}_{cr} = 0$, y aplicando la ecuación (68), se obtiene:

$$r^2 = \mathbf{n} \cdot \bar{\sigma} \cdot \mathbf{Q}^{e-1} \cdot \bar{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \frac{r^2}{q^2} \mathcal{T} \cdot \mathbf{Q}^{e-1} \cdot \mathcal{T} \Rightarrow q^2 = \mathcal{T} \cdot \mathbf{Q}^{e-1} \cdot \mathcal{T} \quad (80)$$

que constituye la norma discreta de los vectores tracción, expresión (59), en la métrica \mathbf{Q}^{e-1} en la interfaz de discontinuidad \mathcal{S} , inducida en la norma continua al verificarse las condiciones de discontinuidad fuerte.

La correspondencia entre la verificación de las ecuaciones de discontinuidad fuerte y el valor nulo del parámetro de ablandamiento en el inicio de la bifurcación discontinua permite determinar la cinemática a activar en el instante de bifurcación: obtenido un valor $\mathcal{H}_{cr} = 0$, la cinemática requerida será la representativa de discontinuidad fuerte, empleándose la cinemática de discontinuidad débil cuando $\mathcal{H}_{cr} \neq 0$.

La utilización de la cinemática detallada en la ecuación (12) permite activar ambos tipos de discontinuidad, dependiendo del valor del parámetro de regularización h adoptado (discontinuidad débil $\Leftrightarrow h \rightarrow 0$, discontinuidad fuerte $\Leftrightarrow h \equiv k \rightarrow 0$).

Para aquellas situaciones donde la bifurcación se produzca en régimen de discontinuidad débil ($\mathcal{H}_{cr} \neq 0$), la fase de transición entre el inicio de la bifurcación discontinua y el comienzo del régimen de discontinuidad fuerte se simulará mediante leyes de variación del ancho de banda de localización, h , función del proceso de carga.

FORMACIÓN DE DISCONTINUIDAD FUERTE. TRANSICIÓN ENTRE DISCONTINUIDAD DÉBIL Y FUERTE

Los modelos constitutivos de daño continuo isótropo detallados en el apartado *Modelo constitutivo de daño continuo isótropo*, junto a la cinemática expresada en (12), permiten simular el comportamiento de sólidos sometidos a procesos de carga exhibiendo bifurcación discontinua. Las diferentes etapas que pueden presentarse a lo largo de todo el proceso de carga son las siguientes: régimen elástico inicial, régimen de daño sin bifurcación discontinua, régimen de bifurcación discontinua débil y régimen de bifurcación discontinua fuerte. Las características de cada etapa se detallan a continuación (Figura 7):

1. Régimen elástico inicial

El comportamiento del sólido será elástico hasta que se supere el dominio elástico inicial (instante $t = t_Y$), una vez el valor de la variable interna r iguale al parámetro umbral r_0 (función del límite elástico uniaxial σ_u y del módulo de Young E). El valor de la variable interna de daño d es nulo en toda esta etapa.

El final del régimen elástico inicial viene representado por el punto Y de las gráficas a) y d) de la Figura 7.

2. Régimen de daño sin bifurcación discontinua

Alcanzada la superficie de daño, la variable interna de daño d (función de las variables de endurecimiento q e interna r , ecuación (21)) evoluciona conforme avanza el proceso de carga, así como el parámetro de ablandamiento \mathcal{H} [ecuación (25)], como se aprecia en la Figura 7. La cinemática empleada será la estándar (no exhibiendo salto en el campo de desplazamientos).

3. Régimen de bifurcación discontinua débil

El instante de inicio de la bifurcación ($t = t_B$) se obtiene mediante la comparación del valor del parámetro de ablandamiento \mathcal{H} de la ecuación (25) y el valor de \mathcal{H}_{cr} . La bifurcación discontinua se produce en el instante en el que $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{cr}$, prolongándose la discontinuidad según la dirección \mathbf{n}_{cr} , relacionada con \mathcal{H}_{cr} (Figura 7c).

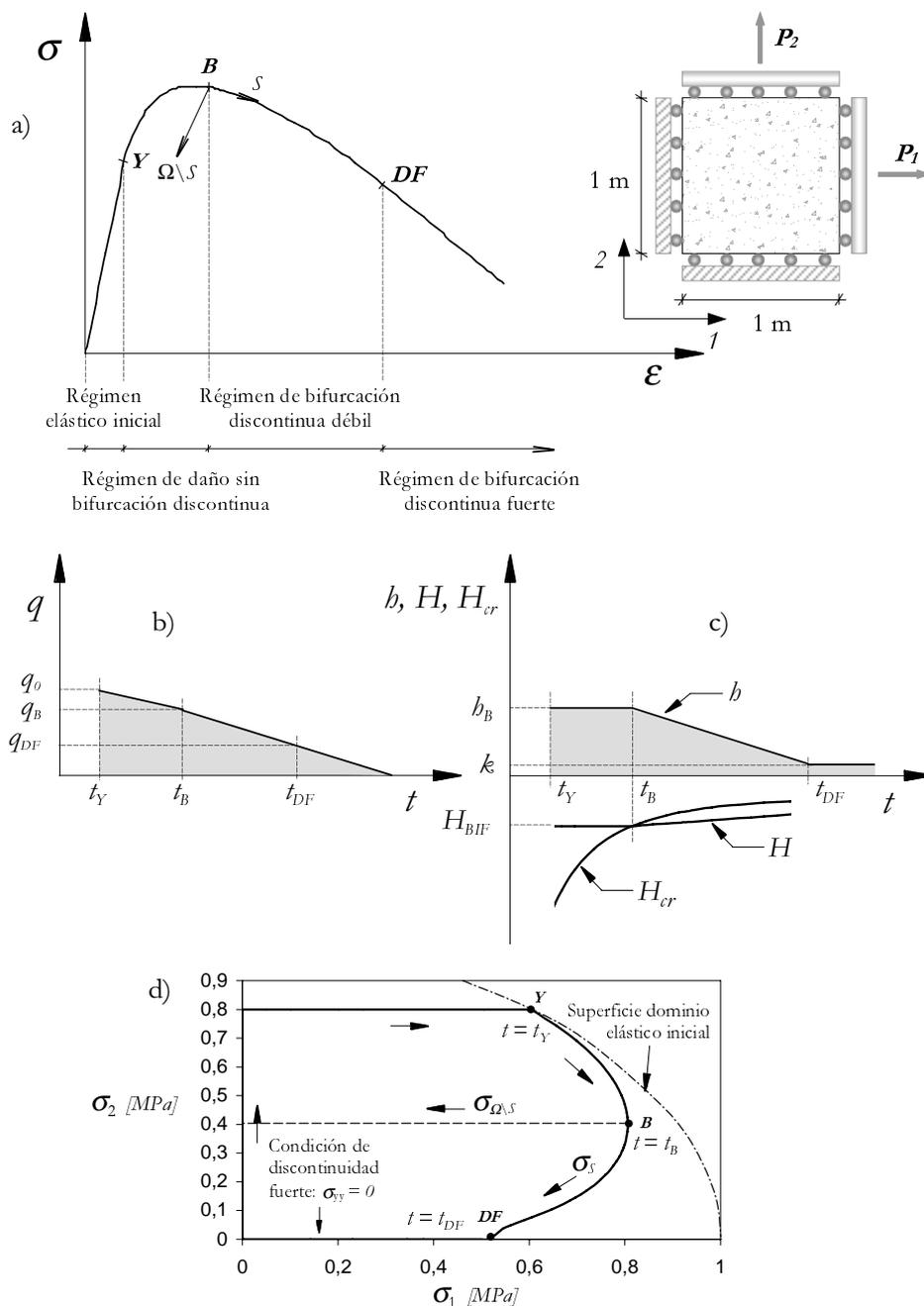


Figura 7. a) Curva σ - ϵ para un medio continuo que exhibe discontinuidades fuertes y probeta ensayada; b) variación del parámetro de endurecimiento q a lo largo del proceso de carga (tiempo); c) variación del ancho de banda h , del parámetro de ablandamiento H y de H_{cr} con el tiempo, y d) trayectoria de equilibrio, en el plano de las tensiones principales, en la superficie de discontinuidad S y en el dominio regular $\Omega \setminus S$

Si el valor de \mathcal{H}_{cr} en el instante de bifurcación, \mathcal{H}_{BIF} , presenta un valor no nulo, no se verificarán las condiciones de régimen de discontinuidad fuerte al inicio del proceso de localización, requiriéndose la cinemática representativa de discontinuidad débil, es decir, una cinemática donde el parámetro de regularización presente un valor finito mayor que cero ($h \not\rightarrow 0$). La fase de transición entre el régimen de discontinuidad débil y el de discontinuidad fuerte viene caracterizada por una ley de variación del parámetro h y por el valor inicial del mismo en el instante de bifurcación (h_B). Por consistencia entre la ley de evolución del parámetro de ablandamiento \mathcal{H} una vez producida la bifurcación [ecuación (43)] y la ley de variación del ancho de banda h se obtiene el siguiente valor de h_B :

$$\mathcal{H}_{cr}|_{t=t_B} = \mathcal{H}|_{t=t_B} = \mathcal{H}_{BIF} = h_B \bar{H} \Rightarrow h_B = \left| \frac{\mathcal{H}_{BIF}}{\bar{H}} \right| \quad (81)$$

El símbolo de valor absoluto empleado en la ecuación (81) en la definición de h_B pretende reafirmar el valor positivo del mismo, aunque no resultaría necesario teniendo en cuenta que tanto \bar{H} como \mathcal{H}_{cr} presentan valores negativos.

En la Figura 7d se observan las diferentes trayectorias de equilibrio (bifurcación) que siguen los dominios regular y de discontinuidad.

4. Régimen de bifurcación discontinua fuerte

La verificación de las condiciones de discontinuidad fuerte a lo largo del proceso de carga constituye la fase final del régimen de bifurcación discontinua exhibiendo discontinuidad débil. Una vez verificadas dichas condiciones, el parámetro de regularización h adopta el valor constante k ($h \equiv k \rightarrow 0$), permaneciendo el parámetro de ablandamiento continuo $\mathcal{H} = k\bar{H}$ (Figuras 7c y 7d).

Modelos de ancho de banda variable

La estructura del módulo de ablandamiento continuo \mathcal{H} viene definida, como se expuso en (43), de la forma

$$\mathcal{H} = h\bar{H} \quad \text{con} \quad \bar{H} \leq 0 \quad (82)$$

donde el parámetro de ablandamiento intrínseco \bar{H} se considera una propiedad del material.

En aquellos casos donde el estado tensional en el instante de la bifurcación no contemple las condiciones de discontinuidad fuerte ($\mathcal{H}_{BIF} \neq \mathcal{H}_{DF} = 0$, $h \not\rightarrow 0$), el ancho de banda en el inicio de la localización, h_B , debe exhibir un valor finito mayor que cero, requiriéndose una fase de transición entre la bifurcación en régimen de discontinuidad débil y el inicio de la discontinuidad fuerte. A continuación se describen diversas opciones en la variación del ancho de banda en la fase de transición.

Variación lineal del ancho de banda

Se define una ley de variación lineal (Figura 8) del ancho de banda h con la variable tipo tensión q , pues mantiene su carácter acotado durante todo el proceso de carga, de la forma:

$$h(q) = \begin{cases} h_B - \frac{(h_B - k)}{(q_{DF} - q_B)} (q - q_B) & \text{para } q_B \geq q \geq q_{DF} \quad (\text{transición}) \\ k & \text{para } q \leq q_{DF} \quad (\text{disc. fuerte}) \end{cases} \quad (83)$$

donde h_B y q_B representan los valores de las variables h y q en el instante de la bifurcación, respectivamente; q_{DF} el valor de q en el inicio de la discontinuidad fuerte, y k es un parámetro lo suficientemente pequeño como para poder asumir $h \simeq 0$ (a efectos físicos, basta suponer k algunos órdenes de magnitud inferior a la dimensión del problema que se esté analizando).

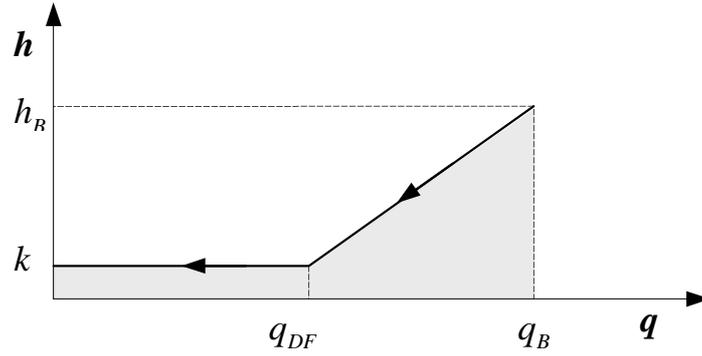


Figura 8. Modelo lineal de ancho de banda variable

Recordando la ecuación (25) del modelo de daño isótropo empleado, se tiene

$$\frac{\partial q(r)}{\partial r} = \mathcal{H} = \bar{H} h(q(r)) \quad (84)$$

y resolviendo la ecuación diferencial (84) se deduce la siguiente expresión de $q(r)$

$$q(r) = \begin{cases} \frac{(q_{DF} h_B - r_B k)}{(h_B - k)} + \chi h_B e^{\frac{\bar{H}}{\chi}(r - r_B)} & r_B \leq r \leq r_{DF} \quad (\text{transición}) \\ q_{DF} + k \bar{H} (r - r_{DF}) & r \geq r_{DF} \quad (\text{discontinuidad fuerte}) \end{cases} \quad (85)$$

donde r_B es el valor de la variable interna tipo deformación en el instante de bifurcación y r_{DF} en el inicio del régimen de discontinuidad fuerte de expresión:

$$r_{DF} = r_B + \chi \ln\left(\frac{k}{h_B}\right) \quad (86)$$

$$\chi = \frac{(r_B - q_{DF})}{(h_B - k)} \quad (87)$$

Variación automática del ancho de banda

Entre las diversas leyes de variación del ancho de banda h con la variable q que se pueden establecer, un grupo utilizado en el presente trabajo ha sido el constituido por funciones que relacionan h con el estado tensional del medio continuo, induciéndose la formación de discontinuidades fuertes ($h \equiv k \rightarrow 0$) al verificarse las condiciones de discontinuidad fuerte, es decir, cuando las tensiones que experimenta el sólido son tales que verifican las ecuaciones (55).

En este tipo de leyes es necesario determinar explícitamente las condiciones de discontinuidad fuerte del modelo constitutivo empleado.

DISIPACIÓN. ENERGÍA DE FRACTURA

Resulta interesante considerar la energía consumida en la formación de una discontinuidad material durante el intervalo de tiempo $(0, t_\infty]$, donde t_∞ representa el instante en el que tiene lugar la total decohesión de la fisura o discontinuidad.

En virtud del teorema de la fuerzas vivas, y considerando un problema cuasiestático donde la energía cinética puede despreciarse frente a la potencia tensional, la potencia introducida en un sistema por las fuerzas externas es equivalente a la potencia tensional²⁶:

$$\mathcal{P}^{ext} = \mathcal{P}^{int} = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} d\Omega \quad (88)$$

Definiendo la fracción de la potencia externa consumida en la formación del salto $[[\dot{\mathbf{u}}]]$ en la superficie de discontinuidad \mathcal{S} como \mathcal{P}_S^{int} , la energía total consumida en la formación de la discontinuidad fuerte, \mathcal{W}_S , se puede expresar como:

$$\mathcal{W}_S = \int_{t_{DF}}^{\infty} \mathcal{P}_S^{int} dt = \int_{t_{DF}}^{\infty} \int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{\sigma}_S : ([[\dot{\mathbf{u}}]] \otimes \mathbf{n})^s d\mathcal{S} dt \quad (89)$$

$$\mathcal{W}_S = \int_{t_{DF}}^{\infty} \int_{\mathcal{S}} \underbrace{(\boldsymbol{\sigma}_S \cdot \mathbf{n})}_{\boldsymbol{\tau}_S} \cdot [[\dot{\mathbf{u}}]] d\mathcal{S} dt = \int_{t_{DF}}^{\infty} \int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{\tau}_S \cdot [[\dot{\mathbf{u}}]] d\mathcal{S} dt \quad (90)$$

Considerando el modelo hiperelástico discreto (tracción-salto de desplazamiento) inducido al considerar una cinemática de discontinuidad fuerte en modelos continuos (tensión-deformación) de la ecuación (64), \mathcal{W}_S podrá expresarse de la forma:

$$\begin{aligned} \varphi(\Delta[\mathbf{u}], \Delta\bar{\alpha}) &= \frac{\bar{q}}{\Delta\bar{\alpha}} \varphi^0 = \frac{1}{2} \frac{\bar{q}}{\Delta\bar{\alpha}} \Delta[\mathbf{u}] \cdot \mathbf{Q}^e \cdot \Delta[\mathbf{u}] \\ &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\tau}_S \cdot \Delta[\mathbf{u}] = \frac{1}{2} \frac{\Delta\bar{\alpha}}{\bar{q}} \boldsymbol{\tau}_S \cdot \mathbf{Q}^{e-1} \cdot \boldsymbol{\tau}_S = \frac{1}{2} \bar{q} \Delta\bar{\alpha} \end{aligned} \quad (91)$$

donde $\varphi(\Delta[\mathbf{u}], \Delta\bar{\alpha})$ es la denominada *energía libre de daño discreta*:

$$\dot{\varphi} = \underbrace{\partial_{\Delta[\mathbf{u}]} \varphi}_{\boldsymbol{\tau}_S} \cdot [[\dot{\mathbf{u}}]] + \partial_{\Delta\bar{\alpha}} \varphi \cdot \dot{\bar{\alpha}} = \frac{1}{2} \bar{q} \dot{\Delta\bar{\alpha}} + \frac{1}{2} \bar{q} \dot{\bar{\alpha}} \quad (92)$$

y considerando las ecuaciones (91) y (60) se obtiene:

$$\partial_{\Delta\bar{\alpha}} \varphi \cdot \dot{\bar{\alpha}} = \frac{1}{2} \bar{q} \dot{\Delta\bar{\alpha}} - \frac{1}{2} \bar{q} \dot{\bar{\alpha}} \quad (93)$$

Sustituyendo (93) en (92):

$$\boxed{\boldsymbol{\tau}_S \cdot [[\dot{\mathbf{u}}]] = \bar{q} \dot{\bar{\alpha}}} \quad (94)$$

La energía consumida en la formación de una unidad de área de discontinuidad fuerte, energía de fractura G_f , viene definida por la expresión:

$$G_f = \int_{t_{DF}}^{\infty} \boldsymbol{\tau}_S \cdot [[\dot{\mathbf{u}}]] dt = \int_{t_{DF}}^{\infty} \bar{q} \dot{\bar{\alpha}} dt = \int_{t_{DF}}^{\infty} \bar{q} \frac{\dot{\bar{q}}}{\bar{H}} dt = \int_{\bar{q}_{DF}}^0 \frac{\bar{q}}{\bar{H}} d\bar{q} \quad (95)$$

donde se ha considerado la ley de endurecimiento de la ecuación (64).

En la Figura 9 se puede apreciar gráficamente el concepto de energía disipada en la formación de una discontinuidad fuerte.

Es necesario resaltar que la energía de fractura así obtenida sólo contempla el desarrollo del régimen de discontinuidad fuerte, no considerando la energía consumida en la parte de discontinuidad débil de su régimen de formación.

Para el caso concreto de parámetro de ablandamiento discreto lineal, $\bar{H} = cte.$, y considerando que la discontinuidad fuerte se produce desde el instante de bifurcación (no se produce discontinuidad débil), coincidiendo este último con el instante final del régimen elástico, la energía de fractura se expresa de la forma:

$$G_f|_{\bar{H}=cte} = \int_{\bar{q}_{DF}}^0 \frac{\bar{q}}{\bar{H}} d\bar{q} = \frac{1}{2} \frac{\bar{q}_{DF}^2}{\bar{H}} = \frac{1}{2} \frac{q_0^2}{\bar{H}} = \frac{1}{2} \frac{r_0^2}{\bar{H}} = \frac{1}{2} \frac{\sigma_u^2}{E \bar{H}} \quad (96)$$

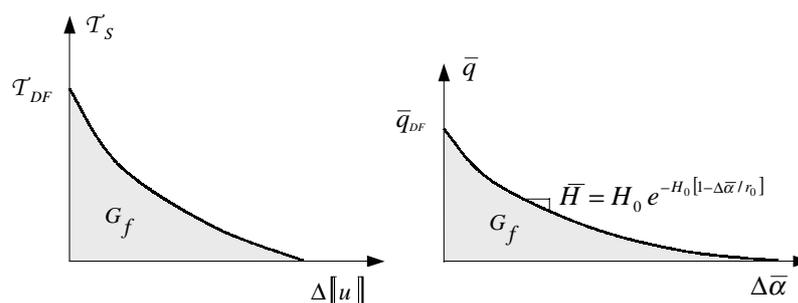


Figura 9. Energía disipada en la formación de una discontinuidad fuerte. Curvas $\mathcal{T}_s - \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket$ y $\bar{q} - \Delta \bar{\alpha}$ para un caso de ablandamiento exponencial

La energía total consumida en la formación de toda la discontinuidad fuerte, \mathcal{W}_S , se puede formular, por tanto, de la forma:

$$\mathcal{W}_S = \int_{t_{DF}}^{\infty} \int_S \mathcal{T}_s \cdot \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket dS dt = \int_S G_f dS = \int_S \int_{\bar{q}_{DF}}^0 \frac{\bar{q}}{\bar{H}} d\bar{q} dS \quad (97)$$

EJEMPLOS NUMÉRICOS

En el presente apartado se muestran simulaciones numéricas de diversos problemas de localización en medios degradables, basadas en la aproximación de discontinuidades fuertes, en régimen de deformación infinitesimal. Con estas simulaciones se pretende constatar la capacidad de dicha aproximación para predecir la respuesta estructural (tanto cualitativa como cuantitativamente) de sistemas cuyo colapso estructural viene determinado por el fenómeno de localización.

Todas las implementaciones numéricas del presente trabajo se llevaron a cabo en el programa COMET (*Coupled Mechanical and Thermal Analysis*), desarrollado en el Centro Internacional de Métodos Numéricos en la Ingeniería y en la Universidad Politécnica de Cataluña⁷.

A continuación se presenta una serie de simulaciones numéricas basadas en el modelo de daño continuo detallado en apartados anteriores sobre fractura y fisuración en el hormigón, confrontando los resultados con experimentos de laboratorio bien documentados.

Se muestran casos de propagación de fractura en modo I y mixto (según la terminología empleada en la mecánica de fractura). Aunque no existe consenso sobre la cuestión de si la fractura en modo mixto realmente existe en geomateriales como el hormigón, se presentan ejemplos típicos de dicho modo de fractura.

Placa plana con entalla con fractura modo I

La placa plana de hormigón de la Figura 10, que presenta una entalla en su borde inferior, se ha simulado adoptando un estado de tensión plana. Su geometría y sollicitación (par de fuerzas F_1 separando el interior de la entalla) se detallan en la Figura 10a.

Las características mecánicas del material son: módulo de deformación $E = 30.5 \text{ GPa}$, coeficiente de Poisson $\nu = 0.2$, energía de fractura $G_f = 100 \text{ N/m}$ y tensión última $\sigma_u = 3 \text{ MPa}$. El espesor de la placa es de 0.0508 m .

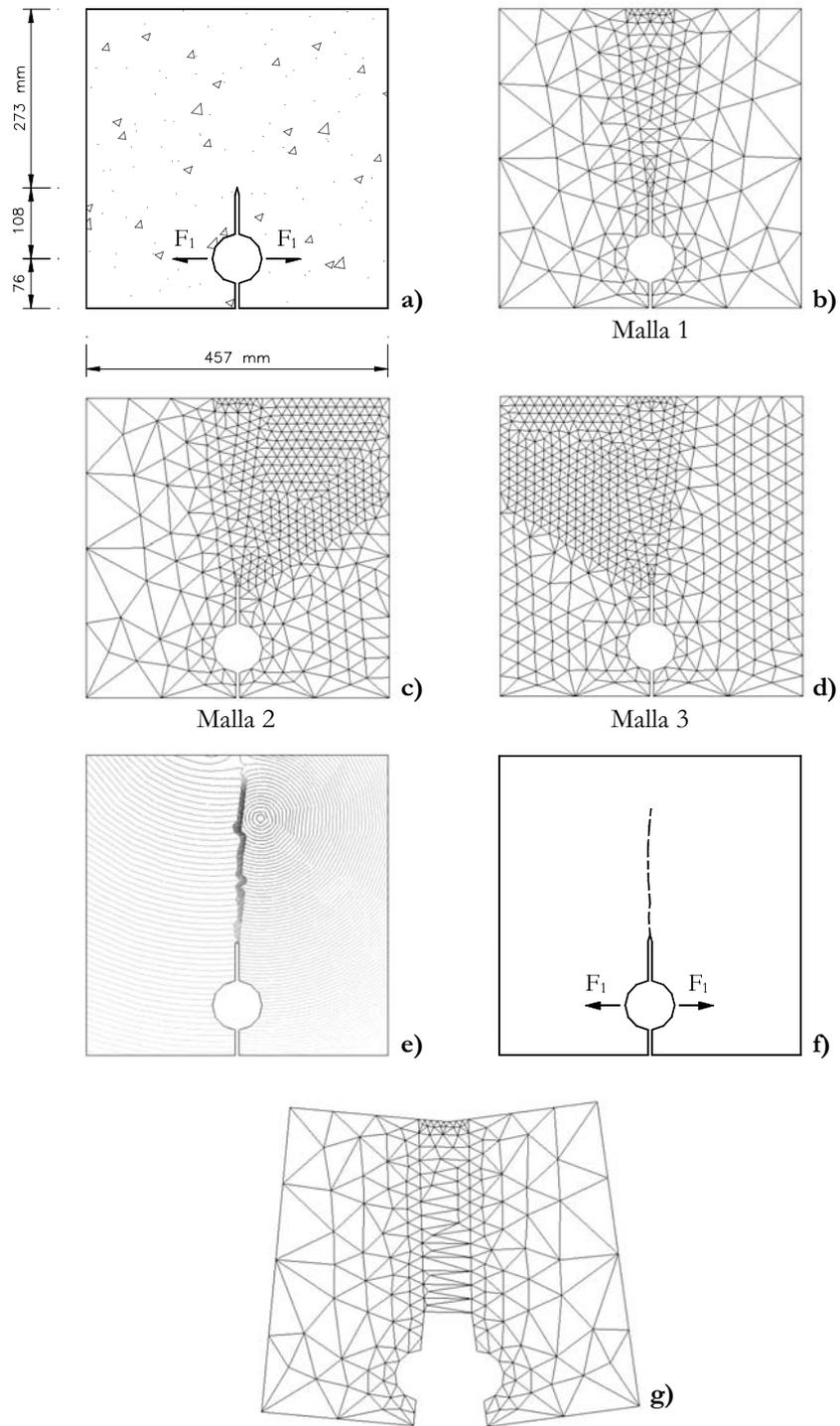


Figura 10. Placa plana de hormigón con entalla: a) geometría y cargas aplicadas; b), c) y d) mallas de elementos finitos; e) isolíneas de desplazamientos; f) trayectoria de fractura numérica y g) amplificación de la malla deformada

Con la presente simulación se pretende resaltar, en particular, la clara independencia de los resultados obtenidos con relación a la malla de elementos finitos empleada (considerando tanto el tamaño del elemento como la orientación de la malla) y con relación al valor del parámetro k de regularización.

La Figura 11a muestra la curva fuerza aplicada, F , versus abertura del extremo de la entalla, d , para tres mallas diferentes: una grosera (Figura 10b) y dos con refinamiento mayor en diferentes direcciones (Figuras 10c y 10d). La misma relación $F - d$ se muestra en la Figura 11b, donde se emplean, para una misma malla determinada, cuatro valores diferentes del parámetro k .

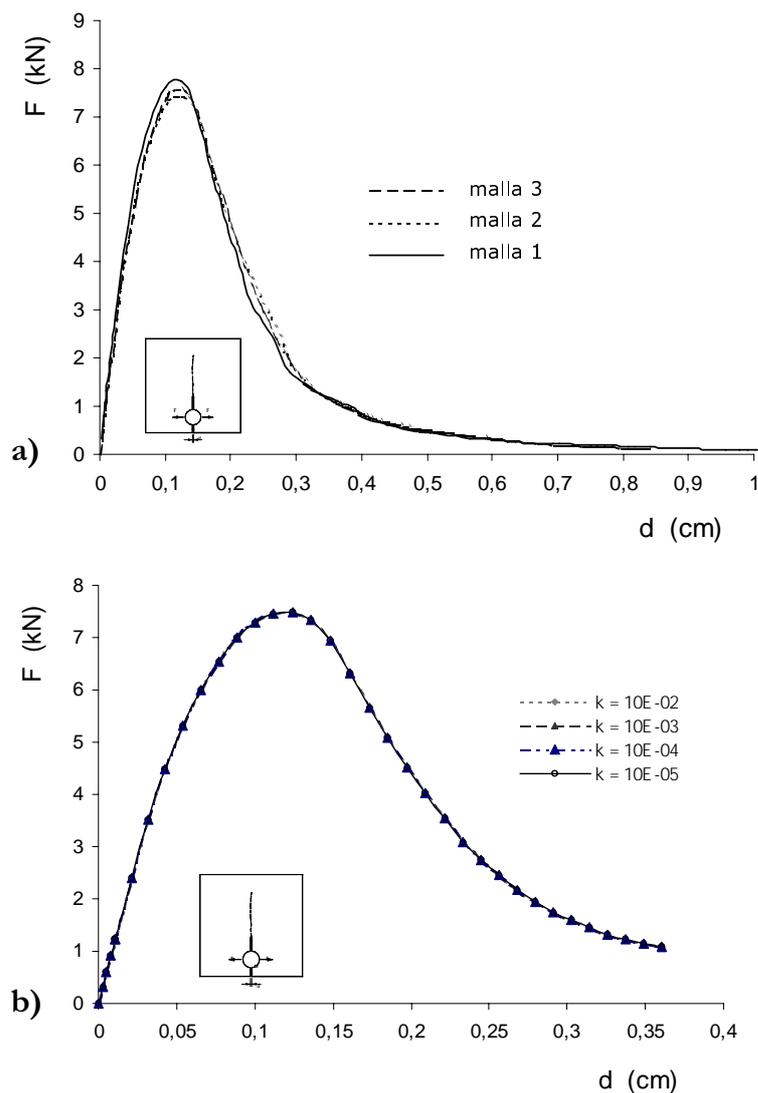


Figura 11. Placa plana de hormigón con entalla: a) curva $F - d$ para tres mallas diferentes y b) curva $F - d$ para diferentes valores del parámetro k , considerando una única malla

Placa plana con entalla con cargas diagonales

Se simula numéricamente la misma placa plana anterior, pero solicitada de forma diferente. La pieza se encuentra sometida a un par de fuerzas F_1 separando el interior de la entalla y a otro par de fuerzas de compresión diagonales F_2 (Figura 12a), aplicadas progresivamente como se indica en la Figura 12b, con objeto de inducir una fisura en modo mixto. Dicha fisura se desarrolla desde el extremo de la entalla hacia el borde superior de la placa con una inclinación de 71° respecto a la horizontal de la pieza (Figura 13b).

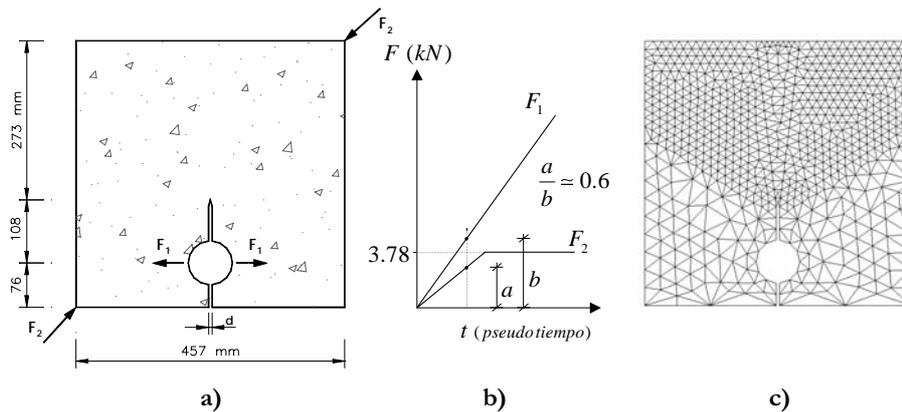


Figura 12. Placa con entalla con cargas diagonales: a) geometría y cargas aplicadas; b) proceso de carga y c) malla de elementos finitos

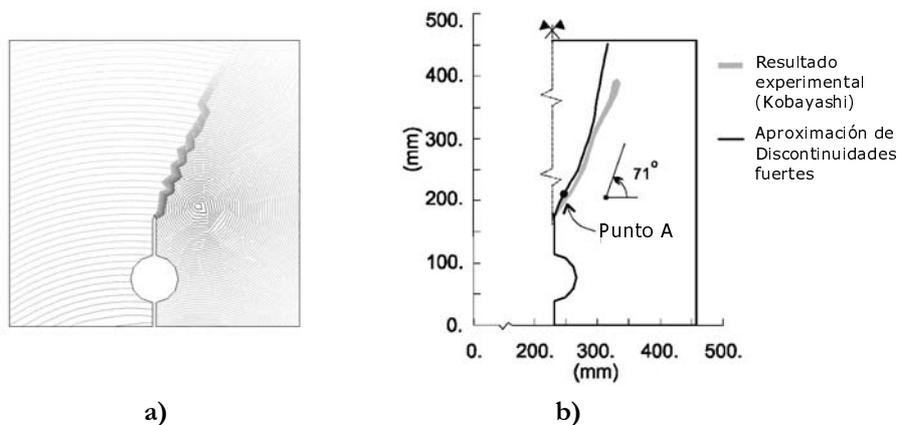


Figura 13. Placa con entalla con cargas diagonales: a) iso-líneas de desplazamiento y b) trayectoria de la fisura

Los resultados teóricos obtenidos en la relación salto tangencial-salto normal a la superficie de la fisura (Figura 14b), en el punto A de la placa (Figura 13b), evidencian que al ser el salto tangencial de un orden menor que el salto normal, no podría considerarse del todo una fractura en modo mixto, sino más bien en modo I.

Kobashashi y colaboradores realizaron este ensayo experimentalmente¹³, con el que se contrasta los resultados obtenidos numéricamente con la aproximación de discontinuidades fuertes. Rots³⁹ realizó una simulación numérica del mismo basándose en la aproximación de fisura distribuida.

La malla de elementos finitos triangulares enriquecidos empleada se puede apreciar en la Figura 12c (constituida por 1332 elementos).

En la Figura 13b se puede comparar la trayectoria de la fractura obtenida numéricamente en la simulación con la experimental de los ensayos de Kobashashi¹³.

La Figura 14a muestra la curva carga F_1 aplicada *versus* abertura del extremo de la entalla d . Al compararla con los resultados experimentales se aprecia una ligera sobreestimación de la carga límite y una buena aproximación de la fase poscrítica.

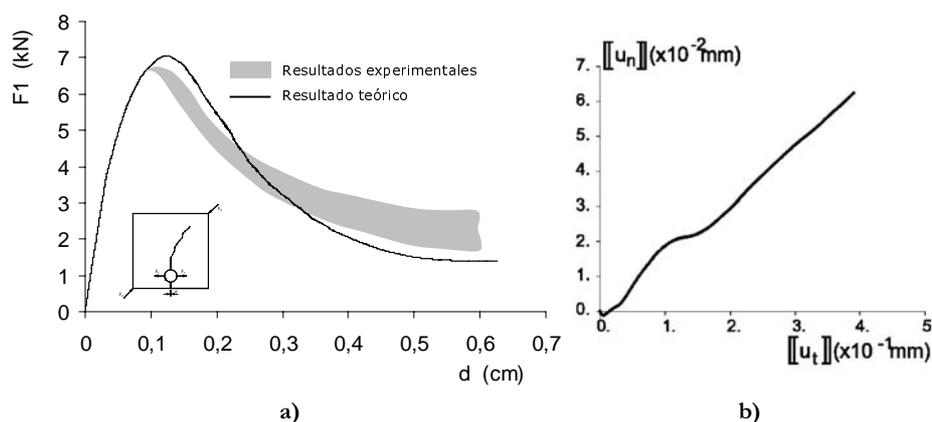


Figura 14. Placa con entalla con cargas diagonales: a) curva fuerza F_1 *versus* abertura en el extremo de la entalla d y b) salto de desplazamiento normal *versus* salto de desplazamiento tangencial a la superficie de la fisura en el punto A

Flexión de vigas con entalla sometidas a fuerzas en tres y cuatro puntos

Se han simulado numéricamente, empleando la aproximación de discontinuidades fuertes, una serie de ensayos experimentales llevados a cabo por Gálvez y colaboradores¹², donde desarrollan un procedimiento de ensayo novedoso en fractura en modo mixto en hormigón sometido a un proceso de carga no proporcional.

La Figura 15a muestra la geometría de dos diferentes piezas de ensayo, dependiendo de la condición de contorno del muelle. Un valor de la rigidez del muelle igual a cero ($K = 0$) representa un ensayo a flexión sometido a fuerzas en tres puntos, mientras que un valor infinito ($K = \infty$) sería un ensayo a flexión sometido a fuerzas en cuatro puntos.

La malla de elementos finitos empleada en la simulación (compuesta de 1600 elementos triangulares lineales enriquecidos) se muestra en la Figura 15b.

Las características mecánicas del material considerado son: módulo de deformación $E = 38 \text{ GPa}$, coeficiente de Poisson $\nu = 0.18$, tensión última $\sigma_u = 3.0 \text{ MPa}$ y energía de fractura $G_f = 69 \text{ N/m}$. El espesor de la pieza es $t = 50 \text{ mm}$.

Las trayectorias de las fisuras numéricas se aproximan muy bien a las experimentales (Figura 15c). Nótese que diferentes valores de la rigidez del muelle (K) producen diferentes trayectorias de fisura. En la Figura 15d se puede apreciar una amplificación del conjunto de elementos deformados que capturan la discontinuidad cerca de la entalla.

En las Figuras 15e (caso $K = \infty$) y 15f (caso $K = 0$), se muestran las curvas carga P *versus* CMOD (abertura de los labios de la fisura, *crack mouth opening displacement*) obtenidas en la simulación numérica, constatándose la buena aproximación obtenida con relación a la banda envolvente de resultados experimentales.

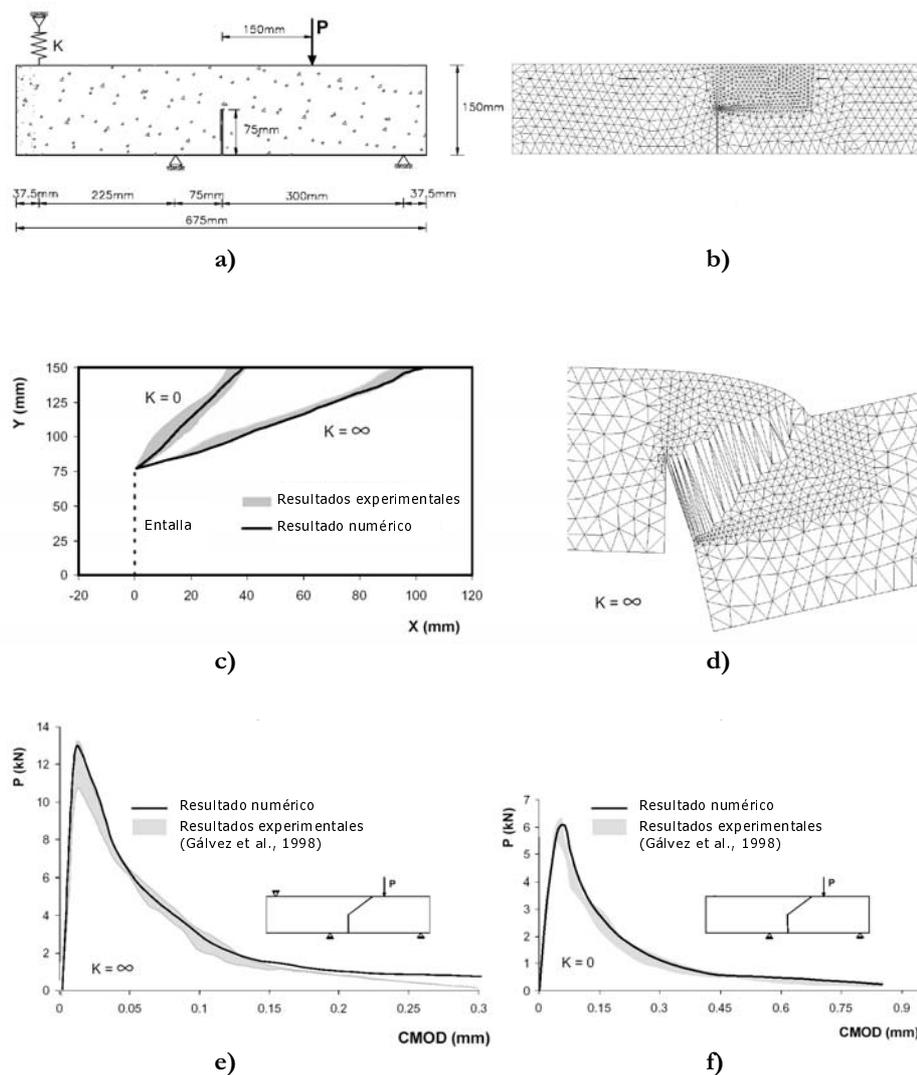


Figura 15. Ensayos a flexión de vigas sometidas a fuerzas en tres y cuatro puntos: a) geometría y cargas aplicadas; b) malla de elementos finitos; c) envolventes experimentales y predicciones numéricas de las trayectorias de las fisuras; d) amplificación de la malla deformada; e) curva $P-CMOD$ para $K = \infty$ y f) curva $P-CMOD$ para $K = 0$

La Figura 16a exhibe el carácter de modo mixto que presenta la fractura a través de la curva salto tangencial *versus* salto normal a la superficie de discontinuidad ($K = \infty$).

En la Figura 16b se muestran las trayectorias tensión horizontal *versus* salto de desplazamiento normal a la fisura, en la punta de la entalla, para un proceso de carga cíclico: al alcanzarse el punto B de la gráfica, comienza el proceso de descarga hasta relajarse las tensiones totalmente en el punto C; posteriormente, vuelve a cargarse la pieza hasta que se produce el colapso total. La fisura se inicia en el punto A, al alcanzarse la máxima tensión, continuando un proceso de carga (con ablandamiento) hasta el punto B, donde se inicia la descarga; a partir de este punto tiene lugar una descarga elástica hasta alcanzar el punto

C donde la fisura se ha cerrado completamente y las tensiones se han relajado. Al volver a cargar la estructura se produce un comportamiento elástico hasta alcanzar el punto B y, a continuación, se desarrolla la trayectoria B-D en régimen de carga (con ablandamiento).

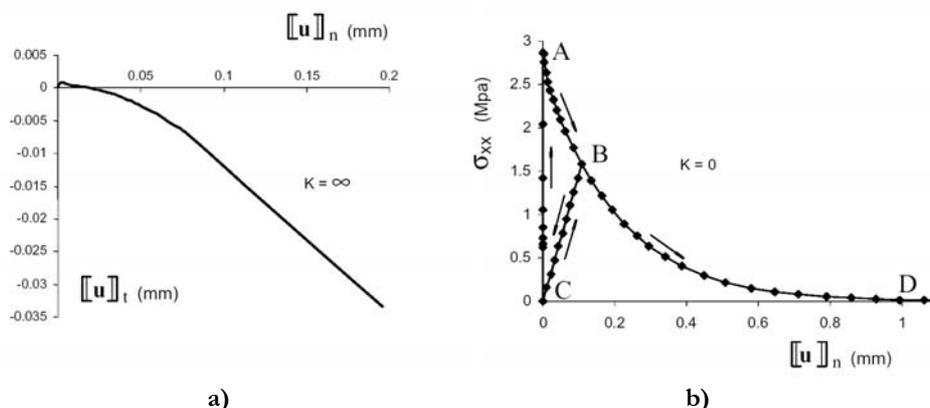


Figura 16. Ensayos a flexión de vigas sometidas a fuerzas en tres y cuatro puntos: a) curva salto de desplazamiento normal *versus* salto de desplazamiento tangencial (a la superficie de la fisura) ($K = \infty$) y b) curva tensión horizontal *versus* salto de desplazamiento normal a la fisura en la punta de la entalla ($K = 0$)

CONCLUSIONES

El modelo teórico desarrollado en el presente artículo se ha aplicado en la simulación numérica de diversos ejemplos que exhiben fenómenos de localización.

Se destacan las principales conclusiones que se han extraído:

- La aproximación de continuo de discontinuidades fuertes constituye un método eficaz, desde el punto de vista computacional, en la simulación numérica de fenómenos de localización.

Del análisis de discontinuidad fuerte se extrae información sobre los modelos discretos (tracción-salto desplazamiento) que gobiernan el comportamiento de la línea de discontinuidad. Estos modelos *emergen* de modo natural de los continuos de los que proceden al aplicar una cinemática de discontinuidad fuerte, pero no se implementan explícitamente en el algoritmo, constituyendo una característica específica frente a otro tipo de aproximaciones, pues un único modelo continuo, junto a la cinemática de discontinuidad fuerte, permite modelar el comportamiento de la totalidad del medio a lo largo de todo el proceso de carga. Por otro lado, la obtención de los modelos discretos puede resultar pesada en determinados modelos constitutivos continuos.

- El análisis de discontinuidad fuerte permite obtener todos los ingredientes necesarios para afirmar que los modelos discretos inducidos o proyectados por la cinemática de discontinuidad fuerte se constituyen en auténticos *modelos constitutivos*, heredando muchas de las propiedades del modelo continuo del que proceden. Es interesante resaltar una propiedad que no conservan: la isotropía del modelo continuo se transforma en anisotropía en el discreto, caracterizando el concepto direccional de la fisura o localización.

- Se constata que el parámetro de regularización k empleado en la cinemática de discontinuidad fuerte no representa ningún papel de *longitud característica* en el problema al obtenerse respuestas objetivas con amplios rangos del mismo.
- El empleo de tensores constitutivos tangentes algorítmicos constituye una valiosa herramienta en la simulación numérica de problemas de fallo material a gran escala.

Por todo lo analizado en el presente artículo, se puede concluir que la aproximación de continuo de discontinuidades fuertes, basada en modelos degradables en deformaciones infinitesimales, provee un marco consistente, robusto y computacionalmente eficaz para el análisis del fallo material en sólidos.

REFERENCIAS

- 1 F. Armero, "Localized anisotropic damage of brittle materials", *Computational Plasticity, Fundamentals and Applications*, D.R.J. Owen, E. Oñate and E. Hilton (Eds.), CIMNE, pp. 635–640, Barcelona, (1997).
- 2 F. Armero y K. Garikipati, "Recent advances in the analysis and numerical simulation of strain localization in inelastic solids", *Computational Plasticity, Fundamentals and Applications*, D.R.J. Owen, E. Oñate and E. Hilton (Eds.), CIMNE, pp. 547–561, Barcelona, (1995).
- 3 F. Armero y K. Garikipati, "An analysis of strong discontinuities in multiplicative finite strain plasticity and their relation with the numerical simulation of strain localization in solids", *Int. J. Solids and Structures*, Vol. **33**, N° 20-22, pp. 2863–2885, (1996).
- 4 T. Belytschko, J. Fish y B. Engelman. "A finite element with embedded localization zones", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. **70**, pp. 59–89, (1988).
- 5 D. Bigoni y D. Zaccaria, "On strain localization analysis of elastoplastic materials at finite strains", *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. **50**, pp. 993–1013, (2001).
- 6 R. De Borst, L. J. Sluys, H. B. Mulhaus y J. Pamin, "Fundamental issues in finite element analyses of localization of deformation", *Engineering Computations*, Vol. **10**, pp. 99–121, (1993).
- 7 M. Cervera, C. Agelet y M. Chiumenti, "Comet: Coupled mechanical and thermal analysis. Data input manual", *Technical report CIMNE N° IT-308*, Universidad Politècnica de Catalunya, Barcelona, (2002).
- 8 Y. F. Dafalias, "Common misunderstanding in finite deformation anisotropic plasticity", *Proc. Int. Conference on Computational Plasticity V, Fundamentals and Applications*, D.R.J. Owen, E. Oñate and E. Hilton (Eds.), CIMNE, pp. 367–378, Barcelona, (1997).
- 9 E. N. Dvorkin, A. M. Cuitino y G. Gioia, "Finite elements with displacement embedded localization lines insensitive to mesh size and distortions", *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. **30**, pp. 541–564, (1990).
- 10 M. Elices, G. V. Guinea, J. Gomez y J. Planas, "The cohesive zone model: advantages, limitations and challenges", *Eng. Fract. Mech.*, Vol. **69**, pp. 137–163, (2003).
- 11 K. Garikipati y T. J. R. Hughes, "A study of strain-localization in a multiple scale framework. The one dimensional problem", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, p. 159, (1998).
- 12 J. C. Gálvez, M. Elices, G. V. Guinea y J. Planas, "Mixed mode fracture of concrete under proportional and nonproportional loading", *International Journal of Fracture*, Vol. **94**, pp. 267–284, (1998).
- 13 A. S. Kobayashi, M. N. Hawkins, D. B. Barker y B. M. Liaw, "Fracture process zone of concrete", *Application of fracture mechanics to cementitious composite*, S. P. Shah (Ed.), Marinus Nuijhoff Publications, pp. 25–50, Dordrecht, (1985).

- 14 R. Larsson, K. Runesson y S. Sture, “Embedded localization band in undrained soil based on regularized strong discontinuity theory and finite element análisis”, *Int. J. Solids and Structures*, Vol. **33**, N° (20-22), pp. 3081–3101, (1996).
- 15 R. Larsson, P. Steinmann y K. Runesson, “Finite element embedded localization band for finite strain plasticity based on a regularized strong discontinuity”, *Mechanics of Cohesive Frictional Materials*, Vol. **4**, pp. 171–194, (1998).
- 16 R. Lofti y P. Benson Ching, “Embedded representation of fracture in concrete with mixed finite elements”, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. **38**, pp. 1307–1325, (1995).
- 17 L. Malvern, “*Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*”, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, (1969).
- 18 J. Mandel, “Conditions de stabilité et postulat de drucker”, *Rheology and Soil Mechanics*, J. Kravtchenko and P. Sirieys (Eds.), Springer, pp. 58–68, Berlin, (1966).
- 19 O. Manzoli, “Un modelo analítico y numérico para la simulación de discontinuidades fuertes en la mecánica de sólidos”, Tesis Doctoral, Dpto. de Resistencia de Materiales de la Universidad Politécnica de Cataluña, Barcelona, (1998).
- 20 A. Molinari y R. J. Clifton, “Analytical characterization of shear localization in thermoviscoplastic materials”, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. **54**, pp. 806–812, (1987).
- 21 J. Oliver, “Continuum modelling of strong discontinuities in solid mechanics using damage models”, *Computational Mechanics*, Vol. **17**, N° (1-2), pp. 49–61, (1995).
- 22 J. Oliver, “Modelling strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations”, Monografía de CIMNE, N° 28, Barcelona, (1995).
- 23 J. Oliver, “Modeling strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equation. Part 2: Numerical simulation”, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **39**, N° 21, pp. 3601–3623, (1996).
- 24 J. Oliver, “Modeling strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations. Part 1: Fundamentals”, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **39**, N° 21, pp. 3575–3600, (1996).
- 25 J. Oliver, “On the discrete constitutive models induced by strong discontinuity kinematics and continuum constitutive equations”, *International Journal Solids and Structures*, Vol. **37**, pp. 7207–7229, (2000).
- 26 J. Oliver y C. Agelet, “*Mecánica de medios continuos para ingenieros*”, Edicions UPC, Barcelona, (2000).
- 27 J. Oliver, M. Cervera y O. Manzoli, “On the use of J2 plasticity models for the simulation of 2D strong discontinuities in solids”, *Computational Plasticity, Fundamentals and Applications*, D. Owen, E. Onate and E. Hinton (Eds.), CIMNE, pp. 38–55, (1997).
- 28 J. Oliver, M. Cervera y O. Manzoli, “On the use of strain-softening models for the simulation of strong discontinuities in solids”, R. de Borst and E. van der Giessen, (1998).
- 29 J. Oliver, M. Cervera, S. Oller y J. Lubliner, “Isotropic damage models and smeared crack analysis of concrete”, *SCIC Computer aided analysis and design of concrete structures*, N. B. et al. Structures (Ed.), Pineridge Press, pp. 945–957, Swansea, (1990).
- 30 J. Oliver y M. D. G. Pulido, “On the use of strain-softening damage constitutive equations to model cracking of concrete”, *Proc. EURO-C. Computational Modelling of Concrete Structures*, de Borst et al. (Ed.), pp. 363–372, Bakelma, Rotterdam, (1998).
- 31 N. S. Ottosen y K. Runesson, “Acceleration waves in elasto-plasticity”, *J. Solids Struct.*, Vol. **29**, pp. 135–159, (1991).

- 32 N. S. Ottosen y K. Runesson, "Properties of discontinuous bifurcation solutions in elastoplasticity", *J. Solids Struct.*, Vol. **2**, N° 4, pp. 401–421, (1991).
- 33 G. Pijaudier-Cabot y A. Benallal, "Strain localitation and bifurcation in a nonlocal continuum", *Int. J. Solids Structures*, Vol. **30**, N° 13, pp. 1761–1775, (1993).
- 34 J. Planas y M. Elices, "Nonlinear fracture of cohesive materials", *International Journal of Fracture*, Vol. **51**, pp. 139–157, (1992).
- 35 J. Planas, M. Elices y G. V. Guinea, "Cohesive cracks versus non local models: closing the gap", *International Journal of Fracture*, Vol **63**, pp. 173–187, (1993).
- 36 J. Planas, M. Elices, G. V. Guinea, J. Gomez, D. A. Cendón e I. Arbilla, "Generalization and specialization of cohesive cracks models", *Eng. Fract. Mech.*, Vol. **70**, pp. 1759–1776, (2003).
- 37 R. Regueiro y R. I. Borja, "A finite element model of localized deformation in frictional materials taking a strong discontinuity approach", *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. **33**, pp. 283–315, (1999).
- 38 J. R. Rice, "The localization of plastic deformation", *Theoretical and Applied Mechanics, Proc. 14th IUTAM Congress*, W.T. Koiter (Ed.) , North-Holland Publishing Co., pp. 207–220, Delft, The Netherlands, (1976).
- 39 J. G. Rots, "Computational modeling of concrete fractures", Doctoral Thesis, Delft University of Technology, (1988).
- 40 K. Runesson, N. S. Ottosen y D. Peric, "Discontinuos bifurcation of elasticplastic solutions at plane stress and plane strain", *International Journal of Plasticity*, Vol. **7**, pp. 99–121, (1991).
- 41 J. Simo, "Numerical Analysis of Classical Plasticity", *Handbook for Numerical Analysis, Vol. IV*, P.G. Ciarlet and J.J. Lions (Eds.), Elsevier Sc., (North-Holland), (1998).
- 42 J. Simo, F. Armero y R. Taylor, "Improved versions of assumed enhanced strain tri-linear elements for 3D finite deformations", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. **110**, pp. 359–386, (1993).
- 43 J. Simo y J. Oliver, "A new approach to the analysis and simulation of strong discontinuities", *Fracture and Damage in Quasi-brittle Structures*, Z.P. Bazant et al. (Ed.), E & FN Spon, pp. 25–39, (1994).
- 44 J. Simó, J. Oliver y F. Armero, "An analysis of strong discontinuities induced by strain-softening in rate-independent inelastic solids", *Computacional Mechanics*, Vol. **12**, pp. 277–96, (1993).
- 45 I. Stakgold, "*Boundary Value Problems of Mathematical Physics*", Macmillan, New York, (1968).
- 46 V. Tvergaard, "Studies of elastic-plastic instabilities", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. **66**, pp. 3–9, (1999).
- 47 K. C. Valanis, "On the uniqueness of solution of the initial value problem in softening materials", *Journal of Applies Mechanics*, Vol. **52**, pp. 649–653, (1985).
- 48 I. Vardoulakis, "Stability and bifurcation in geomechanics: strain localization in granular materials", Lecture Notes, Universidad Politécnica de Cataluña, October, (1999).
- 49 K. Willam y N. Sobh, "Bifurcation analysis of tangential material operators", *Trasient/Dynamic Analysis and Constitutive Laws for Engineering Materials, C4*, G. N. Pande y J. Middleton (Eds.), Martinus-Nijhoff Publishers, pp. 1–13, (1987).