Puntos conjugados. Ecuación de Jacobi

Antonio Lechuga Álvaro, Dr. Ing. de Caminos, Canales y Puertos, Académico correspondiente de la RAMZ.

1. Introducción

Para estudiar la segunda variación en el cálculo variacional una estrategia de las más completas es aplicar la llamada ecuación de Jacobi y determinar los puntos conjugados.Desde un punto de vista práctico vamos a aplicar el procedimiento a algunos casos que clarificarán e ilustrarán la potencia de la teoría de Jacobi y su extensión a otros campos afines. Comenzaremos con las trayectorias parabólicas de un cuerpo en el campo gravitatorio.

2. Trayectorias parabólicas

El problema variacional se expresa como,

$I = \int_a^b \sqrt{(u^2 - 2gy)}\sqrt{(1 + y'^2)}dx$

La solucíón es,
$y = tag(\alpha)x - \dfrac{g}{2u^2}(1 + tag^2(\alpha))x^2$

Esta es la solución que parte del origen de coordenadas con una velocidad , u , y ángulo α y pasa por un punto,$B(x_b, y_b)$
Aplicamos la teoría de Jacobi, calculando la envolvente de todas las trayectorias,que consiste en derivar la solución por α,y eliminar α,entre esta y la derivada, obteniendo,
$y = \dfrac{u^2}{2g} - \dfrac{g}{2u^2}x^2$
En general, para cada dos puntos A y B, hay dos parábolas que resuelven la ecuación de Euler y hay que usar la condición de Jacobi. Esta teoría dice que dado el punto inicial, A,tenemos que encontrar su punto conjugado. Este punto conjugado es precisamente el punto de tangencia de cada parábola con la envolvente calculada. Por tanto aquella parábola cuyo punto, B,se encuentre antes de tocar a la envolvente cumple la condición de mínimo. si el punto,B, se encuentra más allá de la tangencia , no la cumple. En otra palabras: El punto conjugado de uno de los extremos debe estar fuera del intervalo, AB.

3. Catenaria

El problema variacional de la catenaria se escribe como,

$I = \int_a^b y\sqrt{1 + y'^2}dx$
La solución de la ecuación de Euler correspondiente es,
$y = c\cosh(\dfrac{x-b}{c})$
En general en catenarias con la misma directrix hay dos soluciones de la ecuación

de Euler que pasan por un mismo punto.En este caso las tangentes a las catenarias en los puntos conjugados se cortan en la directrix, por lo tanto la catenaria de mayor, c , cumple la condición de Jacobi.
Analíticamente la ecuación de Jacobi tiene como solución,

$u = \sinh(\frac{a-x}{c}) - (\frac{x-a}{c})\sinh(\frac{x-b}{c})\sinh(\frac{a-b}{c})$
Sin olvidar que, u ,no debe de tener otro cero salvo en los puntos de apoyo.

4. Pandeo en columnas esbeltas

En columnas esbeltas la disminución de la energía potencial,
$U = P\sigma = Pl - \int_0^l \cos\varphi ds$
,que ha de compensarse con la energía de flexión,
$U_1 = \int_0^l \frac{EI}{2}(\frac{d\varphi}{ds})^2 ds$
Para pequeños valores de φ
$\cos(\varphi) = 1 - \frac{1}{2}\varphi^2$, y también, $ds \simeq dx$
Obtenemos, por tanto,
$I = \int_0^l (EI\varphi^{'2} - P\varphi^2)dx$
La ecuación de Euler se escribe,
$\varphi^{''} + \alpha^2\varphi = 0$
siendo, $\alpha^2 = \frac{P}{EI}$
La solución de esta ecuación diferencial, como sabemos es,
$\varphi = C_1 \sin(\alpha x) + C_2 \cos(\alpha x)$
La ecuación de Jacobi se expresa como,
$F_{\varphi\varphi}u + F_{\varphi\varphi'}u^{'} - \frac{d}{dx}(F_{\varphi\varphi'}u) - \frac{d}{dx}(F_{\varphi'\varphi'}u^{'})$

En nuestro caso ,$F_{\varphi'\varphi'} = 2EI, F_{\varphi\varphi} = -2P, F_{\varphi\varphi'} = 0$
La ecuación de Jacobi es por tanto,
$u^{''} + \alpha^2 u = 0$
$u = A\sin(\alpha x)$
Ahora bien, el punto conjugado del origen es el siguiente cero de u. Para que no haya puntos conjugados a lo largo de l, ha de ser $l \leq \frac{\pi}{\alpha}$ o lo que es lo mismo, $\alpha^2 < \frac{\pi^2}{l^2}$,luego $P < \frac{EI\pi^2}{l^2}$
que es la carga critica de Euler.

5. Problema isoperimétrico

¿Cuál es la superficie de mayor área envuelta por una curva de longitud, 2L , y el eje de las x entre los puntos 0 y 2a?
La función variacional es,
$I = \int_0^{2a}(y - \lambda\sqrt{i + y'^2}dx$
La ecuación de Euler después de una primera integración es.

$-\frac{y^{'}}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{x-c_1}{\lambda}$
La solución es,
$(x-c_1)^2 + (y-c_2)^2 = \lambda^2$,es decir un arco de circunferencia.
La ecuación de Jacobi se escribe,
$F_{yy}u + F_{yy'}u^{'} - \frac{d}{dx}(F_{yy'}u + F_{y'y'}u^{'}) = 0$
en donde$F_{yy} = 0, Fyy^{'} = 0, y, F_{y'y'} = \frac{-\lambda y^{'}}{\sqrt{1+y'^2}}$
y es,$(x-a)\frac{du}{dx} = C$
La solución de esta ecuación diferencial es,
$u = C\ln(\frac{x-a}{a})$

En uno de los extremos, $u(2a) = 0$ y es un punto conjugado. sin embargo entre 0 y 2a no hay
puntos conjugados con lo que estamos ante un máximo.

6. Lineas geodésicas
En una esfera, usando coordenadas esféricas,
$x = R\cos\varphi\sin\theta$
$y = R\sin\varphi\sin\theta$
$z = R\cos\theta$
la función variacional que da la mínima distancia entre dos puntos se escribe,
$I = R\int_{\theta_0}^{\theta_1}\sqrt{1+\sin^2\theta\varphi'^2}d\theta$
La solución de la ecuación de Euler correspondiente es,
$\frac{\sin^2\theta\varphi^{'}}{\sqrt{1+\sin^2\theta\varphi'^2}} = C_1$
$\varphi + \beta = \arccos(\frac{\tan\alpha}{\tan\theta})$
que es un arco de circulo máximo. La ecuación de Jacobi es,

$F_{\varphi\varphi}u + F_{\varphi\varphi'}u^{'} - \frac{d}{dx}(F_{\varphi\varphi'}u) - \frac{d}{dx}(F_{\varphi'\varphi'}u^{'}) = 0$
La solución se puede escribir como,

$\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}(\frac{\partial\varphi}{\partial\beta})_{\theta_0} - (\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha})_{\theta_0}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta} = 0$
$\frac{1}{\sqrt{\tan^2\theta - \tan^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{\tan^2\theta_0 - \tan^2\alpha}}$
que solo se cumple para ,$\theta = \theta_0 + n\pi$
Es decir, el punto conjugado del inicial se encuentra al otro lado del diámetro del circulo máximo, por lo que la geodésica es un mínimo solo si el arco es menor que un semicírculo.