

# Consideraciones sobre la aplicación del método de Ritz en la teoría de placas anisótropas

Liz Graciela Nallim y Ricardo Oscar Grossi

ICMASA, Facultad de Ingeniería  
Universidad Nacional de Salta  
Avenida Bolivia 5150  
4440 Salta, Argentina  
Tel.: ; Fax: 0054-387-425 53 51  
e-mail: lnallim@unsa.edu.ar  
e-mail: grossiro@unsa.edu.ar

## Resumen

En este trabajo se realizan ciertas consideraciones sobre las integrales curvilíneas que intervienen en el planteamiento de los problemas de contorno y autovalores que describen el comportamiento estático y dinámico de placas anisótropas con contornos elásticamente restringidos. También se realizan consideraciones sobre las condiciones de contorno en la aplicación del método de Ritz.

## CONSIDERATIONS ON THE APPLICATION OF THE RITZ METHOD IN THE ANISOTROPIC PLATES THEORY

## Summary

In this work they are carried out certain considerations on the curvilinear integrals which intervene in the set up of boundary and eigenvalue problems which describe the static and dynamic behavior of anisotropic plates with elastically restrained boundaries. Relating questions to the boundary conditions in the application of the Ritz method are also analyzed.

## INTRODUCCIÓN

Los problemas de autovalores y/o de contorno que describen situaciones físicas pueden ser obtenidos a partir de principios físicos mediante técnicas variacionales. En el estudio del comportamiento estático y dinámico de cuerpos deformables el enfoque variacional es una herramienta esencial. Un caso concreto lo constituye la determinación de las expresiones analíticas de las condiciones de contorno de placas anisótropas con bordes elásticamente restringidos. Dichas expresiones analíticas no son fáciles de obtener sin el uso del cálculo de variaciones.

Existe una gran cantidad de textos y trabajos de investigación que tratan sobre la formulación por medio de técnicas del cálculo de variaciones, de las ecuaciones diferenciales y las condiciones de contorno que describen el comportamiento estático y/o dinámico de placas<sup>1–10</sup>.

Por otra parte se han desarrollado varios textos sobre el comportamiento de placas anisótropas<sup>11–15</sup>. No obstante, el estudio de placas anisótropas con características mecánicas complejas, tales como, restricciones elásticas en el contorno, espesor variable y presencia de puntos angulosos en el contorno, ha recibido muy poco tratamiento<sup>16–21</sup>.

En la práctica, es muy difícil o imposible lograr que los bordes de una placa tengan apoyos rígidamente empotrados o simplemente apoyados. En rigor, los apoyos reales representan una situación intermedia entre los dos tipos de apoyos ideales mencionados. Esto implica que es importante la construcción de un modelo matemático que contemple restricciones elásticas a lo largo de los bordes. Por esta razón en este trabajo se analiza el comportamiento de una placa anisótropa con contorno elásticamente restringido contra rotación y translación. La presencia de estos vínculos elásticos genera términos adicionales en la expresión de la energía de deformación del sistema mecánico en estudio. Los términos mencionados se plantean mediante integrales curvilíneas respecto de la longitud de arco, debido a que las restricciones elásticas están uniformemente distribuidas a lo largo del contorno de la placa. Por lo tanto, se requiere un adecuado manejo de las integrales curvilíneas involucradas en el proceso de determinación, por vía variacional, de los problemas de contorno o de autovalores correspondientes. En este trabajo se analizan en detalle ciertas propiedades de las integrales curvilíneas involucradas en las energías de los vínculos elásticos antes mencionados.

Por otra parte, el correspondiente problema de contorno y autovalores que describe el comportamiento dinámico de una placa anisótropa con contorno elásticamente restringido, entre otras complejidades, es imposible de resolver en forma exacta. Además, si bien se pueden obtener soluciones aproximadas mediante métodos variacionales como el de Ritz, la construcción de funciones coordenadas que satisfagan las correspondientes condiciones de contorno es muy compleja o imposible. Es bien conocida la propiedad que establece que en la construcción de las funciones coordenadas es posible ignorar las denominadas condiciones de contorno naturales o inestables<sup>9,10</sup> y que al considerar una gran cantidad de términos en la función aproximante se observa convergencia a los resultados exactos correspondientes. No obstante, cuando se aplica el método de Ritz con una función aproximante que consta, por ejemplo, de uno o dos términos, es conveniente que los mismos satisfagan todas las condiciones de contorno y, si esto no es posible, entonces deben imponerse expresiones analíticas aproximadas a las originales. Este último procedimiento ha sido usado con éxito<sup>19,20</sup>. En el presente trabajo se realizan ciertas consideraciones sobre la construcción de funciones coordenadas y el tratamiento de las condiciones de contorno para una placa rectangular anisótropa.

## EL FUNCIONAL DE ENERGÍA

Sea una placa que en la posición de equilibrio cubre un dominio bidimensional  $\Omega$  tal como se muestra en la Figura 1. A efectos de generalizar los resultados, se considera que la placa está constituida por material compuesto laminado simétrico respecto del plano medio, que el borde está elásticamente restringido a la rotación y translación y que se aplica una fuerza distribuida  $q = q(x_1, x_2, t)$  sobre  $\Omega$ . Se supone que el vínculo rotacional está caracterizado por el coeficiente  $c_R(s)$  y el translacional por  $c_T(s)$ , donde  $s$  denota la longitud de arco a lo largo del contorno  $\partial\Omega$ . Se considera que los desplazamientos transversales del sistema mecánico en estudio están dados en cada instante  $t$  por la función  $w = w(x_1, x_2, t)$ ,  $(x_1, x_2) \in \bar{\Omega}$ , donde es  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ .

De la teoría de placas delgadas es bien conocido que la energía cinética de la misma en el instante  $t$  está dada por

$$T(w) = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \rho h \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx_1 dx_2 \quad (1)$$

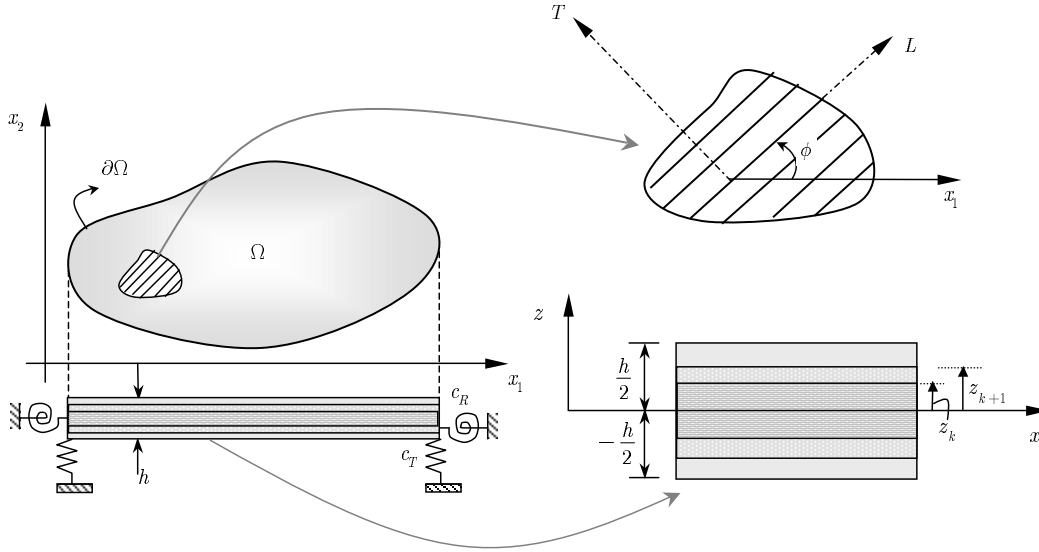
donde  $\rho$  denota la densidad del material de la placa  $h$  y es el espesor de la misma. A su vez, la energía potencial total está dada por la suma de la energía de deformación elástica de la placa, la energía potencial de la carga  $q = q(x_1, x_2, t)$  y las energías almacenadas en los

vínculos que restringen el contorno  $\partial\Omega$ . Por lo tanto, en el instante  $t$  la energía potencial total está dada por

$$\begin{aligned}
 U(w) = & \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left[ D_{11} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right)^2 + D_{22} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right)^2 + 2D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + 4D_{66} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 + \right. \\
 & + 4 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \left( D_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + D_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) - 2qw \Big] dx_1 dx_2 + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} c_R(s) \left( \frac{\partial w}{\partial n} \right)^2 ds + \\
 & + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} c_T(s) w^2 ds
 \end{aligned} \tag{2}$$

donde  $\frac{\partial(\bullet)}{\partial n}$  denota a la derivada respecto de la coordenada normal  $n$  al contorno de la placa y  $D_{ij}$  a los coeficientes de rigidez de la placa laminada. Estos están dados por<sup>13</sup>:

$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{N_c} \bar{Q}_{ij}^{(k)} (z_{k+1}^3 - z_k^3)$ , donde  $\bar{Q}_{ij}^{(k)}$  son los elementos de la matriz constitutiva que son función de los cuatro coeficientes independientes  $E_L$ ,  $E_T$ ,  $G_{LT}$  y  $\nu_{LT}$  (o  $\nu_{LT} = \frac{E_T}{E_L} \nu_{LT}$ ) y del ángulo  $\phi_k$  entre el eje  $x_1$  y la dirección de ortotropía  $L_k$  de cada capa ( $k$ ) (Figura 1).



**Figura 1.** Sistema mecánico en estudio

La integral  $\frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} c_R(s) \left( \frac{\partial w}{\partial n} \right)^2 ds$  representa la energía de deformación almacenada a lo largo del borde de la placa por acción del vínculo rotacional. En forma análoga, la integral  $\frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} c_T(s) w^2 ds$  representa la energía de deformación debida al vínculo traslacional.

Por otra parte, es bien conocido el denominado principio de Hamilton<sup>7</sup>, el cual requiere que entre dos instantes de tiempo  $t_0$  y  $t_1$  en los que la posición del sistema se conoce, el movimiento que este efectúa sea el que hace estacionario al funcional  $F(w) = \int_{t_0}^{t_1} (T - U) dt$  en el espacio de las funciones admisibles. En consecuencia, el funcional a considerar está dado por

$$\begin{aligned}
F(w) = & \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \iint_{\Omega} \left[ \rho h \left( \frac{\partial w}{\partial n} \right)^2 - D_{11} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right)^2 - D_{22} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right)^2 - 2D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} - \right. \\
& \left. - 4D_{66} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 - 4 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \left( D_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + D_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) + 2qw \right] dx_1 dx_2 dt - \\
& - \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_{\partial\Omega} c_R(s) \left( \frac{\partial w}{\partial n} \right)^2 ds dt - \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_{\partial\Omega} c_T(s) w^2 ds dt
\end{aligned} \quad (3)$$

La condición que establece que el funcional (3) es estacionario es

$$\delta F(w, v) = 0, \forall v \in \mathcal{D}_0 \quad (4)$$

donde  $\mathcal{D}_0$  denota al espacio de las direcciones admisibles en el punto  $w$  del dominio  $\mathcal{D}$  del funcional mencionado. Si se supone  $w(x_1, x_2, \bullet) \in C^2[t_0, t_1]$ ,  $w(\bullet, \bullet, t) \in C^4(\bar{\Omega})$  y que el contorno está rígidamente empotrado, y dado que las posiciones en los instantes  $t_0$  y  $t_1$  son conocidas, el dominio del funcional (3) está dado por

$$\begin{aligned}
\mathcal{D} = & \{w; w(x_1, x_2, \bullet) \in C^2[t_0, t_1], w(\bullet, \bullet, t) \in C^4(\bar{\Omega}), w(x_1, x_2, t)|_{\partial\Omega} = 0 \\
& \left. \frac{\partial w}{\partial n}(x_1, x_2, t) \Big|_{\partial\Omega} = 0, w(x_1, x_2, t_0) = w_0, w(x_1, x_2, t_1) = w_1 \right\}
\end{aligned} \quad (5)$$

donde  $w_0$  y  $w_1$  son las funciones que describen las posiciones del sistema en los instantes mencionados. Las direcciones admisibles  $v$  en  $w \in \mathcal{D}$  son aquéllas para las cuales se verifica que  $w + \varepsilon v \in \mathcal{D}$  para todo  $\varepsilon$  suficientemente pequeño. Entonces, en virtud de (5),  $v$  es una dirección admisible en  $w$  para  $\mathcal{D}$  si, y sólo si,  $v \in \mathcal{D}_0$ , donde

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_0 = & \{v; v(x_1, x_2, \bullet) \in C^2[t_0, t_1], v(\bullet, \bullet, t) \in C^4(\bar{\Omega}), v(x_1, x_2, t)|_{\partial\Omega} = 0 \\
& \left. \frac{\partial v}{\partial n}(x_1, x_2, t)|_{\partial\Omega} = 0, v(x_1, x_2, t_0) = v_0, v(x_1, x_2, t_1) = 0, \forall (x_1, x_2) \in \bar{\Omega} \right\}
\end{aligned} \quad (6)$$

En el caso de otras condiciones de contorno el procedimiento de construcción del espacio  $\mathcal{D}_0$  es totalmente análogo.

Si se aplica la definición de variación de Gateaux<sup>7</sup>, del funcional  $F$  en  $w$  y en la dirección  $v$ , resulta

$$\begin{aligned}
\delta F(w; v) = & \left. \frac{dF(w + \varepsilon v)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \int_{t_0}^{t_1} \iint_{\Omega} \left[ \rho h \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial t} - D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} - \right. \\
& - D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} - D_{12} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} \right) - 4D_{66} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} \right) - \\
& - 2D_{16} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} \right) - 2D_{26} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + \\
& \left. + qw \right] dx_1 dx_2 dt - \int_{t_0}^{t_1} \int_{\partial\Omega} c_R(s) \frac{\partial w}{\partial n} \frac{\partial v}{\partial n} ds dt - \int_{t_0}^{t_1} \int_{\partial\Omega} c_T(s) wv ds dt
\end{aligned} \quad (7)$$

Para transformar las integrales que contienen derivadas de  $w$  respecto de las variables  $x_i$ , es necesario recurrir a la conocida fórmula de integración por partes de Green

$$\iint_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = \int_{\partial\Omega} uv n_i ds - \iint_{\Omega} v \frac{\partial u}{\partial x_i} dx, u, v \in C^{(1)}(\bar{\Omega})$$

donde  $n_i$  denota la  $i$ -ésima componente del versor normal exterior al contorno  $\partial\Omega$ . Nuevamente aparece una integral curvilínea respecto de la longitud de arco, la cual en el desarrollo analítico que a continuación se detalla produce términos que podrán combinarse con los proporcionados por las integrales curvilíneas que dan las energías de deformación de los vínculos a lo largo del borde de la placa. Al aplicar integración por partes con respecto a la variable  $t$  en el primer término de (7) y la fórmula de Green en los que contienen derivadas de  $w$  respecto de las variables  $x_i$  resulta

$$\begin{aligned} \delta F(w, v) = & \int_{t_0}^{t_1} \left[ - \iint_{\Omega} \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} v dx_1 dx_2 + \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial^2 M_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial x_2^2} + 2 \frac{\partial^2 H_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} + q \right) v dx_1 dx_2 - \right. \\ & - \int_{\partial\Omega} (N_1 n_1 + N_2 n_2) v ds + \int_{\partial\Omega} \left( M_1 \frac{\partial v}{\partial x_1} n_1 + M_2 \frac{\partial v}{\partial x_2} n_2 + H_{12} \frac{\partial v}{\partial x_1} n_2 + H_{12} \frac{\partial v}{\partial x_2} n_1 \right) ds - \\ & \left. - \int_{\partial\Omega} \left( c_R \frac{\partial w}{\partial n} \frac{\partial v}{\partial n} + c_T w v \right) ds \right] dt \end{aligned} \quad (8)$$

donde es

$$\begin{aligned} M_1 = & - \left( D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + 2 D_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right), \quad M_2 = - \left( D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + 2 D_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \\ H_{12} = & - \left( D_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + D_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + 2 D_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right), \quad N_1 = - \frac{\partial M_1}{\partial x_1} - \frac{\partial H_{12}}{\partial x_2}; \quad N_2 = - \frac{\partial M_2}{\partial x_2} - \frac{\partial H_{12}}{\partial x_1} \end{aligned}$$

## PROBLEMA DE CONTORNO Y AUTOVALORES

De acuerdo con la condición (4), la expresión (8) debe anularse para la función  $w$  que describe el desplazamiento de los puntos del plano medio de la placa para todas las direcciones admisibles  $v$  y, en particular, para aquellas direcciones que satisfacen a lo largo de  $\partial\Omega$  las condiciones

$$v(x_1, x_2, t)|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial v(x_1, x_2, t)}{\partial x_1} \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial v(x_1, x_2, t)}{\partial x_2} \Big|_{\partial\Omega} = 0 \quad (9)$$

En este caso de (4) y (8) resulta

$$\begin{aligned} \delta F(w, v) = & \int_{t_0}^{t_1} \left[ \iint_{\Omega} \left( - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 M_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial x_2^2} + 2 \frac{\partial^2 H_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} + q \right) v dx_1 dx_2 \right] dt = 0, \forall v \in \mathcal{D}_0 \end{aligned} \quad (10)$$

La propiedad de continuidad de las funciones involucradas en el integrando de (10) y las condiciones (9) que  $v$  satisface permiten aplicar el lema fundamental del cálculo de variaciones según el cual necesariamente debe verificarse

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left( D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left( D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + \\ & + \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \left( 2D_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + 4D_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - q = 0 \\ & \forall (x_1, x_2) \in \Omega, \forall t \end{aligned} \quad (11)$$

Ésta es la conocida ecuación diferencial a derivadas parciales de cuarto orden que describe el comportamiento dinámico de una placa anisótropa cuando ejecuta vibraciones transversales.

Si ahora se quitan las condiciones (9), dado que  $w$  debe satisfacer la ecuación (11), la expresión (8) se reduce a

$$\begin{aligned} \delta F(w; v) = & \int_{t_0}^{t_1} \left[ \int_{\partial\Omega} (-N_1 n_1 - N_2 n_2) v \, ds + \int_{\partial\Omega} \left( M_1 \frac{\partial v}{\partial x_1} n_1 + M_2 \frac{\partial v}{\partial x_2} n_2 + \right. \right. \\ & \left. \left. + H_{12} \frac{\partial v}{\partial x_1} n_2 + H_{12} \frac{\partial v}{\partial x_2} n_1 \right) ds - \int_{\partial\Omega} c_R \frac{\partial w}{\partial n} \frac{\partial v}{\partial n} \, ds - \int_{\partial\Omega} c_T w v \, ds \right] dt \end{aligned} \quad (12)$$

Para un adecuado tratamiento de las integrales curvilíneas que intervienen en (12) es conveniente introducir un nuevo sistema de coordenadas. En principio se supone que el contorno  $\partial\Omega$  es una curva orientada<sup>22</sup> en  $R^2$  de clase  $C^1$ . La variable  $t$  que denota al tiempo en (12) no se va a tener en cuenta, ya que ello no quita generalidad.

Dado el punto  $(x_1, x_2) \in R^2$  indicado en la Figura 2, se determinan las variables  $n$  y  $s_\alpha$  de la siguiente forma:

- (i)  $n$  es la distancia medida a partir del punto  $P$  del contorno  $\partial\Omega$  a lo largo de la recta que coincide con la normal exterior que pasa por  $(x_1, x_2)$ . Se considera negativa cuando  $(x_1, x_2) \in \Omega$  y positiva cuando  $(x_1, x_2) \in C\Omega$ .
- (ii)  $s_\alpha$  es la función  $s_\alpha: [a, b] \rightarrow R$  dada por

$$s_\alpha(r) = \begin{cases} 0 & r = a \\ l(\alpha|_{[a, r]}) & \forall r \in [a, b] \end{cases}$$

donde  $\alpha$  es un representante<sup>22</sup> de  $\partial\Omega$ .

Dado  $(x_1, x_2) \in R^2$  y determinada  $n$ , se adopta como  $s_\alpha$  el valor que toma la función  $s_\alpha(r)$  en el punto  $P$ . De esta forma queda determinado el punto  $(n, s_\alpha)$ .

Es conveniente adoptar como representante de la curva orientada  $\partial\Omega$  a  $\alpha = (\alpha_1(s_\alpha), \alpha_2(s_\alpha))$ ,  $s_\alpha \in [0, l]$  con  $l = l(\alpha)$ . La longitud de arco se comienza a medir, por ejemplo, a partir del punto  $Q$ .

Ahora consideremos el ángulo  $\varphi = \varphi(s_\alpha)$  formado por la tangente a  $\partial\Omega$  en el punto  $P = (x_1, x_2) \in \partial\Omega$ , con  $x_1 = \alpha_1(s_\alpha)$ ,  $x_2 = \alpha_2(s_\alpha)$ .

En la Figura 2 se destaca claramente que es

$$x_1(n, s_\alpha) = \alpha_1(s_\alpha) + n \sin \varphi(s_\alpha) \quad (13)$$

$$x_2(n, s_\alpha) = \alpha_2(s_\alpha) + n \cos \varphi(s_\alpha) \quad (14)$$

Si se realiza este cambio de variables en (12), resulta

$$\begin{aligned} \delta F(w; v) = & \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \int_{\partial\Omega} (-N_1 n_1 - N_2 n_2 - c_T w) v \, ds + \right. \\ & + \int_{\partial\Omega} \left( M_1 n_1^2 + M_2 n_2^2 + 2H_{12} n_1 n_2 - c_R \frac{\partial w}{\partial n} \right) \frac{\partial v}{\partial n} \, ds + \\ & \left. + \int_{\partial\Omega} ((M_2 - M_1) n_1 n_2 + H_{12} (n_1^2 - n_2^2)) \frac{\partial v}{\partial s} \, ds \right\} dt \end{aligned} \quad (15)$$

Al integrar por partes se tiene

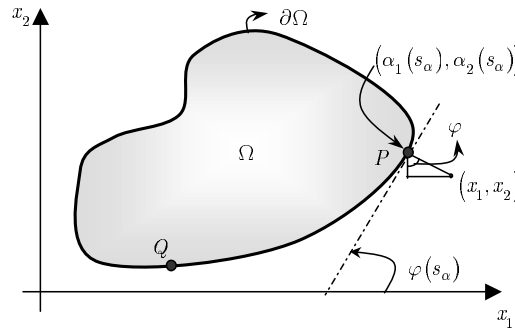
$$\begin{aligned} \delta F(w; v) = & \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \int_{\partial\Omega} \left( -N_1 n_1 - N_2 n_2 - c_T w - \frac{\partial f}{\partial s} \right) v \, ds + \right. \\ & \left. + \int_{\partial\Omega} \left( M_1 n_1^2 + M_2 n_2^2 + 2H_{12} n_1 n_2 - c_R \frac{\partial w}{\partial n} \right) \frac{\partial v}{\partial n} \, ds \right\} dt \end{aligned} \quad (16)$$

Dado que las funciones que componen los integrandos de (16) son continuas, una adaptación del lema fundamental del cálculo de variaciones y la aplicación de la condición necesaria (4) permiten obtener las siguientes condiciones de contorno naturales

$$c_R(s_\alpha) \frac{\partial w}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = (M_1 n_1^2(s_\alpha) + M_2 n_2^2(s_\alpha) + 2H_{12} n_1(s_\alpha) n_2(s_\alpha)) \Big|_{\partial\Omega} \quad (17)$$

$$c_T(s_\alpha) w|_{\partial\Omega} = -N_1 n_1(s_\alpha) - N_2 n_2(s_\alpha) - \frac{\partial f}{\partial s_\alpha} \Big|_{\partial\Omega} \quad (18)$$

En el caso de un problema de contorno con una ecuación diferencial de orden  $2m$ , las condiciones de contorno se dividen en dos clases. Aquéllas que contienen en sus expresiones analíticas a la función incógnita  $w$  y derivadas de  $w$  de orden menor o igual a  $m - 1$  se denominan *estables* o *geométricas*. Por otra parte, las condiciones de contorno que contienen derivadas de  $w$  de orden mayor que  $m - 1$  se denominan *inestables* o *naturales*. Por lo tanto, si  $0 \leq c_R(s_\alpha) < \infty$  y  $0 \leq c_T(s_\alpha) < \infty$ , las condiciones (17) y (18) son inestables. Los apoyos clásicos, es decir, borde simplemente apoyado, empotrado o libre, pueden ser obtenidos a partir de (17) y (18) como casos límites. Por ejemplo, para borde rígidamente empotrado se hace  $c_R(s_\alpha) \rightarrow \infty$  y  $c_T(s_\alpha) \rightarrow \infty$  y en consecuencia resultan  $\frac{\partial w}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0$  y  $w|_{\partial\Omega} = 0$ , las cuales son condiciones de contorno estables.



**Figura 2.** Parámetros geométricos que definen el contorno de la placa

## ANÁLISIS DE PLACAS RECTANGULARES

Sea el dominio rectangular  $\Omega$  dado por  $\Omega = \{(x_1, x_2), 0 < x_1 < a, 0 < x_2 < b\}$ . El contorno es una curva orientada dada por la composición de curvas  $\partial\Omega = \partial\Omega_4 * \partial\Omega_3 * \partial\Omega_2 * \partial\Omega_1$ , donde cada componente es una curva orientada en  $R^2$  de clase  $C^1$  a trozos, tal como se muestra en la Figura 3. El arco  $\partial\Omega_1$  se puede representar en forma paramétrica con la función  $\alpha = (x_1, 0), \forall x_1 \in [0, a]$ . Las componentes del versor normal exterior son  $n_1 = 0, n_2 = -1$ .

De igual forma para los restantes arcos  $\partial\Omega_i, i = 2, 3, 4$ , es

$$\begin{aligned}\beta &= (a, x_2), \forall x_2 \in [0, b], & n_1 &= 1, n_2 = 0 \\ \gamma &= (a - r, b), \forall r \in [0, a], & n_1 &= 0, n_2 = 1 \\ \lambda &= (0, b - r), \forall r \in [0, b], & n_1 &= -1, n_2 = 0\end{aligned}$$

Al usar estas expresiones en

$$\frac{\partial w(x_1(n, s), x_2(n, s), t)}{\partial n} = \frac{\partial w(x_1, x_2, t)}{\partial x_1} n_1 + \frac{\partial w(x_1, x_2, t)}{\partial x_2} n_2$$

se obtiene

$$\begin{aligned}\left. \frac{\partial w}{\partial n} \right|_{\partial\Omega_1} &= -\frac{\partial w(x_1, 0, t)}{\partial x_2}, \forall x_1 \in [0, a] \\ \left. \frac{\partial w}{\partial n} \right|_{\partial\Omega_2} &= \frac{\partial w(a, x_2, t)}{\partial x_1}, \forall x_2 \in [0, b] \\ \left. \frac{\partial w}{\partial n} \right|_{\partial\Omega_3} &= \frac{\partial w(a - r, b, t)}{\partial x_2}, \forall r \in [0, a] \\ \left. \frac{\partial w}{\partial n} \right|_{\partial\Omega_4} &= -\frac{\partial w(0, b - r, t)}{\partial x_1}, \forall r \in [0, b]\end{aligned}$$

En consecuencia, la integral curvilínea que representa la energía de deformación almacenada a lo largo del borde de la placa por acción del vínculo rotacional está dada por

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} c_R(s) \left( \frac{\partial w}{\partial n} \right)^2 ds &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \int_{\partial\Omega_i} c_{R_i}(s) \left( \frac{\partial w}{\partial n} \right)^2 ds = \frac{1}{2} \int_0^a c_{R_1}(x_1) \left( \frac{\partial w(x_1, 0, t)}{\partial x_2} \right)^2 dx_1 + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^b c_{R_2}(x_2) \left( \frac{\partial w(a, x_2, t)}{\partial x_1} \right)^2 dx_2 + \frac{1}{2} \int_0^a c_{R_3}(a - r) \left( \frac{\partial w(a - r, b, t)}{\partial x_2} \right)^2 dr + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^b c_{R_4}(b - r) \left( \frac{\partial w(0, b - r, t)}{\partial x_1} \right)^2 dr\end{aligned}\tag{19}$$

Por otra parte es



$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} c_T(s) w^2 ds &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \int_{\partial\Omega_i} c_{T_i}(s) w^2 ds = \frac{1}{2} \int_0^a c_{T_1}(x_1) (w(x_1, 0, t))^2 dx_1 + \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^b c_{T_2}(x_2) (w(a, x_2, t))^2 dx_2 + \frac{1}{2} \int_0^a c_{T_3}(a-r) (w(a-r, b, t))^2 dr + \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^b c_{T_4}(b-r) (w(0, b-r, t))^2 dr
\end{aligned} \tag{20}$$

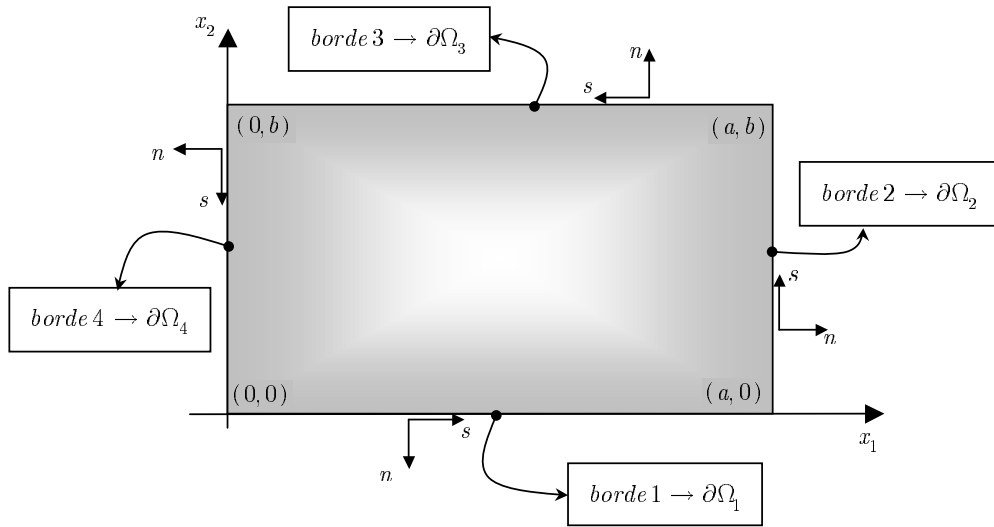


Figura 3. Placa anisótropa rectangular

## USO DE EXPRESIONES APROXIMADAS PARA LAS CONDICIONES DE CONTORNO

Se analiza a continuación una placa rectangular anisótropa (Figura 3), con su borde 2 elásticamente restringido a la rotación, pero no a la translación (borde simplemente apoyado) y los bordes restantes empotrados. De las expresiones generales (17) y (18) se obtienen las siguientes condiciones de contorno

$$w(x_1, 0, t) = 0, \quad w(a, x_2, t) = 0, \quad w(x_1, b, t) = 0, \quad w(0, x_2, t) = 0 \tag{21}$$

$$\frac{\partial w(x_1, 0, t)}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial w(x_1, b, t)}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial w(0, x_2, t)}{\partial x_1} = 0 \tag{22}$$

$$c_{R_2} = \frac{\partial w(a, x_2, t)}{\partial x_1} = - \left( D_{11} \frac{\partial^2 w(a, x_2, t)}{\partial x_1^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w(a, x_2, t)}{\partial x_2^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2 w(a, x_2, t)}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \tag{23}$$

$$\forall x_2 \in (0, b)$$

De acuerdo con lo expresado anteriormente, queda claro que las condiciones (21) y (22) son estables, mientras que la condición (23) es inestable.

Es evidente que es imposible la determinación de la solución exacta del problema de autovalores y/o de contorno correspondiente. Sin embargo, es posible utilizar un método analítico, tal como el método variacional de Ritz para determinar soluciones aproximadas.

Cuando se analizan problemas de vibraciones naturales libres, es posible considerar y aplicar un campo de desplazamientos de la forma

$$w(x_1, x_2, t) = W(x_1, x_2) \cos(\omega t) \quad (24)$$

donde  $W(x_1, x_2)$  es la amplitud del desplazamiento que se aproxima a través de funciones de forma.

Para realizar un análisis estático se toma la frecuencia natural de vibración nula, es decir,  $\omega = 0$  y el campo de desplazamientos se aproxima directamente mediante  $w(x_1, x_2, t) = W(x_1, x_2)$ .

Un procedimiento que ha sido empleado previamente consiste en aplicar el método de Ritz adoptando como funciones de forma a expresiones del tipo<sup>23-25</sup>

$$W(x_1, x_2) \approx W_{MN} = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N c_{ij} p_i(x_1) q_j(x_2) \quad (25)$$

donde  $c_{ij}$  son coeficientes arbitrarios y  $\{p_i(x_1)\}$ ,  $\{q_j(x_2)\}$  son conjuntos de polinomios ortogonales.

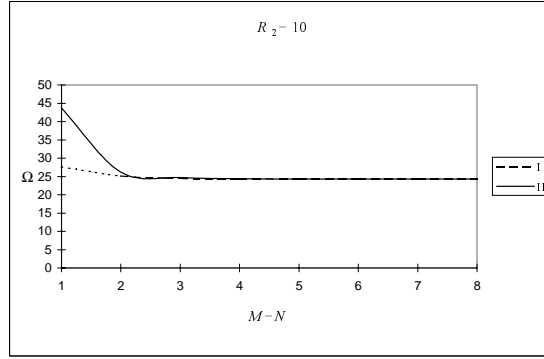
Obviamente es imposible construir las funciones coordenadas en (25) de manera que satisfagan las condiciones de contorno (21) a (23). Una técnica muy utilizada consiste en reemplazar dichas condiciones por otras con expresiones analíticas más simples<sup>19,20</sup>. Consideremos el borde 2 de la placa de la Figura 3 y supongamos que en la condición (23) se quita el término  $2D_{16} \frac{\partial^2 w(a, x_2, t)}{\partial x_1 \partial x_2}$ . Como consecuencia de la condición de contorno  $w(a, x_2, t) = 0$  y teniendo en cuenta (25), se verifica que es  $\frac{\partial^2 w(a, x_2, t)}{\partial x_2^2}$  y la condición de contorno (23) se reduce a la siguiente

$$c_{R_2} = \frac{\partial w(a, x_2, t)}{\partial x_1} = -D_{11} \frac{\partial^2 w(a, x_2, t)}{\partial x_1^2}, \quad \forall x_2 \in (0, b) \quad (26)$$

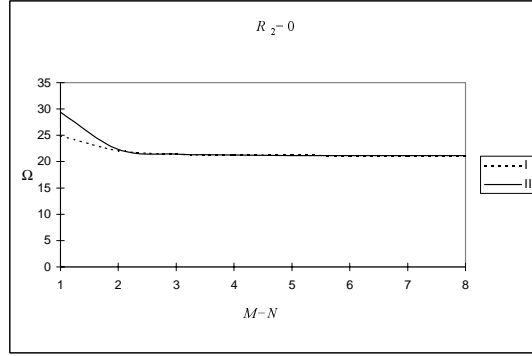
En lo que sigue se realiza un estudio deductivo para establecer un criterio que permita determinar si es conveniente el uso de las condiciones de contorno aproximadas, cuando se utilizan polinomios ortogonales como funciones de forma en el método de Ritz.

Se realizó una serie de experimentos numéricos en una placa cuadrada de material compuesto boro-epoxi, con las siguientes propiedades mecánicas<sup>19</sup>:  $\nu_{LT} = 0,24$ ,  $G_{LT}/E_L = 0,025$ ,  $E_T/E_L = \nu_{TL}/\nu_{LT} = 0,06875$ . Los ejes de ortotropía se encuentran inclinados  $30^\circ$  respecto de los ejes cartesianos que contienen a los lados de la placa (Figura 1).

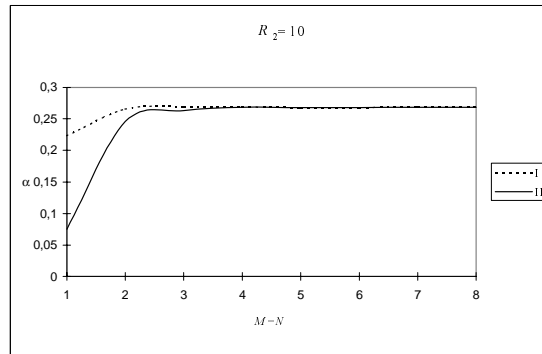
Si se aplica el método de Ritz con el uso de polinomios ortogonales como funciones coordenadas, con la condición de que se satisfaga la condición de contorno aproximada (26), no se obtienen resultados de frecuencias con una precisión mayor a la que se logra cuando sólo se tienen en cuenta las condiciones estables (21)–(22) y directamente se ignora la inestable (23). Esto queda claramente demostrado en las Figuras 4 y 5, donde se observa una discrepancia cuando el número de polinomios que se usa es de  $N = 1$ . Esta situación es lógica dado que al usar un solo polinomio es adecuado someterlo a la condición de contorno (26) (aunque ésta sea aproximada), que no someterlo a condición alguna. En cambio, cuando el número de funciones coordenadas crece, se verifica una adecuada convergencia. Una situación totalmente análoga se presenta en la determinación de la deflexión estática y de los momentos flectores, tal como se muestra en las Figuras 6 a 9.



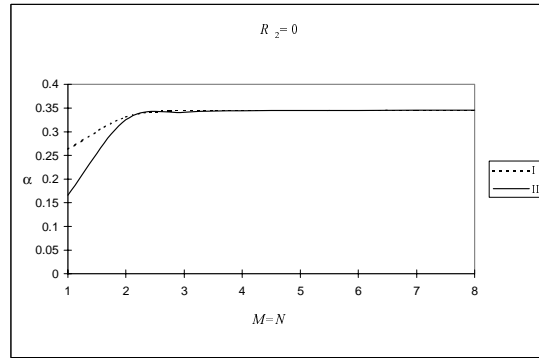
**Figura 4.** Variación del coeficiente de frecuencia fundamental  $\Omega = \sqrt{\frac{\rho h}{D_{11}}} \omega b^2$  de una placa cuadrada anisótropa cuando se incrementa el número de términos en la función aproximante. Los bordes 1, 3 y 4 están rígidamente empotrados, el borde 2 está elásticamente restringido a rotación  $R_2 = c_{R_2} a / D_{11}$ . I Resultados obtenidos satisfaciendo la condición natural aproximada; II Resultados obtenidos satisfaciendo sólo las condiciones geométricas



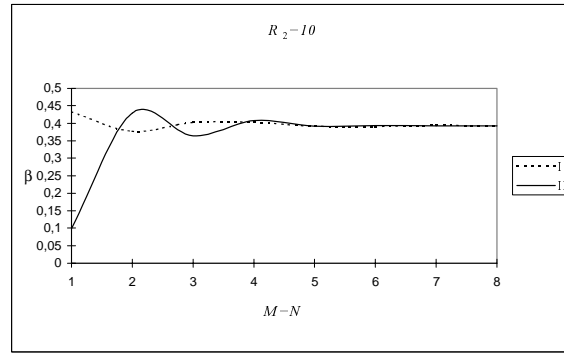
**Figura 5.** Variación del coeficiente de frecuencia fundamental  $\Omega = \sqrt{\frac{\rho h}{D_{11}}} \omega b^2$  de una placa cuadrada anisótropa cuando se incrementa el número de términos en la función aproximante. Los bordes 1, 3 y 4 están rígidamente empotrados, el borde 2 está simplemente apoyado. I Resultados obtenidos satisfaciendo la condición natural aproximada; II Resultados obtenidos satisfaciendo sólo las condiciones geométricas



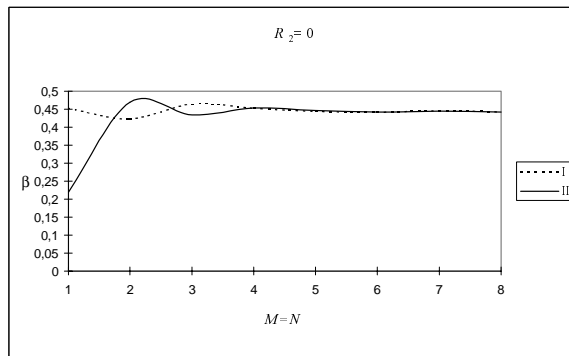
**Figura 6.** Deflexión  $w = \alpha \frac{qb^4}{D_{11}} 10^{-2}$  en el centro de una placa cuadrada anisótropa cuando se incrementa el número de términos en la función aproximante. Los bordes 1, 3 y 4 están rígidamente empotrados, el borde 2 está elásticamente restringido a rotación  $R_2 = c_{R_2} a / D_{11}$ . I Resultados obtenidos satisfaciendo la condición natural aproximada; II Resultados obtenidos satisfaciendo sólo las condiciones geométricas



**Figura 7.** Deflexión  $w = \alpha \frac{qb^4}{D_{11}} 10^{-2}$  en el centro de una placa cuadrada anisótropa cuando se incrementa el número de términos en la función aproximante. Los bordes 1, 3 y 4 están rígidamente empotrados, el borde 2 está simplemente apoyado. I Resultados obtenidos satisfaciendo la condición natural aproximada; II Resultados obtenidos satisfaciendo sólo las condiciones geométricas



**Figura 8.** Momento flector  $M_{x_1} = \beta qb^2 10^{-1}$  en el centro de una placa cuadrada anisótropa cuando se incrementa el número de términos en la función aproximante. Los bordes 1, 3 y 4 están rígidamente empotrados, el borde 2 está elásticamente restringido a rotación  $R_2 = c_{R_2} a / D_{11}$ . I Resultados obtenidos satisfaciendo la condición natural aproximada; II Resultados obtenidos satisfaciendo sólo las condiciones geométricas



**Figura 9.** Momento flector  $M_{x_1} = \beta qb^2 10^{-1}$  en el centro de una placa cuadrada anisótropa cuando se incrementa el número de términos en la función aproximante. Los bordes 1, 3 y 4 están rígidamente empotrados, el borde 2 está simplemente apoyado. I Resultados obtenidos satisfaciendo la condición natural aproximada; II Resultados obtenidos satisfaciendo sólo las condiciones geométricas

Cabe destacar que para  $N = 1$  la solución coincide con la correspondiente a una placa ortótropa, con los ejes de ortotropía paralelos a los ejes cartesianos  $x_1, x_2$ . Por ello, en el caso general de anisotropía  $\phi \neq 0$  (Figura 1), no debe usarse una función aproximante con un solo término. Lo anterior se debe a que cuando se utiliza  $N = 1$ , la integración de los términos de acoplamiento entre flexión y torsión es nula, por lo tanto, no produce contribución alguna al funcional de energías. Así, la solución obtenida no es una aproximación a la solución de una placa anisótropa general, sino a la solución de una placa ortótropa, es decir, con iguales rigideces  $D_{11}, D_{12}, D_{22}$  y  $D_{66}$ , pero con  $D_{16} = D_{26} = 0$ .

## CONCLUSIONES

En este trabajo se presenta un tratamiento de las integrales curvilíneas que intervienen en el planteamiento, a través de un enfoque variacional, de los problemas de contorno y autovalores que describen el comportamiento estático y dinámico de placas anisótropas con contornos elásticamente restringidos. Por otro lado, cuando se utiliza, para analizar el comportamiento estático y dinámico de una placa rectangular anisótropa, el método de Ritz con la implementación de polinomios ortogonales como funciones coordenadas, se sugiere someter a las mismas sólo a las condiciones de contorno estables. Como las condiciones inestables, en este caso, no pueden ser satisfechas en forma exacta, se determinó que el uso de expresiones aproximadas para las mismas no proporciona valores numéricos que se caractericen por una mejor convergencia con respecto a la que se logra cuando directamente se ignoran estas condiciones.

## REFERENCIAS

- 1 I. Guelfand y S. Fomin, "*Calculus of variations*", Prentice Hall, (1963).
- 2 C. Dym y I. Shames, "*Solid mechanics: a variational approach*", McGraw Hill Book Company, (1973).
- 3 S. Timoshenko y W. Krieger, "*Theory of plates and shells*", McGraw Hill, New York, (1959).
- 4 L. Kantorovich y V. Krylov, "*Approximate methods of higher analysis*", Interscience Publishers, (1964).
- 5 F. Hildebrand, "*Methods of applied mathematics*", Prentice Hall, (1965).
- 6 R. Weinstock, "*Calculus of variations with applications to physics and engineering*", Dover Publications, (1974).
- 7 J.L. Troutman, "*Variational calculus and optimal control*", Springer Verlag, New York, (1996).
- 8 J.N. Reddy, "*Applied functional analysis and variational methods in engineering*", McGraw Hill Book Co., N.Y., (1986).
- 9 S. Mikhlin, "*Variational methods of mathematical physics*", MacMillan Co., New York, (1964).
- 10 K. Rektorys, "*Variational methods in mathematics, science and engineering*", D. Reidel Co., (1980).
- 11 S.G. Lekhnitskii, "*Anisotropic plates*", New York, Gordon and Breach Science Publ., (1968).
- 12 J.M. Whitney, "*Structural analysis of laminated anisotropic plates*", Technomic Publishing Co. Inc., Pennsylvania, USA, (1987).

- 13 J.N. Reddy, “*Mechanics of laminated anisotropic plates: theory and analysis*”, CRC Press, Boca Raton, Florida, (1997).
- 14 J.R. Vinson y R.L. Sierakowski, “*The behavior of structures composed of composite materials*”, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, (1987).
- 15 R.M. Jones, “*Mechanics of composite materials*”, Taylor and Francis, EE.UU., (1999).
- 16 R.O. Grossi y L. Lebedev, “Static and dynamic analyses of anisotropic plates with corner points”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. **243**, pp. 947–958, (2001).
- 17 J.E. Ashton, “Anisotropic plate analysis - boundary conditions”, *Journal of Composite Materials*, Vol. **4**, pp. 162–171, (1979).
- 18 R.O. Grossi, “On the existence of weak solutions in the study of anisotropic plates”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. **242**, pp. 542–552, (2001).
- 19 P.A.A. Laura y R.O. Grossi, “Transverse vibrations of rectangular anisotropic plates with edges elastically restrained against rotation”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. **64**, N° 2, pp. 257–267, (1979).
- 20 L.G. Nallim y R.O. Grossi “Análisis del comportamiento dinámico de placas ortótropas y anisótropas”, *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, Vol. **15**, N° 1, pp. 155–167, (1999).
- 21 R.O. Grossi y L.G. Nallim, “On the approximate determination of the fundamental frequency of vibration of rectangular anisotropic plates carrying a concentrated mass”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. **207**, N° 2, pp. 276–279, (1997).
- 22 N. Bantabol Marinas, J.M. Roij y E.O. Dominguez, “*Análisis matemático: cálculo integral en espacios euclídeos*”, Ediciones Pirámide, S.A., Madrid, (1980).
- 23 R.O. Grossi y R.B. Bhat, “Natural frequencies of edge restrained tapered rectangular plates”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. **185**, N° 2, pp. 335–343, (1995).
- 24 R.B. Bhat, “Natural frequencies of rectangular plates using characteristic orthogonal polynomials in Rayleigh–Ritz method”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. **102**, pp. 493–499, (1985).
- 25 R.B. Bhat, “Plate deflection using orthogonal polynomials”, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. **101**, pp. 1301–1309, (1985).