

Derivada topológica via análise de sensibilidade à mudança de forma na otimização topológica

André Novotny, Raúl Feijó e Edgardo Taroco

Laboratório Nacional de Computação Científica – LNCC/MCT
Departamento de Mecânica Computacional
Av. Getúlio Vargas, 333 – Quitandinha
25651-070 Petrópolis – RJ, Brasil
Tel.: 55-24-233 60 17, Fax: 55-24-231 55 95
e-mail: feij@lncc.br

Claudio Padra

Centro Atômico Bariloche/Instituto Balseiro
Departamento de Mecânica Computacional
C.c. 439, 8400 Bariloche, Argentina
Tel.: 54-29-44 44 52 14, Fax: 54-29-44 44 52 99
e-mail: padra@cab.cnea.gov.ar

Resumen

A derivada topológica, que é uma função que fornece a sensibilidade de um problema definido em um certo domínio quando um pequeno furo é criado em uma dada posição deste, tem se mostrado como uma poderosa ferramenta na obtenção da topologia ótima para uma vasta classe de problemas da física e da engenharia. A grande limitação desta metodologia é que, ao criar um furo, não se pode mais estabelecer um homeomorfismo entre os espaços envolvidos, necessitando-se, portanto, utilizar algum ferramental matemático específico para o cálculo das derivadas. Assim sendo, neste trabalho é apresentada uma forma alternativa para a obtenção da derivada topológica, mediante conceitos de análise de sensibilidade à mudança de forma. Com esta nova metodologia é possível calcular a derivada topológica utilizando todo o procedimento matemático já desenvolvido no contexto da análise de sensibilidade à mudança de forma, conduzindo a uma formulação simples e construtiva. Finalmente, a derivada topológica é utilizada na obtenção da topologia ótima em elasticidade bidimensional, de modo a minimizar a energia de deformação da estrutura, satisfazendo a equação de estado do problema.

TOPOLOGICAL DERIVATIVE VIA SHAPE SENSITIVITY ANALYSIS IN THE TOPOLOGICAL OPTIMIZATION CONTEXT

Summary

The topological derivative concept has been seen as a powerful framework to obtain the optimal topology for several engineering problems. This derivative is a function defined in a domain, which determines the sensitivity of the problem when a small hole is created at each point of it. However, the greatest limitation of this methodology is that when a hole is created it is impossible to build a homeomorphic map between the domains in study (because they do not have the same topology). Therefore, some specific mathematical framework should be developed in order to obtain the derivatives. This work proposes an alternative way to compute the topological derivative based on sensitivity analysis concepts. The main feature of this methodology is that all the mathematical procedure already developed in the context of shape sensitivity analysis may be used in the calculus of the topological derivative. This idea leads to a more simple and constructive formulation than the ones found in contemporary literature. Finally, the topological derivative is used for solving some topological optimization problems in bi-dimensional elasticity with which it minimizes the strain energy of the structure and satisfies the equilibrium equations of the problem.

INTRODUÇÃO

Classicamente, no processo de concepção de um novo produto o projetista tem se amparado, quase unicamente, na própria intuição e experiência adquirida na solução de outros problemas caracterizando, portanto, um processo de tentativa e erro onde a evolução é extremamente lenta. Em técnicas mais modernas, busca-se sistematizar a atividade de projeto através de alguma metodologia. Neste sentido, as técnicas de otimização mostram-se particularmente atraentes visto que, através delas muitas vezes é possível formular matematicamente um problema de busca de soluções que sejam, segundo algum critério, melhores dentre as diversas possíveis.

Mais especificamente, uma questão de grande importância no processo de projeto de componentes ou sistemas mecânicos em geral, é a capacidade de obter automaticamente a geometria ótima dos mesmos. Conceitualmente, portanto, o problema passa a ser a determinação da geometria do produto, ou seja, sua forma e/ou topologia,* de acordo com alguma medida de desempenho (função custo).

Uma maneira bastante geral de abordar esse tipo de problema é através da parametrização da geometria do produto, cuja topologia já está previamente definida, e posterior otimização em relação à esses parâmetros, dando lugar então à já consagrada técnica de otimização de forma. O inconveniente dessa abordagem é que a forma final obtida é resultado apenas de mudanças na fronteira da configuração original, exigindo, portanto, hipóteses prévias sobre a topologia do produto em estudo, o que torna esta metodologia bastante restritiva em muitas aplicações. Neste sentido, surgiram as técnicas de otimização topológica onde nada (ou quase nada) é suposto sobre a morfologia inicial do componente. Sendo assim, a principal vantagem desta última metodologia é que através dela pode-se obter a topologia ótima partindo-se de uma configuração inicial bastante grosseira.

Importantes contribuições neste campo foram atingidas caracterizando-se a topologia por uma densidade de material a ser determinada, ou seja, as cavidades correspondem à região de densidade nula e o produto é identificado por uma região onde a densidade é não nula, sendo a topologia obtida através de técnicas de homogeneização^{1,5}. O problema desta abordagem é que a mesma está fundamentada em conceitos de resistência dos materiais, ou seja, para obter diferentes densidades ao longo do domínio, a relação constitutiva do componente é alterada, mediante a criação de células de materiais laminados, modificando, portanto, a massa bem como a resistência mecânica da peça. Este fato torna o campo de aplicação desta teoria bastante restrito. No trabalho da referência 22 foi apresentada uma forma possível de obter a topologia ótima de componentes estruturais em regime elástico linear, sujeitos a um critério de massa mínima e restrições de falha plástica de von Mises. A idéia básica desta formulação, consiste em caracterizar a morfologia da peça por meio de um parâmetro geométrico ρ , de modo que, para $\rho > 0$, tem-se uma saturação do critério segundo von Mises. Caso contrário, para $\rho = 0$, aparecem as cavidades na peça. Sendo assim, uma limitação desta metodologia é que necessita-se estabelecer uma formulação matemática para o problema em análise de modo que a carta de espessura ρ apareça explicitamente como um parâmetro multiplicativo nas equações de estado.

Mais recentemente^{20,21,10} foi apresentada uma forma possível de obter a topologia ótima através do cálculo da derivada topológica, a qual nada mais é que uma função definida no domínio que fornece, em cada ponto deste, a sensibilidade da função custo ao criar-se um pequeno furo numa dada posição do referido domínio, como pode ser visto na Figura 1. Sendo assim, o conceito de derivada topológica tem se mostrado como uma poderosa ferramenta na obtenção da topologia ótima para uma vasta classe de problemas de engenharia. No entanto, segundo a abordagem proposta nos trabalhos ora citados, para obter esses

*A palavra *topologia* aqui utilizada é o termo já consagrado que descreve a *morfologia* viável de um componente estrutural, não se referindo à terminologia utilizada no contexto matemático de análise funcional.

gradientes necessita-se expandir em série de potências a solução do problema (equação de estado) em um anel definido no domínio. Este fato conduz a uma metodologia que depende fortemente do tipo de operador diferencial que tem-se em mãos, ou seja, da possibilidade de expandi-lo em série, o que, muitas vezes, pode ser impraticável. Sendo assim, embora esta metodologia seja bastante geral, a mesma pode tornar-se, de certa forma, restritiva, devido a dificuldade matemática de obter a derivada topológica.

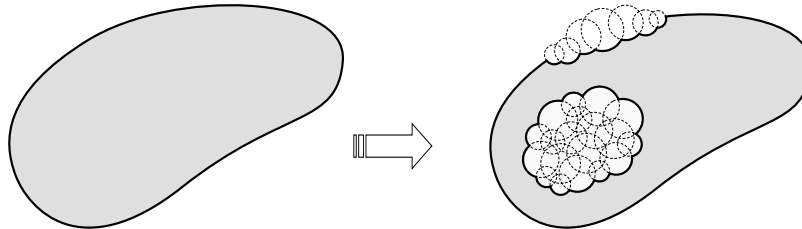


Figura 1. Obtenção da topologia via derivada topológica

Este trabalho, portanto, tem como enfoque central propor uma forma alternativa para obter a derivada topológica baseada em conceitos de análise de sensibilidade à mudança de forma. A grande vantagem desta metodologia é a possibilidade de encontrar a topologia ótima para uma vasta classe de problemas da física e da engenharia (mecânica dos sólidos, mecânica dos fluidos, eletromagnetismo, etc.) fazendo uso de todo um ferramental matemático desenvolvido primeiramente para a mecânica do contínuo e mais recentemente para otimização de forma. Como a teoria de análise de sensibilidade já está consagrada na literatura e sendo suas bases matemáticas bem postas, é possível desenvolver uma formulação bem mais simples e construtiva que as metodologias encontradas atualmente para obtenção da topologia ótima, ou mais especificamente, no cálculo da derivada topológica, a qual será estudada no contexto de problemas elípticos de valor no contorno em geral.

PROBLEMA ELÍPTICO DE VALOR NO CONTORNO

Seja um domínio aberto e limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, cujo contorno, denotado por $\Gamma = \Gamma_N \cup \Gamma_D$, com $\Gamma_N \cap \Gamma_D = \emptyset$, é suficientemente regular, isto é, admite a existência de um vetor normal \mathbf{n} em quase todo lugar (a.e.) exceto possivelmente em um conjunto de medida nula. Fisicamente, tem-se um corpo Ω , submetido a excitações $f \in L^2(\Gamma_N)$ e $b \in L^2(\Omega)$ e com restrições na variável primal u quando definida no contorno Γ_D , sendo $L^2(\cdot)$ o espaço das funções quadraticamente integráveis segundo Lebesgue (Figura 2).

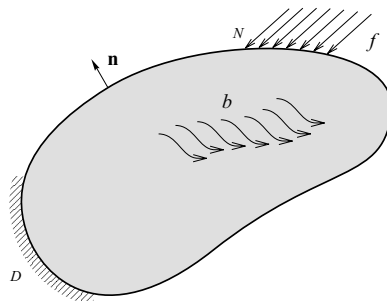


Figura 2. Problema de valor no contorno

Este problema pode ser escrito em uma forma variacional, o que permite trabalhar em

espaços topologicamente mais fracos e estabelecer condições de existência e unicidade de solução. A forma fraca de um problema elíptico de valor no contorno pode ser escrito na seguinte forma geral:

Encontre $u \in U$, tal que

$$a(u, w) = l(w) \quad \forall w \in V \quad (1)$$

onde $a(\cdot, \cdot) : U \times V \rightarrow \mathfrak{R}$ é um operador bilinear, limitado e coercivo e $l(\cdot) : V \rightarrow \mathfrak{R}$ é um funcional linear limitado, ou seja, $l \in V'$, sendo V' o espaço dual de V . Além do mais, o espaço das variações admissíveis V e o espaço[†] das funções admissíveis U podem ser definidos, respectivamente, como

$$\begin{aligned} V &= \{w \in H^n(\Omega) \mid w = 0 \text{ sobre } \Gamma_D\} \\ U &= \{u \in H^n(\Omega) \mid u = g \text{ sobre } \Gamma_D\} \end{aligned}$$

onde $H^n(\cdot)$ é um espaço de Hilbert de ordem n ,¹⁴ definido em um dado domínio, ou seja, está resolvendo-se um problema de valor no contorno de ordem $2n$. Para facilitar a apresentação deste trabalho, o operador $a(\cdot, \cdot)$ será considerado simétrico.

Nos trabalhos das referências 4 e 17 são tratadas as questões de equivalência entre formulações diferenciais e variacionais. Já os problemas de existência e unicidade da solução das equações escritas na forma abstrata são dados pelo Teorema Generalizado de Lax–Milgram, também demonstrado nas referências ora citadas.

A formulação matemática para problemas de valor no contorno, em geral, envolve equações de equilíbrio, equações constitutivas e condições de contorno. Soluções analíticas para estas equações muitas vezes são impraticáveis quando aplicadas a situações físicas reais devido às complexidades de geometria, excitação, condições de contorno, etc. Nesses casos, portanto, é mais viável o uso de métodos numéricos para a obtenção de uma solução aproximada para estes problemas. Dentre outros, o mais difundido atualmente é o Método dos Elementos Finitos²³, o qual está fundamentado na discretização do meio contínuo, cuja essência consiste em colocar as equações escritas na forma abstrata (eq. (1), por exemplo) em termos de um conjunto de equações algébricas de valores discretos. Em síntese, o meio contínuo é aproximado por um modelo discreto.

Os métodos de busca de soluções aproximadas para problemas de valor no contorno em geral baseiam-se na reconstrução do problema de modo que a solução aproximada pertença a uma classe restrita de funções. Mais especificamente, o Método dos Elementos Finitos pode ser visto como uma maneira sistemática e geral de se construir famílias de subespaços $U_{hp} \subset U$, ou seja, consiste em resolver o seguinte problema aproximado:¹³

Encontre a solução aproximada $u_{hp} \in U_{hp} \subset U$, tal que

$$a(u_{hp}, w_{hp}) = l(w_{hp}) \quad \forall w_{hp} \in V_{hp} \subset V \quad (2)$$

Essa última forma de colocar a equação de estado (eq. (2)), conduz às equações de Elementos Finitos que, no caso de problemas elíptico de valor no contorno abordado neste trabalho (eq. (1)), podem ser escritas, de maneira geral, como⁶

$$\mathbf{K}\bar{\mathbf{u}}_{hp} = \mathbf{F} \quad (3)$$

sendo $\bar{\mathbf{u}}_{hp}$ o vetor de incógnitas nodais generalizados, \mathbf{K} a matriz de rigidez global e \mathbf{F} o vetor carregamento nodal generalizado.

[†]Quando as condições de contorno de Dirichlet forem não homogêneas, o espaço das funções admissíveis U trata-se, na realidade, de uma variedade linear definida em $H^n(\Omega)$. Sendo assim, o termo espaço das funções admissíveis é utilizado neste trabalho apenas por abuso de linguagem para designar a variedade linear $U \subset H^n(\Omega)$.

DEFINIÇÃO DA DERIVADA TOPOLÓGICA

Como já mencionado, a derivada topológica fornece a sensibilidade do problema ao criar um pequeno furo numa dada posição do domínio. Matematicamente, este problema pode ser escrito da seguinte maneira:

Seja $\Omega_\epsilon \subset \mathbb{R}^N$, tal que $\Omega_\epsilon = \Omega - \bar{B}_\epsilon$, onde B_ϵ é uma bola de raio ϵ centrada no ponto $\hat{\mathbf{x}} \in \Omega$, cujo contorno é denotado por $\Gamma_\epsilon = \Gamma \cup \partial B_\epsilon$. Então, tem-se o domínio original sem furo Ω e o domínio Ω_ϵ com um pequeno furo B_ϵ , como pode ser visto na Figura 3. Considerando ainda $\psi(\cdot)$ uma função custo definida num certo domínio (\cdot) , então a derivada topológica¹⁰ é escrita como

$$G_T^*(\hat{\mathbf{x}}) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\psi(\Omega_\epsilon) - \psi(\Omega)}{f(\epsilon)} \tag{4}$$

onde $f(\epsilon)$ é uma função de ϵ que dependerá do problema em análise.

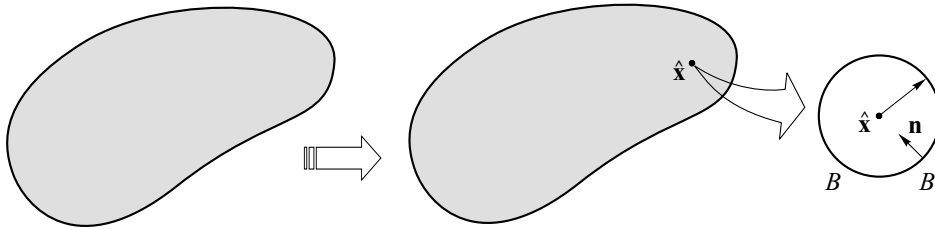


Figura 3. Derivada topológica original

O grande inconveniente de trabalhar com a definição dada pela eq. (4) é que quando um furo é criado, não é mais possível estabelecer um mapeamento um para um entre os domínios Ω_ϵ e Ω , em outras palavras, não existe mais um homeomorfismo entre estes domínios pois eles se encontram em espaços topológicos diferentes, sendo assim, a derivada (4) não pode ser obtida de forma convencional.

A idéia central deste trabalho, portanto, é partir de um problema em que o furo B_ϵ já exista, ou seja, partir de Ω_ϵ , causando uma pequena perturbação $\delta\epsilon$ em B_ϵ de modo a originar o furo $B_{\epsilon+\delta\epsilon}$ definido em um novo domínio perturbado $\Omega_{\epsilon+\delta\epsilon} = \Omega - \bar{B}_{\epsilon+\delta\epsilon}$, sendo o contorno escrito como $\Gamma_{\epsilon+\delta\epsilon} = \Gamma \cup \partial B_{\epsilon+\delta\epsilon}$ (Figura 4). Assim, será mostrado que a derivada topológica pode ser redefinida da seguinte maneira

$$G_T(\hat{\mathbf{x}}) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \lim_{\delta\epsilon \rightarrow 0} \frac{\psi(\Omega_{\epsilon+\delta\epsilon}) - \psi(\Omega_\epsilon)}{f(\epsilon + \delta\epsilon) - f(\epsilon)} \right\} = \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \delta\epsilon \rightarrow 0}} \frac{\psi(\Omega_{\epsilon+\delta\epsilon}) - \psi(\Omega_\epsilon)}{f(\epsilon + \delta\epsilon) - f(\epsilon)} \tag{5}$$

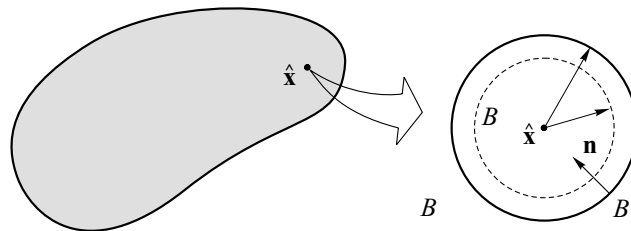


Figura 4. Derivada topológica modificada

A rigor, esta última definição de derivada topológica fornece apenas informação se o furo B_ϵ com $\epsilon \rightarrow 0$ deve aumentar ou diminuir de tamanho e não se este deve ser efetivamente criado, contrário ao que mostra a definição original da derivada topológica (eq. (4)). Por outro lado, entende-se ainda que, expandir um furo de raio ϵ , quando $\epsilon \rightarrow 0$, nada mais é que criá-lo. De qualquer maneira, este fato não implica em dizer que ambas definições (4) e (5) sejam equivalentes, a menos de uma prova matemática completa que estabeleça a relação entre elas, a qual será demonstrada mais tarde neste trabalho. A grande vantagem desta última forma de escrever a derivada topológica é que através dela pode-se estabelecer um homeomorfismo entre Ω_ϵ e $\Omega_{\epsilon+\delta\epsilon}$. Consequentemente, todo o ferramental matemático desenvolvido em análise de sensibilidade à mudança de forma pode ser utilizado neste contexto.

ANÁLISE DE SENSIBILIDADE À MUDANÇA DE FORMA

A grande maioria dos modelos associados a problemas de valor no contorno são formulados através de equações diferenciais definidas ponto a ponto num domínio Ω ou, de forma mais geral, por equações integrais sobre Ω . Assim, perturbações neste domínio produzem, necessariamente, alterações tanto nos termos integrandos, quanto no próprio domínio de integração. Sendo assim, a análise de sensibilidade à mudança de forma, nada mais é que determinar a variação das características associadas ao problema devido a modificações na configuração denotada por Ω . Para tal, pode-se utilizar os conceitos desenvolvidos no trabalho pioneiro da referência 15, isto é:

Seja o domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ tal como definido em uma seção anterior. Considerando que este domínio sofre uma perturbação, a qual pode ser representada por um mapeamento suave e inversível dependente do parâmetro τ , da seguinte maneira

$$\chi(\cdot, \tau) : \mathbf{x} \longmapsto \mathbf{x}_\tau \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$$

Então, o domínio perturbado Ω_τ , bem como seu contorno Γ_τ , podem ser escritos como

$$\begin{aligned} \Omega_\tau &= \{ \mathbf{x}_\tau \in \mathbb{R}^N \mid \exists \mathbf{x} \in \Omega, \quad \mathbf{x}_\tau = \chi(\mathbf{x}, \tau), \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x} \quad \text{e} \quad \Omega_0 = \Omega \} \\ \Gamma_\tau &= \{ \mathbf{x}_\tau \in \mathbb{R}^N \mid \exists \mathbf{x} \in \Gamma, \quad \mathbf{x}_\tau = \chi(\mathbf{x}, \tau), \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x} \quad \text{e} \quad \Gamma_0 = \Gamma \} \end{aligned}$$

Expandindo $\chi(\mathbf{x}, \tau)$ em série de Taylor em torno de τ_0 e considerando apenas o primeiro termo da expansão, o mapeamento $\chi(\mathbf{x}, \tau)$ pode ser obtido de forma explícita da seguinte maneira

$$\chi(\mathbf{x}, \tau) = \chi(\mathbf{x}, \tau_0) + \frac{\partial}{\partial \tau} \chi(\mathbf{x}, \tau_0) (\tau - \tau_0) + o(\tau^2)$$

Fazendo $\tau_0 = 0$, tem-se que

$$\chi(\mathbf{x}, \tau) = \chi(\mathbf{x}, 0) + \tau \frac{\partial}{\partial \tau} \chi(\mathbf{x}, 0) + o(\tau^2)$$

Levando em consideração que $\chi(\mathbf{x}, \tau) = \mathbf{x}_\tau$ e $\chi(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{x}$, e introduzindo a notação

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \chi(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{v}(\mathbf{x}) \tag{6}$$

Tem-se que todo ponto \mathbf{x}_τ pode ser escrito, para τ suficientemente pequeno, da seguinte maneira

$$\mathbf{x}_\tau = \mathbf{x} + \tau \mathbf{v}(\mathbf{x}) \tag{7}$$

onde $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ é uma *ação de mudança de forma* ou, fazendo um paralelo com Mecânica do Contínuo,¹¹ pode ser visto como uma *velocidade de mudança de forma*.

Sendo assim, o problema elíptico de valor no contorno escrito na configuração de referência (eq. (1)), também deve ser satisfeito, para qualquer τ , na configuração perturbada Ω_τ , tomando a forma:

Encontre $u_\tau \in U_\tau := U(\Omega_\tau)$, tal que

$$a_\tau(u_\tau, p_\tau) = l_\tau(p_\tau) \quad \forall p_\tau \in V_\tau := V(\Omega_\tau) \quad (8)$$

Partindo-se, então, para os conceitos de Análise de Sensibilidade à mudança de forma propriamente dita, necessita-se estabelecer a sensibilidade da função custo $\psi(\Omega_\tau)$ em relação à perturbação caracterizada por τ , a qual é dada pela seguinte derivada

$$\left. \frac{d}{d\tau} \psi(\Omega_\tau) \right|_{\tau=0} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\psi(\Omega_\tau) - \psi(\Omega_0)}{\tau} \quad (9)$$

No entanto, para calcular a derivada da função custo em relação a τ é preciso reescrever $\psi(\Omega_\tau)$ como função explícita do parâmetro τ da seguinte maneira

$$\psi(\Omega_\tau) := \int_{\Omega_\tau} \phi(\tau, u_\tau) d\Omega_\tau = \Psi_\tau(\tau, u_\tau) \quad (10)$$

onde u_τ é solução da eq. (8).

Assim, a derivada de $\Psi_\tau(\tau, u_\tau)$ em relação ao parâmetro τ é dada por

$$\left. \frac{d}{d\tau} \Psi_\tau(\tau, u_\tau) \right|_{\tau=0} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\Psi_\tau(\tau, u_\tau) - \Psi(u)}{\tau} \quad (11)$$

onde u_τ é uma função implícita de τ através da equação de estado (eq. (1)).

A análise de sensibilidade em relação a mudança de forma pode ser obtida utilizando o método do lagrangeano, o qual consiste em relaxar a restrição do problema, neste caso a equação de estado (eq. (1)). Assim, o lagrangeano pode ser escrito, já na configuração perturbada Ω_τ , como

$$\mathcal{L}_\tau(\tau, u_\tau, p_\tau) = \Psi_\tau(\tau, u_\tau) + a_\tau(u_\tau, p_\tau) - l_\tau(p_\tau) \quad (12)$$

Uma vez que a equação de estado seja satisfeita para todo τ , basta calcular a derivada total do lagrangeano \mathcal{L}_τ (eq. (12)) em relação ao parâmetro τ , para obter, automaticamente, a sensibilidade da função custo Ψ_τ em relação a τ , ou seja

$$\frac{d\mathcal{L}_\tau}{d\tau} = \frac{d\Psi_\tau}{d\tau} = \frac{\partial \mathcal{L}_\tau}{\partial \tau} + \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}_\tau}{\partial u_\tau}, \frac{du_\tau}{d\tau} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}_\tau}{\partial p_\tau}, \frac{dp_\tau}{d\tau} \right\rangle \quad (13)$$

Denominando

$$\dot{u}_\tau = \frac{du_\tau}{d\tau} \quad \text{e} \quad \dot{p}_\tau = \frac{dp_\tau}{d\tau}$$

o cálculo da derivada do lagrangeano pode ser reescrito da seguinte e já consagrada maneira:

Seja $u_\tau \in U_\tau$ solução da equação de estado, isto é

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}_\tau}{\partial p_\tau}, \frac{dp_\tau}{d\tau} \right\rangle = 0 \Leftrightarrow a_\tau(u_\tau, \dot{p}_\tau) = l_\tau(\dot{p}_\tau) \quad \forall \dot{p}_\tau \in V_\tau \quad (14)$$

Seja $p_\tau \in U_\tau$ solução da equação adjunta, dada por

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}_\tau}{\partial u_\tau}, \frac{du_\tau}{d\tau} \right\rangle = 0 \Leftrightarrow a_\tau(p_\tau, \dot{u}_\tau) = - \left\langle \frac{\partial \Psi_\tau}{\partial u_\tau}, \dot{u}_\tau \right\rangle \quad \forall \quad \dot{u}_\tau \in V_\tau \quad (15)$$

Desde que as eqs. (14) e (15) sejam satisfeitas, a derivada total do lagrangeano coincide com sua derivada parcial, ou seja,

$$\frac{d}{d\tau} \mathcal{L}_\tau(\tau, u_\tau, p_\tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} \mathcal{L}_\tau(\tau, u_\tau, p_\tau) \quad (16)$$

A eq. (16) leva a importante conclusão de que, para u_τ solução da equação de estado e p_τ solução da equação adjunta, basta calcular a derivada parcial do lagrangeano em relação τ para obter a sensibilidade da função custo à mudança de forma (eq. (11)). Sendo assim, considerando as eqs. (13) e (16), a análise de sensibilidade à mudança de forma resulta em

$$\frac{d}{d\tau} \Psi_\tau(\tau, u_\tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} \mathcal{L}_\tau(\tau, u_\tau, p_\tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} \Psi_\tau(\tau, u_\tau) + \frac{\partial}{\partial \tau} a_\tau(u_\tau, p_\tau) - \frac{\partial}{\partial \tau} l_\tau(p_\tau) \quad (17)$$

Para uma vasta classe de problemas de engenharia, a análise de sensibilidade à mudança de forma dada pela eq. (17) pode ser escrita em função de uma integral no contorno Γ , a qual, geralmente, toma a forma

$$\frac{d}{d\tau} \Psi_\tau(\tau, u_\tau) \Big|_{\tau=0} = \int_{\Gamma} \Sigma \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma \quad (18)$$

onde o tensor Σ pode ser interpretado como uma generalização do tensor momento energia de Eshelby (ver referência 9) e \mathbf{v} é a velocidade de mudança de forma dada em eq. (6).

Outro importante resultado já demonstrado na referência 8 é que somente a componente da velocidade \mathbf{v} na direção normal a fronteira Γ é significativa nos cálculos de sensibilidade. Este resultado baseia-se na idéia de que somente a componente normal da velocidade, ou seja v_n , é que efetivamente produz uma mudança na forma do corpo. Sendo assim, considerando que $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = v_n \mathbf{n}$, a eq. (18) pode ser reescrita como

$$\frac{d\Psi_\tau}{d\tau} \Big|_{\tau=0} = \int_{\Gamma} \Sigma \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} v_n \, d\Gamma = v_n \int_{\Gamma} g_T(\mathbf{x}) \, d\Gamma, \quad \text{onde} \quad g_T(\mathbf{x}) = \Sigma \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} \quad (19)$$

para v_n constante em Γ .

Finalmente, basta mostrar como a expressão da análise de sensibilidade à mudança de forma (eq. (19)) pode ser utilizada para obter a derivada topológica $G_T(\mathbf{x})$, dados pelas eqs. (4) ou (5), relacionando, portanto, ambos os conceitos.

CÁLCULO DA DERIVADA TOPOLÓGICA VIA ANÁLISE DE SENSIBILIDADE À MUDANÇA DE FORMA

Seja a função custo $\psi(\cdot)$ definida nos domínios $\Omega_\epsilon = \Omega - \bar{B}_\epsilon$ e $\Omega_{\epsilon+\delta\epsilon} = \Omega - \bar{B}_{\epsilon+\delta\epsilon}$. Considerando ainda os conceitos de análise de sensibilidade à mudança de forma apresentados na Seção anterior, tem-se

$$\begin{aligned} \Omega_{\epsilon+\delta\epsilon} = \Omega_\tau &\Rightarrow \Omega_\epsilon = \Omega_0 \\ \Gamma_{\epsilon+\delta\epsilon} = \Gamma_\tau &\Rightarrow \Gamma_\epsilon = \Gamma_0 \end{aligned} \quad (20)$$

lembrando que apenas a bola B_ϵ sofre uma perturbação $\delta\epsilon$.

A partir da eq. (7) e considerando que $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = v_n \mathbf{n}$, vem

$$\mathbf{x}_\tau = \mathbf{x} + \tau v_n \mathbf{n} \quad (21)$$

Então, é possível associar a perturbação $\delta\epsilon$ com o parâmetro τ , ou seja, das eqs. (20) e (21) observando que $\delta\epsilon = \|\mathbf{x}_\tau - \mathbf{x}\|$ para $\mathbf{x} \in \partial B_\epsilon$ e $\mathbf{x}_\tau = \chi(\mathbf{x}, \tau) \in \partial B_{\epsilon+\delta\epsilon}$, tem-se que

$$\delta\epsilon = \|\tau v_n \mathbf{n}\| = \tau |v_n| \quad (22)$$

Agora, a relação entre a derivada topológica e os conceitos de análise de sensibilidade à mudança de forma, pode ser demonstrada no seguinte teorema:

Teorema 1

Seja a derivada topológica dada pela eq. (4), tal que $0 < |G_T^*(\hat{\mathbf{x}})| < \infty$, então o limite com $\epsilon \rightarrow 0$ existe e pode ser escrito como

$$G_T^*(\hat{\mathbf{x}}) = G_T(\hat{\mathbf{x}}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{f'(\epsilon) |V_n|} \left. \frac{d\psi(\Omega_\tau)}{d\tau} \right|_{\tau=0} \quad (23)$$

Prova

A prova deste teorema é dividida em duas partes

Parte 1:

$$G_T(\hat{\mathbf{x}}) = G_T^*(\hat{\mathbf{x}}) \quad (24)$$

Parte 2:

$$G_T(\hat{\mathbf{x}}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{f'(\epsilon) |V_n|} \left. \frac{d\psi(\Omega_\tau)}{d\tau} \right|_{\tau=0} \quad (25)$$

Prova da Parte 1

Da eq. (4) tem-se

$$\psi(\Omega_\epsilon) = \psi(\Omega) + G_T^*(\hat{\mathbf{x}}) f(\epsilon) + o(f(\epsilon)) \quad (26)$$

onde $o(f(\epsilon))$ é utilizado para denotar os termos de ordem superior a $f(\epsilon)$, ou seja

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{o(f(\epsilon))}{f(\epsilon)} = 0$$

Da mesma maneira, tem-se que

$$\psi(\Omega_{\epsilon+\delta\epsilon}) = \psi(\Omega) + G_T^*(\hat{\mathbf{x}}) f(\epsilon + \delta\epsilon) + o(f(\epsilon + \delta\epsilon)) \quad (27)$$

Subtraindo a eq. (26) da eq. (27) vem

$$\psi(\Omega_{\epsilon+\delta\epsilon}) - \psi(\Omega_\epsilon) = G_T^*(\hat{\mathbf{x}}) (f(\epsilon + \delta\epsilon) - f(\epsilon)) + o(f(\epsilon + \delta\epsilon)) - o(f(\epsilon)) \quad (28)$$

Dividindo a eq. (28) por $f(\epsilon + \delta\epsilon) - f(\epsilon)$ obtém-se

$$\frac{\psi(\Omega_{\epsilon+\delta\epsilon}) - \psi(\Omega_{\epsilon})}{f(\epsilon + \delta\epsilon) - f(\epsilon)} = G_T^*(\hat{\mathbf{x}}) + \frac{o(f(\epsilon + \delta\epsilon)) - o(f(\epsilon))}{f(\epsilon + \delta\epsilon) - f(\epsilon)}$$

Tomando o limite duplo como indicado na eq. (5), tem-se

$$G_T(\hat{\mathbf{x}}) = \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \delta\epsilon \rightarrow 0}} \frac{\psi(\Omega_{\epsilon+\delta\epsilon}) - \psi(\Omega_{\epsilon})}{f(\epsilon + \delta\epsilon) - f(\epsilon)} = G_T^*(\hat{\mathbf{x}}) + \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \delta\epsilon \rightarrow 0}} \frac{o(f(\epsilon + \delta\epsilon)) - o(f(\epsilon))}{f(\epsilon + \delta\epsilon) - f(\epsilon)} \quad (29)$$

Aplicando o teorema de L'Hopital

$$\lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \delta\epsilon \rightarrow 0}} \frac{o(f(\epsilon + \delta\epsilon)) - o(f(\epsilon))}{f(\epsilon + \delta\epsilon) - f(\epsilon)} = \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \delta\epsilon \rightarrow 0}} \frac{o'(f(\epsilon + \delta\epsilon)) f'(\epsilon + \delta\epsilon)}{f'(\epsilon + \delta\epsilon)} = \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \delta\epsilon \rightarrow 0}} o'(f(\epsilon + \delta\epsilon)) = 0$$

e substituindo este último resultado na eq. (29), obtém-se a prova da primeira parte deste teorema, ou seja

$$G_T(\hat{\mathbf{x}}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\psi(\Omega_{\epsilon}) - \psi(\Omega)}{f(\epsilon)} = G_T^*(\hat{\mathbf{x}})$$

Prova da Parte 2

Seja a eq. (5), que pode ser escrita como

$$G_T(\hat{\mathbf{x}}) = \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \delta\epsilon \rightarrow 0}} \frac{\psi(\Omega_{\epsilon+\delta\epsilon}) - \psi(\Omega_{\epsilon})}{\frac{f(\epsilon+\delta\epsilon) - f(\epsilon)}{\delta\epsilon} \delta\epsilon} \quad (30)$$

Mas, observa-se que

$$\lim_{\delta\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(\epsilon + \delta\epsilon) - f(\epsilon)}{\delta\epsilon} = f'(\epsilon) \quad (31)$$

Substituindo a eq.(31) em eq. (30) vem

$$G_T(\hat{\mathbf{x}}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{f'(\epsilon)} \lim_{\delta\epsilon \rightarrow 0} \frac{\psi(\Omega_{\epsilon+\delta\epsilon}) - \psi(\Omega_{\epsilon})}{\delta\epsilon} \quad (32)$$

Considerando as eqs. (20 e 9), então a eq. (32) pode ser reescrita, levando em conta que $\delta\epsilon = \tau |V_n|$ (eq. 22), da seguinte maneira

$$G_T(\hat{\mathbf{x}}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{f'(\epsilon)} \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\psi(\Omega_{\tau}) - \psi(\Omega_0)}{\tau |V_n|} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{f'(\epsilon) |V_n|} \left. \frac{d\psi(\Omega_{\tau})}{d\tau} \right|_{\tau=0} \quad (33)$$

Finalmente, da eq. (33) e do resultado da primeira parte da prova deste teorema (eq. (24)), verifica-se que

$$G_T^*(\hat{\mathbf{x}}) = G_T(\hat{\mathbf{x}}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{f'(\epsilon) |V_n|} \left. \frac{d\psi(\Omega_{\tau})}{d\tau} \right|_{\tau=0}$$

e o teorema está demonstrado ■

Lembrando que $\psi(\Omega_\tau) = \Psi_\tau(\tau, u_\tau)$ e que $\Gamma_{\epsilon+\delta\epsilon} = \Gamma_\tau$, então, a partir do resultado do Teorema 1 e da eq. (19) e considerando ainda uma escolha adequada de $f(\epsilon)$, tal que $0 < |G_T(\hat{\mathbf{x}})| < \infty$, a derivada topológica pode ser expressa da seguinte forma

$$G_T(\hat{\mathbf{x}}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{f'(\epsilon) |v_n|} \frac{d}{d\tau} \Psi_\tau(\tau, u_\tau) \Big|_{\tau=0} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\text{sign}(v_n)}{f'(\epsilon)} \int_{\Gamma_\epsilon} g_T(\mathbf{x}) d\Gamma_\epsilon \quad (34)$$

Finalmente, como a parcela do contorno Γ_ϵ que efetivamente está submetida à perturbação $\delta\epsilon$ (ou $\tau |v_n|$) é relativa ao contorno da bola B_ϵ , isto é ∂B_ϵ , então a eq. (34) pode ser escrita, considerando uma expansão no furo ($\text{sign}(v_n) = -1$), como

$$G_T(\hat{\mathbf{x}}) = - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{f'(\epsilon)} \int_{\partial B_\epsilon} g_T(\mathbf{x}) d\partial B_\epsilon \quad (35)$$

Assim sendo, para obter a expressão final da derivada topológica dada pela eq. (35) basta calcular $g_T(\mathbf{x}) = \Sigma \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}$, onde o tensor Σ depende estritamente da função custo escolhida e de cada problema em análise (equação de estado), e posteriormente calcular o limite com $\epsilon \rightarrow 0$.

DERIVADA TOPOLÓGICA NA ELASTICIDADE LINEAR

Otimização estrutural é uma área de estudo que, na sua essência, procura melhorar o desempenho estrutural de componentes ou sistemas mecânicos de maneira sistemática. Assim, primeiramente necessita-se identificar as variáveis de projeto que caracterizam um determinado componente. Em seguida, mediante modificações destas variáveis segundo algum critério, espera-se obter uma melhor solução, dentre as diversas possíveis².

Em geral, as variáveis de projeto que definem um componente mecânico estão associadas à sua geometria. Logo, várias técnicas têm sido utilizadas para controlar e/ou definir projetos ótimos em termos geométricos, sendo, portanto, relativamente dependentes do tipo de estrutura em análise: treliças, pórticos, placas e cascas, sólidos tridimensionais, etc.

No contexto de otimização estrutural, uma questão de grande importância na concepção de componentes e/ou sistemas mecânicos destinados a transmitir esforços entre dois ou mais pontos é a capacidade de obter automaticamente a topologia ótima dos mesmos, respeitando certos critérios de geometria e resistência mecânica. Por razões de custos, necessita-se determinar morfologias que conduzam a peças de alta resistência de maneira a empregar o mínimo material possível através de uma adequada distribuição de tensões. Será mostrado, portanto, que através da derivada topológica é possível obter a topologia ótima no contexto de otimização estrutural, ou mais especificamente, em elasticidade bidimensional.

Formulação de equilíbrio

Neste trabalho é abordado o problema de elasticidade linear bidimensional, sendo que as equações são obtidas mediante a degeneração de um problema tridimensional. As equações de equilíbrio de um meio elástico linear podem ser obtidas em forma de equações diferenciais (forma forte), ou mediante formulações variacionais (forma fraca) que, no contexto de Análise de Sensibilidade, tornam-se particularmente atraentes.

No problema de elasticidade linear, tem-se um corpo deformável Ω_ϵ , com um pequeno furo B_ϵ centrado em $\hat{\mathbf{x}} \in \Omega_\epsilon$, submetido a um conjunto de forças \mathbf{f} no contorno Γ_N , forças de campo \mathbf{b} no domínio Ω_ϵ e restrições de deslocamentos na superfície Γ_D . Se o corpo Ω_ϵ

está em equilíbrio, o seguinte conjunto de equações deve ser satisfeito

$$\begin{cases} \operatorname{div} \sigma + \mathbf{b} = 0 & \text{em } \Omega_\epsilon \\ \mathbf{u} = \mathbf{g} & \text{sobre } \Gamma_D \\ \sigma \mathbf{n} = \mathbf{f} & \text{sobre } \Gamma_N \\ \sigma \mathbf{n} = 0 & \text{sobre } \partial B_\epsilon \end{cases} \quad (36)$$

onde \mathbf{n} o vetor unitário normal à superfície $\Gamma_\epsilon = \Gamma_D \cup \Gamma_N \cup \partial B_\epsilon$, σ é o tensor tensão de Cauchy e \mathbf{g} são os deslocamentos prescritos no contorno Γ_D , os quais, por simplicidade, são considerados nulos neste trabalho. Esse conjunto de equações é composto pelas equações de equilíbrio na sua forma forte ou diferencial, condições de contorno de Dirichlet ou essenciais e condições de contorno de Neumann ou naturais.

As equações deformações-deslocamentos da teoria linear de elasticidade, são dadas por

$$\varepsilon(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) := \nabla \mathbf{u}^s, \quad \text{sendo } \varepsilon = \varepsilon^T \quad (37)$$

Considerando as equações constitutivas da teoria da elasticidade para o caso de material isotrópico, linear e homogêneo tem-se⁷

$$\sigma = \mathbf{C}\varepsilon = \mathbf{C}\nabla \mathbf{u}^s, \quad \text{onde } \sigma = \sigma^T \quad (38)$$

onde \mathbf{C} é o tensor constitutivo do material.

O conjunto de equações dado pela eq. (36) pode ainda ser colocado em uma forma variacional em termos da variável primal \mathbf{u} , dando lugar ao seguinte problema¹⁹:

Encontre $\mathbf{u} \in U$, tal que

$$\int_{\Omega_\epsilon} \mathbf{C}\nabla \mathbf{u}^s \cdot \nabla \mathbf{w}^s \, d\Omega_\epsilon = \int_{\Omega_\epsilon} \mathbf{b} \cdot \mathbf{w} \, d\Omega_\epsilon + \int_{\Gamma_N} \mathbf{f} \cdot \mathbf{w} \, d\Gamma_\epsilon \quad \forall \mathbf{w} \in V \quad (39)$$

Supondo a existência de forças de corpo $\mathbf{b} \in L^2(\Omega)$ e forças de superfície $\mathbf{f} \in L^2(\Gamma_N)$ o espaço das funções admissíveis U e o espaço das variações admissíveis V podem ser definidos, respectivamente, como

$$\begin{aligned} U &= \{ \mathbf{u} \in H^1(\Omega_\epsilon) \mid \mathbf{u} = 0 \text{ sobre } \Gamma_D \} \\ V &= \{ \mathbf{w} \in H^1(\Omega_\epsilon) \mid \mathbf{w} = 0 \text{ sobre } \Gamma_D \} \end{aligned}$$

Tal como mostrado na a eq. (39) também deve ser satisfeita para todo τ , podendo ser escrita na configuração perturbada, da seguinte maneira:

Encontre $\mathbf{u}_\tau \in U_\tau$, tal que

$$a_\tau(\mathbf{u}_\tau, \mathbf{w}_\tau) = l_\tau(\mathbf{w}_\tau) \quad \forall \mathbf{w}_\tau \in V_\tau, \quad (40)$$

onde os espaços U_τ e V_τ podem ser definidos, respectivamente, como

$$\begin{aligned} U_\tau &= \{ \mathbf{u}_\tau \in H^1(\Omega_\tau) \mid \mathbf{u}_\tau = 0 \text{ sobre } \Gamma_D \} \\ V_\tau &= \{ \mathbf{w}_\tau \in H^1(\Omega_\tau) \mid \mathbf{w}_\tau = 0 \text{ sobre } \Gamma_D \} \end{aligned}$$

e $a_\tau(\mathbf{u}_\tau, \mathbf{w}_\tau)$ e $l_\tau(\mathbf{w}_\tau)$ são dados, respectivamente, por

$$a_\tau(\mathbf{u}_\tau, \mathbf{w}_\tau) = \int_{\Omega_\tau} \mathbf{C} \nabla_\tau \mathbf{u}_\tau^s \cdot \nabla_\tau \mathbf{w}_\tau^s \, d\Omega_\tau \quad (41)$$

$$l_\tau(\mathbf{w}_\tau) = \int_{\Omega_\tau} \mathbf{b}_\tau \cdot \mathbf{w}_\tau \, d\Omega_\tau + \int_{\Gamma_N} \mathbf{f}_\tau \cdot \mathbf{w}_\tau \, d\Gamma_\tau \quad (42)$$

sendo que $\nabla_\tau(\cdot)$ é adotado para denotar $\nabla_\tau(\cdot) := \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_\tau}(\cdot)$

Cálculo da derivada topológica

Para obter a expressão da derivada topológica via análise de sensibilidade, necessita-se primeiramente calcular a derivada da função custo $\Psi_\tau(\tau, \mathbf{u}_\tau)$ em relação ao parâmetro τ , em $\tau = 0$ (Teorema 1). Como visto anteriormente o cálculo de sensibilidade da função custo Ψ_τ pode ser realizado recorrendo ao método do lagrangeano, ou seja

$$\frac{d}{d\tau}\Psi_\tau(\tau, \mathbf{u}_\tau) = \frac{\partial}{\partial\tau}\mathcal{L}_\tau(\tau, \mathbf{u}_\tau, \mathbf{p}_\tau) = \frac{\partial}{\partial\tau}\Psi_\tau(\tau, \mathbf{u}_\tau) + \frac{\partial}{\partial\tau}a_\tau(\mathbf{u}_\tau, \mathbf{p}_\tau) - \frac{\partial}{\partial\tau}l_\tau(\mathbf{p}_\tau) \quad (43)$$

Neste trabalho, a energia de deformação da estrutura é adotada como exemplo de função objetivo. Esta função custo é particularmente interessante porque, além de simplificar os cálculos, tem uma interpretação física bastante clara. A minimização da energia interna leva a peças de alta resistência, ou seja, a componentes estruturais bastante rígidos, o que é interessante em muitas aplicações práticas em engenharia. Sendo assim, neste caso a função custo adotada é definida como:

$$\Psi_\tau(\tau, \mathbf{u}_\tau) := \frac{1}{2}a_\tau(\mathbf{u}_\tau, \mathbf{u}_\tau) \quad (44)$$

Uma vez caracterizada a função custo a ser minimizada, pode-se então partir para o cálculo da derivada do lagrangeano (eq. (43)). Sendo assim, a equação adjunta (eq. (15)), para este caso particular, fica:

Encontre $\mathbf{p}_\tau \in U_\tau$, tal que

$$\begin{aligned} a_\tau(\mathbf{p}_\tau, \dot{\mathbf{u}}_\tau) &= - \left\langle \frac{\partial \Psi_\tau}{\partial \mathbf{u}_\tau}, \dot{\mathbf{u}}_\tau \right\rangle = -a_\tau(\mathbf{u}_\tau, \dot{\mathbf{u}}_\tau) \quad \forall \dot{\mathbf{u}}_\tau \in V_\tau \\ &\Rightarrow \mathbf{p}_\tau = -\mathbf{u}_\tau \end{aligned} \quad (45)$$

Substituindo a eq. (45) na derivada do lagrangeano (eq. 43) tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\tau}\mathcal{L}_\tau(\tau, \mathbf{u}_\tau, \mathbf{u}_\tau) &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\tau}a_\tau(\mathbf{u}_\tau, \mathbf{u}_\tau) - \frac{\partial}{\partial\tau}a_\tau(\mathbf{u}_\tau, \mathbf{u}_\tau) + \frac{\partial}{\partial\tau}l_\tau(\mathbf{u}_\tau) \\ &= -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\tau}a_\tau(\mathbf{u}_\tau, \mathbf{u}_\tau) + \frac{\partial}{\partial\tau}l_\tau(\mathbf{u}_\tau) \end{aligned} \quad (46)$$

Para obter as derivadas na configuração referencial $\Omega_0 = \Omega_\epsilon$, ou seja, em $\tau = 0$, pode-se utilizar o teorema do transporte de Reynolds. Assim, de maneira geral, a derivada da função custo é dada por

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\Psi_\tau(\tau, \mathbf{u}_\tau) \Big|_{\tau=0} = \frac{\partial}{\partial\tau} \int_{\Omega_\tau} \phi(\tau, \mathbf{u}_\tau) d\Omega_\tau \Big|_{\tau=0} = \int_{\Omega_\epsilon} \left(\frac{\partial\phi}{\partial\tau} \Big|_{\tau=0} + \phi \operatorname{div} \mathbf{v} \right) d\Omega_\epsilon \quad (47)$$

Usando a eq. (47) para derivar a forma bilinear $a_\tau(\mathbf{u}_\tau, \mathbf{u}_\tau)$ tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\tau}a_\tau(\mathbf{u}_\tau, \mathbf{u}_\tau) \Big|_{\tau=0} &= \frac{\partial}{\partial\tau} \int_{\Omega_\tau} \mathbf{C} \nabla_\tau \mathbf{u}_\tau^s \cdot \nabla_\tau \mathbf{u}_\tau^s d\Omega_\tau \Big|_{\tau=0} \\ &= \int_{\Omega_\epsilon} \left[\frac{\partial}{\partial\tau} (\mathbf{C} \nabla_\tau \mathbf{u}_\tau^s \cdot \nabla_\tau \mathbf{u}_\tau^s) \Big|_{\tau=0} + \mathbf{C} \nabla \mathbf{u}^s \cdot \nabla \mathbf{u}^s \operatorname{div} \mathbf{v} \right] d\Omega_\epsilon \end{aligned} \quad (48)$$

onde a derivada do gradiente simétrico de um campo vetorial é dada por

$$\frac{\partial}{\partial\tau} (\nabla_\tau \mathbf{u}_\tau^s) \Big|_{\tau=0} = -(\nabla \mathbf{u} \nabla \mathbf{v})^s \quad (49)$$

Substituindo este último resultado na eq. (48) vem

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} a_\tau(\mathbf{u}_\tau, \mathbf{u}_\tau) \Big|_{\tau=0} &= - \int_{\Omega_\epsilon} [\mathbf{C}(\nabla \mathbf{u} \nabla \mathbf{v})^s \cdot \nabla \mathbf{u}^s + \mathbf{C} \nabla \mathbf{u}^s \cdot (\nabla \mathbf{u} \nabla \mathbf{v})^s - \mathbf{C} \nabla \mathbf{u}^s \cdot \nabla \mathbf{u}^s \operatorname{div} \mathbf{v}] d\Omega_\epsilon \\ &= - \int_{\Omega_\epsilon} [2 \nabla \mathbf{u}^T \mathbf{C} \nabla \mathbf{u}^s - (\mathbf{C} \nabla \mathbf{u}^s \cdot \nabla \mathbf{u}^s) \mathbf{I}] \cdot \nabla \mathbf{v} d\Omega_\epsilon \end{aligned} \quad (50)$$

Da mesma maneira, pode-se calcular a derivada do funcional $l_\tau(\mathbf{u}_\tau)$, considerando \mathbf{b} constante, da seguinte forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} l_\tau(\mathbf{u}_\tau) \Big|_{\tau=0} &= \int_{\Omega_\epsilon} (\mathbf{b} \operatorname{div} \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} d\Omega_\epsilon + \int_{\Gamma_N} (\mathbf{f} \operatorname{div}_\Gamma \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} d\Gamma_\epsilon \\ &= \int_{\Omega_\epsilon} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I} \cdot \nabla \mathbf{v} d\Omega_\epsilon \end{aligned} \quad (51)$$

onde o divergente superficial da velocidade é dado por $\operatorname{div}_\Gamma \mathbf{v} = (\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cdot \nabla \mathbf{v}$, sendo que $\mathbf{v} = 0$ sobre Γ_N .

Assim, substituindo as eqs. (50) e (51) em eq. (46), a derivada do lagrangeano fica

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_\tau}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_\epsilon} [2 \nabla \mathbf{u}^T \mathbf{C} \nabla \mathbf{u}^s - (\mathbf{C} \nabla \mathbf{u}^s \cdot \nabla \mathbf{u}^s) \mathbf{I} + 2(\mathbf{b} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I}] \cdot \nabla \mathbf{v} d\Omega_\epsilon \\ &= \int_{\Omega_\epsilon} \Sigma \cdot \nabla \mathbf{v} d\Omega_\epsilon \end{aligned} \quad (52)$$

onde o tensor Σ é dado por

$$\Sigma = \nabla \mathbf{u}^T \mathbf{C} \nabla \mathbf{u}^s - \frac{1}{2} (\mathbf{C} \nabla \mathbf{u}^s \cdot \nabla \mathbf{u}^s) \mathbf{I} + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I}$$

A partir da relação

$$\operatorname{div}(\Sigma^T \mathbf{v}) = \Sigma \cdot \nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{div} \Sigma$$

e levando em conta que[‡] $\operatorname{div} \Sigma = 0$, e do teorema da divergência, a derivada do lagrangeano (eq. (52)), como esperado, fica

$$\frac{\partial \mathcal{L}_\tau}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = \frac{d\Psi_\tau}{d\tau} \Big|_{\tau=0} = \int_{\Gamma_\epsilon} \Sigma \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} d\Gamma_\epsilon = \int_{\partial B_\epsilon} \Sigma \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} d\partial B_\epsilon$$

Considerando $\mathbf{v} = v_n \mathbf{n}$, com v_n constante, então tem-se que

$$\frac{d\Psi_\tau}{d\tau} \Big|_{\tau=0} = v_n \int_{\partial B_\epsilon} \Sigma \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} d\partial B_\epsilon \quad (53)$$

onde

$$\Sigma \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = (\mathbf{C} \nabla \mathbf{u}^s) \mathbf{n} \cdot (\nabla \mathbf{u}) \mathbf{n} - \frac{1}{2} \mathbf{C} \nabla \mathbf{u}^s \cdot \nabla \mathbf{u}^s + \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}$$

[‡]Admitindo que o campo \mathbf{u} satisfaz a equação de estado dada por (eq. (36)), então pode-se demonstrar que $\operatorname{div} \Sigma = 0$.

Além do mais, $(\mathbf{C}\nabla\mathbf{u}^s) \mathbf{n} = 0$ sobre ∂B_ϵ (eqs. (36) e (38)), então

$$\int_{\partial B_\epsilon} \Sigma \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} \, d\partial B_\epsilon = \int_{\partial B_\epsilon} - \left(\frac{1}{2} \mathbf{C}\nabla\mathbf{u}^s \cdot \nabla\mathbf{u}^s - \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} \right) \, d\partial B_\epsilon \quad (54)$$

Substituindo a eq. (54) em eq. (53), vem

$$\left. \frac{d\Psi_\tau}{d\tau} \right|_{\tau=0} = v_n \int_{\partial B_\epsilon} g_T(\mathbf{x}) \, d\partial B_\epsilon, \quad \text{onde} \quad g_T(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2} \mathbf{C}\nabla\mathbf{u}^s \cdot \nabla\mathbf{u}^s + \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} \quad (55)$$

Finalmente, substituindo a eq. (55) na definição da derivada topológica obtida via análise de sensibilidade (eq. (35)) e adotando $f(\epsilon) = meas(\Omega_\epsilon) - meas(\Omega) = -meas(B_\epsilon)$, tem-se que $f'(\epsilon) = -meas(\partial B_\epsilon)$. Então, a expressão final da derivada topológica para o problema de elasticidade linear bidimensional, cuja função custo é a energia de deformação, pode ser escrita, considerando ausência de forças de corpo, isto é $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, da seguinte maneira

$$G_T(\hat{\mathbf{x}}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{meas(\partial B_\epsilon)} \int_{\partial B_\epsilon} g_T(\mathbf{x}) \, d\partial B_\epsilon = - \left. \frac{A}{2} \mathbf{C}\nabla\mathbf{u}^s \cdot \nabla\mathbf{u}^s \right|_{\hat{\mathbf{x}}} \quad (56)$$

onde a eq. (56) foi obtida mediante uma análise assintótica da solução. Em particular, foram escolhidos os valores do coeficiente de Poisson 1/3 e 1/4 para estado plano de tensões e deformações, respectivamente, o que resulta em $A = 3$ em ambos os casos.

APLICAÇÃO EM OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA

Neste trabalho, primeiramente foi mostrada a relação entre a derivada topológica e a análise de sensibilidade à mudança de forma, em seguida apresentou-se as equações de equilíbrio em elasticidade linear, bem como o cálculo da derivada topológica para esta classe de problemas. Nesta seção, a derivada topológica será aplicada na determinação da topologia ótima em elasticidade linear, de modo a minimizar a energia de deformação da estrutura, satisfazendo a equação de estado do problema.

Algoritmo de otimização topológica

Como visto anteriormente, a derivada topológica trata-se, na verdade, de uma derivada que fornece a sensibilidade da função custo ψ ao criar um pequeno furo B_ϵ no domínio Ω . No entanto, é fácil ver que, da maneira como apresentado neste trabalho, necessita-se ainda colocar alguma restrição adicional no problema, além da equação de estado, para evitar que os algoritmos de otimização topológica a serem desenvolvidos conduzam apenas à solução trivial do problema, i.e. $meas(\Omega) = 0$.

Uma forma simples de contornar este problema consiste em introduzir um critério de parada no algoritmo, que pode ser, por exemplo, sobre o volume final a ser obtido, ou seja, a idéia é criar os furos enquanto $meas(\Omega) \geq meas(\hat{\Omega})$, onde $meas(\hat{\Omega})$ corresponde ao volume final requerido. Sendo assim, considerando este critério de parada, uma proposta de algoritmo de otimização topológica baseado na derivada topológica pode ser esquematizada da seguinte maneira (no trabalho da referência 3 encontra-se uma variação deste algoritmo):

Seja a sequência $\Omega^{k+1} = \{\Omega^k \mid meas(\Omega^k) \geq meas(\hat{\Omega})\}$, onde k é a k -ésima iteração, então:

1. Fornecer o domínio inicial Ω^0 e a restrição $meas(\hat{\Omega})$.

2. Enquanto $meas(\Omega^k) \geq meas(\hat{\Omega})$, faça
 - (a) Encontrar a solução direta \mathbf{u}_T^k (eq. (40)) e a adjunta \mathbf{p}_T^k (eq. (45)).
 - (b) Calcular $G_T(\hat{\mathbf{x}})^k$.
 - (c) Criar os furos nos pontos $\hat{\mathbf{x}}$ correspondente a $\eta_{inf}^k \leq G_T(\hat{\mathbf{x}})^k \leq \eta_{sup}^k$, onde η_{inf}^k e η_{sup}^k são calculados de forma proporcional ao volume de material a ser retirado em cada iteração k .
 - (d) Definir o novo domínio Ω^{k+1} .
 - (e) Fazer $k \leftarrow k + 1$.
3. Neste ponto espera-se ter em mãos a topologia final desejada.

O problema de otimização topológica é, em geral, extremamente complexo. No entanto, embora o algoritmo ora proposto seja simples e rudimentar, ainda assim é possível obter resultados satisfatórios de otimização topológica, como será mostrado nos exemplos numéricos. De qualquer maneira, nada impede que outros algoritmos sejam propostos de modo a utilizar melhor as informações contidas na derivada topológica.

Resultados numéricos

Para verificar os conceitos aqui apresentados, são resolvidos numericamente alguns exemplos clássicos utilizando o algoritmo de otimização topológica mostrado na Seção anterior. O elemento finito triangular linear é adotado para a discretização das equações, sendo que a derivada topológica ($G_T(\hat{\mathbf{x}})$) é avaliada nos pontos nodais da malha de elementos finitos. Finalmente, os resultados obtidos são comparados com soluções analíticas ou com resultados encontrados na literatura corrente para outros métodos de otimização topológica.

Projeto de uma barra

O projeto de uma barra submetida a um carregamento uniformemente distribuído é realizado. A dimensão máxima permitida do componente a ser projetado é $a \times b$, onde $a = 50$ mm e $b = 100$ mm e o carregamento distribuído é $q = 400$ N/mm, aplicado sobre o contorno c do domínio, onde $c = 20$ mm, tal como mostrado na Figura 5.

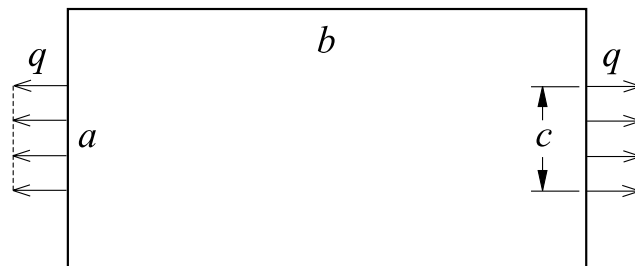


Figura 5. Barra tracionada axialmente: modelo empregado

Considerando a simetria do problema, a barra modelada na Figura 5 é discretizada com 902 elementos finitos lineares, assim como pode ser visto na Figura 6a. O resultado obtido após otimização topológica é apresentado na Figura 6b, onde é possível identificar uma barra cuja dimensão é aproximadamente $b \times c$.

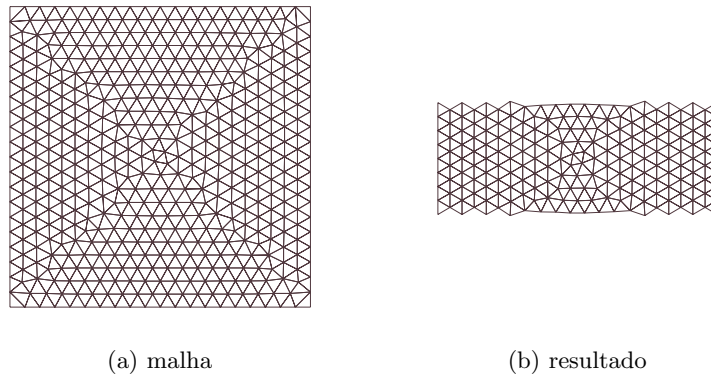


Figura 6. Topologia final

Projeto de uma viga curta simplesmente apoiada

Nesta seção, o projeto de uma viga curta simplesmente apoiada, submetida a uma força concentrada no centro é realizado. A dimensão máxima é $a \times b$, onde $a = 50$ mm e $b = 100$ mm e a força concentrada é $F = 5000$ N, como pode ser visto na Figura 7.

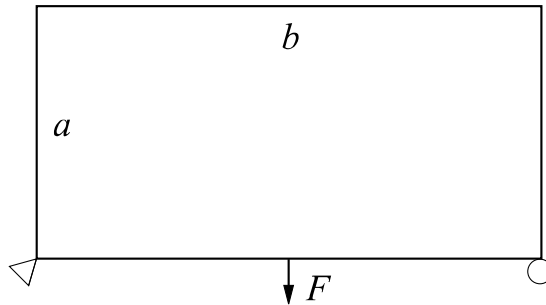


Figura 7. Viga curta simplesmente apoiada: modelo empregado

Considerando a simetria do problema, a viga modelada na Figura 7 é discretizada com 902 elementos finitos lineares, como pode ser visto na Figura 8a. O resultado obtido após otimização topológica é apresentado na Figura 8b.

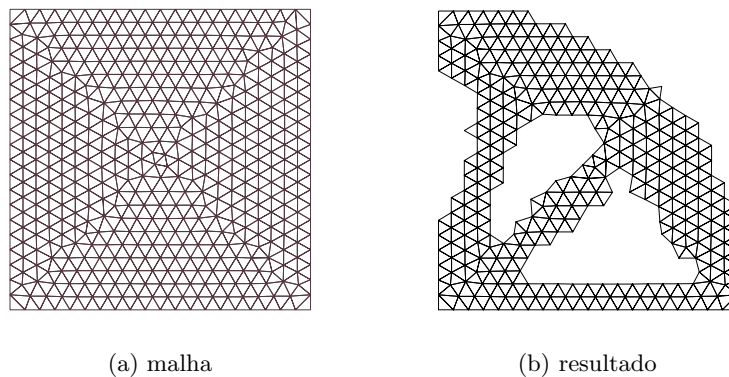


Figura 8. Topologia final

Para facilitar a visualização do problema, a topologia final obtida, sem considerar simetria, pode ser vista na Figura 9, onde é possível identificar um arco reforçado através de barras.

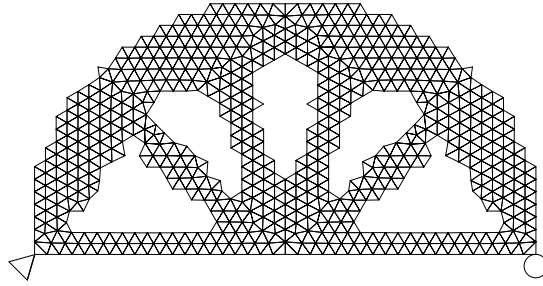


Figura 9. Possível solução

Projeto de uma bicicleta

Este exemplo mostra como a otimização topológica via derivada topológica pode ser utilizada para revisar o projeto estrutural de um produto clássico e já consagrado: uma bicicleta.

Na Figura 10 é apresentada o *lay-out* de uma bicicleta comum (linhas tracejadas) sobreposta à configuração inicial a ser otimizada (linhas cheias), bem como as condições de contorno e carregamento empregados.

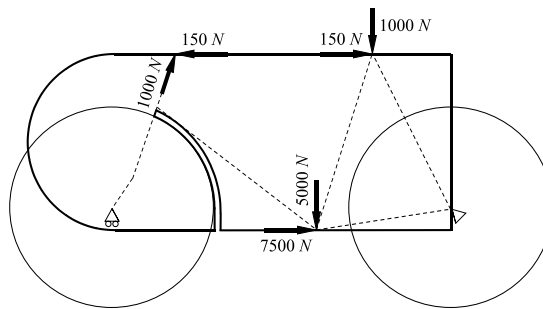


Figura 10. Projeto de uma bicicleta: modelo empregado

A malha utilizada para discretizar o domínio de concepção pode ser vista na Figura 11a. Já na Figura 11b é mostrado o resultado obtido após o processo de otimização topológica.

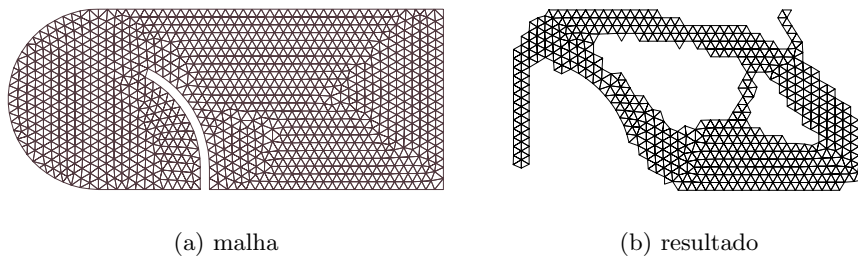


Figura 11. Topologia final

Tal como na Figura 10, o resultado obtido (Figura 11b) é sobreposto ao *lay-out* clássico de uma bicicleta (Figura 12), onde nota-se uma semelhança bastante grande entre as duas configurações.

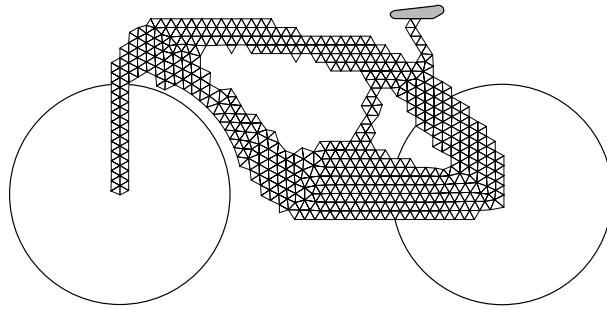


Figura 12. Possível solução

No trabalho da referência 18, também é realizado o projeto de uma bicicleta via otimização topológica, o qual é mostrado na Figura 13. No entanto, é importante mencionar que no referido trabalho utiliza-se técnicas de homogeneização, tal como proposto nas referências 1 e 5.

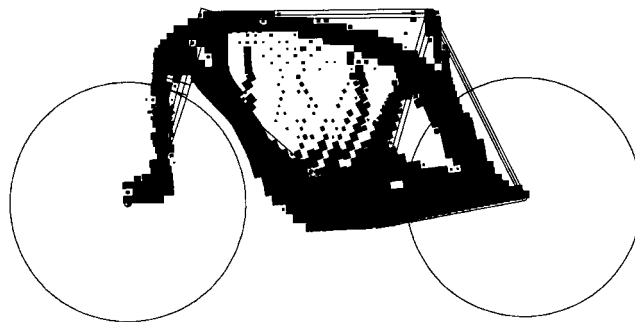


Figura 13. Proposta de solução dada por a referência 18

Comparando-se as propostas de soluções apresentadas neste trabalho e da referência 18, as quais podem ser vistas nas Figuras 12 e 13, respectivamente, observa-se uma grande similaridade entre ambos os resultados, embora sejam utilizados métodos de otimização topológica fundamentados em conceitos completamente distintos. Além do mais, é importante mencionar que os referidos *lay-out* assemelham-se muito ao desenho clássico de uma bicicleta (Figura 10, linhas tracejadas). Isso era esperado, já que este último é resultado de muitos anos de experiência em projeto de veículos deste tipo.

CONCLUSÕES

Neste trabalho, é proposta uma nova definição da derivada topológica (eq. 5), a qual, embora equivalente a original dada pela eq. (4), pode ser obtida via análise de sensibilidade, sem a necessidade de expandir o operador diferencial (equação de estado) em série de potência, conduzindo, portanto, a uma formulação bastante geral e construtiva na obtenção da derivada topológica.

Esta nova formulação não se limita apenas a problemas com condição de contorno de Neumann no furo, onde o integrando $g_T(\mathbf{x})$ da eq. (35) é regular. A mesma idéia pode ser utilizada em situações onde $g_T(\mathbf{x})$ é singular, bastando para isso redefinir adequadamente a função $f(\epsilon)$, como pode ser visto no trabalho da referência 16. É importante observar que tais singularidades na função $g_T(\mathbf{x})$ podem surgir quando é imposto condição de contorno de Dirichlet no furo¹⁰.

A formulação apresentada permite determinar a topologia ótima de componentes estruturais em regime elástico linear e estado plano de tensões, sujeitos a um critério de mínima energia de deformação. No entanto, é importante mencionar que a extensão da metodologia proposta a outros problemas de engenharia (mecânica dos sólidos não linear, mecânica dos fluidos, eletromagnetismo, etc.) é bastante simples e natural. O algoritmo de otimização topológica proposto neste trabalho, o qual é fundamentada na derivada topológica, mostra-se eficiente e rápido, levando a resultados bastante satisfatórios, mesmo sendo utilizado de forma bruta, ou seja, de maneira análoga a um método de ponto fixo. No entanto, outros critérios para utilizar a informação contida na derivada topológica merecem especial atenção, tal como, por exemplo, os algoritmos de pontos interiores.¹²

REFERÊNCIAS

- 1 M.P. Bendsøe, A.R. Diaz y N. Kikuchi, “*Topology and generalized layout optimization of structure*”, Athena Scientific, Belmont, Massachusetts, EE.UU., (1993).
- 2 D.P. Bertsekas, “*Non-linear programming*”, Athena Scientific, Belmont, Massachusetts, EE.UU., (1995).
- 3 J. Céa, S. Garreau, Ph. Guillaume y M. Masmoudi, “*The shape and topological optimizations connection*”, publicación interna, UFR MIG, Université Paul Sabatier, Toulouse, Francia, (1998).
- 4 G.F. Carey y J.T. Oden, “Finite elements mathematical aspects”, Vol. 4, in *Texas Finite Element Series*, Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall, Inc., EE.UU., (1983).
- 5 A.R. Diaz y N. Kikuchi, “Solutions to shape and topology eigenvalue optimization problems using an homogenization method”, *Int. J. Num. Meth. in Engng.*, Vol. 35, pp. 1487–1502, (1992).
- 6 G. Dhatt y G. Touzot, “*Une Présentation de la méthode des éléments finis*”, Maloine, S.A., Francia, (1984).
- 7 G. Duvaut, “*Mécanique des milieux continus*”, Masson, Paris, Francia, (1990).
- 8 E.A. Fancello, “Análise de sensibilidade, geração adaptativa de malhas e o método dos elementos finitos na otimização de forma em problemas de contato e mecânica da fratura”, Tesis doctoral, COPPE–UFRJ, Rio de Janeiro–RJ, (1993).
- 9 J.D. Eshelby, “The Elastic energy-momentum tensor”, *Journal of Elasticity*, Vol. 5, pp. 321–335, (1975).
- 10 S. Garreau, Ph. Guillaume y M. Masmoudi, “*The topological gradient*”, publicación interna, UFR MIG, Université Paul Sabatier, Toulouse, Francia, (1998).
- 11 M.E. Gurtin, “An introduction to continuum mechanics”, *Mathematics in Science and Engineering*, Academic Press, New York, EE.UU., (1981).
- 12 J. Herskovits, “*A general approach for interior points algorithms in non-linear programming*”, publicación interna, COPPE–UFRJ, Rio de Janeiro–RJ, (1991).
- 13 T.J.R. Hughes, “*The finite element method—linear static and dynamic finite element analysis*”, Prentice-Hall International, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, EE.UU., (1987).

- 14 A.N. Kolmogorov y S.V. Fomin, “*Introductory real analysis*”, Dover Publications, Inc., New York, EE.UU., (1970).
- 15 F. Murat y J. Simon, “Sur le controle par un domaine geometrique”, Tesis doctoral, Université P. et M. Curie, Paris, Francia, (1976).
- 16 A.A. Novotny, R.A. Feijóo, C. Padra y E. Taroco, “*Cálculo da derivada topológica via análise de sensibilidade à mudança de forma aplicada a otimização topológica no problema de Poisson*”, publicación interna, 40/2001, LNCC/MCT, Petrópolis-RJ, Brasil, (2001).
- 17 J.T. Oden y J.N. Reddy, “*An introduction to the mathematical theory of finite elements*”, John Wiley & Sons, Co., New York, EE.UU., (1976).
- 18 J. Rasmussen, E. Lund y T. Birker, “Collection of exemples: CAOS optimization system”, reporte especial, N° 13, Institute of Mechanical Engineering, Aalborg University, Dinamarca, (1992).
- 19 J.N. Reddy, “*Energy and variational methods in applied mechanics*”, John Wiley & Sons, Co., New York, EE.UU., (1984).
- 20 A. Schumacher, “Topologieoptimierung von Bauteilstrukturen unter Verwendung von Lochpositionierungskriterien”, Tesis doctoral, Universität-Gesamthochschule-Siegen, Siegen, (1995).
- 21 J. Sokolowski y A. Zochowski, “*On topological derivative in shape optimization*”, publicación interna, N° 3170, INRIA-Lorraine, Francia, (1997).
- 22 J.E. Souza de Cursi, “*Allégement d’une pièce élastique homogène soumise à des contraintes planes*”, publicación interna, N° 1/94, L.M.R Rouen, Francia, (1994).
- 23 B. Szabó y I. Babuška, “*Finite element analysis*”, John Wiley & Sons, Co., New York, EE.UU., (1991).