

Simulación del daño sísmico en edificios de hormigón armado

A. Hanganu
A.H. Barbat
S. Oller
E. Oñate

Monografías de Ingeniería Sísmica

Editor A. H. Barbat

**Simulación del daño sísmico en
edificios de hormigón armado**

A. Hanganu
A.H. Barbat
S. Oller
E. Oñate

Monografía CIMNE IS-4 1994

CENTRO INTERNACIONAL DE METODOS NUMERICOS EN INGENIERIA
Edificio C1, Campus Norte UPC
C/ Gran Capitán, s/n
08034 Barcelona, España.

MONOGRAFIAS DE INGENIERIA SISMICA
Editor A.H. Barbat

ISSN: 1134-3249

SIMULACION DEL DAÑO SISMICO EN EDIFICIOS DE HORMIGON ARMADO
Monografía CIMNE IS-4
© Los Autores

ISBN: 84-87867-40-5
Depósito Legal: B-35891-94

IMPRESO EN ESPAÑA - PRINTED IN SPAIN

PREFACIO

Existe un interés general en la ingeniería civil de disponer de una modalidad de cuantificar el daño producido en las estructuras por diversas acciones catastróficas que pueden ocurrir durante la vida de las mismas. Sería conveniente desde un punto de vista práctico que dicha cuantificación describa el estado de una estructura mediante un único número que aclare si la estructura es capaz de soportar o no las cargas de servicio, si aguantará otra carga extraordinaria en el futuro, cómo influye el presente estado degradado en su comportamiento futuro, donde están situados los puntos más castigados, qué capacidad de resistencia queda en cada punto y, en general, todo tipo de información que ayude a tomar decisiones prácticas.

Los autores han propuesto una solución a este problema en el caso específico de la acción de terremotos sobre estructuras de edificación de hormigón armado. Se ha formulado una metodología para la definición de un índice de daño que pueda tipificarse para todas las estructuras de una misma clase y que permita clasificarlas en función de su vulnerabilidad sísmica.

En la monografía se comienza por estudiar estructuras sencillas de barras, a fin de aclarar mejor los conceptos involucrados y, al mismo tiempo, controlar con mayor facilidad los parámetros que influyen la solución del problema. Sin embargo, la metodología desarrollada, que modeliza las estructuras me-

dian­te el método de los elementos finitos, es directa y fácilmente extensible a láminas, placas o sólidos 3D.

La idea fundamental de este trabajo es la de aplicar ecuaciones constitutivas formuladas en 3D al nivel del mismo punto material, en vez de utilizar leyes constitutivas formuladas en esfuerzos generalizados como, por ejemplo, momento flector-curvatura, fuerza cortante-distorsión angular, etc. Esto permite modelizar el comportamiento de materiales compuestos de manera directa, puesto que a cada material componente se le puede considerar su propia ley constitutiva, su peso específico en el comportamiento de la sección, etc. Un modelo de este tipo se adapta automáticamente a cualquier cambio de régimen de solici­tación de la sección, sin que se necesite cambiar la ley constitutiva por este motivo. Estas ventajas derivan directamente del hecho de que se analiza siempre el estado del punto material y no de algún volumen de material. Como todos los estados posibles de un cuerpo son combinaciones de los estados tensionales de sus puntos, analizando el punto y luego integrando se encuentra cualquier estado particular generado por cualquier solici­tación. De esta manera es suficiente tener un único modelo constitutivo 3D y una metodología para calcular las componentes de los tensores unitarios de tensiones y deformaciones en cualquier punto de la sección de la barra.

En una primera parte del trabajo se ha adoptado un modelo constitutivo tridimensional complejo de daño plástico, cuya eficacia se ha estudiado sobre una viga en régimen estático. Dicho estudio ha proporcionado buenos resultados acerca de la evolución del estado tensional dentro de la estructura, pero a un coste computacional muy alto, por lo que el modelo ha resultado inadecuado para el cálculo de estructuras de grandes dimensiones sometidas a acciones dinámicas. Por esta razón, se ha desarrollado otro modelo constitutivo, denominado de daño isótropo, más sencillo aunque termodinámicamente riguroso, que reduce las dificultades mencionadas. Los índices de daño locales proporcionados por éste son directamente integrables en sentido físico y permiten calcular un índice de daño global para la estructura. El estudio incluye ejemplos sugerentes para destacar las características del nuevo modelo constitutivo y las propiedades del índice de daño global propuesto.

En el primer capítulo se describe el modelo estructural, formulándose el equilibrio de la estructura a partir de la mecánica del continuo. Seguidamente se deduce la ecuación que gobierna el caso dinámico. Esta ecuación diferencial de equilibrio escrita para el modelo continuo se discretiza utilizando las técnicas estandar del método de los elementos finitos. Al considerar que las barras presentan anisotropía del material, se analizan las implicaciones de su subdivisión en capas. Por último, al final del capítulo se describen los algoritmos no lineales más usuales y sus características, a fin de facilitar la comprensión de las técnicas utilizadas y su adecuada interpretación.

En el segundo capítulo se desarrolla el modelo constitutivo de daño plástico, partiendo de un breve resumen de la Teoría de la Plasticidad, para

describir luego, de manera resumida, las principales características de dicho modelo. El ejemplo de cálculo incluido demuestra las posibilidades del modelo de describir adecuadamente el estado tensional de la viga utilizada como ejemplo durante todo el proceso numérico.

En el tercer capítulo se describe en detalle el modelo de daño isótropo, incluyendo también aspectos relacionados con el cálculo práctico de los parámetros involucrados. Se deduce de modo riguroso la expresión del índice global de daño y se incluye un ejemplo de cálculo estático que destaca la capacidad del modelo de describir el comportamiento de una estructura hasta el momento del fallo. Además, se demuestra de manera práctica de objetividad del modelo con respecto al tamaño de la malla de elementos finitos empleada en la discretización.

En el último capítulo se aplica la metodología desarrollada al cálculo dinámico, incluyendo efectos viscosos dentro del modelo de daño isótropo. Se describe el algoritmo de integración en el tiempo de Newmark, con especial énfasis en su aplicación al caso no lineal. El ejemplo que se incluye al final demuestra la eficacia del modelo de daño isótropo y la capacidad del índice global de daño de caracterizar el estado de un pórtico frente a la acción de un terremoto.

Este trabajo ha sido financiado parcialmente a través del proyecto de investigación PB90-0393 de la Dirección General de Investigación Científica y Técnica (DGICYT) del Ministerio de Educación y Ciencia.

ÍNDICE

ÍNDICE	i
PREFACIO	iii
1 MODELO ESTRUCTURAL	1
1.1 INTRODUCCIÓN	1
1.2 HIPÓTESIS DE LA FORMULACIÓN DE TIMOSKENKO	2
1.3 MECÁNICA DEL SÓLIDO APLICADA A BARRAS	3
1.3.1 Campo de desplazamientos	3
1.3.2 Campo de deformación y aceleración	3
1.3.3 Campos de tensión e inercia	4
1.3.4 Campos de esfuerzos seccionales	5
1.3.5 Ecuaciones de equilibrio del sólido continuo	6
1.4 FORMULACIÓN POR ELEMENTOS FINITOS	9
1.4.1 Discretización del medio continuo en elementos finitos	9
1.4.2 Funciones de forma y relaciones derivadas	9
1.4.3 Ecuaciones de equilibrio para un elemento finito	11
1.4.4 Sistema global de ecuaciones	13
1.5 ELEMENTOS FINITOS DE CAPAS	13
1.6 SOLUCIÓN DEL PROBLEMA NO LINEAL	18
1.6.1 Introducción	18
1.6.2 Vector de fuerzas residuales	18
1.6.3 Algoritmos no lineales	20
REFERENCIAS	23
2 MODELO CONSTITUTIVO ELASTO-PLÁSTICO ISÓTROPO	25
2.1 INTRODUCCIÓN	25
2.2 ELEMENTOS DE PLASTICIDAD GENERAL	25
2.2.1 Función de fluencia	27
2.2.2 Descomposición de la deformación total. Regla de flujo	27
2.2.3 Superficie de carga plástica. Endurecimiento plástico	28
2.2.4 Relación tensión deformación generalizada	29
2.3 MODELO CONSTITUTIVO DE DAÑO PLÁSTICO	31
2.3.1 Criterio de fluencia	31
2.3.2 Criterio de potencial plástico	32
2.3.3 Vectores de flujo de Nayak-Zienkiewicz	33
2.3.4 Variable de daño plástico	35

2.3.5	La ley de evolución de la cohesión	36
2.3.6	La ley de evolución del rozamiento interno	36
2.3.7	La ley de evolución de la dilatancia	37
2.4	EJEMPLO DE CÁLCULO	38
2.4.1	Generalidades acerca del ejemplo	38
2.4.2	Descripción del ensayo numérico	38
2.4.3	Resultados	41
	REFERENCIAS	56
3	MODELO CONSTITUTIVO DE DAÑO ISÓTROPICO	57
3.1	INTRODUCCIÓN	57
3.2	CARACTERÍSTICAS DEL MODELO	58
3.2.1	Energía libre	58
3.2.2	Inecuación de Casius-Planck. Disipación mecánica	58
3.2.3	Criterio umbral de degradación o daño	59
3.2.4	Regla de evolución de la variable interna de daño	61
3.2.5	Condición de consistencia de daño	61
3.2.6	Condición de carga y descarga	62
3.2.7	Particularización de la función $G(\chi)$	63
3.2.8	Particularización del parámetro A	63
3.2.9	Aspectos energéticos del fenómeno de degradación	65
3.2.10	Matriz tangente del modelo de daño	66
3.3	ÍNDICES DE DAÑO GLOBALES	70
3.4	EJEMPLO DE CÁLCULO	71
	REFERENCIAS	72
4	EL PROBLEMA DINÁMICO	73
4.1	INTRODUCCIÓN	73
4.2	MÉTODO DE NEWMARK	73
4.2.1	Ecuaciones de diferencias finitas en el tiempo	73
4.2.2	Análisis lineal	75
4.2.3	Aproximación y estabilidad	77
4.2.4	Análisis no lineal - método de la rigidez inicial	78
4.3	MODELO DE DAÑO VISCO-ELÁSTICO	83
4.3.1	Análisis no lineal - método de la rigidez tangente	84
4.3.2	El algoritmo de integración en tiempo	87
4.4	EJEMPLOS DE CÁLCULO	87
	REFERENCIAS	92

CAPÍTULO 1

MODELO ESTRUCTURAL

1.1 INTRODUCCIÓN

El cálculo de las estructuras apórticadas utilizó, en sus comienzos, modelos basados en elementos de construcción unidimensionales sencillos – vigas y columnas – llamados genéricamente *barras*. La aparición del método de los elementos finitos ha permitido un gran adelanto debido a su flexibilidad a la hora de desarrollar modelos estáticos y dinámicos más generales, de permitir el cambio de las hipótesis de comportamiento de los elementos estructurales, debido a una base teórica más rigurosa y amplia que la de los anteriores métodos [1].

Entre las formulaciones de elementos estructurales unidimensionales hay dos que merecen especial atención. La primera, conocida como la de Euler-Bernoulli [2], está muy próxima a las teorías clásicas de la Resistencia de Materiales y permite el análisis de la flexión de vigas esbeltas prescindiendo del efecto de los esfuerzos cortante y axil en el estudio de su deformación. Esta teoría puede adecuarse para que los resultados coincidan, en determinadas condiciones, con los obtenidos mediante los métodos matriciales del cálculo de estructuras. La segunda formulación es la de Timoshenko [2] y en ella se apoya el modelo estructural utilizado en el presente estudio. Su rasgo específico es la consideración del efecto del esfuerzo cortante.

En este capítulo se hace, primeramente, una breve síntesis de las características de la formulación de Timoshenko para elementos unidimensionales bajo cargas estáticas y/o dinámicas. A continuación se desarrollan las ecuaciones de equilibrio de una barra, partiendo de la Mecánica del Medio Continuo Deformable, es decir, considerando dicha barra como un sólido continuo deformable. Luego se explicita la solución del problema mediante el método de los elementos finitos y se formulan ecuaciones correspondientes a la subdivisión del elemento finito en capas. La última parte se dedica a resumir las técnicas de solución para problemas no lineales.

1.2 HIPÓTESIS DE LA FORMULACIÓN DE TIMOSHENKO

Se considera una barra en su sistema local de coordenadas, de longitud ℓ y de sección transversal de área A variable, sobre la cual actúan cargas en el plano local vertical. La teoría de Timoshenko se basa en las hipótesis siguientes [2]:

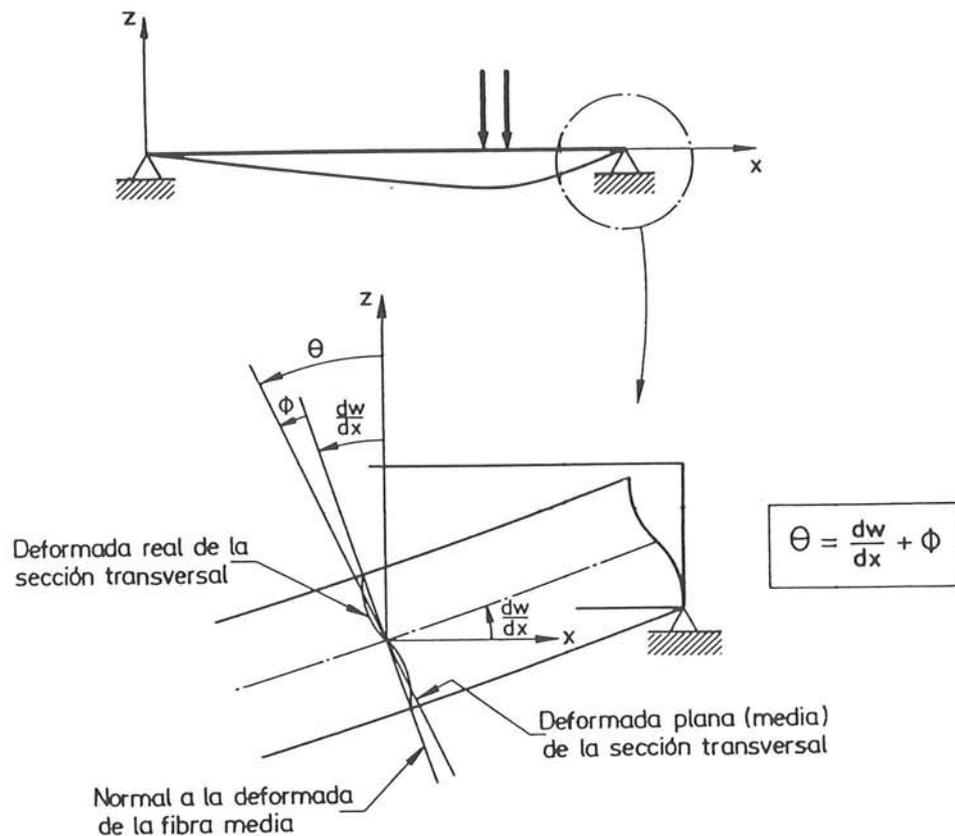


Figura 1.1 Teoría de flexión de Timoshenko. Giro de la sección normal a la fibra media [2].

- I. Los desplazamientos verticales de todos los puntos de una sección transversal son pequeños e iguales a los del eje central de la viga.
- II. Los desplazamientos laterales son nulos.
- III. Las secciones planas normales al eje de la viga antes de la deformación permanecen planas, pero no necesariamente normales al eje después de la deformación (véase la figura 1.1).

Esta última hipótesis supone tomar un giro medio para la sección transversal, de manera que ésta pueda considerarse plana. Las primeras dos hipótesis son compartidas con la teoría de vigas de Euler-Bernoulli, mientras la tercera difiere en lo que se refiere a la normalidad al eje de la sección en el estado deformado.

1.3 MECÁNICA DEL SÓLIDO APLICADA A BARRAS

1.3.1 Campo de desplazamientos

De los seis desplazamientos generalizados que asigna la mecánica clásica a un punto del espacio, en este estudio sólo se consideran dos, debido al carácter plano del problema y a las hipótesis hechas anteriormente. Estas son u' y w' , que son, respectivamente, el desplazamiento horizontal y el vertical en el sistema local de coordenadas (véase la figura 1.1). Por otra parte, el campo de desplazamientos de una sección transversal cualquiera está descrito por la translación horizontal u , la vertical w y por el giro medio de la sección θ (véase la figura 1.1). El movimiento de cualquier punto del cuerpo puede expresarse en función del movimiento del eje de la sección a la cual pertenece dicho punto, así como resulta de la siguiente ecuación [3]:

$$\mathbf{u}'(x, z) = \begin{Bmatrix} u'(x, z) \\ w'(x) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u(x) - z\theta(x) \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -z \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u(x) \\ w(x) \\ \theta(x) \end{Bmatrix} = \mathbf{S}(z) \mathbf{u}(x) \quad (1.1)$$

Las variables de esta ecuación tienen el siguiente significado:

- $\mathbf{u}'(x, z)$ — vector de desplazamientos de un punto cualquiera de una sección transversal corriente de la viga. Se considera que estos desplazamientos no varían a lo largo de la dirección normal al plano de flexión (hipótesis I,II);
- $\mathbf{u}(x)$ — vector de desplazamientos seccionales de la viga que corresponden al movimiento del eje central de dicha viga;
- $\mathbf{S}(z)$ — matriz de conversión de los desplazamientos del eje central a los desplazamientos puntuales en función de la altura z del punto.

1.3.2 Campo de deformación y aceleración

Considerando la hipótesis de las pequeñas deformaciones, del campo de desplazamientos – relación (1.1) – pueden deducirse fácilmente las deformaciones. Conforme a las hipótesis utilizadas, las únicas deformaciones no nulas son

$$\varepsilon_x = \frac{du'}{dx} = \frac{du}{dx} - z \frac{d\theta}{dx} \quad (1.2)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{du'}{dz} + \frac{dw'}{dx} = \frac{dw}{dx} - \theta$$

Las ecuaciones (1.2) pueden escribirse matricialmente como [6]

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -z \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{du}{dx} \\ \frac{dw}{dx} - \theta \\ \frac{d\theta}{dx} \end{Bmatrix} = \mathbf{S} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (1.3)$$

donde $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ es el vector de *deformaciones seccionales*, $\boldsymbol{\varepsilon}$ es el vector de deformaciones puntuales y \mathbf{S} es la matriz de transformación ya mencionada que también relaciona $\boldsymbol{\varepsilon}$ con $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$. A su vez, las deformaciones seccionales $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ se relacionan con los desplazamientos seccionales a través de la matriz de operadores diferenciales \mathbf{L}

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{Bmatrix} \frac{du}{dx} \\ \frac{dw}{dx} - \theta \\ \frac{d\theta}{dx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dx} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d}{dx} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{d}{dx} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ w \\ \theta \end{Bmatrix} = \mathbf{L} \mathbf{u} \quad (1.4)$$

En los estudios dinámicos interesa establecer la relación entre un campo de aceleración que actúa sobre los puntos de una sección transversal de la viga y el campo de aceleración seccional. Dicha relación se deduce de forma inmediata derivando dos veces en función del tiempo la ecuación (1.1), en la cual se considera que los desplazamientos varían en el tiempo, es decir, $\mathbf{u}' = \mathbf{u}'(x, z, t)$ y $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, t)$

$$\ddot{\mathbf{u}}' = \mathbf{S} \ddot{\mathbf{u}} \quad (1.5)$$

1.3.3 Campos de tensión e inercia

Las hipótesis propias al estudio de estructuras de barras en general y las de Timoshenko en particular hacen que del total de seis componentes simétricas distintas del tensor de tensiones sólo dos sean no nulas. Estas son la tensión normal a la sección σ_x y la tensión tangencial τ_{xz} , que se relacionan con las deformaciones mediante una ecuación constitutiva

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (1.6)$$

donde \mathbf{C} se denomina *tensor constitutivo*. En el caso lineal elástico, éste es función de las características del material – módulo de elasticidad longitudinal E , coeficiente de contracción transversal de Poisson ν y módulo de elasticidad transversal $G = E/2(1 + \nu)$. De las seis deformaciones independientes del tensor de deformaciones serán diferentes de cero ε_x y γ_{xz} y

también ε_y y ε_z . Esto se demuestra partiendo de la relación general entre el tensor de tensiones y el tensor de deformaciones, que tiene la siguiente forma [1]:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (1.7)$$

Si en esta última relación se imponen $\sigma_y = \sigma_z = 0$, se obtienen $\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu\varepsilon_x$, lo que demuestra que ε_y y ε_z no son variables independientes del problema. Si estos valores se utilizaran ahora para calcular σ_x , se encontraría precisamente el valor dado por la ecuación (1.6). La imposición de tensiones tangenciales nulas conduce evidentemente a deformaciones tangenciales nulas, con lo cual la única deformación tangencial de interés queda γ_{xz} .

En el caso en el cual el punto estudiado esté sometido al campo de aceleraciones visto en el apartado anterior, aparecen fuerzas másicas inerciales y, según estipula la segunda ley de Newton, éstas son proporcionales a la masa y a la aceleración de dicho punto material. Por consiguiente, pueden escribirse las siguientes relaciones:

$$\boldsymbol{\rho} = \begin{Bmatrix} \rho_x \\ \rho_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}' \\ \ddot{w}' \end{Bmatrix} = \rho \ddot{\mathbf{u}}' \quad (1.8)$$

donde $\boldsymbol{\rho}$ es el vector de fuerzas másicas que actúan sobre un elemento diferencial de volumen y ρ es la matriz de densidad del material que, en este caso, es isótropo.

1.3.4 Campos de esfuerzos seccionales

Debido a las tensiones, en cada sección transversal de una barra aparecen esfuerzos, fuerzas y momentos que, en las condiciones de la viga cargada en uno de sus planos principales de inercia, son sólo tres: esfuerzo axial N , esfuerzo cortante Q y momento flector M . Agrupándolos en forma matricial, estos esfuerzos forman un vector $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ de *esfuerzos seccionales*. Este vector constituye, desde el punto de vista mecánico, el sistema de fuerzas resultantes del campo de tensiones que actúa en la sección. Su expresión se deduce de la siguiente manera [6]:

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{Bmatrix} N \\ Q \\ M \end{Bmatrix} = \int_A \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xz} \\ -z\sigma_x \end{Bmatrix} dA = \int_A \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -z & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} dA \quad (1.9)$$

$$\hat{\sigma} = \int_A \mathbf{S}^T \boldsymbol{\sigma} dA = \int_A \mathbf{S}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} dA = \int_A \mathbf{S}^T \mathbf{C} \mathbf{S} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} dA = \hat{\mathbf{C}} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (1.10)$$

de donde resulta la expresión de la *matriz constitutiva seccional* $\hat{\mathbf{C}}$ como

$$\hat{\mathbf{C}} = \int_A \mathbf{S}^T \mathbf{C} \mathbf{S} dA \quad (1.11)$$

Esta última ecuación permite, debido a su gran generalidad, hallar la matriz constitutiva seccional $\hat{\mathbf{C}}$, que relaciona $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ con $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$, cuando las características del material o su estado termodinámico varían a través del espesor de la viga.

En el caso dinámico, sobre cada elemento de superficie dA de una sección transversal cualquiera de la viga actúan dos aceleraciones \ddot{u} y \ddot{w} en las direcciones x y z . Dichas aceleraciones producen fuerzas de inercia elementales ρ_x y ρ_z . Al integrarlas a través de la sección, de manera similar al procedimiento utilizado para tensiones, se obtienen los esfuerzos seccionales $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ debidos a la inercia

$$\hat{\boldsymbol{\rho}} = \begin{Bmatrix} N_i \\ Q_i \\ M_i \end{Bmatrix} = \int_A \begin{Bmatrix} \rho_x \\ \rho_z \\ -z\rho_x \end{Bmatrix} dA = \int_A \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -z & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \rho_x \\ \rho_z \end{Bmatrix} dA \quad (1.12)$$

Haciendo uso de la ecuación (1.8), se obtiene

$$\hat{\boldsymbol{\rho}} = \int_A \mathbf{S}^T \boldsymbol{\rho} dA = \int_A \mathbf{S}^T \boldsymbol{\rho} \ddot{\mathbf{u}}' dA = \int_A \mathbf{S}^T \boldsymbol{\rho} \mathbf{S} \ddot{\mathbf{u}} dA = \hat{\boldsymbol{\rho}} \ddot{\mathbf{u}} \quad (1.13)$$

de donde resulta la expresión de la *matriz de densidad seccional* $\hat{\boldsymbol{\rho}}$

$$\hat{\boldsymbol{\rho}} = \int_A \mathbf{S}^T \boldsymbol{\rho} \mathbf{S} dA \quad (1.14)$$

Esta última ecuación permite hallar la matriz de densidad seccional $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ cuando las características del material varían a través del espesor de la viga.

1.3.5 Ecuaciones de equilibrio del sólido continuo

Las ecuaciones de equilibrio que caracterizan el comportamiento de un continuo se hallan tradicionalmente, en problemas de cálculo de estructuras, mediante el *principio de los trabajos virtuales*. Dicho principio garantiza que un sólido deformable está en equilibrio si, aplicándole un desplazamiento virtual compatible con las condiciones de vínculo, el trabajo producido por las fuerzas internas L_{int} es igual al trabajo de las fuerzas externas L_{ext} [7].

Por fuerzas internas se entienden aquellas fuerzas generadas dentro del sólido deformable como respuesta a su propio estado de deformación. En consecuencia, las únicas fuerzas internas que aquí se consideran son las tensiones provocadas por deformación. Por otra parte, las fuerzas externas incluyen todo tipo de acciones exteriores, que no dependen del estado deformacional del cuerpo. Pueden ser acciones exteriores las fuerzas concentradas puntuales, las fuerzas distribuidas a lo largo de la longitud de la barra o las fuerzas másicas generadas por acciones exteriores al cuerpo, como, por ejemplo, campos magnéticos, eléctricos, gravitatorios, térmicos u otros.

El principio de los trabajos virtuales, aplicado a las barras aquí estudiadas, conduce a la siguiente expresión del trabajo virtual interno L_{int} , obtenida a partir de su definición y de las ecuaciones (1.3),(1.6) y (1.10):

$$\begin{aligned} L_{int} &= \int_V (\delta\varepsilon_x \sigma_x + \delta\gamma_{xz} \tau_{xz}) dV = \int_V \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \int_V \delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \mathbf{S}^T \boldsymbol{\sigma} dV \\ &= \int_0^\ell \delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \left[\int_{A(x)} \mathbf{S}^T \boldsymbol{\sigma} dA \right] dx = \int_0^\ell \delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \hat{\boldsymbol{\sigma}} dx = \int_0^\ell \delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \hat{\mathbf{C}} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} dx \end{aligned} \quad (1.15)$$

donde V es el volumen de la barra, $A(x)$ la superficie de la sección transversal de coordenada x y ℓ la longitud de la barra estudiada.

La expresión general del trabajo virtual externo L_{ext} se obtiene aplicando el teorema de la divergencia a la expresión (1.15), que define el trabajo virtual interno L_{int} , y luego integrando por partes. Este procedimiento proporciona la demostración del principio de los trabajos virtuales anteriormente enunciado. Dicha expresión general puede contener, en el caso de una barra, las contribuciones de las fuerzas concentradas f_j y de las fuerzas distribuidas \mathbf{f}^d aplicadas directamente sobre el eje central y también un término debido a la acción de las fuerzas másicas \mathbf{f}^m que actúan en cada punto del volumen de la barra. Esta expresión es

$$L_{ext} = \sum_j \delta u_j f_j + \int_0^\ell \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f}^d dx + \int_V \delta \mathbf{u}'^T \mathbf{f}^m dV \quad (1.16)$$

Todas las fuerzas exteriores involucradas en la anterior relación pueden ser estáticas o dinámicas. Su naturaleza determina si el tipo de cálculo a desarrollar debe ser estático o dinámico, teniéndose en cuenta que si se tiene una sola fuerza dinámica todo el estudio es dinámico.

Cuando se trata de problemas dinámicos, el principio de d'Alembert asegura que, a fin de conseguir el equilibrio dinámico, las seudofuerzas de inercia pueden ser consideradas como fuerzas reales que actúan sobre el cuerpo. En

consecuencia, las fuerzas másicas debidas a efectos inerciales son $-\rho$, el cambio de signo proveniente del sentido opuesto al campo de aceleraciones de dichas fuerzas inerciales. Con estas explicaciones, el término inercial del trabajo virtual externo L_{ext}^i , que está incluido en el último término de la relación (1.16), se expresa como

$$\begin{aligned} L_{ext}^i &= \int_V \delta \mathbf{u}'^T \mathbf{f}^{m,i} dV = - \int_V \delta \mathbf{u}'^T \rho dV = - \int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{S}^T \rho dV \\ &= - \int_0^\ell \delta \mathbf{u}^T \left[\int_{A(x)} \mathbf{S}^T \rho dA \right] dx = - \int_0^\ell \delta \mathbf{u}^T \hat{\rho} dx = - \int_0^\ell \delta \mathbf{u}^T \hat{\rho} \ddot{\mathbf{u}} dx \end{aligned} \quad (1.17)$$

El procedimiento descrito por las relaciones (1.15) y (1.17) corresponde a la reducción de una carga másica a una carga lineal a través de integraciones de tipo (1.9) y (1.10) sobre las superficies de las secciones. Simbólicamente, puede decirse que cualquier fuerza másica \mathbf{f}^m puede transformarse en una fuerza distribuida $\hat{\mathbf{f}}^m = \int_A \mathbf{S}^T \mathbf{f}^m dA$, lo que es lo mismo que calcular los esfuerzos seccionales equivalentes a dichas fuerzas másicas. En consecuencia, la expresión del trabajo virtual exterior es

$$L_{ext} = \sum_j \delta u_j f_j + \int_0^\ell \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f}^d dx + \int_0^\ell \delta \mathbf{u}^T \hat{\mathbf{f}}^m dx - \int_0^\ell \delta \mathbf{u}^T \hat{\rho} \ddot{\mathbf{u}} dx \quad (1.18)$$

La expresión anterior, generalmente válida para barras, permite expresar la ecuación de equilibrio propia al principio de los trabajos virtuales en la forma

$$L_{int} = L_{ext} \Rightarrow \int_0^\ell \delta \mathbf{u}^T \hat{\rho} \ddot{\mathbf{u}} dx + \int_0^\ell \delta \hat{\mathbf{e}}^T \hat{\mathbf{C}} \hat{\mathbf{e}} dx = \int_0^\ell \delta \mathbf{u}^T (\mathbf{f}^d + \hat{\mathbf{f}}^m) dx + \sum_j \delta u_j f_j \quad (1.19)$$

Esta expresión demuestra que el problema estudiado tiene una naturaleza básicamente unidimensional. La ecuación de equilibrio (1.19) ha agotado las posibilidades de la mecánica del sólido deformable en cuanto a la solución del problema. Se ha deducido la ecuación funcional integral, expresada en desplazamientos, que rige el comportamiento de una barra en régimen dinámico. Para hallar el campo de desplazamientos $\mathbf{u}(x)$, que es la incógnita del problema, habrá que recurrir a otros procedimientos, puesto que la mecánica del continuo supone soluciones pertenecientes al espacio de funciones continuas de dimensión infinita (un cuerpo mecánico continuo tiene una infinidad de grados de libertad). Uno de estos procedimientos para rebajar a un número finito el número de dimensiones del espacio de funciones, dentro de cual se buscan las soluciones, se desarrolla en el apartado siguiente.

1.4 FORMULACIÓN POR ELEMENTOS FINITOS

1.4.1 Discretización del medio continuo en elementos finitos

La formulación continua, considerada hasta ahora en este capítulo, no es conveniente debido al número infinito de grados de libertad correspondiente a un sólido continuo. El método de los elementos finitos proporciona no sólo la ventaja de limitar el número de grados de libertad sino, al mismo tiempo, la de minimizar el error producido en esta operación. La *discretización* es la operación de prefijar un número finito de puntos, llamados nodos, en los que se desea obtener la información acerca del proceso, siendo ésta la primera aproximación del método. El elemento finito es la entidad estructural básica. Dentro del elemento se definen los campos continuos de las *variables independientes* del proceso que, en el caso analizado en este estudio, son los desplazamientos \mathbf{u} . Como consecuencia del proceso de discretización, todas las integrales que en el caso continuo abarcaban el dominio entero se transforman en sumas de integrales sobre elementos. La variación dentro de cada elemento se expresa mediante campos continuos que dependen únicamente de los valores de las variables independientes en los nodos del elemento. Los elementos están interconectados sólo en los nodos. Es evidente que los valores de las variables independientes en un nodo son idénticas en todos los elementos que coinciden en este nodo. Sin embargo, no ocurre lo mismo con las variables dependientes debido al hecho de que la continuidad está asegurada sólo dentro de cada elemento, siendo ésta la segunda aproximación del método.

1.4.2 Funciones de forma y relaciones derivadas

Las variables independientes de las ecuaciones de movimiento de una barra están agrupadas, como puede observarse en el apartado anterior, en el vector \mathbf{u} . A fin de ejemplificar la técnica de los elementos finitos, se elige un elemento de tres nodos con unas *funciones de forma* adecuadas. Las funciones de forma definen el campo continuo elemental, interpolando los valores nodales. En función del tipo de elemento, hay varias modalidades de encontrar estas funciones. Aquí se han elegido funciones cuadráticas lagrangianas correspondientes a un elemento de barra de tres nodos. Cada nodo tiene asociada una función de forma de manera que ésta valga uno en dicho nodo y cero en los demás (véase la figura 1.2).

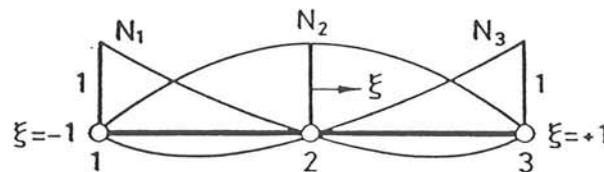


Figura 1.2 Representación de las funciones de forma [2].

Usualmente las funciones de forma se expresan como función de una variable normalizada ζ , que varía entre -1 y 1. Sus expresiones son [1,2]

$$\begin{aligned} N_1(\zeta) &= \frac{1}{2}\zeta(\zeta - 1) \\ N_2(\zeta) &= 1 - \zeta^2 \\ N_3(\zeta) &= \frac{1}{2}\zeta(\zeta + 1) \end{aligned} \quad (1.20)$$

Los desplazamientos se interpolan con las funciones (1.20)

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ w \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 \\ N_1 w_1 + N_2 w_2 + N_3 w_3 \\ N_1 \theta_1 + N_2 \theta_2 + N_3 \theta_3 \end{Bmatrix} \quad (1.21)$$

o en formulación matricial

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \theta_2 \\ u_3 \\ w_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} \quad (1.22)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{a} \quad (1.23)$$

donde \mathbf{N} es la matriz de funciones de forma y \mathbf{a} es el vector de desplazamientos nodales que son las incógnitas del problema. El campo de aceleraciones se deduce de la relación anterior, considerándose que las funciones de forma son invariantes en tiempo

$$\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{N}\ddot{\mathbf{a}} \quad (1.24)$$

La relación entre las incógnitas nodales y las deformaciones seccionales $\hat{\epsilon}$ se halla teniendo en cuenta las ecuaciones (1.4) y (1.23)

$$\hat{\epsilon} = \mathbf{L}u = \mathbf{L}N\mathbf{a} = \mathbf{B}\mathbf{a} \quad (1.25)$$

y, tras operar, se obtiene la expresión de la matriz de correspondencia \mathbf{B}

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{dN_1}{dx} & 0 & 0 & \frac{dN_2}{dx} & 0 & 0 & \frac{dN_3}{dx} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{dN_1}{dx} & -N_1 & 0 & \frac{dN_2}{dx} & -N_2 & 0 & \frac{dN_3}{dx} & -N_3 \\ 0 & 0 & \frac{dN_1}{dx} & 0 & 0 & \frac{dN_2}{dx} & 0 & 0 & \frac{dN_3}{dx} \end{bmatrix} \quad (1.26)$$

Las derivadas cartesianas de las funciones de forma son

$$\frac{dN}{dx} = \frac{dN}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dx} = \frac{d\zeta}{dx} \begin{Bmatrix} \frac{2\zeta-1}{2} \\ -2\zeta \\ \frac{2\zeta+1}{2} \end{Bmatrix} \quad (1.27)$$

y para hallar $d\zeta/dx$ se utiliza la representación isoparamétrica que conduce a la siguiente serie de operaciones:

$$\begin{aligned} x &= N_1x_1 + N_2x_2 + N_3x_3 \\ \frac{dx}{d\zeta} &= \frac{dN_1}{d\zeta}x_1 + \frac{dN_2}{d\zeta}x_2 + \frac{dN_3}{d\zeta}x_3 \\ &= \frac{1}{2} [x_3 - x_1 + 2\zeta(x_1 + x_3 - 2x_2)] \\ \frac{d\zeta}{dx} &= \frac{1}{dx/d\zeta} = \frac{2}{x_3 - x_1 + 2\zeta(x_1 + x_3 - 2x_2)} \end{aligned} \quad (1.28)$$

De esta manera, se ha definido completamente la matriz \mathbf{B} en cualquier sección transversal del elemento (para cualquier $\zeta \in [-1, 1]$). Se observa que cuando $x_2 = (x_1 + x_3)/2$, entonces $d\zeta/dx = 2/l$.

1.4.3 Ecuaciones de equilibrio para un elemento finito

Las ecuaciones de equilibrio para un elemento de barra se obtienen directamente, modificando la ecuación (1.19) y utilizando las expresiones de \mathbf{u} , $\ddot{\mathbf{u}}$ y $\hat{\epsilon}$ proporcionadas por (1.23), (1.24) y (1.25). Resulta

$$\delta \mathbf{a}^T \int_0^\ell \mathbf{N}^T \hat{\rho} \mathbf{N} dx \ddot{\mathbf{a}} + \delta \mathbf{a}^T \int_0^\ell \mathbf{B}^T \hat{\mathbf{C}} \mathbf{B} dx \mathbf{a} = \delta \mathbf{a}^T \int_0^\ell \mathbf{N}^T \mathbf{f}^{d,m} dx + \delta \mathbf{a}^T \sum_j \mathbf{N}^T(\zeta_j) \mathbf{f}_j \quad (1.29)$$

donde $\mathbf{f}^{d,m} = \mathbf{f}^d + \hat{\mathbf{f}}^m$ es el vector de fuerzas distribuidas totales y \mathbf{f}_j es el vector que contiene las tres componentes (axíl, cortante y momento flector) de la fuerza concentrada f_j que se aplica sobre el elemento finito en el punto de coordenada ζ_j . Como la ecuación (1.29) tiene que ser válida para cualquier desplazamiento virtual $\delta \mathbf{a}$, se tiene

$$\int_0^\ell \mathbf{N}^T \hat{\rho} \mathbf{N} dx \ddot{\mathbf{a}} + \int_0^\ell \mathbf{B}^T \hat{\mathbf{C}} \mathbf{B} dx \mathbf{a} = \int_0^\ell \mathbf{N}^T \mathbf{f}^{d,m} dx + \sum_j \mathbf{N}^T(\zeta_j) \mathbf{f}_j \quad (1.30)$$

o

$$\mathbf{M}^e \ddot{\mathbf{a}} + \mathbf{K}^e \mathbf{a} = \mathbf{f}^e \quad (1.31)$$

donde

$$\mathbf{M}^e = \int_0^\ell \mathbf{N}^T \hat{\rho} \mathbf{N} dx \quad (1.32)$$

$$\mathbf{K}^e = \int_0^\ell \mathbf{B}^T \hat{\mathbf{C}} \mathbf{B} dx \quad (1.33)$$

$$\mathbf{f}^e = \int_0^\ell \mathbf{N}^T \mathbf{f}^{d,m} dx + \sum_j \mathbf{N}^T(\zeta_j) \mathbf{f}_j \quad (1.34)$$

\mathbf{M}^e , \mathbf{K}^e y \mathbf{f}^e se llaman matriz de masa elemental, matriz de rigidez elemental y vector de fuerzas nodales elementales, respectivamente. La integración de estas variables matriciales se hace, en la gran mayoría de los casos, mediante métodos de integración numérica. La más conocida es la cuadratura de Gauss, que consiste en la transformación de la integral en sumatorio. Se elige un número de puntos de integración en concordancia con el grado máximo de los polinomios a integrar. Los pesos correspondientes a cada punto se obtienen de las tablas, luego se multiplican los valores del argumento calculado en los puntos de integración con los pesos correspondientes y se suman los productos así obtenidos.

1.4.4 Sistema global de ecuaciones

Una vez obtenidos M^e , K^e y f^e para todos los elementos, se hace el ensamblaje, que consiste en sumar todas las ecuaciones elementales cuyos términos libres tienen el significado de fuerzas aplicadas en la dirección del mismo grado de libertad del mismo nodo. De esta manera, a cada grado de libertad de cada nodo le corresponde ahora sólo un elemento del vector global de fuerzas f , obteniéndose así el sistema global de ecuaciones, que se escribe en forma matricial como [7]

$$M \ddot{a} + K a = f \quad (1.35)$$

donde M es la *matriz global de masa*, K es la *matriz global de rigidez* y f es el *vector global de fuerzas nodales*.

La solución de problemas dinámicos se plantea a través de esquemas de integración en el tiempo (tal como se verá en el capítulo 4) que transforman el sistema de ecuaciones (1.35) en un sistema lineal que tiene como incógnitas sólo los desplazamientos. Dicho sistema expresa el equilibrio dinámico en cada instante de tiempo t y puede escribirse genéricamente de la siguiente manera:

$$\hat{K}(t) a(t) = \hat{f}(t) \quad (1.36)$$

Evidentemente, como el cálculo estático es una mera particularización del cálculo dinámico, las ecuaciones de equilibrio estático se obtienen poniendo $\ddot{a} = 0$ en todas las ecuaciones anteriores.

Tras resolver el sistema (1.36) se obtienen los desplazamientos nodales a . Volviendo atrás se encuentran los valores de todas las demás variables en cada elemento. De esta manera pueden obtenerse los desplazamientos de cualquier punto mediante la ecuación (1.23), las deformaciones seccionales $\hat{\varepsilon}$ a partir de la ecuación (1.25), las tensiones seccionales $\hat{\sigma}$ utilizando la ecuación (1.10), e incluso pueden obtenerse las deformaciones y las tensiones usando las ecuaciones (1.3) y (1.6), respectivamente.

1.5 ELEMENTOS FINITOS DE CAPAS

Si en el método de los elementos finitos se utilizan elementos de barra del tipo de Timoshenko [2] clásicos, la no linealidad del material puede estudiarse únicamente en toda la sección transversal de la barra a la vez. Es decir, se supone que todo el material de una sección falla simultáneamente, lo que no es cierto debido a que su estado tensional es no homogéneo. Para eliminar esta limitación de dicha teoría, se ha propuesto una formulación por capas que se basa en dividir la sección en trozos que se estudian independientemente mediante modelos constitutivos 3-D (véase la figura 1.3). Cada capa

puede estar constituida por materiales distintos, puede tener características geométricas diferentes (por ejemplo el ancho o la altura) e incluso permite la consideración de leyes constitutivas distintas para cada capa de material.

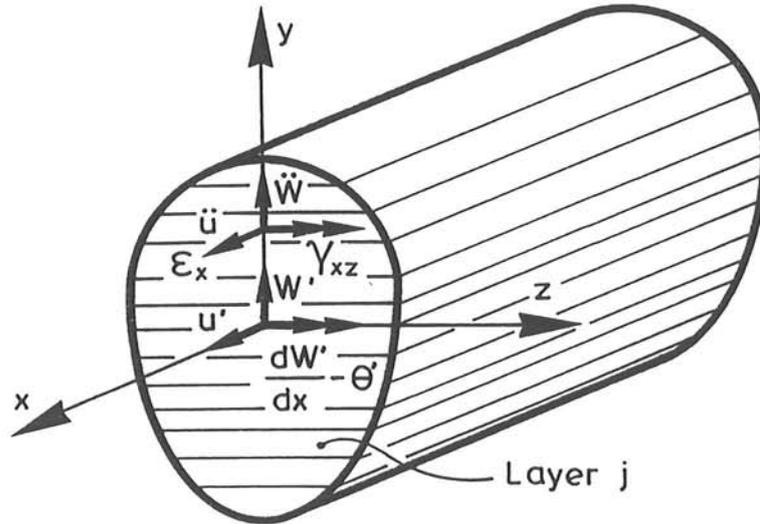


Figura 1.3 Partición en capas de la sección transversal de una barra [2].

En este apartado se detallan las modificaciones requeridas por la formulación de capas. En términos del algoritmo de análisis no lineal y de programación, estas modificaciones influyen el cálculo de la matriz constitutiva seccional \hat{C} , que hace la conexión entre la formulación en esfuerzos y deformaciones generalizadas específica a las barras de Timoshenko y el estado de tensiones y deformaciones en un punto, con el cual trabaja el modelo constitutivo.

Cualquier desarrollo de elementos de barra por capas se apoya en el cálculo de la posición del *eje neutro* entendido como el eje longitudinal de la barra que pasa por el punto de la sección donde la tensión normal proveniente de la flexión es nula (figura 1.4). Este punto tiene además las propiedades de que en él la tensión tangencial es máxima y de que el momento flector de las tensiones normales que provienen de la fuerza axial son cero. Aún más, el esfuerzo axial correspondiente a las tensiones normales que provienen del momento flector es también cero. Estas propiedades del eje neutro permiten desacoplar las ecuaciones (1.10) y hacen que la matriz \hat{C} sea diagonal.

La posición del eje neutro se halla suponiendo una distribución lineal de pendiente α de la deformación normal debida a la flexión ε_x^f (véase la figura 1.4). Dicha posición se caracteriza por la distancia a . Tomando en cuenta las propiedades del eje neutro y la variación de las características de las capas a lo largo de la sección, el cálculo se efectúa mediante la siguiente secuencia de ecuaciones:

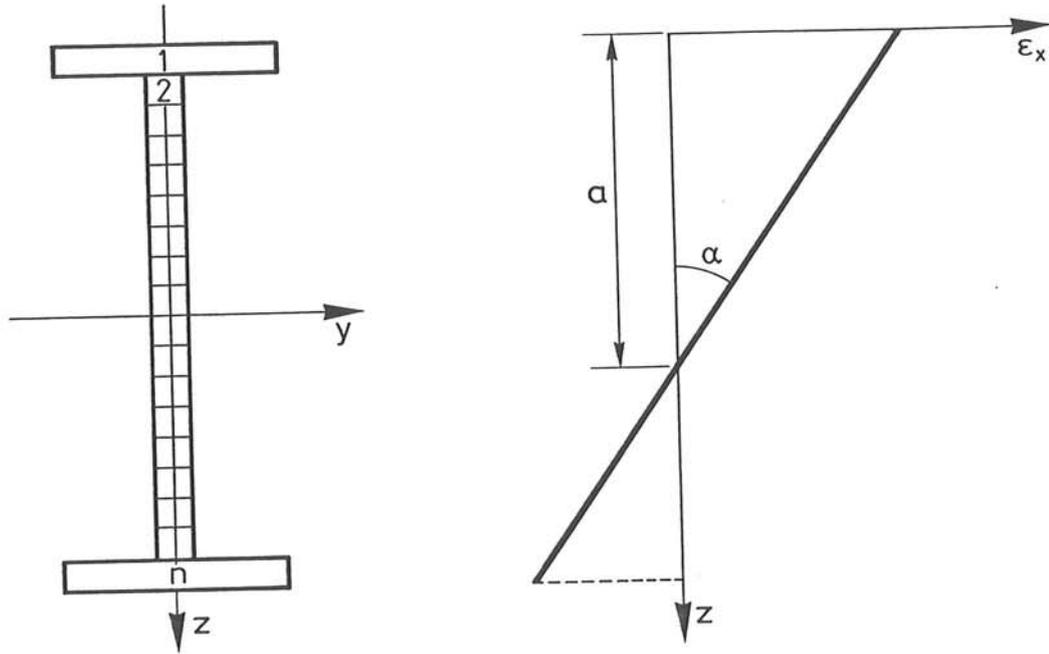


Figura 1.4 Distribución supuesta de la deformación ϵ_x^f .

$$\epsilon^f = \alpha (z - a) \tag{1.37}$$

donde α es la propia curvatura del elemento debida al momento flector M

$$M = \int_A \sigma^f (z - a) dA \tag{1.38}$$

Además, deben cumplirse las condiciones

$$N^f = \int_A \sigma^f dA \equiv 0 \quad ; \quad \sigma^f = E\epsilon^f \tag{1.39}$$

donde $()^f$ indica que se trata de variables asociadas sólo al efecto del momento flector. Desarrollando la ecuación (1.38) se obtiene

$$\begin{aligned} M &= \int_A \alpha (z - a)^2 E dA = \alpha \sum_{i=1}^n E_i b_i \int_{z_i}^{z_{i+1}} (z - a)^2 dz \\ &= \alpha \sum_{i=1}^n E_i b_i \frac{(z_{i+1} - a)^3 - (z_i - a)^3}{3} \end{aligned} \tag{1.40}$$

donde $()_i$ denota un valor propio a la capa i de la sección que contiene n capas y b es el ancho de la sección. De esta última ecuación se obtiene el valor de α como

$$\alpha = \frac{M}{\frac{1}{3} \sum_{i=1}^n E_i b_i [(z_{i+1} - a)^3 - (z_i - a)^3]} \quad (1.41)$$

La ecuación anterior representa la relación momento flector – curvatura, por lo cual su denominador es \hat{C}_{33} . Por otra parte, de la ecuación (1.39) se tiene

$$\begin{aligned} N^f &= \int_A \alpha(z - a)E dA = \alpha \sum_{i=1}^n E_i b_i \int_{z_i}^{z_{i+1}} (z - a) dz \\ &= \alpha \sum_{i=1}^n E_i b_i \frac{(z_{i+1} - a)^2 - (z_i - a)^2}{2} \end{aligned} \quad (1.42)$$

Como $N^f \equiv 0$, de la última ecuación resulta

$$\sum_{i=1}^n E_i b_i (z_{i+1} - a)^2 \equiv \sum_{i=1}^n E_i b_i (z_i - a)^2 \quad (1.43)$$

$$\sum_{i=1}^n E_i b_i (z_{i+1}^2 - 2az_{i+1} + a^2) \equiv \sum_{i=1}^n E_i b_i (z_i^2 - 2az_i + a^2) \quad (1.44)$$

Agrupando términos y simplificando, se obtiene el valor de a en la forma

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n E_i b_i (z_{i+1}^2 - z_i^2)}{2 \sum_{i=1}^n E_i b_i (z_{i+1} - z_i)} \quad (1.45)$$

Puede observarse que la posición del eje neutro es una medida independiente del estado de tensión – deformación, siempre que se cumplan las suposiciones previamente hechas. Este fenómeno deja de existir al pasarse a la zona de comportamiento no elástico del material. Utilizándose las ecuaciones (1.37), (1.39), (1.41) y (1.45) se obtiene el valor de σ^f en cualquier punto de ordenada z perteneciente a la capa j

$$\sigma^f = \alpha E_j (z - a) \quad (1.46)$$

Esta última relación representa una generalización de la clásica fórmula de Navier [4,5,6].

Para encontrar la distribución de la tensión normal σ^n proveniente del esfuerzo axial se toma en consideración el hecho que la deformación normal correspondiente ε^n es constante en la sección. Esto conduce a la siguiente serie de ecuaciones:

$$N^n = \int_A \sigma^n dA = \varepsilon^n \int_A \dot{E} dA = \varepsilon^n \sum_{i=1}^n E_i A_i \quad (1.47)$$

donde A_i es la superficie de la sección de la capa i . Se puede comprobar inmediatamente que $M^n = \int_A (z - a) \sigma^n dA \equiv 0$. La ecuación (1.47) proporciona la relación entre el esfuerzo axial y la deformación generalizada $\hat{\varepsilon}_1$, lo que implica que \hat{C}_{11} es igual al segundo término de esta misma ecuación

$$\hat{C}_{11} = \sum_{i=1}^n E_i A_i \quad (1.48)$$

El caso de la tensión tangencial τ_{xz} es similar a las situaciones ya tratadas en este apartado y su valor viene proporcionado por una ecuación que es una modificación de la fórmula de Jurawski [4,5,6], semejante a la generalización hecha para el caso de flexión

$$\tau_{xz}^j = \frac{Q S_z^{gj}}{b_j \hat{C}_{33}} \quad (1.49)$$

S_z^g es el módulo estático generalizado de la sección que se halla encima (o debajo) del punto donde se calcula τ_{xz} . Su expresión es

$$S_z^{gj} = \int_{A^j} E(z - a) dA = \frac{1}{2} \sum_{i=j}^n E_i b_i [(z_{i+1} - a)^2 - (z_i - a)^2] \quad (1.50)$$

donde j es el indicador del punto corriente y A^j es el área de la sección anteriormente mencionada.

Para encontrar el valor de \hat{C}_{22} , se sigue un procedimiento similar al utilizado para la obtención de \hat{C}_{11} , teniendo en cuenta la gran semejanza entre (1.47) y la siguiente ecuación:

$$Q = \int_A \tau_{xz} dA = \gamma_{xz} \int_A G dA = \gamma_{xz} \sum_{i=1}^n G_i A_i \quad (1.51)$$

que expresa la relación entre el esfuerzo cortante Q y la distorsión seccional media $\hat{\varepsilon}_2$. Con ésto, \hat{C}_{22} toma el valor dado por

$$\hat{C}_{22} = \sum_{i=1}^n G_i A_i \quad (1.52)$$

1.6 SOLUCIÓN DEL PROBLEMA NO LINEAL

1.6.1 Introducción

A lo largo del proceso de carga, se distinguen dos grandes etapas del comportamiento del material: la primera etapa lineal, que está caracterizada por la proporcionalidad entre tensiones y deformaciones y la segunda etapa no lineal, donde dicha proporcionalidad se pierde debido a fenómenos de plasticidad, viscosidad, micro y macrofisuración, daño, etc. Si además hay no linealidad geométrica, se hace necesario reevaluar los fundamentos teóricos presentados hasta ahora. Esta monografía se limita a estudiar únicamente problemas con no linealidad del material.

La solución del sistema de ecuaciones (1.36) constituye, en condiciones no lineales, un problema muy difícil, complejo y costoso. Es evidente que el sistema no tiene una solución directa, sino una obtenida a través de una linealización llevada a cabo de forma iterativa.

1.6.2 Vector de fuerzas residuales

Considérese un sólido que se encuentra en el dominio no lineal del comportamiento de su material. En concordancia con el estado tensional y deformacional de dicho sólido y con la historia de dichos estados así como con la estrategia elegida para resolver el problema, se establece una cierta matriz constitutiva \mathbf{C} de la cual se derivan las demás variables dependientes del estado del material. En estas circunstancias la estructura tiene que soportar una nueva acción \mathbf{f} , mayor que la acción que originó su presente estado no lineal.

La primera operación que se lleva a cabo es resolver el sistema (1.36). Se obtienen los desplazamientos correspondientes a la nueva acción y después las nuevas deformaciones generalizadas $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$, conformes con la ecuación (1.25). Todo esto es análogo al caso lineal. La diferencia radica en que debido a la no linealidad, cuando cambia el estado de deformaciones, también cambia la matriz constitutiva generalizada $\hat{\mathbf{C}}$. Lo normal en estructuras es la modificación de rigidez que según el estado de energía acumulada, puede representar un aumento o una pérdida de rigidez. Con la nueva $\hat{\mathbf{C}}'$ se calculan las tensiones generalizadas, utilizando la ecuación (1.10) en la forma

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}' = \hat{\mathbf{C}}' \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (1.53)$$

Las fuerzas internas nodales correspondientes a estas tensiones $\hat{\boldsymbol{\sigma}}'$ se obtienen utilizando las relaciones (1.15) y (1.29)

$$f' = \int_0^{\ell} B^T \hat{\sigma}' dx \quad (1.54)$$

Debido al cambio de rigidez, las fuerzas nodales así obtenidas no son, en general, iguales a las fuerzas nodales aplicadas inicialmente

$$\Psi = f - f' \quad (1.55)$$

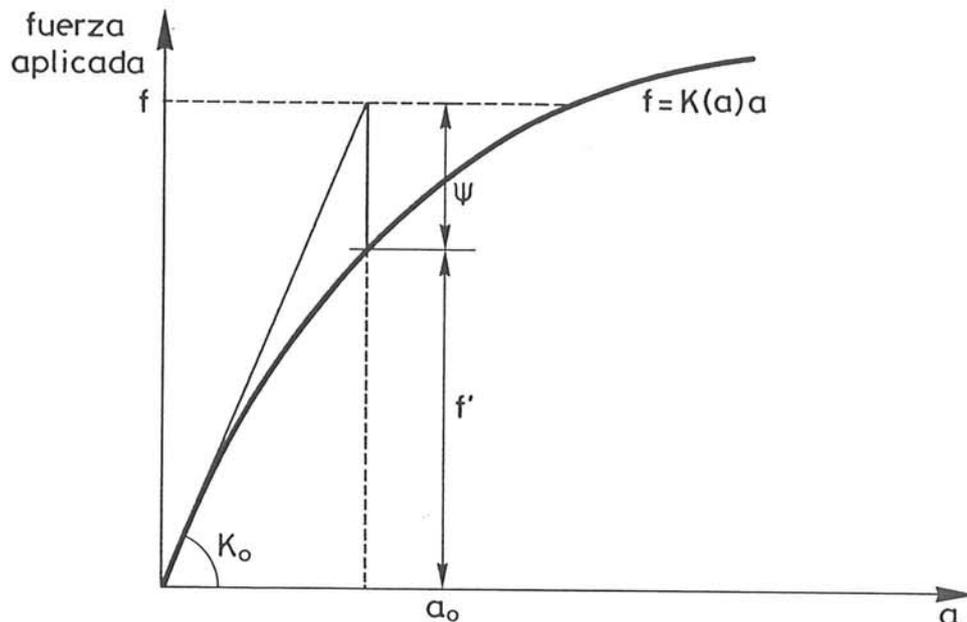


Figura 1.5 Fuerza residual en un sistema con un grado de libertad.

La diferencia Ψ entre los dos vectores de fuerzas nodales se denomina *vector de fuerzas residuales* y puede verse en la figura 1.5. Este vector es, en muchos métodos la medida de la distancia entre la configuración corriente del sistema y su configuración de equilibrio. En las iteraciones siguientes se carga de nuevo la estructura con dicho vector, modificando o no la matriz global de rigidez y se repiten todas las fases descritas anteriormente hasta la disminución de las fuerzas residuales por debajo de un error admitido.

1.6.3 Algoritmos no lineales

Este apartado contiene una breve enumeración de los algoritmos más utilizados para la solución de sistemas no lineales que derivan de formulaciones por elementos finitos. Una operación común a todos los procedimientos es la de subdividir la carga total que se desea aplicar en varios incrementos de

carga. Esta operación se hace para conseguir una descripción del comportamiento de la estructura cercana a la realidad. Si los pasos de carga son demasiados grandes, es probable que se pierdan precisamente los puntos de gradiente alto, donde el comportamiento del material cambia muy rápido, con el efecto no deseado de que la solución numérica se aleje de la realidad y pierda toda posibilidad de convergencia.

I. Método de iteración directa

Es el método más evidente porque se basa en la revaluación de la matriz de rigidez función de los desplazamientos obtenidos en la iteración anterior. No se calcula ni el vector de fuerzas residuales ni se suman los incrementos de desplazamientos a los valores previos. Los resultados de cada iteración se utilizan únicamente para predecir el valor actual de la matriz de rigidez secante (tal como puede verse en la figura 1.6).

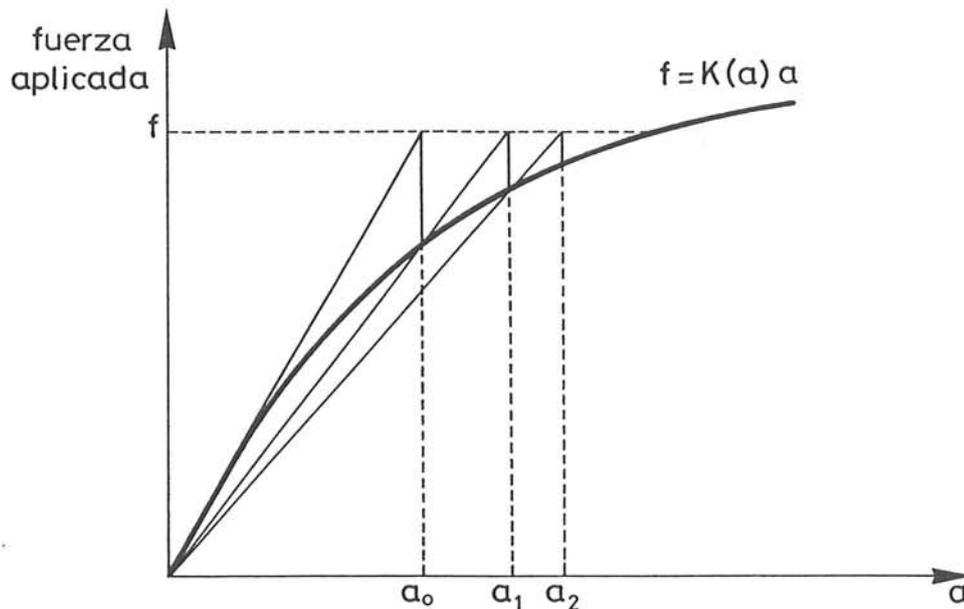


Figura 1.6 Iteración directa en un sistema con un grado de libertad

La expresión matemática de este algoritmo es la siguiente [8]:

$$\mathbf{a}^{r+1} = [\mathbf{K}(\mathbf{a}^r)]^{-1} \mathbf{f} \quad (1.56)$$

donde \mathbf{a}^r significa el valor de los desplazamientos al final de la iteración r . El cálculo se para cuando la diferencia de los vectores desplazamiento correspondientes a dos iteraciones seguidas se acerca a cero en una tolerancia dada.

II. Método de Newton-Raphson

Este método es conocido también como el método de la *rigidez tangente*, debido a que utiliza dicha matriz de rigidez calculada en la configuración corriente para predecir la siguiente aproximación de la solución. Su formulación resulta de un truncamiento del desarrollo en serie Taylor función de desplazamientos del vector de fuerzas residuales.

El método calcula al principio de la iteración r la matriz de rigidez tangente $K_T(\mathbf{a}^r)$, el vector de fuerzas residuales Ψ_r , resuelve el sistema de ecuaciones y obtiene el incremento de desplazamiento correspondiente $\Delta \mathbf{a}^r$ y finalmente lo añade a \mathbf{a}^r para conseguir el valor de \mathbf{a}^{r+1} . El proceso iterativo continua hasta que se satisface el criterio de convergencia establecido. La formulación matemática de este método es (figura 1.7)

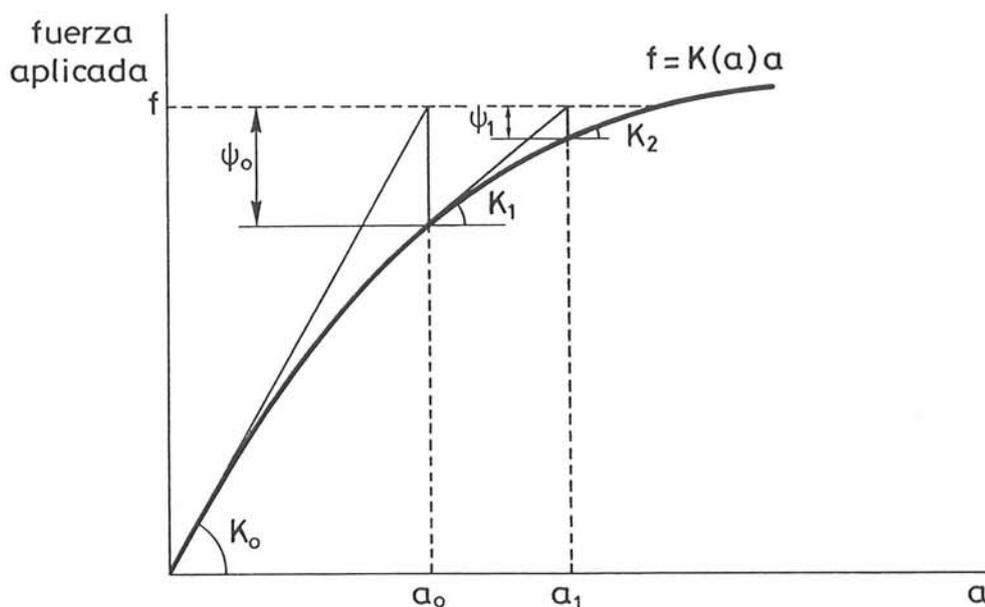


Figura 1.7 Método de Newton-Raphson en un sistema con un grado de libertad.

$$\Delta \mathbf{a}^r = \mathbf{K}_T^{-1}(\mathbf{a}^r) \Psi_r \quad (1.57)$$

$$\mathbf{a}^{r+1} = \mathbf{a}^r + \Delta \mathbf{a}^r \quad (1.58)$$

Igual que el método de la iteración directa, el método de Newton-Raphson tiene la gran desventaja que recalcula la matriz de rigidez en cada iteración, lo que genera un coste computacional muy alto.

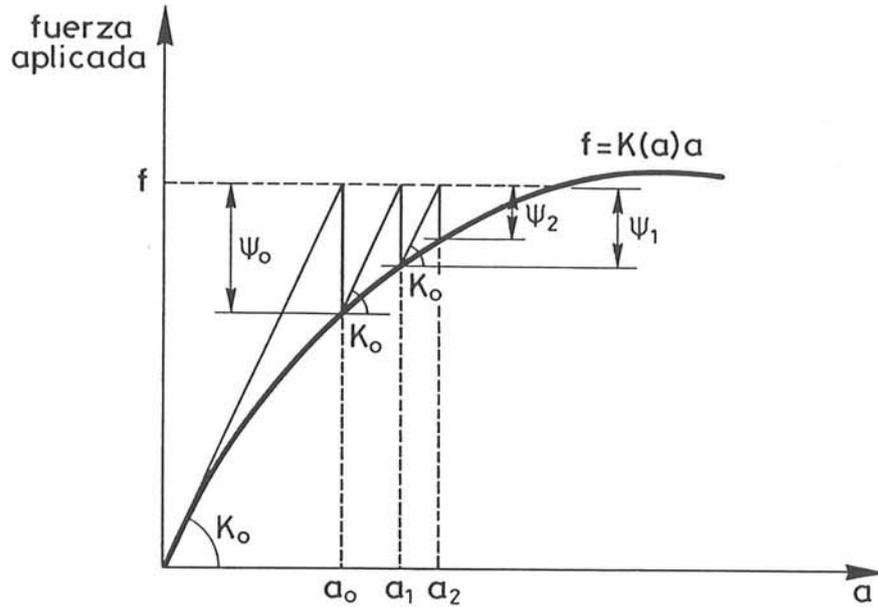


Figura 1.8 Método de rigidez inicial (K_0) en un sistema con un grado de libertad.

A fin de eliminar este inconveniente, se han desarrollado los métodos de Newton-Raphson modificados, con varias formulaciones simplificadas, tales como

K_0 – Método de rigidez inicial, que utiliza la matriz de rigidez elástica inicial durante todo el proceso no lineal, a costa de aumentar el número de iteraciones (véase la figura 1.8).

K_1 – La matriz de rigidez tangente se calcula sólo en la primera iteración de cada paso de carga.

K_2 – La matriz de rigidez tangente se calcula sólo en la segunda iteración de cada paso de carga.

Todos estos métodos tienen ventajas y desventajas uno con respecto al otro, sin poder establecerse una clasificación generalmente valedera respecto a sus respectivas eficacias. Sin embargo, el método de la rigidez inicial es el más cómodo para seguir fenómenos de ablandamiento (pérdida de rigidez) del material, como consecuencia de los problemas que la definición negativa de la matriz de rigidez tangente pueda originar.

REFERENCIAS

1. O. C. Zienkiewicz, *El Método de los Elementos Finitos*, Editorial Reverté, Barcelona, 1980.
2. E. Oñate, *Cálculo de Estructuras por el Método de Elementos Finitos - Análisis Estático Lineal*, CIMNE, Barcelona, 1992.
3. E. Oñate, *Course on "Non Linear Analysis of Shells by Finite Elements"*, International Center for Mechanical Sciences, Udine, Italy, June 24th-28th, 1991.
4. E. Flies, *Estabilidad II*, Editorial Kapeluz
5. K. Hirschfeld, *Estática en la Construcción*, Editorial Reverté
6. A. Feodosiev, *Resistencia de Materiales*, Editorial Mir
7. K. J. Bathe, *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall, New Jersey, USA, 1982.
8. D.R.J.Owen, E.Hinton, *Finite Elements in Plasticity*, Pineridge Press Limited, Swansea, U.K., 1980.

CAPÍTULO 2

MODELO CONSTITUTIVO ELASTO-PLÁSTICO ISÓTROPICO

2.1 INTRODUCCIÓN

La solución de problemas que presentan no linealidades del material necesita, como se ha visto en el capítulo anterior, un procedimiento de describir el comportamiento del material después del límite elástico. Este problema se soluciona mediante el desarrollo de modelos constitutivos, que son teorías basadas en estudios experimentales. En este capítulo se describe en detalle un modelo constitutivo elasto-plástico isótropo basado en la teoría matemática de la plasticidad. Se hace una breve revisión de los elementos generales de plasticidad que se utilizan para formular el modelo elasto-plástico. Finalmente, se incluyen resultados obtenidos empleando dicho modelo para el comportamiento de un viga de hormigón armado, simplemente apoyada, bajo un desplazamiento impuesto en el centro de su luz.

2.2 ELEMENTOS DE PLASTICIDAD GENERAL

Todos los sólidos tienen, durante el proceso de deformación, una zona en la cual su comportamiento es elástico, es decir en que la tensión en un punto depende solamente del valor de su deformación y no de la historia seguida por ésta durante el proceso de carga. Un sólido elástico ideal se caracteriza por deformaciones totalmente recuperables y por tensiones obtenidas según el modelo constitutivo más simple que es la ley de Hooke generalizada, en la siguiente forma [1,2,3]:

$$\sigma = C_s \varepsilon \quad (2.1)$$

La ecuación (2.1) expresa una relación secante total entre el tensor de tensiones σ y el tensor de deformaciones ε , mediante la matriz constitutiva elástica secante C_s .

La teoría de la plasticidad se basa en la mecánica de los medios continuos y describe el comportamiento físico macroscópico de los sólidos ideales, suponiendo dos estados de comportamiento mecánico:

- Uno lineal elástico;
- Uno elasto-plástico, que sigue al estado inicial lineal elástico, donde el campo de tensiones no crece en forma proporcional al campo de deformaciones y donde estas deformaciones resultan de sumar una parte recuperable (elástica) y otra parte irrecuperable (plástica). Esta parte plástica puede evidenciarse al iniciar un proceso de descarga, que siempre es elástico.

El límite que marca la separación entre estos dos estados se denomina *límite de fluencia* y es definido a través de una función en el espacio de tensiones que se llama *función de fluencia* [2].

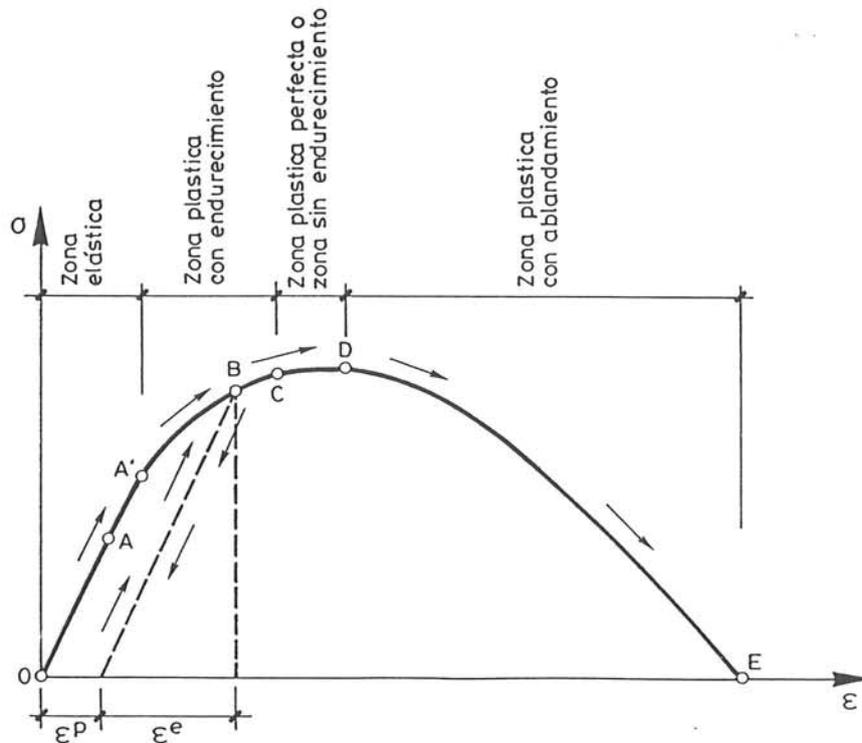


Figura 2.1 Comportamiento uniaxial de un material elasto-plástico [2].

En la figura 2.1 se muestra el comportamiento uniaxial de un punto correspondiente a un material elasto-plástico, para las distintas zonas del proceso. En el punto A' se alcanza el límite de fluencia después de lo que comienza un proceso de reducción de la rigidez debido a la acción de mecanismos inelásticos irreversibles. Si se inicia ahora un proceso de descarga se recupera sólo la parte elástica ϵ^e del total de la deformación ϵ sufrida, quedando otra parte remanente no recuperable denominada *deformación plástica* ϵ^p . Pueden distinguirse los tres tipos básicos de comportamiento elasto-plástico: endurecimiento, ablandamiento y elasto-plástico perfecto. Este modelo elasto-plástico ideal puede representar bastante bien el comportamiento de distintos materiales reales (metálicos o no metálicos) mediante un simple reajuste de los límites definidos anteriormente.

Dos grandes aspectos deben definirse dentro de la teoría de la plasticidad [2]:

- el criterio de fluencia, que establece el comienzo del proceso inelástico y la posterior evolución de las fronteras del dominio elástico en el espacio de tensiones;

- el comportamiento elasto-plástico, que tiene que explicar la descomposición de las deformaciones en una parte elástica y en una plástica, la regla de flujo plástico y la variación de ciertas variables internas \mathbf{q} .

2.2.1 Función de fluencia

En un proceso uniaxial es muy fácil encontrar el límite donde empieza la discontinuidad, por tratarse de la tensión en el límite elástico. Sin embargo, para estados multiaxiales de tensión no resulta nada fácil la definición de dicho límite. Para solucionar este problema se formula a partir de estudios experimentales, una función de fluencia que depende del estado tensional y de las variables internas [2]

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}[\boldsymbol{\sigma}(t), \mathbf{q}(t)] = 0 \quad (2.2)$$

Utilizando esta función, la condición de consistencia de Prager (figura 2.2) define inequívocamente el estado en el cual se encuentra un punto del sólido:

- Estado elástico si se cumplen las condiciones

$$\mathcal{F}[\boldsymbol{\sigma}(t), \mathbf{q}(t)] < 0 \quad \text{o} \quad \dot{\mathcal{F}} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} < 0 \quad (\text{descarga}) \quad (2.3)$$

- Estado elasto-plástico si se cumplen las condiciones

$$\mathcal{F}[\boldsymbol{\sigma}(t), \mathbf{q}(t)] = 0 \quad \text{y} \quad \dot{\mathcal{F}} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} = 0 \quad (\text{carga}) \quad (2.4)$$

2.2.2 Descomposición de la deformación total. Regla de flujo.

Cuando el estado tensional en un punto alcanza el criterio de discontinuidad inicial $\mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = 0$ y a la vez cumple con la condición de consistencia plástica $\dot{\mathcal{F}}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = 0$, se admite que el punto se encuentra en estado elasto-plástico. Para solucionar el problema, se adopta como válida la hipótesis de Prandtl-Reus respecto a la descomposición de la deformación total $\boldsymbol{\varepsilon}$,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p = \mathbf{C}_o^{-1} \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (2.5)$$

y se define una regla de flujo que considera que el incremento temporal de deformación plástica $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ es proporcional a un tensor de flujo plástico \mathbf{g} definido en el espacio de tensiones [1,2]

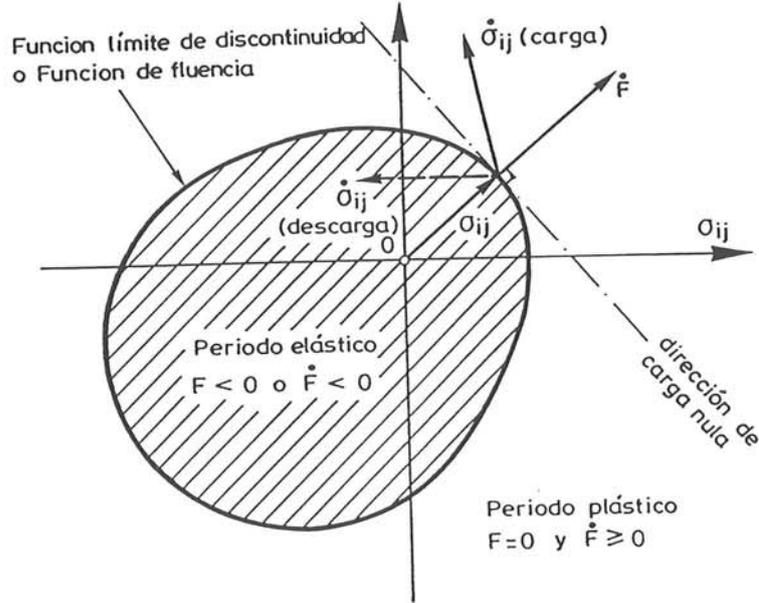


Figura 2.2 Representación de la condición de consistencia plástica de Prager [2].

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \mathcal{G}(\sigma, \mathbf{q})}{\partial \sigma} = \dot{\lambda} \mathbf{g} \quad (2.6)$$

Esta expresión tiene el nombre de *regla de normalidad* respecto a la superficie de potencial plástico $\mathcal{G}(\sigma, \mathbf{q})$, que determina de esta manera la dirección del incremento temporal de deformación plástica $\dot{\epsilon}^p$. La variable $\dot{\lambda}$, que es un escalar no negativo llamado *parámetro de consistencia plástica*, se determina a partir de la condición de consistencia de Prager y da la magnitud del incremento temporal de deformación plástica $\dot{\epsilon}^p$.

En el caso en el cual se considera como superficie de potencial plástico la superficie de fluencia plástica, se habla de una regla de flujo asociada a la superficie de fluencia. En caso contrario se habla de una regla de flujo no asociada a la superficie de fluencia, lo que es el caso más general.

2.2.3 Superficie de carga plástica. Endurecimiento plástico.

En la gráfica que describe el comportamiento uniaxial de un sólido elasto-plástico ideal de la figura 2.1, se reconocen cuatro zonas de comportamiento distinto, una elástica y las otras tres que son de naturaleza elasto-plástica. El límite entre la zona elástica y la zona plástica se establece mediante la superficie de fluencia. Este límite no es fijo, como puede observarse si se considera un proceso de descarga después de la superación por primera vez del límite elástico y se continúa el proceso cargando de nuevo la estructura. Extrapolando este resultado a casos de cargas multiaxiales, se deduce

que la superficie de fluencia adquiere movilidad en el espacio de tensiones, a medida que evoluciona el proceso plástico, transformándose en la denominada *superficie de carga plástica*. Esta función es la actualización de la función límite elástico dependiendo del estado de las variables internas \mathbf{q} . El fenómeno que genera este cambio de posición de la superficie de carga plástica se conoce como *endurecimiento plástico* y puede ser de dos tipos : isotrópico si hay movimiento homotético de la superficie de carga plástica o cinemático si hay movimiento de traslación de la misma superficie. A su vez, el endurecimiento isotrópico puede ser positivo (endurecimiento verdadero), nulo (proceso elasto-plástico perfecto) o negativo (ablandamiento).

El endurecimiento isotrópico está controlado por la evolución de la *función de endurecimiento plástico* $\mathcal{K}(\kappa)$, que depende de la *variable interna de endurecimiento plástico* κ . La variación de κ sigue una regla de evolución explícita en función de $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p$

$$\dot{\kappa} = \dot{\lambda} H_{\kappa}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \equiv \dot{\lambda} \left[\mathbf{h}_{\kappa}^T(\boldsymbol{\sigma}, \kappa) \frac{\partial \mathcal{G}(\boldsymbol{\sigma}, \kappa)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right] \quad (2.7)$$

$$\dot{\kappa} = \mathbf{h}_{\kappa}^T(\boldsymbol{\sigma}, \kappa) \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p$$

donde $\mathbf{h}_{\kappa}^T(\boldsymbol{\sigma}, \kappa)$ es un tensor de segundo orden, que depende del tensor de tensiones y de la variable de endurecimiento plástico.

2.2.4 Relación tensión deformación generalizada

La ley constitutiva elasto-plástica incremental tangente $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}_T \dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ y el parámetro de consistencia plástica $\dot{\lambda}$ pueden formularse a partir del criterio general de fluencia plástica de Prager. Se supone una función de fluencia de una forma menos general, pero justificada por los datos experimentales [2]:

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}, \kappa) = f(\boldsymbol{\sigma}) - \mathcal{K}(\kappa) = 0 \quad (2.8)$$

y, como consecuencia, su variación temporal $\dot{\mathcal{F}}$ queda

$$\dot{\mathcal{F}} = \left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\}^T \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \kappa} \dot{\kappa} = 0 \quad (2.9)$$

Teniendo en cuenta la ecuación (2.8), (2.9) se expresa como

$$\left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\}^T \dot{\boldsymbol{\sigma}} = - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \kappa} \dot{\kappa} = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \kappa} \dot{\kappa} \quad (2.10)$$

Substituyendo la ecuación (2.7) en (2.10), resulta

$$\left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma} \right\}^T \dot{\sigma} = - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \kappa} \left(\mathbf{h}_\kappa^T \dot{\epsilon}^p \right) \quad (2.11)$$

y, substituyendo en la última ecuación la regla de flujo generalizada dada por la ecuación (2.6), se tiene

$$\left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma} \right\}^T \dot{\sigma} = - \dot{\lambda} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \kappa} \left(\mathbf{h}_\kappa^T \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \sigma} \right) \quad (2.12)$$

El incremento de tensión, que se obtiene derivando en función del tiempo la ecuación (2.5), puede escribirse como

$$\dot{\sigma} = \mathbf{C}_o (\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^p) = \mathbf{C}_o \left(\dot{\epsilon} - \dot{\lambda} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \sigma} \right) \quad (2.13)$$

siendo \mathbf{C}_o el tensor de rigidez inicial del material. Substituyendo la ecuación (2.13) en la ecuación (2.12) resulta

$$\left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma} \right\}^T \mathbf{C}_o \dot{\epsilon} - \dot{\lambda} \left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma} \right\}^T \mathbf{C}_o \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \sigma} = - \dot{\lambda} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \kappa} \left(\mathbf{h}_\kappa^T \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \sigma} \right) \quad (2.14)$$

Agrupando términos se obtiene

$$\dot{\lambda} \left[\left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma} \right\}^T \mathbf{C}_o \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \sigma} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \kappa} \left(\mathbf{h}_\kappa^T \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \sigma} \right) \right] = \left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma} \right\}^T \mathbf{C}_o \dot{\epsilon} \quad (2.15)$$

lo que permite expresar $\dot{\lambda}$ en la forma

$$\dot{\lambda} = \frac{\left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma} \right\}^T \mathbf{C}_o \dot{\epsilon}}{A + \left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma} \right\}^T \mathbf{C}_o \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \sigma}} \quad (2.16)$$

donde A es el parámetro de endurecimiento plástico:

$$A = - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \kappa} \left(\mathbf{h}_\kappa^T \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \sigma} \right) \quad (2.17)$$

Substituyendo la ecuación (2.16) en la ecuación (2.13), resulta la relación incremental tensión - deformación:

$$\dot{\sigma} = \mathbf{C}_o \dot{\epsilon} - \frac{\mathbf{C}_o \left\{ \frac{\partial G}{\partial \sigma} \right\} \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T \mathbf{C}_o}{A + \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T \mathbf{C}_o \frac{\partial G}{\partial \sigma}} \dot{\epsilon} \quad (2.18)$$

pudiéndose escribir, a partir de ésta última, la *ley constitutiva incremental tangente*

$$\dot{\sigma} = \mathbf{C}_T^{ep} \dot{\epsilon} \quad (2.19)$$

siendo \mathbf{C}_T^{ep} el tensor de rigidez elasto-plástico tangente del material

$$\mathbf{C}_T^{ep} = \mathbf{C}_o - \frac{\mathbf{C}_o \left\{ \frac{\partial G}{\partial \sigma} \right\} \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T \mathbf{C}_o}{A + \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T \mathbf{C}_o \frac{\partial G}{\partial \sigma}} \quad (2.20)$$

2.3 MODELO CONSTITUTIVO DE DAÑO PLÁSTICO

2.3.1 Criterio de fluencia

El modelo constitutivo empleado en este estudio es el modelo de daño plástico desarrollado por S. Oller, J. Lubliner, E. Oñate y J. Oliver [3]. En lo siguiente se incluye un breve resumen de las características más importantes de este modelo constitutivo tridimensional, que trabaja con el estado tensional y deformacional en un punto.

La función de fluencia plástica es una característica destacada de este modelo. Es una función homogénea, de primer grado en las componentes del tensor de tensiones, que define una función de endurecimiento plástico simple y con un claro sentido físico - la cohesión c . Su forma es [2]

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(\sigma, c) = \frac{1}{(1 - \alpha)} \left[\sqrt{3J_2} + \alpha I_1 + \beta \langle \sigma^{max} \rangle - \gamma \langle -\sigma^{max} \rangle \right] - c = 0 \quad (2.21)$$

donde $\langle \rangle$ es el símbolo de la función de McAuley, σ^{max} es la tensión principal máxima, c es la función de cohesión o de endurecimiento plástico definida en el apartado (2.3.5) y α , β y γ son constantes adimensionales que modifican la forma de la superficie de fluencia, que toman los siguientes valores:

$$\alpha = \frac{\frac{\sigma_{CB}}{\sigma_c} - 1}{2 \frac{\sigma_{CB}}{\sigma_c} - 1} \quad (2.22)$$

$$\beta = (1 - \alpha)R^o - (1 + \alpha) \quad (2.23)$$

$$\gamma = \frac{3(1 - r_{oct}^{max})}{2r_{oct}^{max} - 1} \quad (2.24)$$

donde σ_{CB} y σ_c representan las resistencias de compresión equibiaxial y uniaxial para el límite de discontinuidad inicial, respectivamente. Para hormigones, $\frac{\sigma_{CB}}{\sigma_c}$ oscila entre 1.10 y 1.16, de donde $\alpha \in [0.08, 0.1212]$; R^o representa la relación uniaxial que hay entre resistencia uniaxial de compresión y tracción cuando se alcanza el primer límite de discontinuidad; r_{oct}^{max} es la relación máxima entre radios octaédricos y es dada por la expresión siguiente:

$$r_{oct}^{max} = \frac{(\sqrt{2J_2})_T}{(\sqrt{2J_2})_C} \quad (2.25)$$

donde $()_T$ y $()_C$ son, respectivamente, valores calculados sobre los meridianos a tracción y a compresión de un plano octaédrico cualquiera $I_1 = \text{constante}$.

2.3.2 Criterio de potencial plástico

La definición de la función de potencial plástico establece indirectamente el incremento de deformación plástica ϵ^p y depende de la magnitud del efecto de dilatación que se produce. En este modelo constitutivo se utiliza una modificación del criterio de fluencia de Mohr-Coulomb que consiste en la sustitución del ángulo de rozamiento interno ϕ por el de dilatación ψ y la alteración de la tensión principal máxima con un factor α_R [2].

$$\mathcal{G}(I_1, J_2, \theta, \psi, \alpha_R) = \frac{I_1}{3}K_3 + \sqrt{J_2} \left(K_1 \cos \theta - K_2 \frac{\text{sen } \theta \text{ sen } \psi}{\sqrt{3}} \right) - \text{cte.} = 0 \quad (2.26)$$

siendo

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{1 + \alpha_R}{2} - \frac{1 - \alpha_R}{2} \text{sen } \psi \\ K_2 &= \frac{1 + \alpha_R}{2} - \frac{1 - \alpha_R}{2} \frac{1}{\text{sen } \psi} \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$K_3 = K_2 \text{sen } \psi$$

Las magnitudes I_1 , J_2 y θ serán descritas en el apartado 2.3.3, ψ es el ángulo de dilatación cuya evolución se estudiará en el apartado 2.3.7 y α_R es el parámetro de ajuste de la tensión principal mayor. Este se utiliza para poder lograr que la relación uniaxial R^o existente entre la resistencia uniaxial de compresión y la de tracción cuando se alcanza el primer límite de discontinuidad, sea la deseada.

2.3.3 Vectores de flujo de Nayak-Zienkiewicz

Los vectores de flujo se obtienen como derivadas de una cierta función escalar de tensiones – \mathcal{F} o \mathcal{G} – con respecto al tensor de tensiones σ . Si este tensor de tensiones es simétrico, el vector de flujo tiene sólo seis componentes distintas. En el caso del vector de flujo plástico, estos son [2]

$$\mathbf{g} = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \sigma} = \left[\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \sigma_{11}} \quad \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \sigma_{22}} \quad \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \sigma_{33}} \quad \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \sigma_{12}} \quad \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \sigma_{13}} \quad \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \sigma_{23}} \right]^T \quad (2.28)$$

El cálculo de este vector se basa en admitir que el flujo plástico resulta de una combinación lineal de tres vectores, definidos respectivamente en función del primer invariante, I_1 , del tensor de tensiones y de los invariantes segundo y tercero, J_2 y J_3 , del tensor desviador de tensiones

$$\mathbf{g} = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \sigma} = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \sigma} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial (J_2)^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial (J_2)^{\frac{1}{2}}}{\partial \sigma} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial J_3} \frac{\partial J_3}{\partial \sigma} \quad (2.29)$$

Usándose la definición del ángulo de similaridad de Lode

$$\text{sen}(3\theta) = \left[\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{(J_2)^{\frac{3}{2}}} \right]$$

y operando algebraicamente en la ecuación (2.29), resulta

$$\mathbf{g} = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \sigma} = C_1 \mathbf{g}_1 + C_2 \mathbf{g}_2 + C_3 \mathbf{g}_3 \quad (2.30)$$

donde

$$\mathbf{g}_1 = \frac{\partial I_1}{\partial \sigma} = \{ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \}^T$$

$$\mathbf{g}_2 = \frac{\partial (J_2)^{\frac{1}{2}}}{\partial \sigma} = \frac{1}{2(J_2)^{\frac{1}{2}}} \{ s_{11} \ s_{22} \ s_{33} \ 2s_{23} \ 2s_{31} \ 2s_{12} \}^T \quad (2.31)$$

$$\mathbf{g}_3 = \frac{\partial J_3}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \left\{ \begin{array}{c} s_{22}s_{33} - s_{23}^2 \\ s_{11}s_{33} - s_{13}^2 \\ s_{11}s_{22} - s_{12}^2 \\ 2(s_{13}s_{12} - s_{11}s_{23}) \\ 2(s_{12}s_{23} - s_{22}s_{13}) \\ 2(s_{23}s_{12} - s_{33}s_{12}) \end{array} \right\} + \frac{J_2}{3} \frac{\partial I_1}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$$

$$C_1 = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial I_1}$$

$$C_2 = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial (J_2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \theta} \frac{\operatorname{tg}(3\theta)}{(J_2)^{\frac{1}{2}}} \quad (2.32)$$

$$C_3 = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \theta} \frac{\sqrt{3}}{2 \cos(3\theta)} \frac{1}{(J_2)^{\frac{3}{2}}}$$

De esta manera, para cada función de potencial plástico, es necesario definir sólo las constantes C_1, C_2 y C_3 para calcular el vector de flujo plástico. En el caso de la función definida en el apartado 2.3.2 dichas constantes toman los siguientes valores:

$$C_1 = \frac{K_3}{3}$$

$$C_2 = \cos \theta \left[K_1(1 + \operatorname{tg}(3\theta)\operatorname{tg} \theta) + K_2 \frac{\operatorname{sen} \psi}{\sqrt{3}} (\operatorname{tg}(3\theta) - \operatorname{tg} \theta) \right] \quad (2.33)$$

$$C_3 = \frac{K_1 \sqrt{3} \operatorname{sen} \theta + K_2 \cos \theta \operatorname{sen} \psi}{2J_2 \cos(3\theta)}$$

Para la superficie de fluencia plástica (2.21), el vector normal $\mathbf{f} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$ expresado en el espacio de tensiones principales queda definido como

$$\mathbf{f} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = C_1 \mathbf{f}_1 + C_2 \mathbf{f}_2 + C_3 \mathbf{f}_3 \quad (2.34)$$

siendo los vectores \mathbf{f}_i los mismos con los expresados por las relaciones (2.31) y las constantes C_i iguales a

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \alpha + \frac{\delta}{3} \\
 C_2 &= \sqrt{3} + \frac{2\delta}{\sqrt{3}} \left[\operatorname{sen} \left(\theta + \frac{2\pi}{3} \right) - \operatorname{tg} (3\theta) \cos \left(\theta + \frac{2\pi}{3} \right) \right] \\
 C_3 &= \frac{\delta}{J_2} \frac{\cos \left(\theta + \frac{2\pi}{3} \right)}{\cos (3\theta)} \tag{2.35}
 \end{aligned}$$

con $\delta = \begin{cases} \gamma & \text{si } \sigma_1 < 0; \\ \beta & \text{si } \sigma_1 > 0; \\ [(1-p)\beta + p\gamma] & \text{si } \sigma_1 = 0. \end{cases}$

donde p es un índice que indica hacia que cuadrante se calcula el vector de flujo y que varía entre 0 (cuadrante de compresión - tracción) y 1 (cuadrante de compresión).

2.3.4 Variable de daño plástico

A partir de la variable de endurecimiento plástico κ definida en el apartado 2.1.3 en la ecuación (2.7) se define la variable de daño plástico κ^p , cuyo valor aumenta sólo si hay deformaciones plásticas, no llegando nunca a disminuir. Esta variable interna es adimensional, normalizada a la unidad y varía entre 0 (punto no dañado) y 1 (punto completamente dañado plásticamente). Se considera que cualquier proceso multiaxial puede descomponerse en procesos uniaxiales equivalentes desarrollados en las direcciones principales. La regla de evolución de κ^p es dada por [2]

$$\dot{\kappa}^p = \dot{\kappa}_T^p + \dot{\kappa}_C^p = \sum_{i=1}^3 \left[(h_{ki})_T + (h_{ki})_C \right] \dot{\epsilon}_i^p \tag{2.36}$$

$$\dot{\kappa}^p = \sum_{i=1}^3 \left[(h_{ki})_T \dot{\epsilon}_i^p + (h_{ki})_C \dot{\epsilon}_i^p \right]$$

siendo

$$(h_{ki})_T = \frac{\langle \sigma_i \rangle}{g_T^{p*}} \quad ; \quad (h_{ki})_C = \frac{\langle -\sigma_i \rangle}{g_C^{p*}} \tag{2.37}$$

donde las magnitudes g_T^{p*} y g_C^{p*} son energías específicas a tracción y compresión corregidas de acuerdo con el criterio de fluencia y toman los valores

$$g_T^{p*} = g_T^p \frac{\sum_{i=1}^3 \langle \sigma_i \rangle}{\sigma_T} \quad g_C^{p*} = g_C^p \frac{\sum_{i=1}^3 \langle -\sigma_i \rangle}{\sigma_C} \quad (2.38)$$

σ_T y σ_C son las tensiones uniaxiales de tracción/compresión correspondientes al estado multiaxial de tensiones. Las variables g_T^p y g_C^p son energías específicas disipadas al final de un proceso elasto-plástico, correspondientes a tracción uniaxial y a compresión uniaxial, respectivamente. Sus expresiones son

$$g_T^p = \int_0^\infty \sigma_T \dot{\epsilon}_T^p dt \quad y \quad g_C^p = \int_0^\infty \sigma_C \dot{\epsilon}_C^p dt \quad (2.39)$$

y son medidas de la capacidad del material de disipar energía.

La variable de daño plástico indica aquella parte de la energía plástica total que se puede disipar que se ha disipado efectivamente hasta un cierto momento.

2.3.5 La ley de evolución de la cohesión

Se hace la suposición que las curvas de resistencia a tracción y compresión son análogas, lo que conduce a la observación de que hay una relación de escala entre ellas, que viene dada por la variable R^o . En este caso, la cohesión es una variable explícita función de las tensiones umbrales a tracción o a compresión que, a su vez, son funciones de la variable de daño plástico κ^p

$$c = \frac{1}{\aleph} \sigma_c(\kappa^p) = \frac{R^o}{\aleph} \sigma_c(\kappa^p) \quad (2.40)$$

donde \aleph es un parámetro que depende de la función de fluencia elegida y representa el factor de escala entre la cohesión y la tensión uniaxial de compresión.

2.3.6 La ley de evolución del rozamiento interno

A lo largo del proceso elasto-plástico, en un sólido cohesivo-friccional ocurre una pérdida de cohesión intergranular que genera una ganancia de rozamiento interno, provocando un comportamiento más dúctil a compresión y una pérdida de fuerzas cohesivas a tracción. Esto da lugar a un crecimiento de la relación entre resistencias uniaxiales $R(\kappa^p)$ a medida que evolucione el proceso plástico. Con estas suposiciones, se adopta una función explícita del tipo siguiente (que puede verse en la figura 2.3):

$$\text{sen } \phi = \begin{cases} 2 \frac{\sqrt{\kappa^p \kappa^L}}{\kappa^p + \kappa^L} \text{sen } \phi^{max} & \forall \kappa^p \leq \kappa^L \\ \text{sen } \phi^{max} & \forall \kappa^p > \kappa^L \end{cases} \quad (2.41)$$

donde κ^p es la variable del daño plástico y κ^L es el límite de daño a partir del cual la cohesión se anula y el rozamiento interno se mantiene constante.

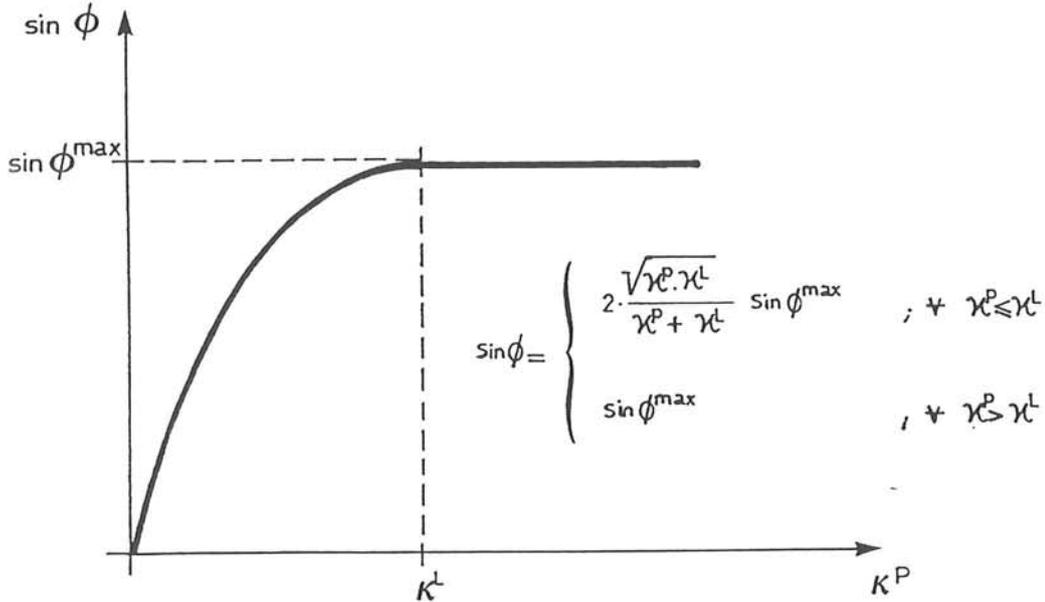


Figura 2.3 Evolución del ángulo de rozamiento interno [2].

2.3.7 La ley de evolución de la dilatancia

La dilatancia se debe al crecimiento de los mecanismos de micro-fisuración y representa la relación que hay entre el incremento de volumen plástico y la distorsión plástica. El modelo presentado aquí utiliza una función explícita $\psi = \psi(\kappa^p)$

$$\psi(\kappa^p) = \begin{cases} 0 & \forall \phi(\kappa^p) \leq \phi_{cv} \\ \arcsen \left[\frac{\sen \phi(\kappa^p) - \sen \phi_{cv}}{1 - \sen \phi(\kappa^p) \sen \phi_{cv}} \right] & \forall \phi(\kappa^p) > \phi_{cv} \end{cases} \quad (2.42)$$

siendo $\phi(\kappa^p)$ la función de rozamiento interno, ϕ_{cv} es una constante denominada ángulo de rozamiento interno a volumen constante, que tiene el valor dado por

$$\sen \phi_{cv} = \left[\frac{\sen \phi^{\max} - \sen \psi^{\max}}{1 - \sen \phi^{\max} \sen \psi^{\max}} \right] \quad (2.43)$$

El ángulo de dilatancia tiene gran relevancia en la función de potencial plástico (apartado 2.3.2).

2.4 EJEMPLO DE CÁLCULO

2.4.1 Generalidades acerca del ejemplo

En este apartado se incluyen parte de los resultados obtenidos utilizando la formulación elásto-plástica descrita a lo largo de este capítulo. Esta formulación ha sido implementada en el programa PLCRAC y comprobada mediante varios ejemplos, a fin de estudiar el comportamiento de las barras constituidas de materiales distintos, que en este caso concreto son el hormigón y el acero. Los ejemplos realizados tienen todos en común la barra biapoyada de la figura 2.4. Es una barra de sección rectangular, de 30 centímetros de grosor, un ancho de 15 centímetros y una longitud de 3 metros. Dicha barra se ha discretizado en 10 elementos con 3 nodos cada uno, resultando un total de 21 nodos equidistantes. A lo largo de su grosor se han considerado 20 capas iguales, de las cuales todas son de hormigón excepto la capa 19 que es de acero y simula la armadura asimétrica del lado traccionado de la barra.

La estructura está cargada siempre con un desplazamiento impuesto en el centro de su luz. Se ha elegido este tipo de carga para poder controlar los desplazamientos, lo que es muy importante si se quiere describir correctamente el comportamiento de la barra en el momento de su fallo. Se conoce a partir de los ensayos de laboratorio que en el instante del fallo los fenómenos se suceden con gran rapidez y, por esto, es muy difícil grabar la curva fuerza - desplazamientos hasta el estado último. Esto ocurre debido a la pérdida de estabilidad local del punto - o de los puntos - que se encuentran en estado de rápida degradación de rigidez, lo que provoca caídas de tensión casi instantáneas.

El ejemplo que se describe detalladamente en lo siguiente sintetiza todos los ensayos numéricos hechos y muestra la gran capacidad del modelo constitutivo de daño plástico de simular el comportamiento del hormigón armado antes y después del límite elasto-plástico.

2.4.2 Descripción del ensayo numérico

Se detallan las características principales del ejemplo, con acento sobre los datos del material requeridos por el programa PLCRAC, conforme a la estructura de datos de entrada que se da en el anexo. La barra utilizada tiene las siguientes características de los materiales involucrados:

Hormigón

$$\text{Módulo de elasticidad } E = 400.000 \text{ dan/cm}^2$$

$$\text{Coeficiente de contracción transversal } \nu = 0.17$$

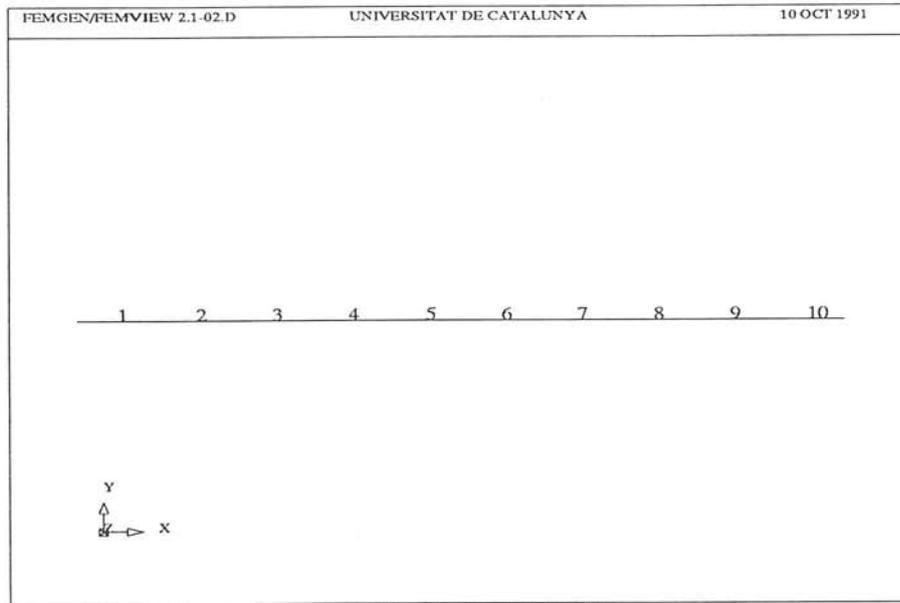
$$\text{Número del criterio de fluencia NCRIT} = 5 \text{ (Lubliner-Oller)}$$

$$\text{Número del criterio de potencial plástico NCRIP} = 3 \text{ (Mohr-Coulomb)}$$

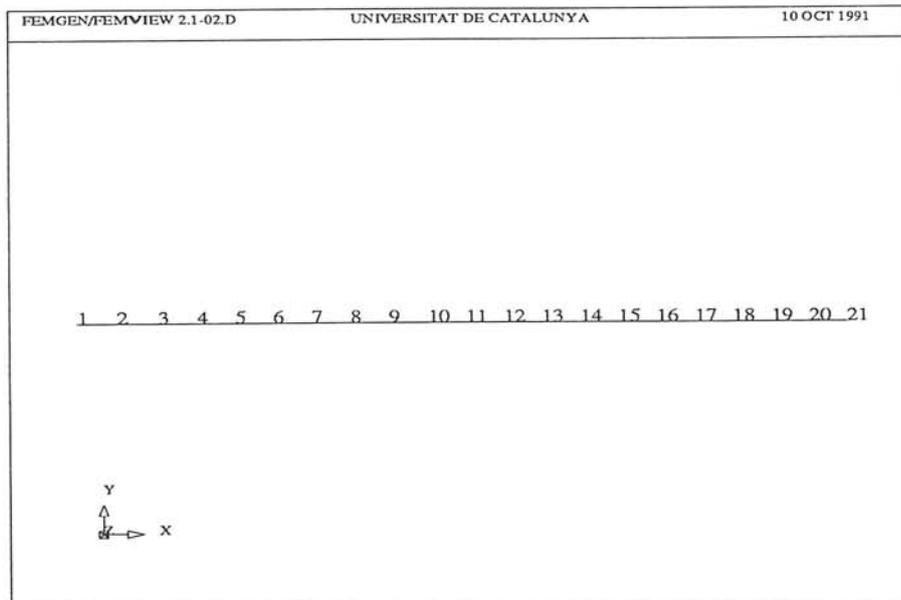
$$\text{Angulo de dilatancia máximo } \psi^{max} = 32^\circ$$

$$\text{Angulo de rozamiento interno máximo } \phi^{max} = 32^\circ$$

$$\text{Tensión umbral de plasticidad } \sigma^0 = 300 \text{ dan/cm}^2$$



Numeracion de los elementos finitos



Numeracion de los nodos

Figura 2.4 Discretización en nodos y elementos de la viga usada para los ensayos numéricos

$$\begin{aligned} \text{Energía de fractura } G_f &= 7 \cdot 10^{-3} \text{ dan/cm}^2 \\ \text{Energía de aplastamiento } G_c &= 7 \cdot 10^{-1} \text{ dan/cm}^2 \\ \text{Relación entre resistencias } \sigma_c^o / \sigma_T^o &= R^o = 10 \\ \text{Parámetro } \alpha \text{ de la ecuación (2.22)} &= 0.1 \\ \text{Parámetro } \gamma \text{ de la ecuación (2.24)} &= 3.5 \end{aligned}$$

Puede observarse que el hormigón se calcula con potencial plástico no asociado, el número de función "3" correspondiendo al criterio de fluencia plástica de Mohr-Coulomb generalizado por Oller^(...) y que ha sido explicado en el apartado 2.3.2.

Acero

$$\text{Módulo de elasticidad } E = 2.100.000 \text{ dan/cm}^2$$

$$\text{Coeficiente de contracción transversal } \nu = 0.25$$

$$\text{Número del criterio de fluencia NCRIT} = 1 \text{ (Tresca)}$$

$$\text{Número del criterio de potencial plástico NCRIP} = 2 \text{ (Von Mises)}$$

$$\text{Tensión umbral de plasticidad } \sigma^o = 2.100 \text{ dan/cm}^2$$

$$\text{Energía de fractura } G_f = 1 \cdot 10^2 \text{ dan/cm}^2$$

$$\text{Energía de aplastamiento } G_c = 1 \cdot 10^2 \text{ dan/cm}^2$$

$$\text{Relación entre resistencias } \sigma_c^o / \sigma_t^o = R^o = 1$$

Se ha elegido la función de potencial plástico Von Mises no-asociada a la función de fluencia Tresca debido a las propiedades superiores de continuidad de la función de Von Mises, lo que evita las indeterminaciones que aparecen al utilizar la función de Tresca como función de potencial plástico. Como es sabido, la función de fluencia de Von Mises toma, en el caso de tensión plana, los mismos valores que la de Tresca en los ejes y en la primera bisectriz del espacio de tensiones principales de Westergard (véase la figura 2.2), mientras que en los demás puntos proporciona una aproximación algo en exceso en comparación con Tresca. Se conoce que esta combinación de criterios de fluencia y de potencial plástico permite una buena simulación del comportamiento de los metales en general.

El elemento finito empleado es el elemento de viga de Timoshenko, superintegrado con la cuadratura de Gauss de 5 puntos. No se ha observado la aparición del fenómeno de bloqueo. La ecuación constitutiva ha sido integrada mediante el algoritmo de Euler. Las curvas de endurecimiento consideradas han sido diferentes para los dos materiales que componen la sección.

En el hormigón, la relación tensión equivalente - endurecimiento plástico $\sigma^{equiv} - \kappa^p$ se ha considerado lineal - lo que corresponde a endurecimiento negativo o ablandamiento. Esto genera una función tensión equivalente - deformación plástica $\sigma^{equiv} - \epsilon^p$ de variación exponencial que puede verse en la figura 2.5.

En el acero la relación tensión equivalente - endurecimiento plástico $\sigma^{equiv} - \kappa^p$ considerada ha sido polinómica con un pico de tensión de 2.500 dan/cm² para un valor κ^p de 0.1, con variación parabólica de segundo grado antes del pico de tensión (endurecimiento positivo) y variación polinómica de tercer grado después del pico de tensión (ablandamiento). Esta curva produce una función tensión equivalente - deformación plástica polinómica (véase la figura 2.6).

La acción aplicada un el nodo mediano (el nodo número 11), ha sido cons-

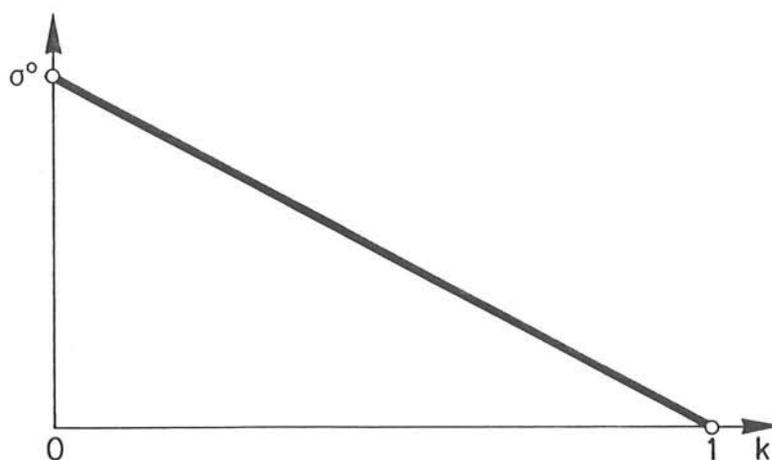


Figura 2.5 Hormigón: Relación tensión equivalente – variable de endurecimiento.

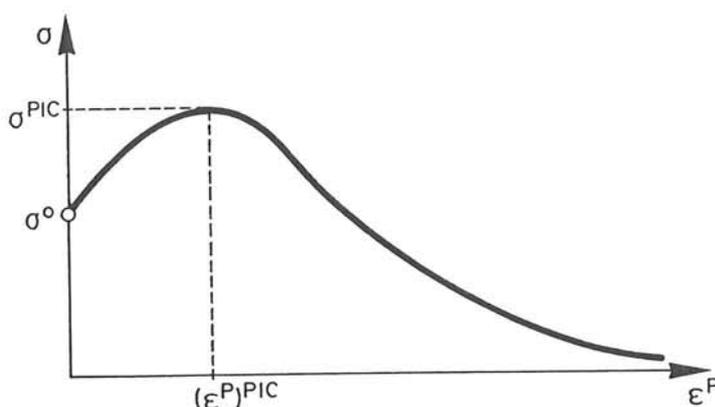


Figura 2.6 Acero: Relación tensión equivalente – deformación plástica.

tituida por incrementos de desplazamientos verticales, con un valor inicial de 0.03cm y con un incremento del desplazamiento impuesto en cada paso de 0.01cm, hasta llegar a la inestabilidad numérica en la solución. A partir de aquí se ha ido disminuido los pasos a un decimo del anterior, cada vez que la solución daba signos de inestabilidad, hasta el límite del modelo.

El método de solución adoptado para el problema no lineal ha sido el de la matriz de rigidez inicial K_0 (véase apartado 1.3.2, figura 1.4) debido a su gran versatilidad en solucionar problemas con ablandamiento (rigidez negativa).

2.4.3 Resultados

En la figura 2.7 se muestra la curva fuerza – desplazamiento obtenida en el nodo del centro de la luz, que es precisamente el nodo en el cual se han impuesto los desplazamientos. Pueden observarse varias zonas de distinto comportamiento, que pueden interpretarse de la siguiente manera:

Tramo O–A: zona de comportamiento elástico. Todas las capas se encuen-

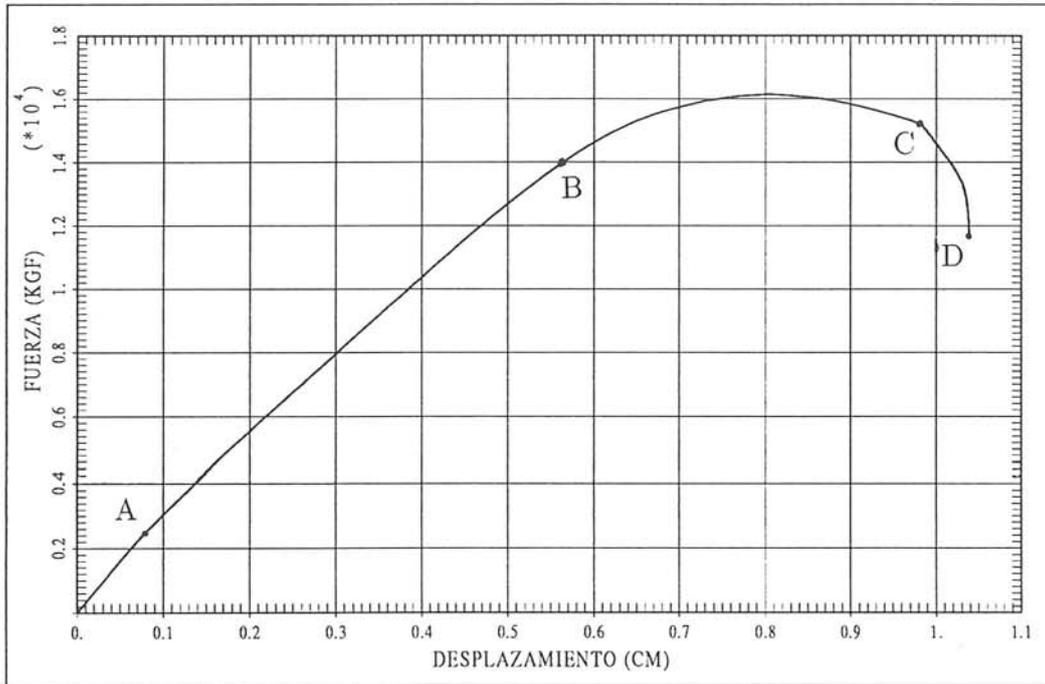


Figura 2.7 Curva fuerza - desplazamiento en el nodo cargado, en el centro de la luz.

tran en el estado elástico perfecto.

Tramo A-B: primera zona elasto-plástica. El hormigón del lado de la tracción ha alcanzado la superficie de fluencia, cuyo primer límite elástico es 30 dan/cm^2 en tensión equivalente, y ha empezado perder tensión debido al ablandamiento tal como se esperaba (figura 2.5). Mientras tanto, el estado de tensión del hormigón comprimido y del acero traccionado siguen dentro de sus propias superficies de fluencia, es decir, siguen siendo elásticos. Por estas razones, ocurre la disminución de la pendiente (rigidez) en el punto A, que luego se estabiliza a un nuevo valor, que corresponde a la desaparición práctica de la contribución a la rigidez global de las capas que contienen hormigón traccionado.

Tramo B-C: segunda zona elasto-plástica. Es ahora el hormigón comprimido quien alcanza la superficie de fluencia y a empieza a comportarse de manera elasto-plástica. Cada vez se plastifican más capas, produciendo una creciente disminución de rigidez en la sección más solicitada que, al acercarse al punto C, llega a ser negativa.

Tramo C-D: zona final, de caída violenta y generalizada de tensión. Las capas pierden tensión muy rápido, el llamado "eje neutro" (definido en el apartado 2.5, figura 2.4) se mueve hacia la zona traccionada para equilibrar las pérdidas de tensión de compresión en las capas extremas, el daño plástico (κ^p) aumenta, produciendo caídas adicionales de tensión y, finalmente, se pierde toda convergencia del proceso numérico debido al hecho que por

pequeños que sean los pasos de carga, siempre son demasiado grandes para que puedan seguir la caída casi vertical de la fuerza nodal. Esta caída drástica se produce como resultado de la disminución rápida de la longitud del brazo de palanca entre las capas que todavía pueden soportar cargas y el punto que corresponde a la posición del "eje neutro" y no se debe tanto al efecto del agotamiento de la energía de aplastamiento del hormigón.

La figura 2.8 muestra la deformada de la viga estudiada en su estado último, ampliada por un factor de 125 para que pueda observarse un punto singular en el mismo punto de aplicación de la carga. Este fenómeno se interpreta como la formación de una rótula plástica en este nodo. Los dos nodos proximos también muestran grandes giros, lo que indica que se encuentran en un estado de daño muy avanzado.

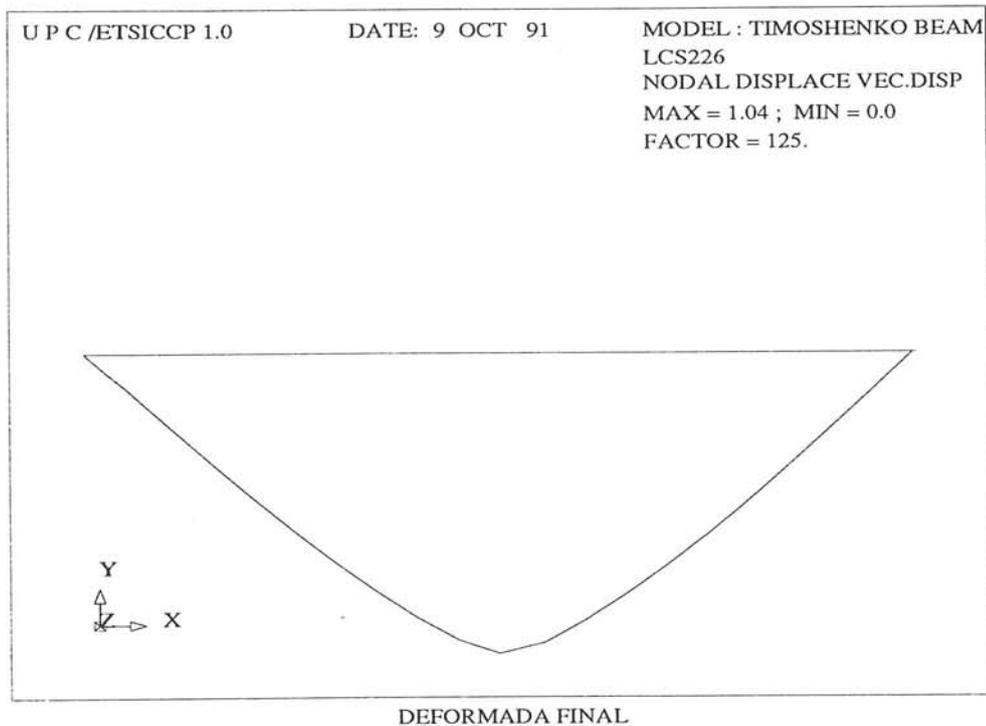


Figura 2.8 Deformada de la viga en el estado último, ampliada con un factor de 125.

En las figuras 2.9 – 2.13 puede verse la historia de la evolución de la tensión normal σ_x , en cinco imágenes separadas colocadas en orden cronológico, cada una mostrando la historia de la tensión normal desde el comienzo de la aplicación de la carga hasta un cierto instante considerado óptimo para la visualización de la evolución de las tensiones.

En la figura 2.9, se observa la evolución de la tensión normal σ_x hasta el paso de carga número 53, que corresponde a un desplazamiento impuesto en el nudo 11 de 0.55 centímetros, lo que corresponde al principio del tramo

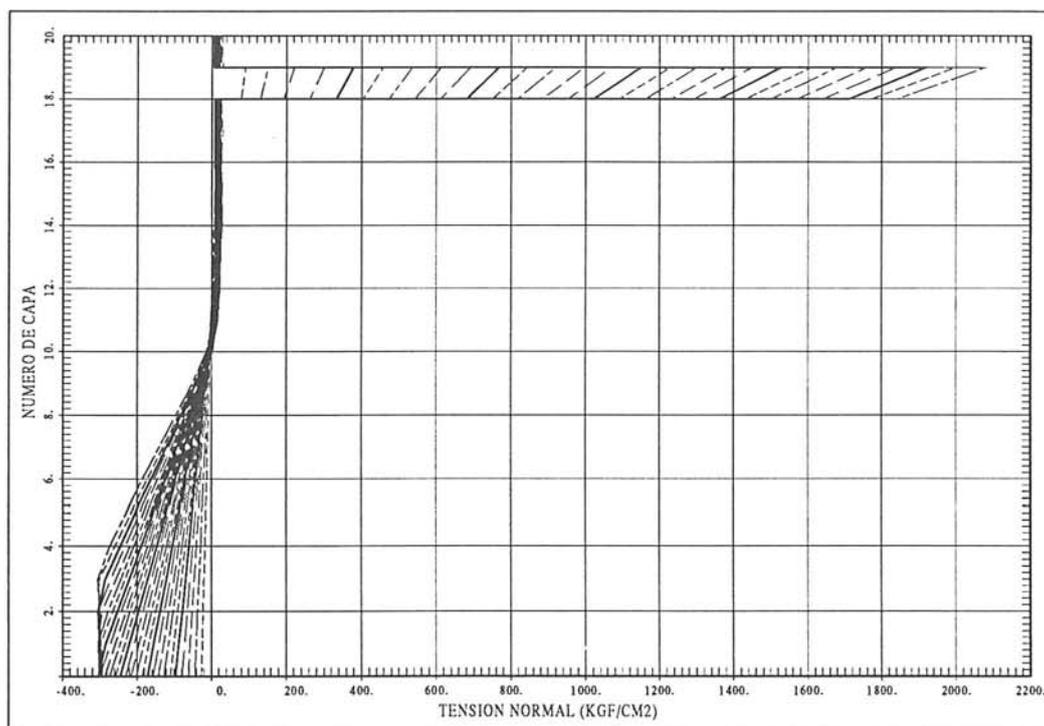


Figura 2.9 Diagrama I de historia de la tensión normal σ_x .

B-C. En este instante todo el hormigón traccionado se encuentra en el estado elasto-plástico, perdiendo tensión con cada nuevo incremento de desplazamiento, tal como viene impuesto por la ley de evolución del ablandamiento. El acero está muy cerca del primer límite elasto-plástico ($\sigma^o = 2.100 \text{ dan/cm}^2$), pero todavía en estado elástico. Con respecto a las capas de hormigón comprimidas, las primeras tres han alcanzado la superficie de fluencia ($\sigma^o = 300 \text{ dan/cm}^2$) y empiezan a perder tensión a un ritmo todavía lento.

La figura 2.10 es la continuación de la anterior hasta el paso de carga 79, o hasta un desplazamiento en el centro de la luz de 0.81 centímetros, aproximadamente en el pico de la fuerza (figura 2.7) que puede soportar la estructura, al final del tramo B-C.

El acero ha entrado en el estado elasto-plástico, lo que ha determinado el cambio de pendiente de las gráficas correspondientes a los últimos pasos de carga. En el paso de carga 79 ha alcanzado su pico de tensión (2.500 dan/cm^2), por lo cual se produce un nuevo cambio de pendiente y, desde ahora, empieza a perder tensión según su ley de comportamiento (según la figura 2.6). Al final de este paso de carga ha agotado sus reservas de endurecimiento plástico. El hormigón traccionado llega a tensión nula, lo que corresponde al daño plástico total para este tipo de sollicitación. La zona de hormigón comprimido aumenta en detrimento de las capas hasta

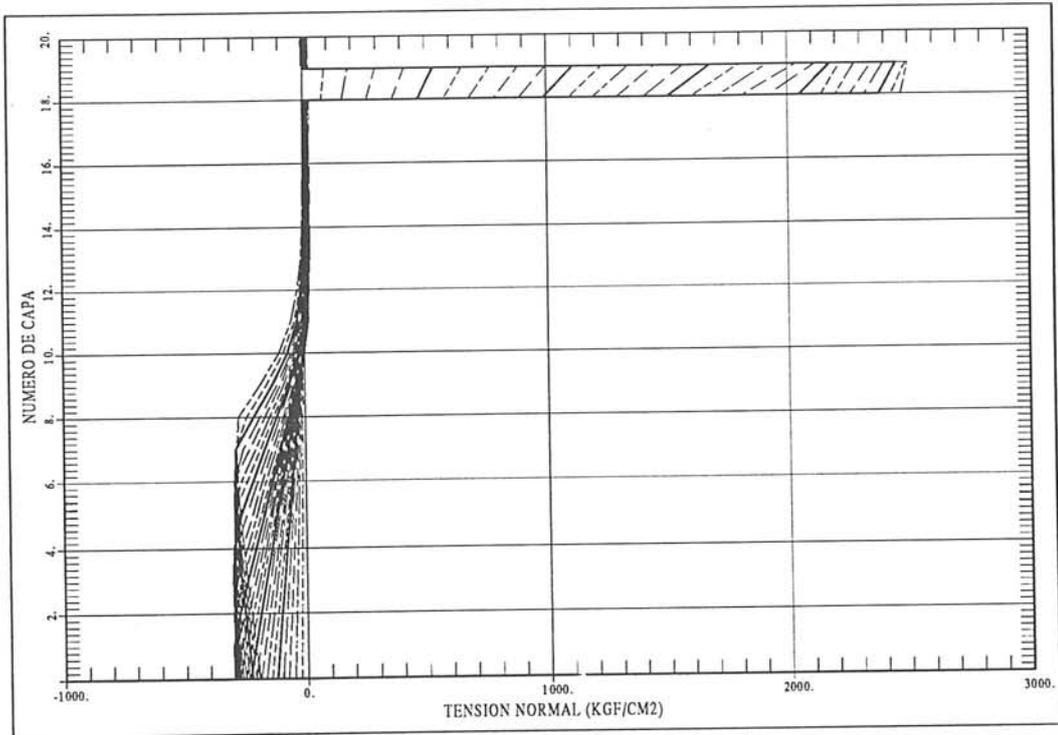


Figura 2.10 Diagrama II de historia de la tensión normal σ_x .

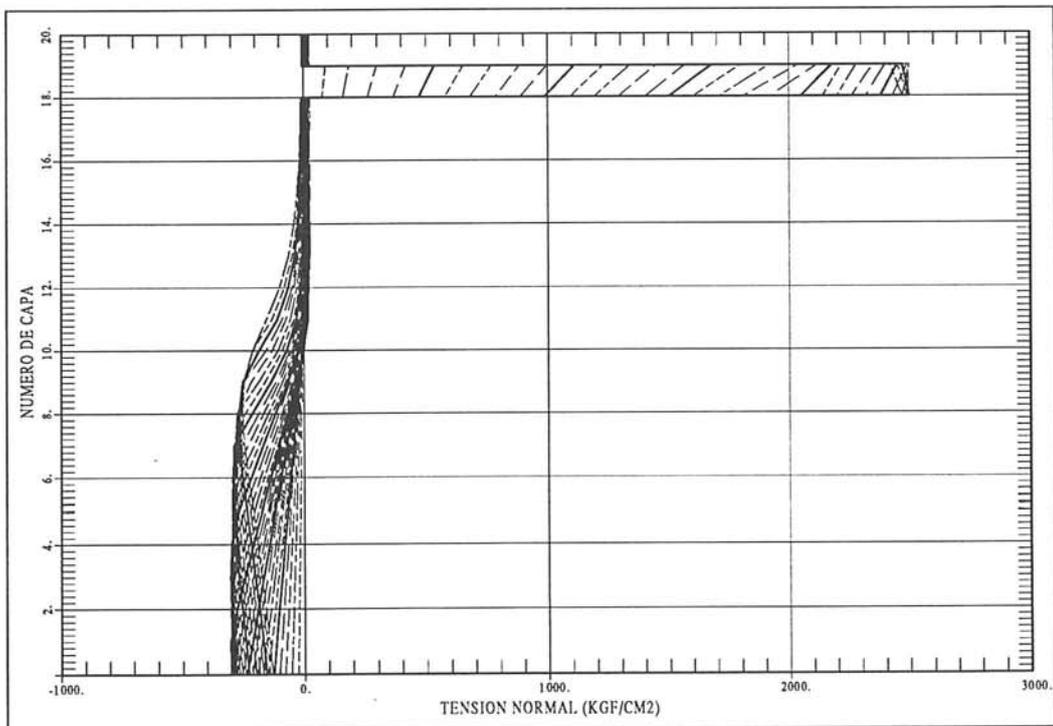


Figura 2.11 Diagrama III de historia de la tensión normal σ_x .

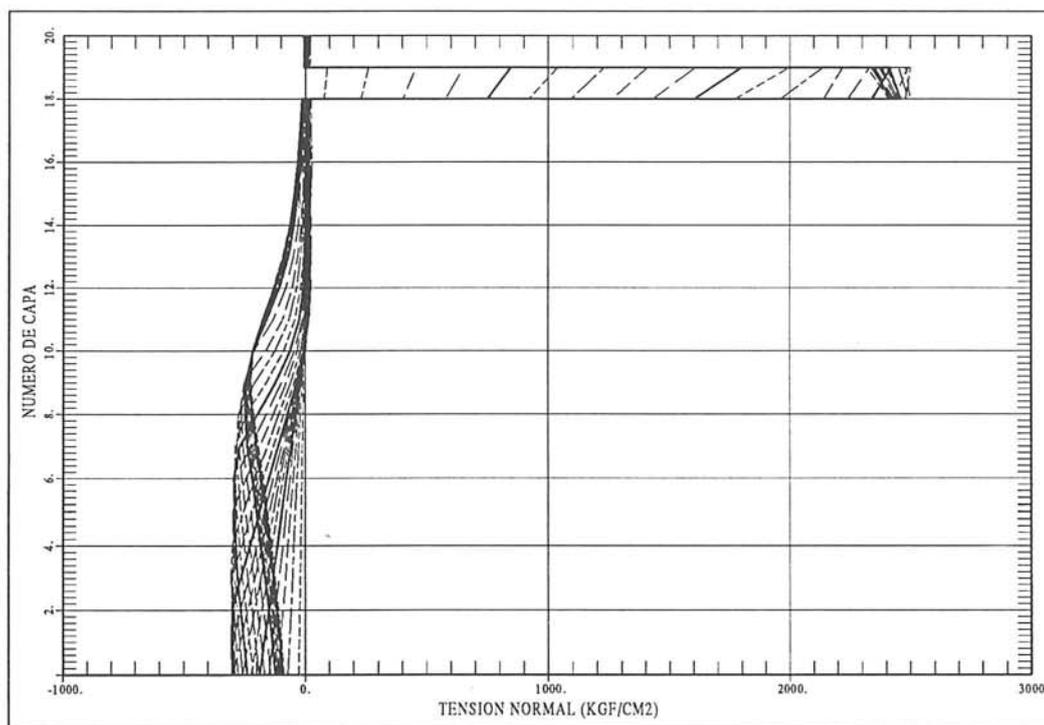


Figura 2.12 Diagrama IV de historia de la tensión normal σ_x .

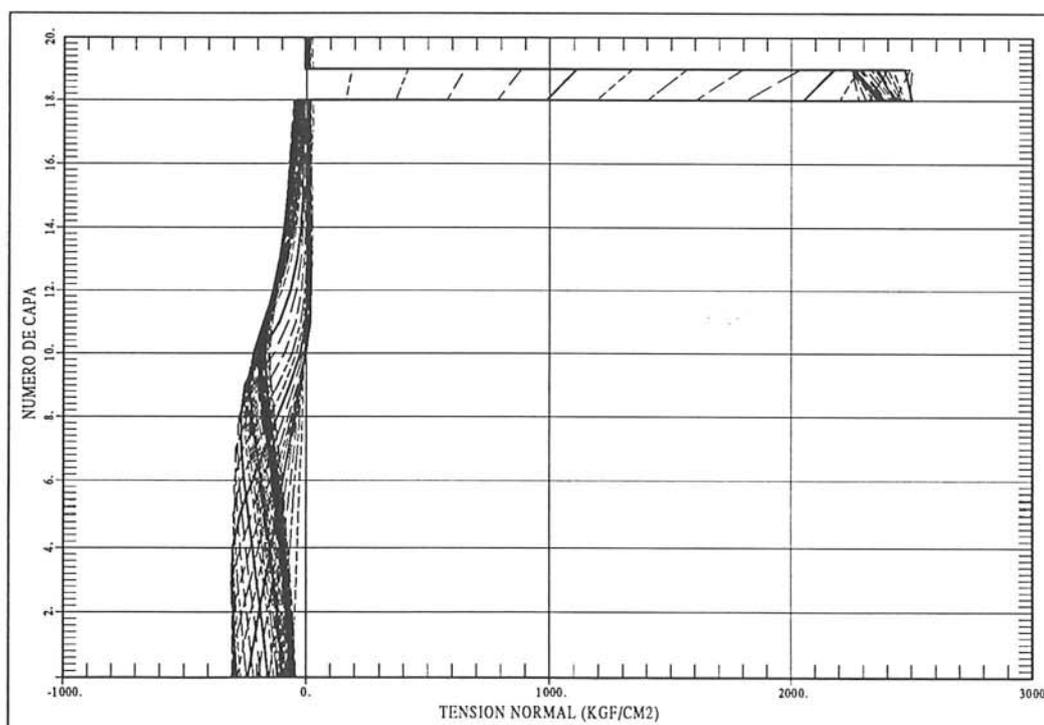


Figura 2.13 Diagrama V (final) de historia de la tensión normal σ_x .

ahora traccionadas, lo que representa el fenómeno esperado de migración del "eje neutro". Puede observarse el desarrollo cada vez más rápido del ablandamiento de las capas que ya han alcanzado el límite elasto-plástico.

La figura 2.11 corresponde al paso de carga 94 (0.95 centímetros de desplazamiento) y confirma las tendencias observadas en el cuadro anterior. El acero empieza la pérdida de tensión, el eje neutro avanza muy rápido hacia el acero, nuevas capas empiezan a comprimirse mientras las capas comprimidas anteriormente siguen perdiendo tensión y el hormigón traccionado prácticamente ha desaparecido.

Las últimas dos figuras de esta serie, 2.12 y 2.13, corresponden al tramo C-D e ilustran las fases finales antes de la destrucción completa de la sección central de la viga. La zona comprimida llega hasta el acero, lo que disminuye drásticamente la capacidad portante de la estructura, provocando la caída violenta observada al final de la curva fuerza-desplazamiento (figura 2.7).

En la figura 2.14 se representa la tensión tangencial correspondiente al estado elástico de la sección, con el proposito de comprobar que el máximo está desplazado con respecto al centro geométrico de la sección, debido a la no uniformidad de los materiales. El máximo de la tensión tangencial se mueve hacia la capa de acero, que tiene un módulo de elasticidad mayor. Este fenómeno es completamente acorde a la teoría desarrollada en el apartado 2.5.

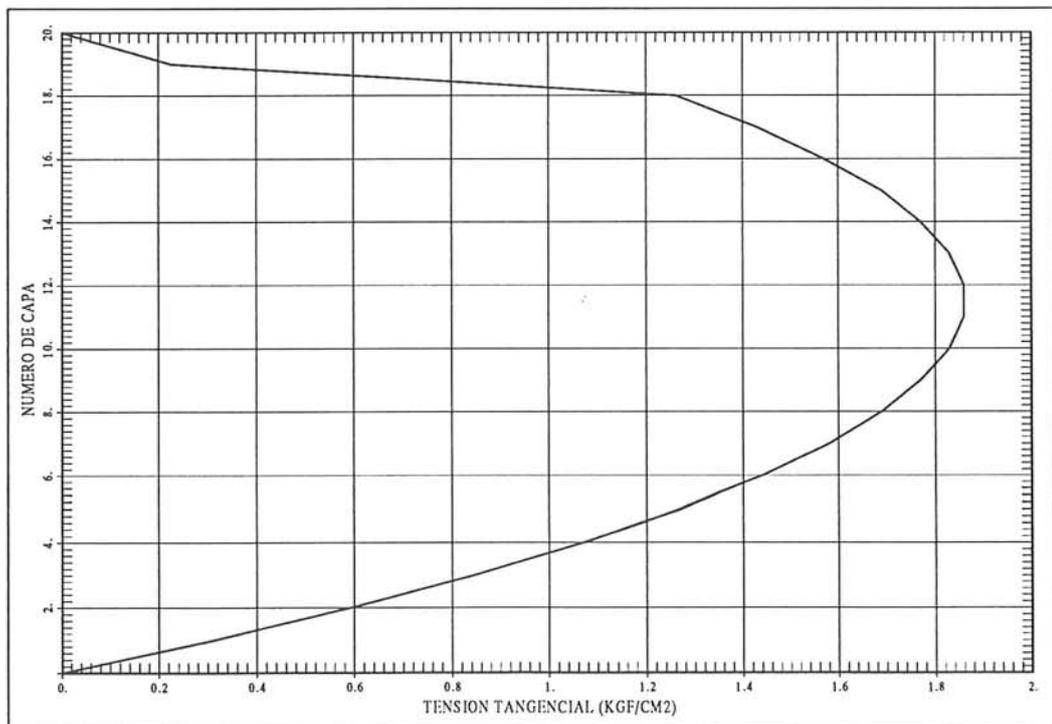


Figura 2.14 Diagrama inicial (elástica) de tensión tangencial τ_{xz} .

En lo siguiente, se estudia la evolución de esta tensión tangencial máxima como el eco de la posición del eje neutro, suponiendo que la propiedad de dicho eje de coincidir con el máximo de dicha tensión se mantiene también en el estado elasto-plástico.

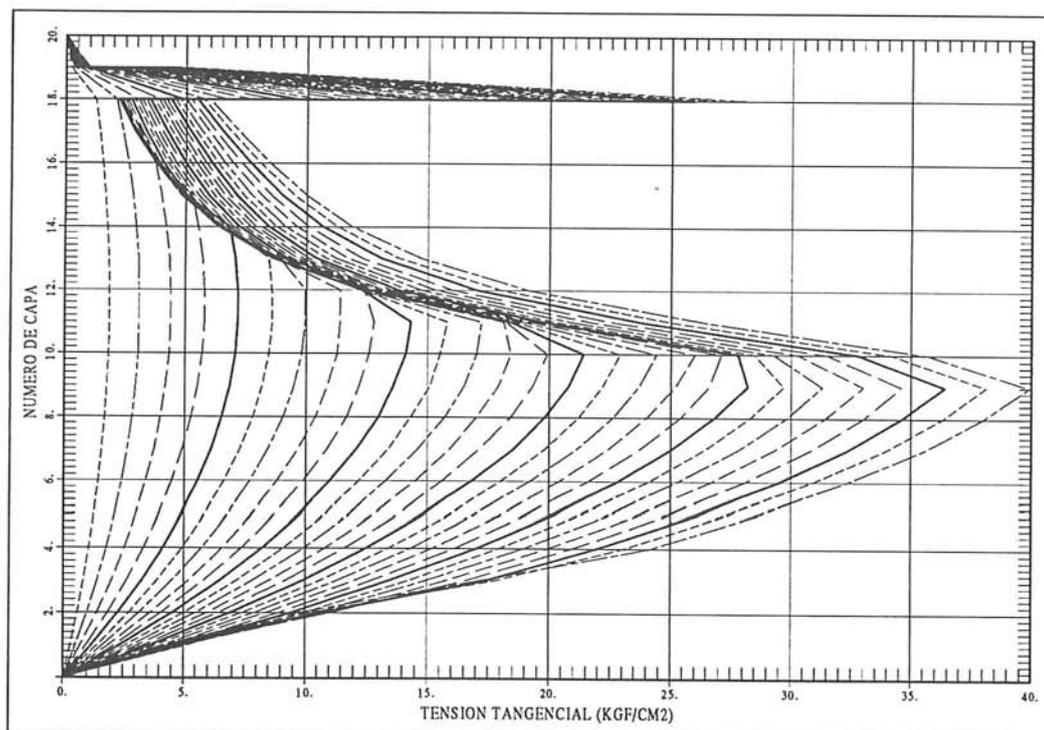


Figura 2.15 Diagramas I de historia de la tensión tangencial τ_{x1} .

Las figuras 2.15 – 2.19 describen la evolución de la tensión tangencial y corresponden a las figuras 2.9 – 2.13, en los mismos pasos de carga. Primero, comparando la figura 2.14 con la figura 2.15, se observa que el máximo de la tensión tangencial se mueve hacia la zona comprimida, lo que puede parecer paradójico, a primera vista. Sin embargo, si se analiza el fenómeno en profundidad, teniendo en cuenta el estado del hormigón traccionado, que se encuentra ya muy dañado, muy fisurado, puede explicarse este fenómeno.

El hormigón traccionado disminuye su contribución a medida que se daña. Para entenderse mejor la situación, puede considerarse, al límite, que dicho hormigón “ha desaparecido”, lo que permite deducir de la ecuación (2.45) que la posición del eje neutro se acerca al lado comprimido de la sección. Con la evolución del proceso de carga, esta tendencia se invierte al empezar a producirse el aplastamiento en la zona comprimida y la transformación de las capas traccionadas en capas comprimidas a lo largo del proceso (véase las figuras 2.16, 2.17 y 2.18). Al final, el máximo de tensión tangencial se encuentra muy cerca de la capa de acero (figura 2.19). Además, se observa

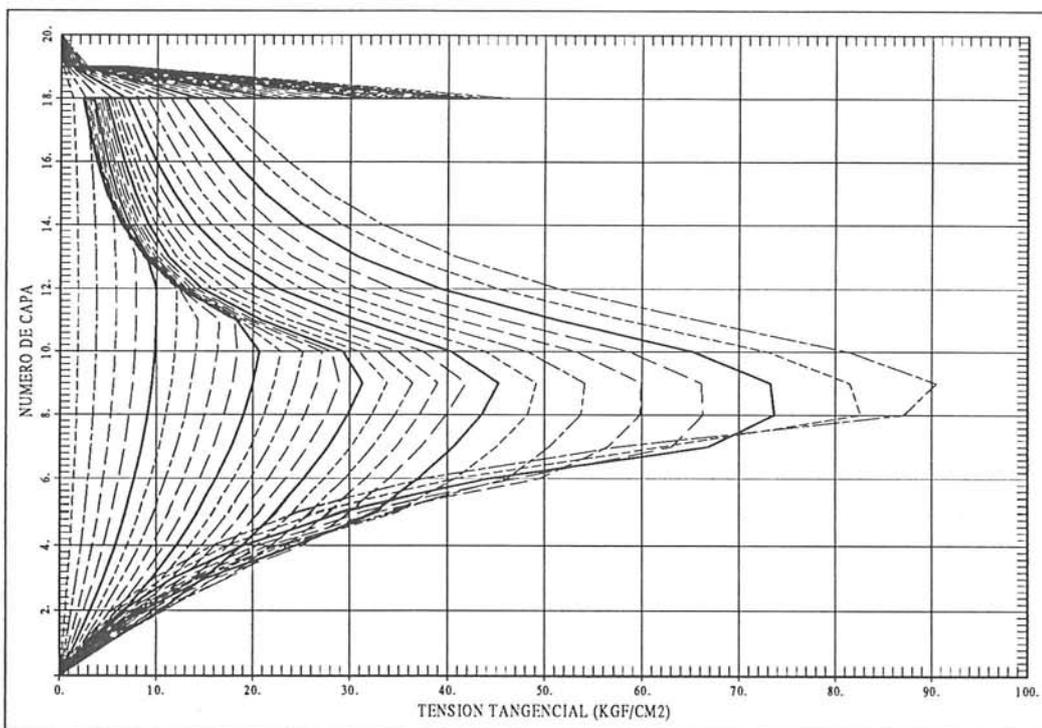


Figura 2.16 Diagramas II de historia de la tensión tangencial τ_{xx} .

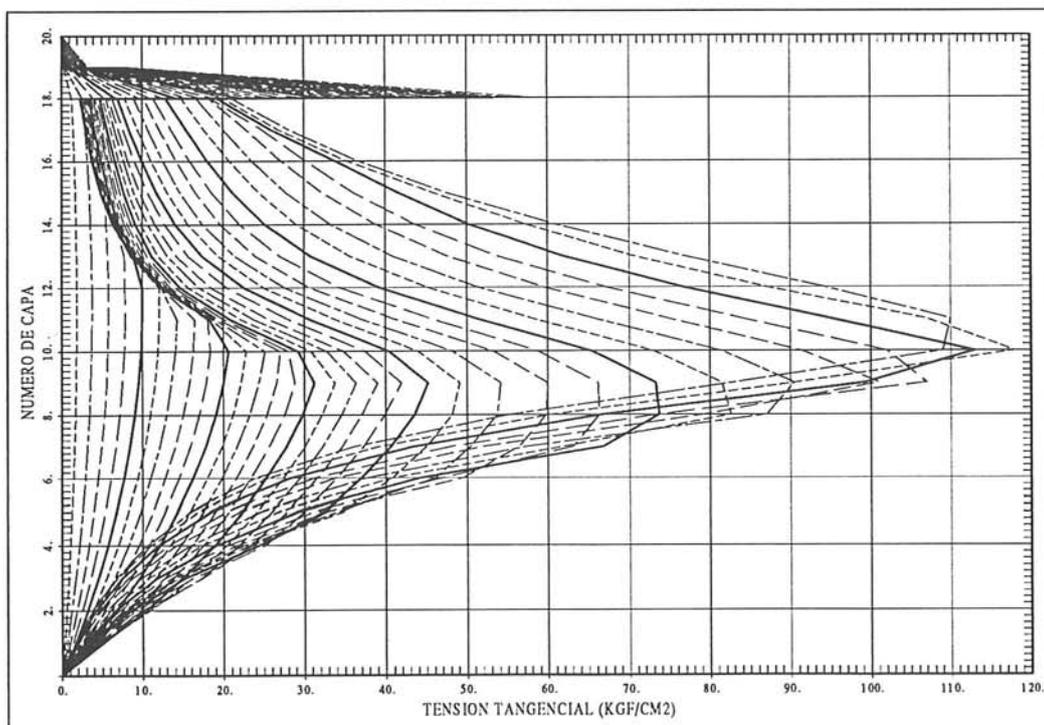


Figura 2.17 Diagramas III de historia de la tensión tangencial τ_{xx} .

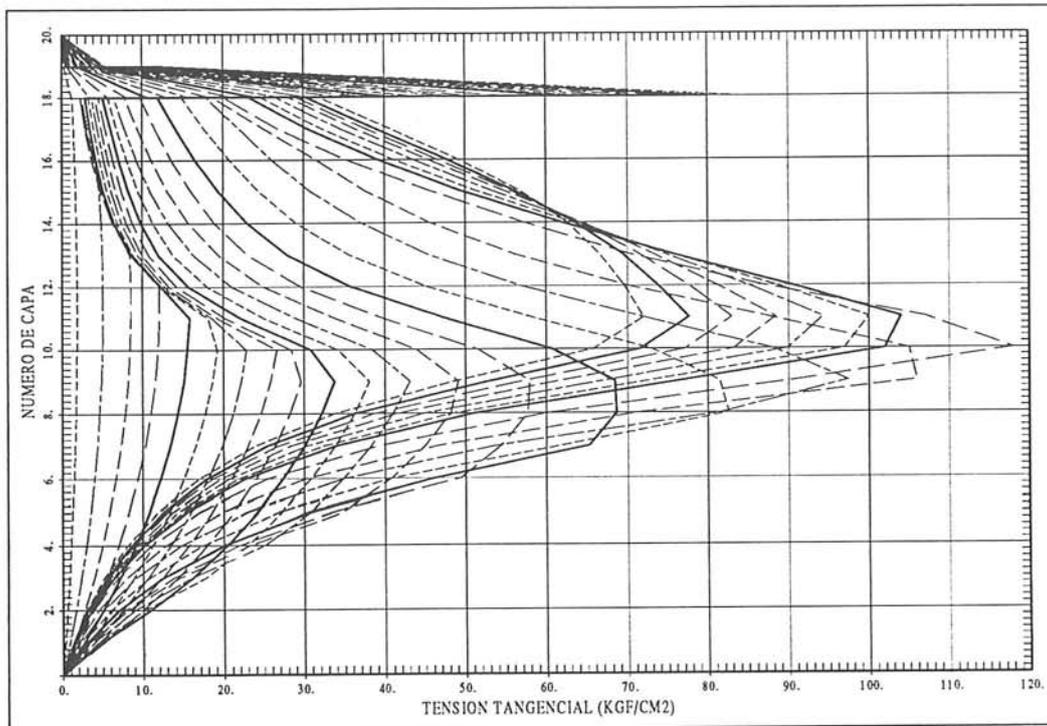


Figura 2.18 Diagramas IV de historia de la tensión tangencial τ_{xz} .

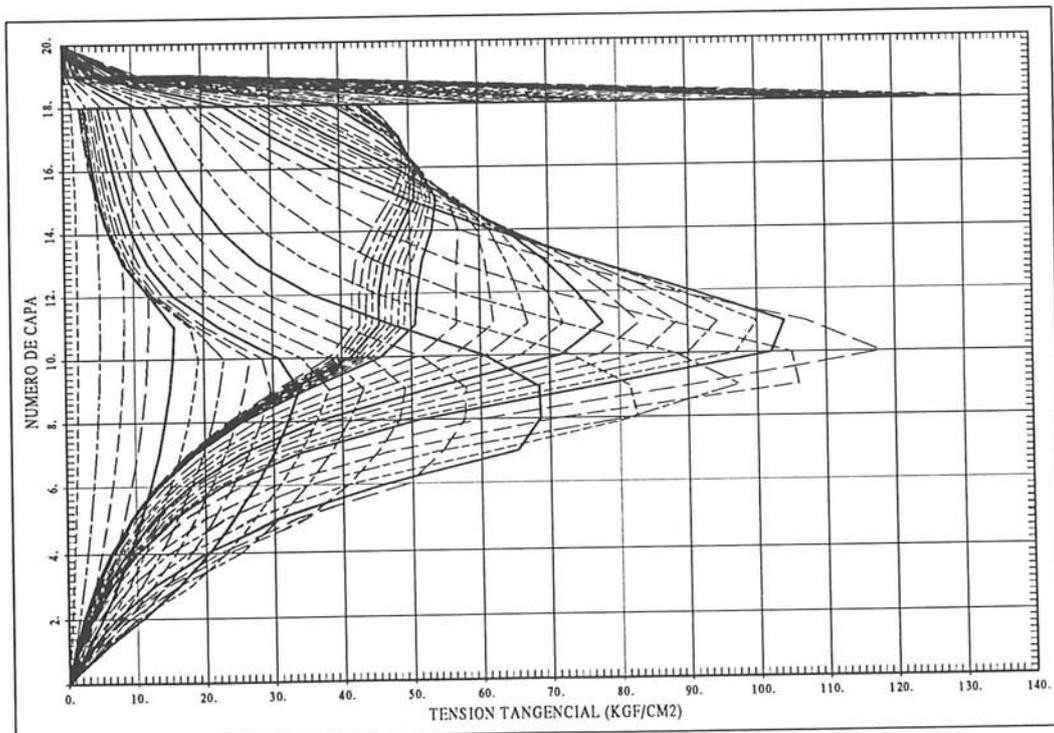


Figura 2.19 Diagramas V (final) de historia de la tensión tangencial τ_{xz} .

como al aplastarse, el hormigón pierde progresivamente rigidez tangencial.

En la figura 2.20 se observa la curva tensión normal – deformación normal en el hormigón que, después de alcanzar la superficie de fluencia, exhibe el ablandamiento exponencial esperado.

La figura siguiente 2.21 muestra la diagrama tensión normal – deformación normal para el punto de la capa 12 que está inicialmente más cercano al eje neutro. Se observa que al moverse dicho eje hacia la zona comprimida, el punto empieza por estar sometido a tracción, para pasar luego a la zona de compresión.

En la figura 2.22 se expone el comportamiento del acero a lo largo del proceso de carga, que es lineal hasta el primer límite elástico (2.100 dan/cm^2), que después pasa a ser polinómico con el pico a 2.500 dan/cm^2 y que luego presenta ablandamiento.

Las figuras 2.23 – 2.27 muestran curvas de evolución $\tau - \gamma$ en diferentes capas. Los cambios de comportamiento de los distintos puntos se explican en base a las diagramas de tensión tangencial mostradas antes (2.14 – 2.19), teniendo en cuenta las modificaciones de régimen (tracción – compresión) de cada punto, el acercamiento o el alejamiento del eje neutro y el material presente en cada punto.

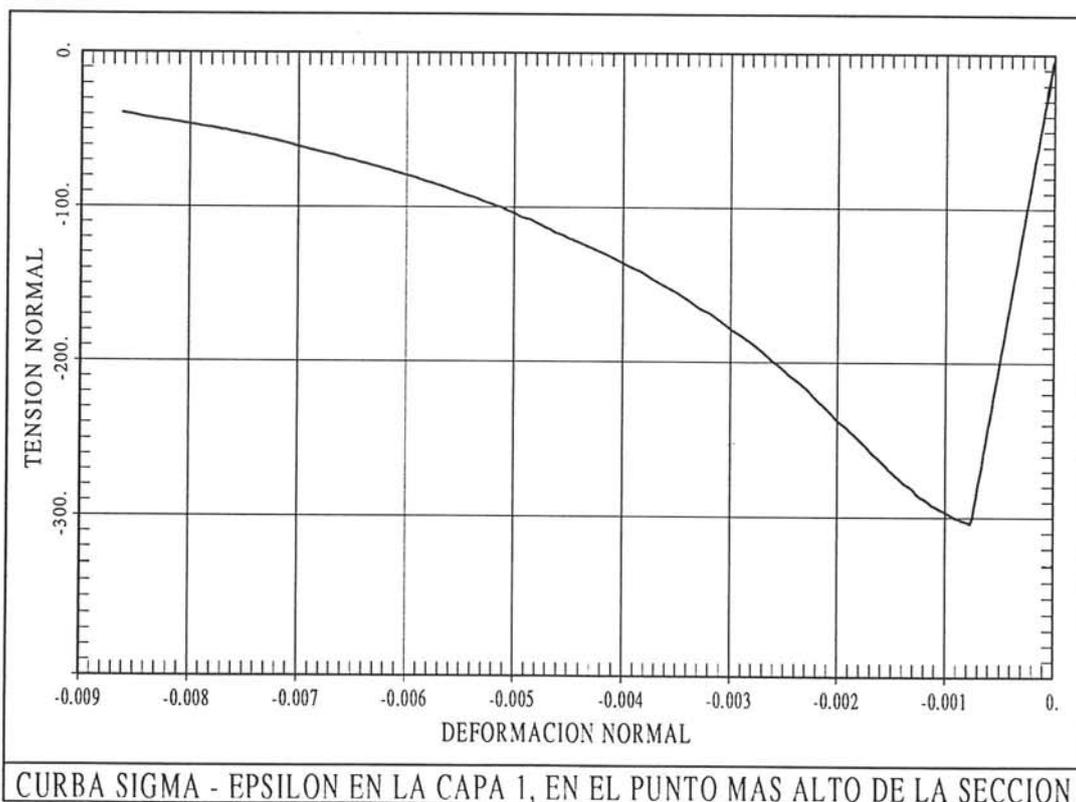


Figura 2.20

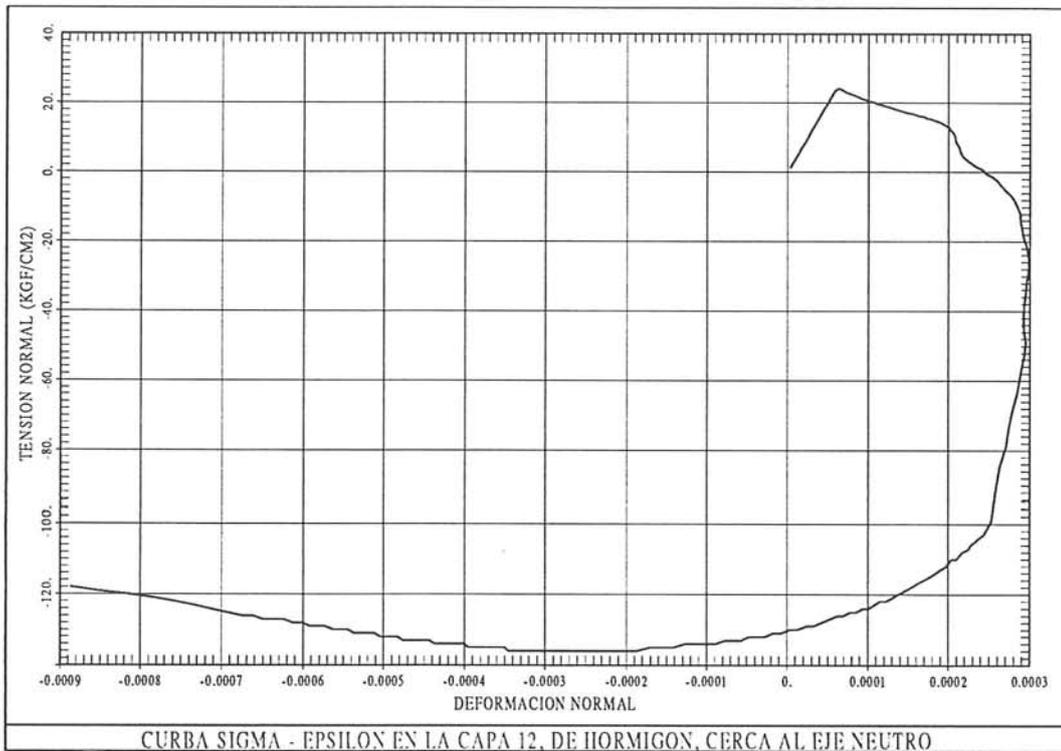


Figura 2.21

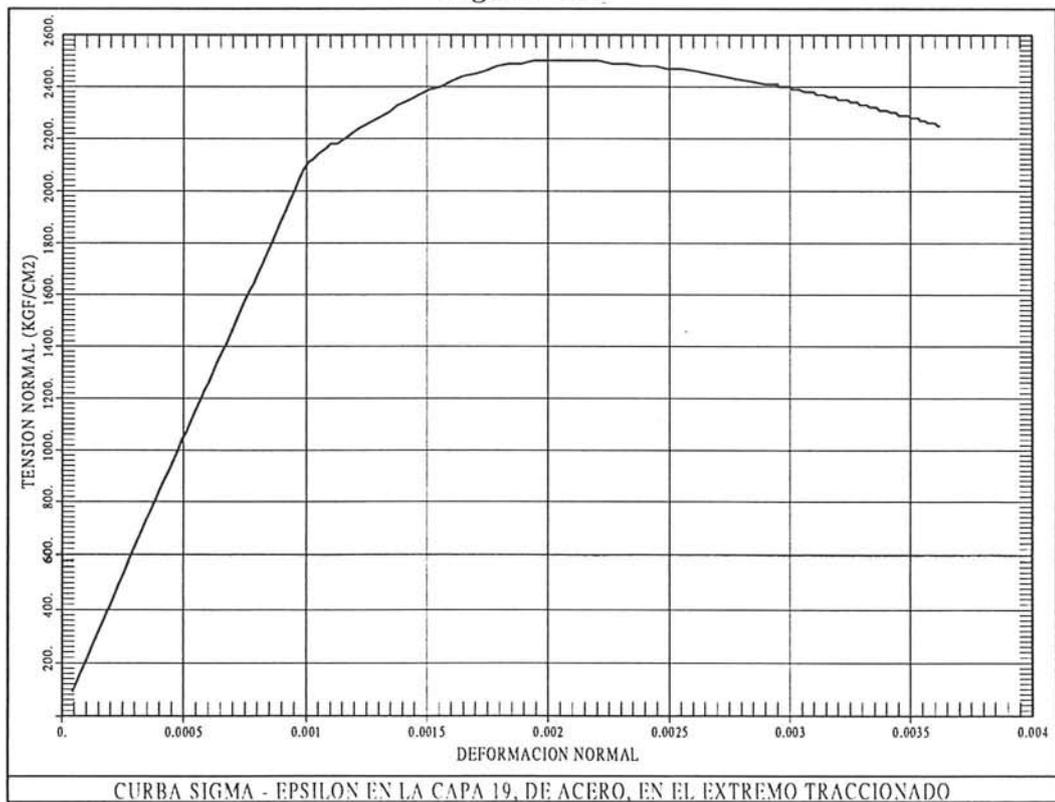


Figura 2.22

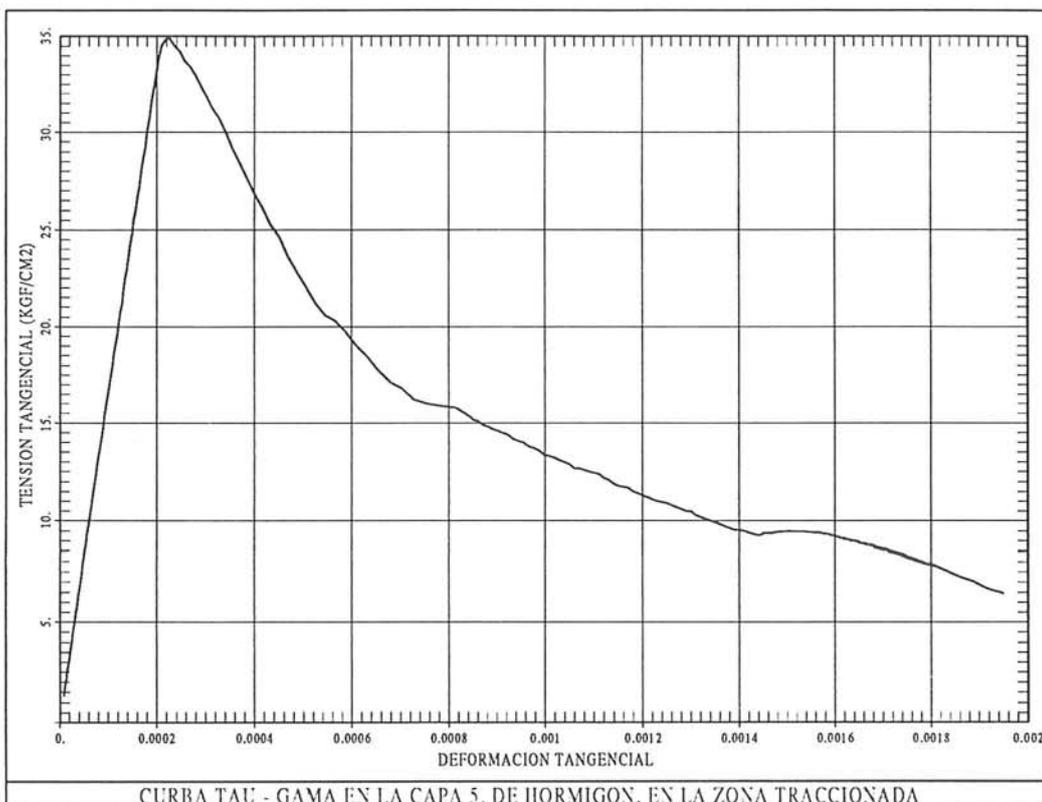


Figura 2.23

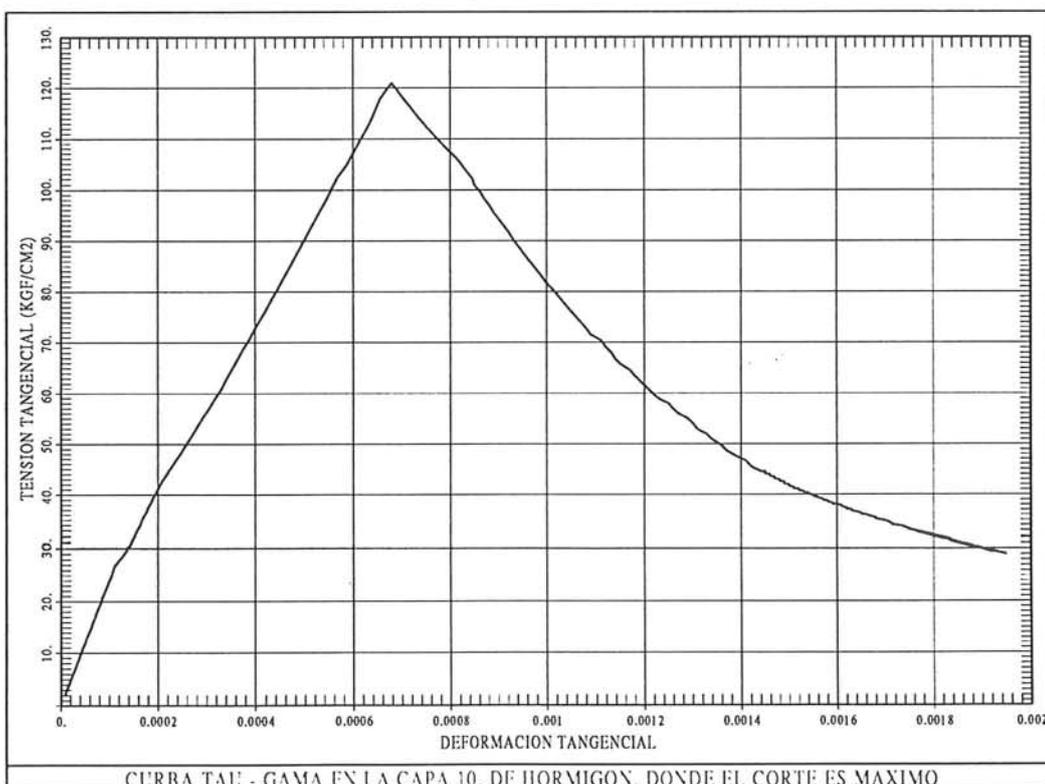


Figura 2.24

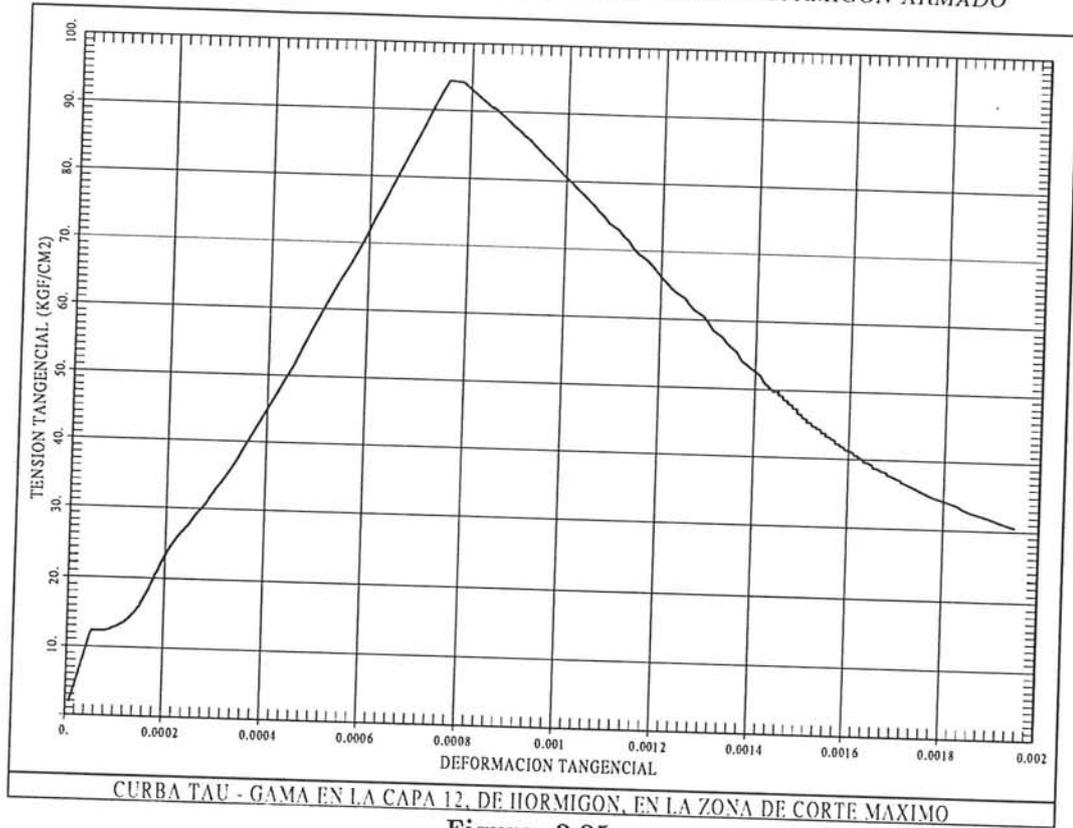


Figura 2.25

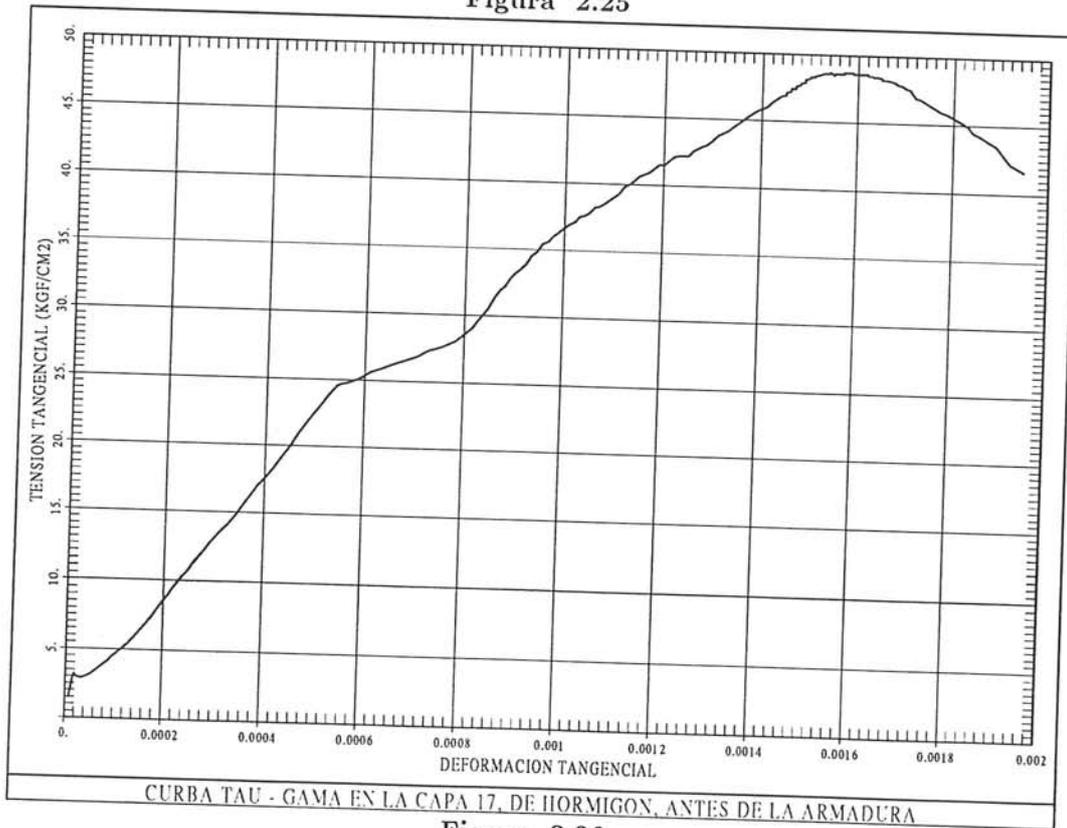


Figura 2.26

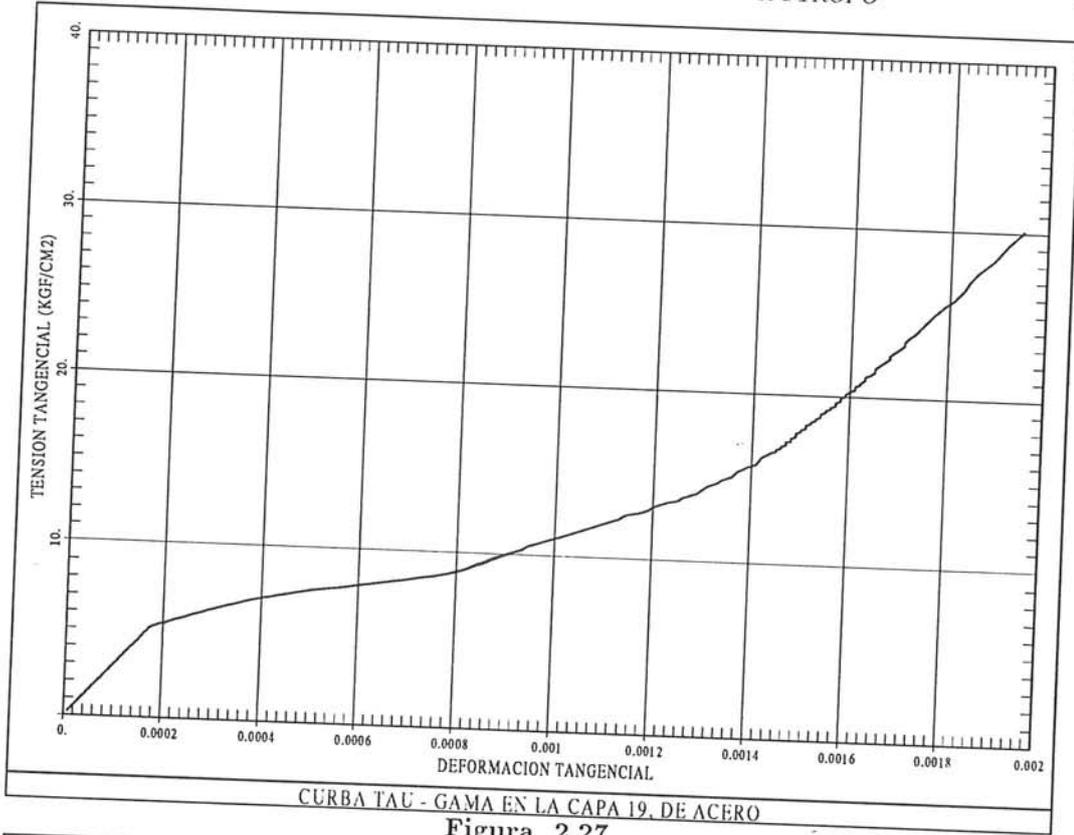


Figura 2.27

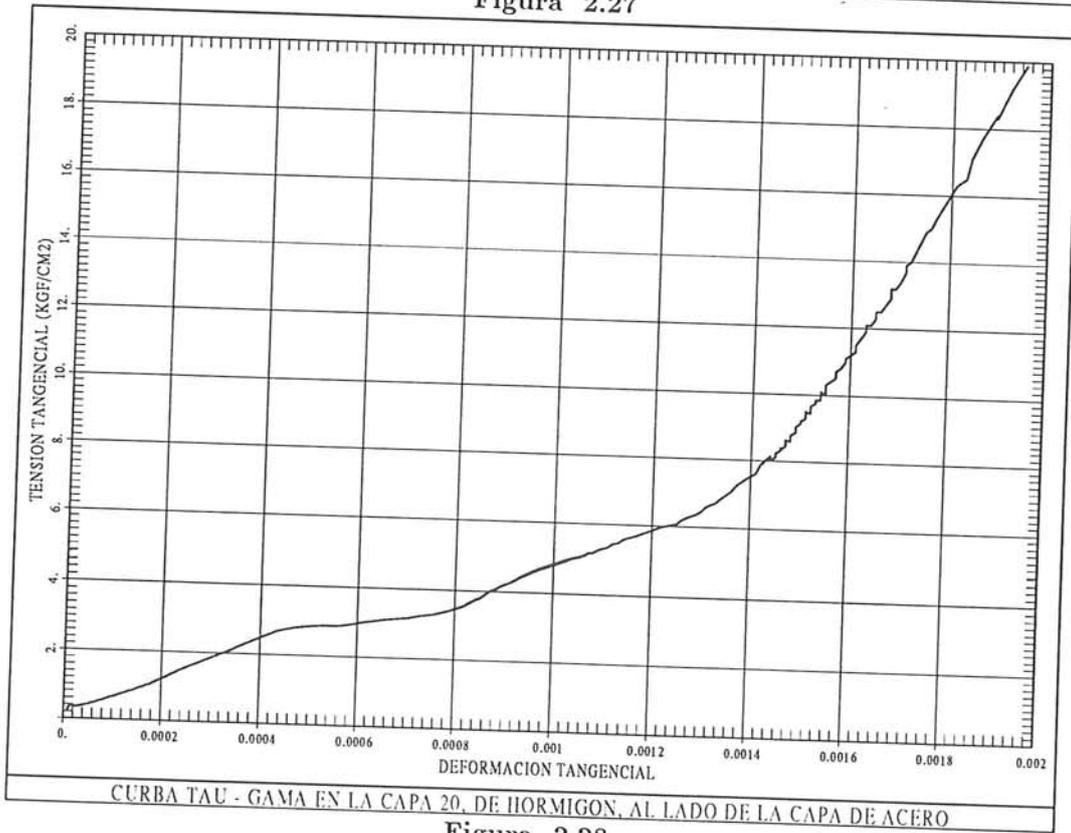


Figura 2.28

REFERENCIAS

1. D.R.J.Owen, E.Hinton, *Finite Elements in Plasticity*, Pineridge Press Limited, Swansea, U.K., 1980.
2. S.Oller, *Un modelo de "daño continuo" para materiales friccionales*, Tesis doctoral, UPC-ETSECCP-Barcelona, 1988.
3. J.Lubliner, J.Oliver, S.Oller, E.Oñate, *A Plastic-Damage Model for Concrete*, International Journal Solids Structure, Vol.25, 1989.

CAPÍTULO 3

MODELO CONSTITUTIVO DE DAÑO ISÓTROPICO

3.1 INTRODUCCIÓN

La solución de estructuras de barras sometidas a acciones sísmicas después del límite de comportamiento elástico ha sido generalmente tratado utilizando:

(a) Teorías basadas en la formación de rótulas plásticas [1]. Estas tienen el inconveniente de admitir que el daño de un punto de una estructura sea gobernado sólo por efectos de flexión, lo que es válido únicamente en algunos casos particulares.

(b) La simulación de estructuras de barras basada sobre el concepto de momento plástico de flexión. Este procedimiento procede de la formulación de leyes constitutivas momento flector – curvatura simplificadas [2,3]. Estas formulaciones tienen su origen en representaciones del comportamiento del material en formas aproximadas basadas principalmente en estudios experimentales.

Hoy en día, se exige a tales formulaciones que sean consistentes termodinámicamente. Entre las que cumplen este último requisito son las llamadas teorías de daño continuo, que están generalmente aceptadas como una alternativa dentro de las leyes constitutivas más consistentes [4,5,6]. Uno de estos modelos puede verse en [7], donde se calcula una columna, discretizada en elementos finitos planos, sometida a acciones sísmicas.

Los modelos de daño tienen una formulación relativamente sencilla y, a la vez, rigurosa desde el punto de vista termodinámico. Ellos describen el comportamiento no lineal mediante una o varias variables internas de daño, que miden la pérdida de rigidez secante del material y son normalizadas con respecto a la unidad, la cual corresponde al daño máximo. En la figura 3.1 puede verse la representación unidimensional del comportamiento de un punto de un material dañado.

El modelo considerado en este capítulo es un modelo constitutivo de daño basado en la mecánica del sólido deformable y tiene una sola variable interna. Por consiguiente, se trata de un modelo de daño isótropo y se basa en la teoría de Kachanov [8]. En este modelo se han incluido experiencias posteriores

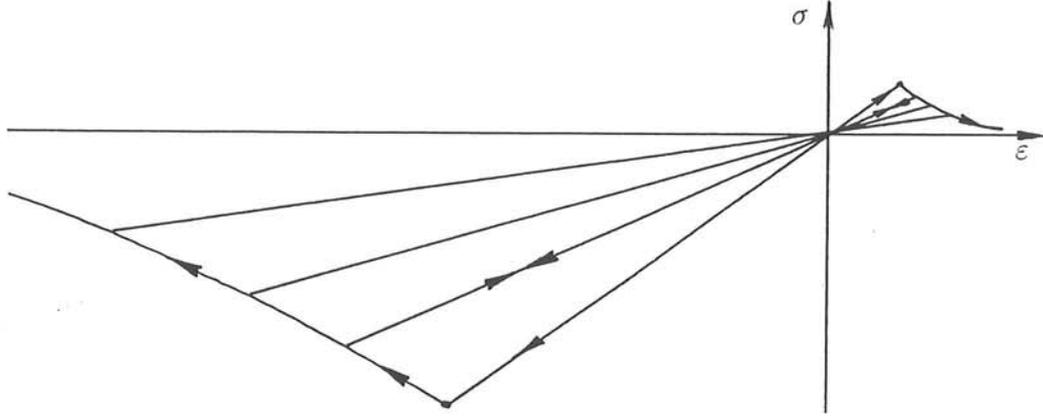


Figura 3.1 Comportamiento del daño local.

como las de Simó y Ju [6], Lubliner et al. [9] y Oliver et al. [5]. Dicha formulación es un compromiso entre la complejidad necesaria para modelizar el comportamiento del hormigón y la versatilidad que se precisa para calcular problemas dinámicos. Esto asegura buenos resultados y soluciones de bajo coste en el estudio de problemas no lineales.

3.2 CARACTERÍSTICAS DEL MODELO

3.2.1 Energía libre

El modelo se formula, para problemas térmicamente estables, en la configuración material lagrangeana. Para este caso particular se considera la siguiente expresión matemática para la energía libre Ψ , en la cual su parte elástica no degradada se escribe como una función escalar cuadrática de argumentos tensoriales:

$$\Psi(\boldsymbol{\varepsilon}; d) = (1 - d)\Psi_0(\boldsymbol{\varepsilon}) = (1 - d) \left(\frac{1}{2m_0} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}^0 \right) = (1 - d) \left(\frac{1}{2m_0} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C}^0 \boldsymbol{\varepsilon} \right) \quad (3.1)$$

El tensor de deformaciones $\boldsymbol{\varepsilon}$ es la variable libre del problema, d ($0 \leq d \leq 1$) es la variable interna de daño, m_0 es la densidad en la configuración material y \mathbf{C}^0 es el tensor de rigidez del material en el estado inicial no dañado.

3.2.2 Inecuación de Clausius-Planck. Disipación mecánica

Para problemas térmicamente estables es válida la inecuación de Clausius-Planck para representar la disipación Ξ_m , que establece que ésta es siempre creciente, es decir, la potencia disipativa $\dot{\Xi}_m$ de un punto es siempre positiva y tiene la siguiente forma local lagrangeana:

$$\dot{\Xi}_m = \frac{1}{m_0} \boldsymbol{\sigma}^T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\Psi} \geq 0 \quad (3.2)$$

o bien†

$$\dot{\Xi}_m = \frac{1}{m_o} \boldsymbol{\sigma}^T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial \Psi}{\partial d} \dot{d} \right) \geq 0 \quad (3.3)$$

y, finalmente,

$$\dot{\Xi}_m = \left(\frac{1}{m_o} \boldsymbol{\sigma}^T - \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{\partial \Psi}{\partial d} \dot{d} \geq 0 \quad (3.4)$$

Esta última expresión de la potencia disipativa permite hacer las siguientes consideraciones:

a) La inecuación (3.4) debe cumplirse para cualquier variación temporal arbitraria de la variable libre $\boldsymbol{\varepsilon}$, con lo cual el multiplicador de $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ tiene que ser cero (método de Coleman). Esta condición proporciona la ley constitutiva hiperelástica para el problema de daño estudiado, que es

$$\frac{1}{m_o} \boldsymbol{\sigma}^T - \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\sigma} = m_o \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right\}^T = (1-d) \mathbf{C}^o \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C}^s \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.5)$$

b) Considerando la última ecuación, la potencia disipativa queda

$$\dot{\Xi}_m = -\frac{\partial \Psi}{\partial d} \dot{d} = \Psi_o \dot{d} \geq 0 \quad (3.6)$$

3.2.3 Criterio umbral de degradación o daño

El umbral de daño se define como una función de la energía libre del material no dañado que, a su vez, está escrita en función de las tensiones principales no dañadas $\sigma_i^{p,o}$

$$F = K(\boldsymbol{\sigma}^{p,o}) \sqrt{2m_o \Psi_o} - 1 = \frac{K(\boldsymbol{\sigma}^{p,o})}{\sqrt{E^o}} \sqrt{\sum_{i=1}^3 (\sigma_i^{p,o})^2} - 1 \leq 0 \quad (3.7)$$

cuyos términos tienen el siguiente significado:

† Las derivadas vectoriales simbólicas obedecen a la siguiente regla: la derivada de un escalar con respecto a un vector columna es un vector línea y, viceversa, la derivada de un escalar con respecto a un vector línea es un vector columna. Extrapolando esta regla a la derivada de un vector columna con respecto a otro vector columna, se obtiene que el resultado es una matriz con tantas líneas cuantos componentes tiene el vector “numerador” y tantas columnas cuantos componentes hay en el vector “denominador”.

$$K(\sigma^{p,o}) = \frac{r}{\sqrt{2m_o(\Psi_t^o)_L}} + \frac{1-r}{\sqrt{2m_o(\Psi_c^o)_L}} \quad ; \quad r = \frac{\sum_{i=1}^3 \langle \sigma_i^{p,o} \rangle}{\sum_{i=1}^3 |\sigma_i^{p,o}|}$$

$$2m_o(\Psi_{t,c}^o)_L = \sum_{i=1}^3 \langle \pm \sigma_i^{p,o} \rangle \varepsilon_i \quad ; \quad (\Psi_o)_L = (\Psi_t^o)_L + (\Psi_c^o)_L$$

En estas ecuaciones $(\Psi_{t,c}^o)_L$ representa la parte de la energía libre desarrollada cuando se alcanza el límite de resistencia a tracción/compresión del material y $\langle \pm x \rangle = \frac{1}{2}(|x| \pm x)$ es la función de McAuley. Teniendo en cuenta que las resistencias a tracción/compresión son $f_t = (2m_o \Psi_t^o E^o)_L^{1/2}$ y $f_c = (2m_o \Psi_c^o E^o)_L^{1/2}$, la función umbral de daño puede escribirse, según la figura 3.2, como

$$F = \bar{\sigma} - f_c = [1 + r(n-1)] \sqrt{\sum_{i=1}^3 (\sigma_i^{p,o})^2} - f_c \leq 0 \quad (3.8)$$

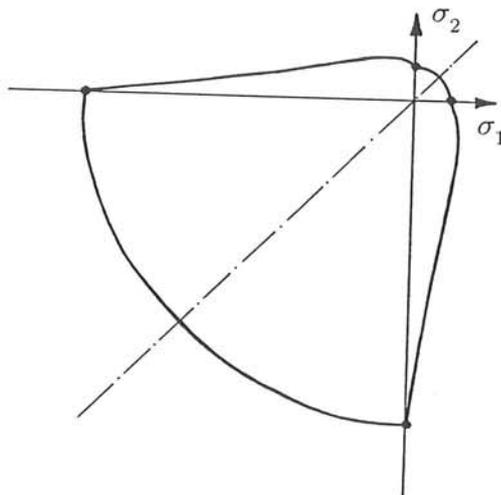


Figura 3.2 El umbral de daño en el plano principal $\sigma_1 - \sigma_2$.

con $n = f_c/f_t$. Esta función del umbral de daño, expresada en el espacio de tensiones principales no dañadas, permite una gran diversidad de soluciones distintas. La ventaja del criterio de daño (3.8) consiste en la posibilidad de emplear cualquier función F siempre cuando ésta sea homogénea y de primer grado en tensiones, como, por ejemplo, la de Mohr-Coulomb, la de Drucker-Prager, la de Lubliner [9], etc. La forma dada en la ecuación (3.8) cumple con los requisitos antes mencionados; además, es sencilla y satisfactoria en

resultados dentro del rango de trabajo que utiliza el modelo y, por esta razón, es la expresión escalar que define $\bar{\sigma}$.

Una expresión totalmente equivalente a (3.8), propuesta por Simó [6] a fin de simplificar la deducción matemática de la variable de daño del modelo, es la siguiente:

$$\bar{F} = G(\bar{\sigma}) - G(f_c) \leq 0 \quad (3.9)$$

donde $G(\chi)$ es una función escalar, invertible, positiva y de derivada positiva, a determinar. Su forma se escogerá de una manera conveniente para el desarrollo ulterior del modelo de daño.

3.2.4 Regla de evolución de la variable interna de daño

Se utiliza la siguiente forma matemática para definir la regla de evolución de la variable interna de daño, análoga a la regla de flujo plástico

$$\dot{d} = \dot{\eta} \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{\sigma}} = \dot{\eta} \frac{dG(\bar{\sigma})}{d\bar{\sigma}} \quad (3.10)$$

donde $\dot{\eta}$ es un escalar no negativo llamado parámetro de consistencia de daño, análogo al parámetro de consistencia plástica $\dot{\lambda}$ de la plasticidad.

3.2.5 Condición de consistencia de daño

El valor del parámetro de consistencia de daño se obtiene a partir de unas condiciones análogas al segundo postulado de Drucker en plasticidad que, en los modelos de daño, llevan el nombre de condiciones de Ilyushin. Estas condiciones requieren que para que haya desarrollo de procesos de daño, el punto debe encontrarse sobre la superficie umbral de daño ($\bar{F} = 0$) y permanecer sobre ella durante dichos procesos ($\dot{\bar{F}} = 0$, lo que significa que \bar{F} mantiene en el tiempo su valor nulo). Estas condiciones conducen a la siguiente serie de deducciones:

$$\bar{F} = 0 \Rightarrow G(\bar{\sigma}) - G(f_c) = 0 \Rightarrow G(\bar{\sigma}) = G(f_c) \quad (3.11)$$

Debido a las propiedades de invertibilidad y de derivabilidad de la función $G(\chi)$ se obtiene

$$G(\bar{\sigma}) = G(f_c) \Rightarrow \bar{\sigma} = f_c \Rightarrow \frac{dG(\bar{\sigma})}{d\bar{\sigma}} = \frac{dG(f_c)}{df_c} \quad (3.12)$$

Por otra parte, de la condición de permanencia sobre la superficie umbral de daño se deduce que

$$\dot{\bar{F}} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{\sigma}} \dot{\bar{\sigma}} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial f_c} \dot{f}_c = \frac{dG(\bar{\sigma})}{d\bar{\sigma}} \dot{\bar{\sigma}} - \frac{dG(f_c)}{df_c} \dot{f}_c = 0 \quad (3.13)$$

de donde resulta

$$\frac{dG(\bar{\sigma})}{d\bar{\sigma}} \dot{\bar{\sigma}} = \frac{dG(f_c)}{df_c} \dot{f}_c \Rightarrow \dot{\bar{\sigma}} = \dot{f}_c \quad (3.14)$$

La primera parte de la relación anterior puede ponerse en la siguiente forma alternativa:

$$\frac{dG(\bar{\sigma})}{d\bar{\sigma}} \dot{\bar{\sigma}} = \frac{dG(f_c)}{df_c} \dot{f}_c = \frac{dG(f_c)}{df_c} \frac{df_c}{d(d)} \dot{d} = \frac{dG(f_c)}{d(d)} \dot{\eta} \frac{d\bar{G}(\bar{\sigma})}{d\bar{\sigma}} \quad (3.15)$$

$$\dot{\bar{\sigma}} = \frac{dG(f_c)}{d(d)} \dot{\eta} \quad (3.16)$$

Adoptándose la función $G(f_c)$ como la función que describe la evolución del daño ($d = G(f_c)$), queda determinado el parámetro de consistencia de daño $\dot{\eta}$ como

$$\dot{\eta} = \dot{\bar{\sigma}} = \dot{f}_c = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma^o} \dot{\sigma}^o = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma^o} \mathbf{C}^o \dot{\epsilon} \quad (3.17)$$

Substituyendo esta última ecuación en (3.10) y luego en (3.6), se obtienen las expresiones que formulan la evolución temporal de las variables de daño y de disipación

$$\dot{d} = \frac{dG(\bar{\sigma})}{d\bar{\sigma}} \dot{\bar{\sigma}} = \dot{G}(\bar{\sigma}) \Rightarrow d = \int_0^t \dot{d} dt \equiv \int_0^t \dot{G}(\bar{\sigma}) dt = G(\bar{\sigma}) \quad (3.18)$$

$$\dot{\Xi}_m = \Psi_o \dot{G}(\bar{\sigma}) = \Psi_o \frac{dG(\bar{\sigma})}{d\bar{\sigma}} \dot{\bar{\sigma}} = \Psi_o \frac{dG(\bar{\sigma})}{d\bar{\sigma}} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma^o} \mathbf{C}^o \dot{\epsilon} \quad (3.19)$$

3.2.6 Condición de carga y descarga

La condición de carga/descarga se deriva de las relaciones de Kuhn-Tucker formuladas para problemas con restricciones unilaterales:

- (a) $\dot{\eta} \geq 0$;
- (b) $\bar{F} \leq 0$;
- (c) $\dot{\eta} \bar{F} = 0$.

A partir de éstas, si $\bar{F} < 0$ la tercera condición hace que $\dot{\eta} = 0$ o, lo que es lo mismo, hace que no puedan desarrollarse procesos de daño y, si $\dot{\eta} >$

0, la misma condición requiere que $\bar{F} = 0$, es decir, que se ha alcanzado la superficie umbral de daño y que se están desarrollando fenómenos de degradación.

3.2.7 Particularización de la función $G(\chi)$

Entre las diversas alternativas para definir la función $G(\chi)$, se elige la siguiente:

$$G(\chi) = 1 - \frac{\bar{G}(\chi)}{\chi} \quad (3.20)$$

donde $\bar{G}(\chi)$ describe una función similar a la presentada en la figura 3.3, de manera que para $\chi = \chi^*$ la tensión de compresión umbral inicial es \bar{G}^* y para $\chi \rightarrow \infty$ la resistencia final $\bar{G} \rightarrow 0$. De este modo, recorriendo todo el camino, el punto habrá disipado una energía equivalente a su energía de fractura específica. En este estudio se utiliza, tanto a tracción como a compresión, una función $\bar{G}(\chi)$ exponencial propuesta por Oliver [5]

$$\bar{G}(\chi) = \chi^* e^{A\left(1-\frac{\chi}{\chi^*}\right)} ; \quad G(\chi) = 1 - \frac{\chi^*}{\chi} e^{A\left(1-\frac{\chi}{\chi^*}\right)} \quad (3.21)$$

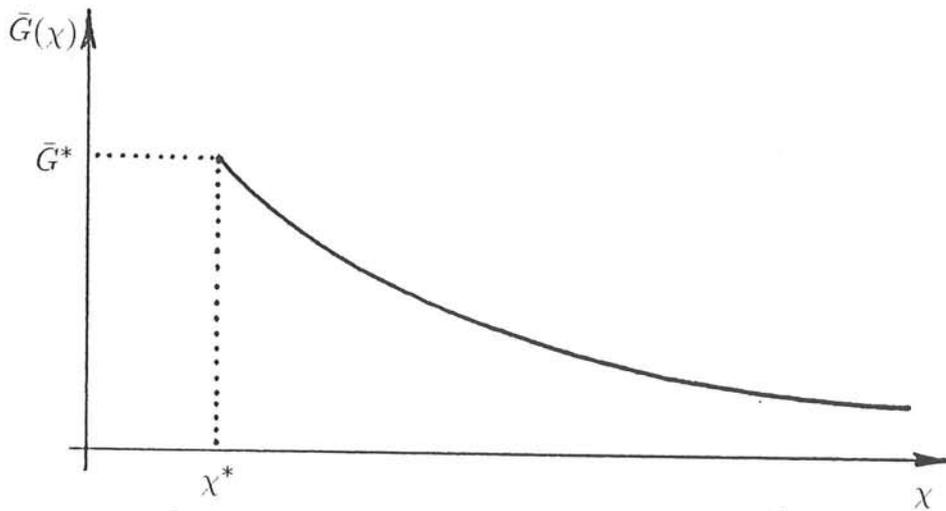


Figura 3.3 Representación de la función $G(\chi)$ elegida.

3.2.8 Particularización del parámetro A

Para un proceso de tracción uniaxial, bajo carga monótona creciente, se tiene que el cambio temporal de la disipación viene dado por la ecuación (3.19), con $\bar{\sigma} = n\sigma_t$, $\Psi_o = \frac{1}{2m_o} \varepsilon_t E^o \varepsilon_t = \frac{(\sigma_t)^2}{2m_o E^o} = \frac{\bar{\sigma}^2}{2m_o n^2 E^o}$. Integrando (3.19) en el tiempo, a través de la tensión equivalente no dañada $\bar{\sigma}$, que

depende del tiempo, se calcula que la disipación total al final del proceso de tracción uniaxial es

$$\Xi_t^{max} = \int_{\bar{\sigma}^*}^{\infty} \frac{\bar{\sigma}^2}{2m_o n^2 E^o} \frac{dG(\bar{\sigma})}{d\bar{\sigma}} d\bar{\sigma} = \int_{\bar{\sigma}^*}^{\infty} \frac{\bar{\sigma}^2}{2m_o n^2 E^o} dG(\bar{\sigma}) \quad (3.22)$$

$$\Xi_t^{max} = \left[\frac{\bar{\sigma}^2}{2m_o n^2 E^o} G(\bar{\sigma}) \right]_{\bar{\sigma}^*}^{\infty} - \int_{\bar{\sigma}^*}^{\infty} G(\bar{\sigma}) \frac{\bar{\sigma}}{m_o n^2 E^o} d\bar{\sigma} \quad (3.23)$$

$$\Xi_t^{max} = \frac{(\bar{\sigma}^*)^2}{m_o n^2 E^o} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{A} \right] \Rightarrow A = \frac{1}{\frac{\Xi_t^{max}}{m_o n^2 E^o} - \frac{1}{2}} \geq 0 \quad (3.24)$$

donde $\bar{\sigma}^*$ es la tensión umbral de daño inicial. Haciendo las mismas hipótesis para un proceso de compresión uniaxial y postulando que el parámetro A debe ser el mismo en los dos casos, se deduce que

$$A = \frac{1}{\frac{\Xi_c^{max}}{m_o E^o} - \frac{1}{2}} \geq 0 \Rightarrow \Xi_c^{max} = n^2 \Xi_t^{max} \quad (3.25)$$

El valor de la disipación máxima a tracción Ξ_t^{max} es un dato del problema y es igual a la densidad de energía de fractura g_f , parámetro derivado de la mecánica de fractura como $g_f = G_f / \ell_c$, que es la energía de fractura G_f normalizada a la dimensión característica ℓ_c del dominio finito fracturado [9]. Si además se impone la condición de que la disipación total no pueda ser menor que la energía libre que se tenía acumulada en el material en el momento en el cual el punto había alcanzado por primera vez el umbral de daño, se obtiene que

$$\Xi_t^{max} = \Xi_t^{min} + \Delta \Xi_t^{max} \quad (3.26)$$

donde $\Delta \Xi_t^{max} \geq 0$ y

$$\Xi_t^{min} = \bar{\Psi}_o^* = \frac{(\bar{\sigma}^*)^2}{2m_o n^2 E^o} \quad (3.27)$$

Si se substituye la relación (3.26) en la ecuación (3.24), que define el parámetro A , se obtiene

$$A = \frac{(\bar{\sigma}^*)^2}{\Delta \Xi_t^{max} m_o n^2 E^o} = \frac{2 \Xi_t^{min}}{\Delta \Xi_t^{max}} \quad (3.28)$$

expresión que pone de relieve el carácter no negativo de dicho parámetro.

3.2.9 Aspectos energéticos del fenómeno de degradación

Considérese un proceso de tracción uniaxial, tal como se muestra en la figura 3.4. Para un punto que haya superado el umbral de degradación y tenga la deformación ε , la tensión normal σ es menor que la tensión σ^o correspondiente al caso en el cual no ocurriera degradación alguna. La definición de las energías potenciales relacionadas a las dos situaciones antes descritas son

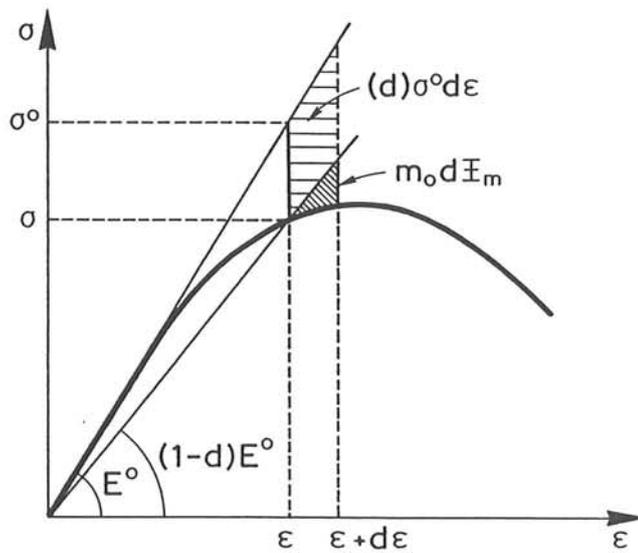


Figura 3.4 Desacoplamiento de la pérdida de energía δW_p .

$$W_p^o = \frac{1}{2}\sigma^o\varepsilon \quad ; \quad W_p = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon \quad (3.29)$$

donde $\sigma = (1-d)\sigma^o$ tal como ya se ha visto en la relación (3.5). Diferenciando las expresiones de las dos energías potenciales, se obtienen sus variaciones infinitesimales como

$$dW_p^o = \frac{1}{2}(d\sigma^o\varepsilon + \sigma^o d\varepsilon) = \frac{1}{2}(E^o d\varepsilon \varepsilon + \sigma^o d\varepsilon) = \sigma^o d\varepsilon \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} dW_p &= \frac{1}{2}(\sigma d\varepsilon + d\sigma \varepsilon) = \frac{1}{2}[(1-d)\sigma^o d\varepsilon + (1-d)d\sigma^o\varepsilon - \sigma^o\varepsilon d(d)] \\ &= (1-d)\sigma^o d\varepsilon - \frac{1}{2}\sigma^o\varepsilon d(d) \end{aligned} \quad (3.31)$$

Sin embargo, la ecuación (3.6), que define la variación temporal de la disipación, puede escribirse en la forma

$$d\Xi_m = \Psi_o d(d) = \frac{1}{2m_o} \sigma^o \varepsilon d(d) \quad (3.32)$$

de donde

$$dW_p = (1 - d) \sigma^o d\varepsilon - m_o d\Xi_m \quad (3.33)$$

En conclusión, debido a los fenómenos de degradación, se tiene una pérdida de energía potencial δW_p , cuya valor es

$$\delta W_p = dW_p^o - dW_p = (d) \sigma^o d\varepsilon + m_o d\Xi_m \quad (3.34)$$

Esta última relación está representada gráficamente en la figura 3.4, donde pueden verse también, de modo separado, los dos términos energéticos. El primero corresponde a una situación de daño constante, mientras el segundo mide la disipación que se desarrolla durante este mismo incremento de deformación $d\varepsilon$, como efecto del aumento del daño.

La energía disipada acumulada hasta un instante de tiempo, caracterizado por un daño d y una tensión equivalente $\bar{\sigma}$, se obtiene siguiendo un procedimiento análogo al empleado para obtener el valor del parámetro A (véanse las relaciones 3.22-3.24) en la forma

$$\Xi_t = \int_{\bar{\sigma}^*}^{\bar{\sigma}} \frac{\bar{\sigma}^2}{2m_o n^2 E^o} \frac{dG(\bar{\sigma})}{d\bar{\sigma}} d\bar{\sigma} = \Xi_t^{max} \left[1 - (1 - d) \frac{\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}^*} \frac{2 + \frac{\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}^*} A}{2 + A} \right] \quad (3.35)$$

3.2.10 Matriz tangente del modelo de daño

I. Deducción de la matriz tangente

A partir de la relación (3.5), la variación virtual del tensor de tensiones y, finalmente, el tensor constitutivo tangente no simétrico \mathbf{C}^D del modelo de daño isótropo, pueden deducirse como

$$\delta\sigma = \mathbf{C}^s \delta\varepsilon + \delta\mathbf{C}^s \varepsilon ; \quad \delta\mathbf{C}^s = \frac{\partial\mathbf{C}^s}{\partial d} \delta d = -\mathbf{C}^o \delta d \quad (3.36)$$

$$\varepsilon = (\mathbf{C}^s)^{-1} \sigma = \frac{(\mathbf{C}^o)^{-1} \sigma}{1 - d} = (\mathbf{C}^o)^{-1} \sigma^o \Rightarrow \delta\sigma = (1 - d) \mathbf{C}^o \delta\varepsilon - \sigma^o \delta d \quad (3.37)$$

$$\delta\sigma = \mathbf{C}^D \delta\varepsilon = \left[(1 - d) \mathbf{I} - \frac{dG(\bar{\sigma})}{d\bar{\sigma}} \sigma^o \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\sigma^o} \right] \mathbf{C}^o \delta\varepsilon \quad (3.38)$$

$$\mathbf{C}^D = \left[(1-d)\mathbf{I} - \frac{dG(\bar{\sigma})}{d\bar{\sigma}} \boldsymbol{\sigma}^o \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\sigma}^o} \right] \mathbf{C}^o = (\mathbf{I} - \mathbf{D}) \mathbf{C}^o \quad (3.39)$$

$$\mathbf{D} = d\mathbf{I} + \frac{dG(\bar{\sigma})}{d\bar{\sigma}} \boldsymbol{\sigma}^o \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\sigma}^o} \quad (3.40)$$

En estas ecuaciones, \mathbf{I} es la matriz idéntica del mismo orden que \mathbf{C}^o y \mathbf{D} es una matriz no simétrica que depende sólo del vector de tensiones no dañadas $\boldsymbol{\sigma}^o$, puesto que la variable de daño también depende implícitamente de dicho vector de tensiones a través de la tensión equivalente $\bar{\sigma}$.

II. Cálculo efectivo de la matriz tangente

El cálculo efectivo de la matriz tangente supone encontrar los valores de todos los términos de la ecuación (3.40). Teniendo en cuenta la relación (3.21), se obtiene

$$d = G(\bar{\sigma}) = 1 - \frac{\bar{\sigma}^*}{\bar{\sigma}} e^{A(1-\frac{\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}^*})} \Rightarrow \frac{dG(\bar{\sigma})}{d\bar{\sigma}} = (1-d) \left(\frac{1}{\bar{\sigma}} + \frac{A}{\bar{\sigma}^*} \right) \quad (3.41)$$

Por otra parte, como la tensión equivalente es función del tensor de tensiones principales $\boldsymbol{\sigma}^{p,o}$, su derivada con respecto al vector de tensiones $\boldsymbol{\sigma}^o$ tiene la siguiente descomposición:

$$\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\sigma}^o} = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\sigma}^{p,o}} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^{p,o}}{\partial \boldsymbol{\sigma}^o} \quad (3.42)$$

El cálculo del primer factor se basa en la definición (3.8), de donde resulta

$$\bar{\sigma} = [1 + r(n-1)] \sqrt{\sum_{i=1}^3 (\sigma_i^{p,o})^2} = [1 + r(n-1)] u_1 \quad (3.43)$$

$$r = \frac{\sum_{i=1}^3 \langle \sigma_i^{p,o} \rangle}{\sum_{i=1}^3 |\sigma_i^{p,o}|} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sum_{i=1}^3 \sigma_i^{p,o}}{\sum_{i=1}^3 |\sigma_i^{p,o}|} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{u_2}{u_3} \quad (3.44)$$

donde

$$u_1 = \frac{\bar{\sigma}}{1 + r(n-1)} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (\sigma_i^{p,o})^2} \Rightarrow \left\{ \frac{\partial u_1}{\partial \boldsymbol{\sigma}^{p,o}} \right\}^T = \frac{\boldsymbol{\sigma}^{p,o}}{u_1} \quad (3.45)$$

$$u_2 = I_1 = \sum_{i=1}^3 \sigma_i^{p,o} \Rightarrow \left\{ \frac{\partial u_2}{\partial \sigma^{p,o}} \right\}^T = \mathbf{1}_3 \quad (3.46)$$

$$u_3 = \frac{I_1}{2r-1} = \sum_{i=1}^3 |\sigma_i^{p,o}| \Rightarrow \left\{ \frac{\partial u_3}{\partial \sigma^{p,o}} \right\}^T = \text{sign}(\sigma^{p,o}) \quad (3.47)$$

donde I_1 es el primer invariante del tensor de tensiones y $\mathbf{1}_3$ es el vector columna unidad de tres componentes. A partir de las ecuaciones de arriba pueden deducirse fácilmente las siguientes relaciones:

$$\left\{ \frac{\partial r}{\partial \sigma^{p,o}} \right\}^T = \frac{\partial r}{\partial u_2} \left\{ \frac{\partial u_2}{\partial \sigma^{p,o}} \right\}^T + \frac{\partial r}{\partial u_3} \left\{ \frac{\partial u_3}{\partial \sigma^{p,o}} \right\}^T = \frac{1}{2u_3} \mathbf{1}_3 - \frac{u_2}{2u_3^2} \text{sign}(\sigma^{p,o}) \quad (3.48)$$

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma^{p,o}} \right\}^T &= \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial r} \left\{ \frac{\partial r}{\partial \sigma^{p,o}} \right\}^T + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial u_1} \left\{ \frac{\partial u_1}{\partial \sigma^{p,o}} \right\}^T \\ &= \frac{(n-1)u_1}{2u_3} \mathbf{1}_3 - \frac{(n-1)u_1 u_2}{2u_3^2} \text{sign}(\sigma^{p,o}) + \frac{1+r(n-1)}{u_1} \sigma^{p,o} \\ &= \frac{(n-1)(2r-1)}{2[1+r(n-1)]} \frac{\bar{\sigma}}{I_1} [\mathbf{1}_3 - (2r-1) \text{sign}(\sigma^{p,o})] + \frac{[1+r(n-1)]^2}{\bar{\sigma}} \sigma^{p,o} \end{aligned} \quad (3.49)$$

Con esto, sólo queda por determinar el segundo factor de la ecuación (3.42), por lo cual se escribe el vector de tensiones principales en la siguiente forma:

$$\sigma^{p,o} = \frac{2\sqrt{J_2}}{\sqrt{3}} \begin{Bmatrix} \text{sen}(\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ \text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta - \frac{2\pi}{3}) \end{Bmatrix} + \frac{I_1}{3} \mathbf{1}_3 = \frac{2\sqrt{J_2}}{\sqrt{3}} \text{sen}(\theta) + \frac{I_1}{3} \mathbf{1}_3 \quad (3.50)$$

donde J_2 y θ son las variables utilizadas en el apartado 2.3.3, que trata sobre los vectores de flujo de Nayak-Zienkiewicz. Para el cálculo de la derivada del vector de tensiones principales $\sigma^{p,o}$ con respecto al vector de tensiones σ^o se emplea un procedimiento completamente análogo, que parte de la relación (2.29) modificada de la siguiente manera:

$$\frac{\partial \sigma^{p,o}}{\partial \sigma^o} = \frac{\partial \sigma^{p,o}}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \sigma^o} + \frac{\partial \sigma^{p,o}}{\partial (J_2)^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial (J_2)^{\frac{1}{2}}}{\partial \sigma^o} + \frac{\partial \sigma^{p,o}}{\partial J_3} \frac{\partial J_3}{\partial \sigma^o} = \mathbf{C} \mathbf{V} \quad (3.51)$$

Considerando las relaciones (2.31) se obtiene que la matriz V contiene tres vectores linea y tiene la siguiente forma:

$$V = \begin{Bmatrix} \frac{\partial I_1}{\partial \sigma^o} \\ \frac{\partial (J_2)^{\frac{1}{2}}}{\partial \sigma^o} \\ \frac{\partial J_3}{\partial \sigma^o} \end{Bmatrix} \quad (3.52)$$

y, según las fórmulas (2.32), la matriz cuadrada C tiene los componentes

$$C = \{ c_1 \quad c_2 \quad c_3 \} \quad (3.53)$$

donde

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{\partial \sigma^{p,o}}{\partial I_1} = \frac{1}{3} \mathbf{1}_3 \\ c_2 &= \frac{\partial \sigma^{p,o}}{\partial (J_2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\partial \sigma^{p,o}}{\partial \theta} \frac{\text{tg}(3\theta)}{(J_2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{3}} [\text{sen}(\theta) - \tan(3\theta) \cos(\theta)] \\ &= \frac{2}{\sqrt{3} \cos(3\theta)} \text{sen}(\theta - 3\theta \mathbf{1}_3) \\ c_3 &= \frac{\partial \sigma^{p,o}}{\partial \theta} \frac{\sqrt{3}}{2 \cos(3\theta)} \frac{1}{(J_2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{J_2 \cos(3\theta)} \cos(\theta) \end{aligned} \quad (3.54)$$

Para concluir, el cálculo de la matriz de daño D supone la realización de las siguientes operaciones matriciales:

$$\begin{aligned} D &= d \quad I + \frac{dG(\bar{\sigma})}{d\bar{\sigma}} \quad \sigma^o \quad \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma^{p,o}} \quad C \quad V \\ (6 \times 6) &= (1 \times 1) \quad (6 \times 6) + (1 \times 1) \quad (6 \times 1) \quad \{ [(1 \times 3) \quad (3 \times 3)] \quad (3 \times 6) \} \end{aligned} \quad (3.55)$$

donde se indican debajo las dimensiones de las matrices involucradas y, con los corchetes, el orden de multiplicación aconsejado para optimizar el esfuerzo de cálculo.

3.3 ÍNDICES DE DAÑO GLOBALES

El punto de partida para deducir un índice de daño estructural global es la ecuación (3.1), que relaciona la parte dañada de la energía libre Ψ con la parte de la energía elástica no dañada Ψ_0 . La idea del índice global propuesto en este estudio, consiste en integrar la relación (3.1) sobre toda la masa de la estructura. Dicha integral se transforma en integral sobre el volumen, teniendo en cuenta que $dm = m_0 dV$ con lo cual se obtiene

$$\Psi = (1-d)\Psi_0 \Rightarrow W_p = \int_V m_0 \Psi dV = \int_V (1-d)m_0 \Psi_0 dV = (1-D)W_p^0 \quad (3.56)$$

donde D es el índice global de daño, $W_p^0 = \int_V m_0 \Psi_0 dV$ es la energía potencial total de la estructura correspondiente al caso que ésta no estuviera dañada y W_p es la energía potencial total correspondiente al caso real, es decir, en el supuesto que hayan ocurrido procesos de daño. Resolviendo la ecuación (3.56), se obtiene la siguiente expresión final para D :

$$D = 1 - \frac{W_p}{W_p^0} = \frac{\int_V m_0 \Psi_0 dV - \int_V (1-d)m_0 \Psi_0 dV}{\int_V m_0 \Psi_0 dV} = \frac{\int_V d m_0 \Psi_0 dV}{\int_V m_0 \Psi_0 dV} \quad (3.57)$$

Si interesa el índice de daño sólo para una parte de la estructura (como, por ejemplo, un piso, algún grupo de columnas, etc), la integración de efectúa únicamente sobre el volumen de la parte que interesa.

Dentro de un esquema de elementos finitos, en el caso de una estructura discretizada en barras con capas, el índice de daño D_p de un punto de barra (la barra siendo un elemento finito unidimensional, en realidad se trata de una sección transversal de la barra, con sus varias capas) se obtiene de la misma manera que el índice global de daño, sólo que esta vez se integra sobre la superficie de la sección transversal de la barra, con $m_0 \Psi_0 = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}^0$ y $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{S} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$

$$D_p = 1 - \frac{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \hat{\boldsymbol{\sigma}}}{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \hat{\boldsymbol{\sigma}}^0}; \quad \hat{\boldsymbol{\sigma}} = \int_A \mathbf{S}^T \boldsymbol{\sigma} dA = \int_A (1-d) \mathbf{S}^T \boldsymbol{\sigma}^0 dA \quad (3.58)$$

donde $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ y $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ son, respectivamente, las deformaciones y los esfuerzos seccionales en dicho punto de la barra. En el caso de estructuras modelizadas mediante elementos finitos de barra, tal como es el caso en este estudio, el índice global de daño toma la siguiente forma particular:

$$D = 1 - \frac{\sum_e \mathbf{a}^T \int_\ell \mathbf{B}^T \hat{\boldsymbol{\sigma}} dx}{\sum_e \mathbf{a}^T \int_\ell \mathbf{B}^T \hat{\boldsymbol{\sigma}}^0 dx} \quad (3.59)$$

Esta última expresión, que depende únicamente de las tensiones no lineales calculadas por el modelo constitutivo y de las hipotéticamente lineales, es absolutamente general, ya que puede utilizarse dentro de cualquier estrategia de solución de problemas estructurales no lineales.

En conclusión, el índice global de daño se define como la relación entre la energía potencial que la estructura no puede almacenar en el estado poselástico y la energía potencial que la estructura almacenaría si hubiese mantenido sus características elásticas iniciales.

3.4 EJEMPLO DE CÁLCULO

Viga cargada estáticamente con desplazamientos

La primera prueba que se hizo con el modelo de daño isótropo implementado en elementos finitos de barra ha consistido en rehacer la simulación numérica de la viga descrita en el capítulo anterior, en el apartado 2.4. Con este sencillo ejemplo se quiere comparar la eficacia y el coste de cálculo entre los dos modelos constitutivos.

La respuesta de la viga puede seguirse casi hasta el final de su capacidad de resistencia, demostrando que los problemas de falta de convergencia del modelo elasto-plástico desaparecen empleando el modelo de daño. También el coste de cálculo baja significativamente, debido al hecho de que la variable de daño puede integrarse analíticamente.

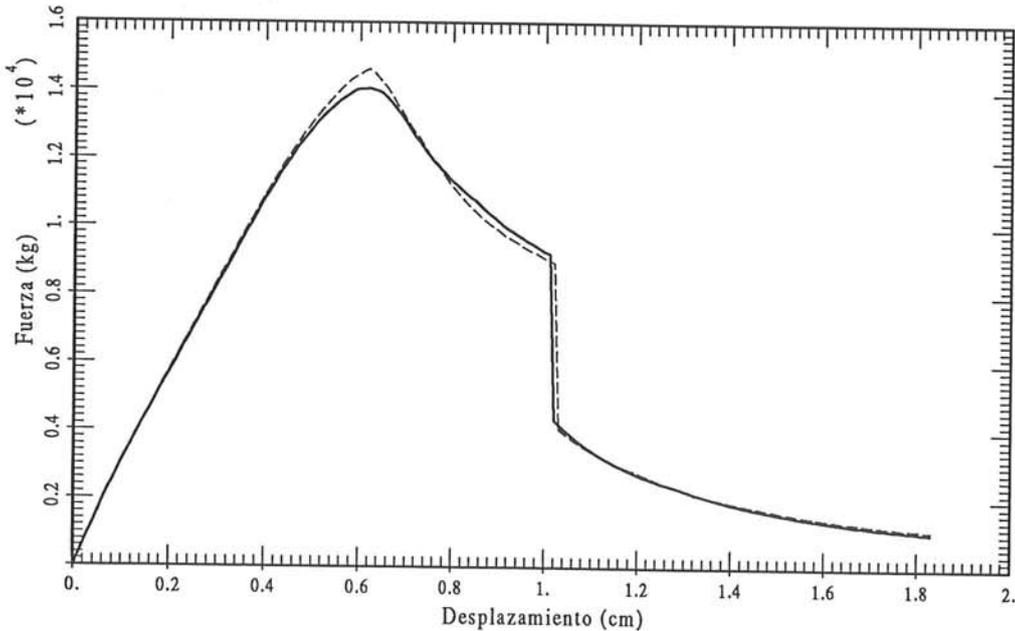


Figura 3.5 Respuesta fuerza - flecha para dos mallas distintas

La figura 3.5 muestra la respuesta de la viga cargada con desplazamientos para dos mallas de elementos finitos distintas, la línea de puntos correspon-

diendo a una malla dos veces mas densa que la primera. Se observa que el modelo de daño es objetivo con respecto al tamaño de los elementos finitos utilizados.

REFERENCIAS

1. Ch. Massonet & M. Save, *Cálculo plástico de las construcciones*. Barcelona: Montaner y Simon S.A., 1966.
2. R. W. Clough, K. L. Benuska & E. L. Wilson, *Inelastic earthquake response of tall buildings*, Proc. 3rd WCEE (2): 68-89. Auckland, 1965.
3. H. Aoyama & T. Sugano, *A generalized inelastic analysis of reinforced concrete structures based on tests on members*, Recent Researches of Structural Mechanics - Contributions in Honor of the 60th Birthday of Prof. Y. Tsuboi., Tokyo., 1968.
4. E. DiPasquale & A. S. Cakmak, *On the relation between local and global damage indices*, Technical Report NCEER-89-0034. Buffalo: National Center for Earthquake Engineering Research, State University of New York at Buffalo, 1989.
5. J. Oliver, M. Cervera, S. Oller & J. Lubliner, *Isotropic damage models and smeared crack analysis of concrete*, Proc. 2nd ICCAADCS (2): 945-958. Zell Am See: Pineridge Press, 1990.
6. J. C. Simó & J. Ju, *Strain and stress based continuum damage models - part I: formulation*, International Journal of Solids and Structures 23(7): 281-301, 1987.
7. J. Mazars, *Damage models for concrete and their usefulness for seismic loadings*, Experimental and Numerical Methods in Earthquake Engineering, J. Donea and P.M. Jones (eds.): 199-221. Brussels and Luxemburg: ECSC, EEC, EAEC, 1991.
8. L. Kachanov, *Time of rupture process under creep conditions*, Izvestia Akademii Nauk 8: 26-31, 1958. (in Russian)
9. J. Lubliner, J. Oliver, S. Oller & E. Oñate, *A plastic-damage model for concrete*, Int. Journ. of Solids and Structures 25(3): 299-326, 1989.

CAPÍTULO 4

EL PROBLEMA DINÁMICO

4.1 INTRODUCCIÓN

En los capítulos anteriores se han estudiado el modelo estructural con las ecuaciones constitutivas correspondientes y se han deducido las ecuaciones de movimiento para una estructura en régimen dinámico general. La integración en el tiempo de esas ecuaciones de movimiento hace el tema del presente capítulo y se presenta para el tres casos de comportamiento del material: lineal y no lineal. El análisis no lineal se ilustra además para el método de solución no lineal de la matriz inicial y también para el método de la matriz tangente. En este último caso, se incluyen además las modificaciones necesarias en el modelo constitutivo de daño para considerar efectos de viscosidad del material. Todos estos problemas se estudian considerando como única carga dinámica la acción sísmica.

4.2 MÉTODO DE NEWMARK

4.2.1 Ecuaciones de diferencias finitas en el tiempo

Considérese la variación del vector de aceleraciones de la estructura $\ddot{\mathbf{a}}(t)$ entre los instantes de tiempo t_i y $t_{i+1} = t_i + \Delta t$ (figura 4.1). Se realiza el cambio de variable $\tau = t - t_i$ de tal forma que para $t = t_i$ el valor de τ sea cero y para $t = t_{i+1}$, τ valga Δt . Supóngase a continuación que el valor del vector aceleración de respuesta en un instante $\tau \leq \Delta t$ se expresa como [1,2]

$$\ddot{\mathbf{a}}(\tau) = \ddot{\mathbf{a}}_i + f(\tau) (\ddot{\mathbf{a}}_{i+1} - \ddot{\mathbf{a}}_i) \quad (4.1)$$

de tal manera que la función $f(\tau)$ sea cero para $\tau = 0$ y valga 1 para $\tau = \Delta t$. Como fácilmente se ve, la expresión (4.1) supone que la ley de variación de las aceleraciones en el intervalo $[t_i, t_{i+1}]$ es la misma para todos los grados de libertad.

La velocidad $\dot{\mathbf{a}}(\tau)$ puede expresarse integrando la aceleración dada por la ecuación (4.1). Se obtiene

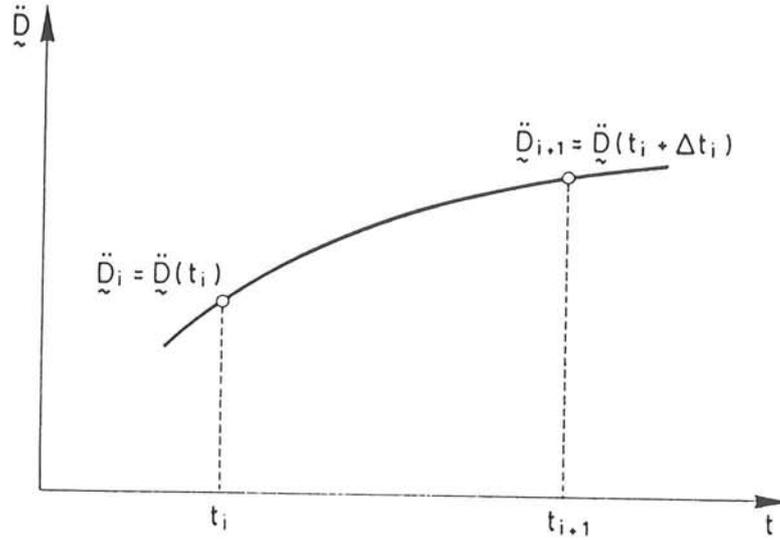


Figura 4.1 Variación de la aceleración con el tiempo.

$$\begin{aligned}
 \dot{a}(\tau) &= \dot{a}_i + \int_0^\tau \ddot{a}(\tau) d\tau \\
 &= \dot{a}_i + \int_0^\tau \ddot{a}_i d\tau + \int_0^\tau (\ddot{a}_{i+1} - \ddot{a}_i) f(\tau) d\tau \quad (4.2) \\
 &= \dot{a}_i + \ddot{a}_i \tau + (\ddot{a}_{i+1} - \ddot{a}_i) \int_0^\tau f(\tau) d\tau
 \end{aligned}$$

Realizando la sustitución

$$g(\tau) = \int_0^\tau f(\tau) d\tau \quad (4.3)$$

y también

$$\gamma \Delta t = \int_0^{\Delta t} f(\tau) d\tau \quad (4.4)$$

la expresión (4.2) queda

$$\dot{a}(\tau) = \dot{a}_i + \ddot{a}_i \tau + (\ddot{a}_{i+1} - \ddot{a}_i) g(\tau) \quad (4.5)$$

y para $\tau = \Delta t$ resulta de (4.5) y (4.4)

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{a}}_{i+1} &= \dot{\mathbf{a}}_i + \ddot{\mathbf{a}}_i \Delta t + (\ddot{\mathbf{a}}_{i+1} - \ddot{\mathbf{a}}_i) \gamma \Delta t \\ &= \dot{\mathbf{a}}_i + [(1 - \gamma) \ddot{\mathbf{a}}_i + \gamma \ddot{\mathbf{a}}_{i+1}] \Delta t\end{aligned}\quad (4.6)$$

Para calcular los desplazamientos se integra (4.5), lo que proporciona la expresión

$$\mathbf{a}(\tau) = \mathbf{a}_i + \dot{\mathbf{a}}_i \tau + \ddot{\mathbf{a}}_i \frac{\tau^2}{2} + (\ddot{\mathbf{a}}_{i+1} - \ddot{\mathbf{a}}_i) \int_0^\tau g(\tau) d\tau \quad (4.7)$$

Particularizando para $\tau = \Delta t$ y llamando

$$\beta \Delta t^2 = \int_0^{\Delta t} g(\tau) d\tau \quad (4.8)$$

se obtiene la relación final⁽⁹⁾

$$\mathbf{a}_{i+1} = \mathbf{a}_i + \dot{\mathbf{a}}_i \Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{\mathbf{a}}_i + \beta \ddot{\mathbf{a}}_{i+1} \right] \Delta t^2 \quad (4.9)$$

Las expresiones (4.5) y (4.9) constituyen las ecuaciones en diferencias de Newmark, las cuales, juntamente con la ecuación diferencial del movimiento (1.35), permiten hallar los vectores desplazamientos, velocidad y aceleración en t_{i+1} en función únicamente de estos valores en el tiempo t_i .

Nótese que el método de Newmark depende de los parámetros γ y β . Las condiciones que deben cumplir estos parámetros para que el algoritmo sea incondicionalmente estable se verán en los apartados siguientes.

4.2.2 Análisis lineal

La ecuación de equilibrio (1.35), deducida en el Capítulo 1, tenía en el segundo miembro términos de fuerzas de naturaleza dinámica, siendo los aspectos estáticos tratados como caso particular de los dinámicos. En este capítulo se hace una separación de dichas fuerzas en estáticas y puramente dinámicas y se considera como única acción puramente dinámica la sísmica. Esta particularización no restringe la generalidad del esquema presentado, puesto que a cualquier otra carga dinámica se le puede aplicar el mismo tratamiento que a la acción sísmica. Generalizando, de esta manera, la formulación dada por la expresión (1.35) y además incluyendo un término de amortiguamiento (en base a alguna hipótesis como, por ejemplo, la de Rayleigh), la ecuación que rige el movimiento de una estructura con varios grados de libertad en régimen elástico es

$$M \ddot{\mathbf{a}} + A \dot{\mathbf{a}} + K \mathbf{a} = \mathbf{f} - M \mathbf{j} \ddot{a}_g(t) \quad (4.10)$$

En esta ecuación M es la matriz de masa, A la de amortiguamiento, K la de rigidez, \mathbf{f} el vector de fuerzas externas estáticas, \mathbf{j} un vector que selecciona los grados de libertad activos para la excitación sísmica exterior y \ddot{a}_g es la aceleración del terreno. Esta ecuación, para el tiempo $t = t_{i+1}$, toma la forma

$$M \ddot{\mathbf{a}}_{i+1} + A \dot{\mathbf{a}}_{i+1} + K \mathbf{a}_{i+1} = \mathbf{f} - M \mathbf{j} \ddot{a}_{g,i+1} \quad (4.11)$$

De las ecuaciones en diferencias de Newmark (4.5) y (4.9) se obtiene

$$\ddot{\mathbf{a}}_{i+1} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} [\mathbf{a}_{i+1} - \mathbf{a}_i - \dot{\mathbf{a}}_i \Delta t] - \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right) \ddot{\mathbf{a}}_i \quad (4.12)$$

$$\dot{\mathbf{a}}_{i+1} = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} (\mathbf{a}_{i+1} - \mathbf{a}_i) + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right) \dot{\mathbf{a}}_i + \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right) \Delta t \ddot{\mathbf{a}}_i \quad (4.13)$$

e introduciendo estas expresiones en la ecuación del movimiento (4.11) se obtiene la variante de la ecuación genérica (1.36) correspondiente al método de Newmark, que puede expresarse de la siguiente manera:

$$\hat{K} \mathbf{a}_{i+1} = \hat{\mathbf{f}}_{i+1} \quad (4.14)$$

en donde

$$\hat{K} = K + \frac{1}{\beta \Delta t^2} M + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} A \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{f}}_{i+1} = & \mathbf{f} - M \mathbf{j} \ddot{a}_{g,i+1} + M \left[\frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{a}_i + \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{\mathbf{a}}_i + \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right) \ddot{\mathbf{a}}_i \right] \\ & + A \left[\frac{\gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{a}_i + \left(\frac{\gamma}{\beta} - 1\right) \dot{\mathbf{a}}_i + \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1\right) \Delta t \ddot{\mathbf{a}}_i \right] \end{aligned} \quad (4.16)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones algebraicas lineales (4.14) se obtienen los desplazamientos \mathbf{a}_{i+1} y una vez calculado este valor, sustituyendo en (4.12) y (4.6), resultan las aceleraciones y las velocidades para el instante de tiempo t_{i+1} .

Es interesante observar que para el primer instante de tiempo $t = t_1 = \Delta t$ en que se calcula la respuesta es preciso conocer los valores del desplazamiento, de la velocidad y de la aceleración en el instante cero, es decir \mathbf{a}_0 , $\dot{\mathbf{a}}_0$ y $\ddot{\mathbf{a}}_0$, respectivamente. Habitualmente las condiciones iniciales corresponden

a velocidad nula. La aceleración $\ddot{\mathbf{a}}_0$ y el desplazamiento \mathbf{a}_0 deberán cumplir la ecuación (4.10) y, por tanto

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{a}}_0 = -\mathbf{M} \mathbf{j} \ddot{a}_{g,0} ; \quad \mathbf{K} \mathbf{a}_0 = \mathbf{f} \quad (4.17)$$

expresiones que permiten completar las condiciones iniciales del problema y que toman en cuenta el hecho de que, en el instante inicial, la estructura se encuentra ya bajo la acción de las fuerzas estáticas.

4.2.3 Aproximación y estabilidad

En el caso de una estructura con un solo grado de libertad la ecuación (4.11) se reduce a

$$\ddot{x}_{i+1} + 2\nu\omega \dot{x}_{i+1} + \omega^2 x_{i+1} = -\ddot{x}_{g,i+1} \quad (4.18)$$

Las ecuaciones en diferencias de Newmark (4.5) y (4.9) serán

$$\dot{x}_{i+1} = \dot{x}_i + [(1-\gamma)\ddot{x}_i + \gamma\ddot{x}_{i+1}]\Delta t \quad (4.19)$$

$$x_{i+1} = x_i + \dot{x}_i \Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{x}_i + \beta \ddot{x}_{i+1} \right] \Delta t^2 \quad (4.20)$$

De estas tres ecuaciones es fácil deducir la relación entre el estado $i+1$ y el anterior i . Para $\nu=0$ y cuando las fuerzas externas son nulas, esta relación será

$$\begin{bmatrix} x_{i+1} \\ \dot{x}_{i+1} \\ \ddot{x}_{i+1} \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x_i \\ \dot{x}_i \\ \ddot{x}_i \end{bmatrix}$$

en donde

$$\mathbf{A} = \frac{1}{B} \begin{bmatrix} 1 & \Delta t & \left(\frac{1}{2}-\beta\right)\Delta t^2 \\ -\gamma\omega^2\Delta t & 1-(\gamma-\beta)\omega^2\Delta t^2 & \left[1-\gamma-\left(\frac{1}{2}\gamma-\beta\right)\Delta t^2\omega^2\right]\Delta t \\ -\omega^2 & -\omega^2\Delta t & -\left(\frac{1}{2}-\beta\right)\omega^2\Delta t^2 \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

siendo

$$B = 1 + \beta \omega^2 \Delta t^2$$

Puede demostrarse que el esquema es incondicionalmente estable para

$$\gamma \geq \frac{1}{2} \quad (4.22)$$

$$\beta \geq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} + \gamma \right)^2 \quad (4.23)$$

El grado de amortiguamiento artificial del esquema de integración viene dado por el parametro γ , siendo mayor a medida que dicho valor aumenta. En la figura 4.2 puede observarse la variación del radio espectral ρ en función de $\Delta t/T$ para diversos valores de γ y β . Como puede observarse, para $\gamma = 0.5$ y $\beta = 0.25$ el amortiguamiento artificial introducido por el algoritmo es nulo, cualquiera que sea el incremento de tiempo elegido. Para valores de $\gamma > 0.5$ el amortiguamiento es excesivamente grande, por lo que se producen imprecisiones en los resultados, a menos que se elija un Δt muy pequeño y por lo tanto poco económico para un esquema implícito. Habitualmente se toma $\gamma = 0.5$ y $\beta = 0.25$.

4.2.4 Análisis no lineal - método de la rigidez inicial

En el caso de análisis no lineal [1] que aquí se trata, la matriz $\hat{\mathbf{C}}$ de la expresión (1.53) ya no es constante, por lo que se tendrá que recurrir a la formulación dada por (1.35) adaptada al método de solución no lineal que se prefiere. Aquí se detallará la implementación del método de la rigidez inicial. Esto requiere substituir en la fórmula (1.57) la rigidez tangente \mathbf{K}_r con la rigidez inicial \mathbf{K}_0 .

Como puede observarse, la resolución de la ecuación (1.35) supone también preparar la ecuación (4.11) para el procedimiento iterativo dado por las fórmulas de cálculo (1.57) y (1.58). Esto se consigue reescribiendo el sistema (4.11) en función del incremento $\Delta \mathbf{a}_{i+1}$ del vector de desplazamientos nodales. Modificando en este sentido las relaciones (4.12) y (4.13), éstas quedan

$$\ddot{\mathbf{a}}_{i+1} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} \Delta \mathbf{a}_{i+1} - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{\mathbf{a}}_i - \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\mathbf{a}}_i \quad (4.24)$$

$$\dot{\mathbf{a}}_{i+1} = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \Delta \mathbf{a}_{i+1} + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta} \right) \dot{\mathbf{a}}_i + \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta} \right) \Delta t \ddot{\mathbf{a}}_i \quad (4.25)$$

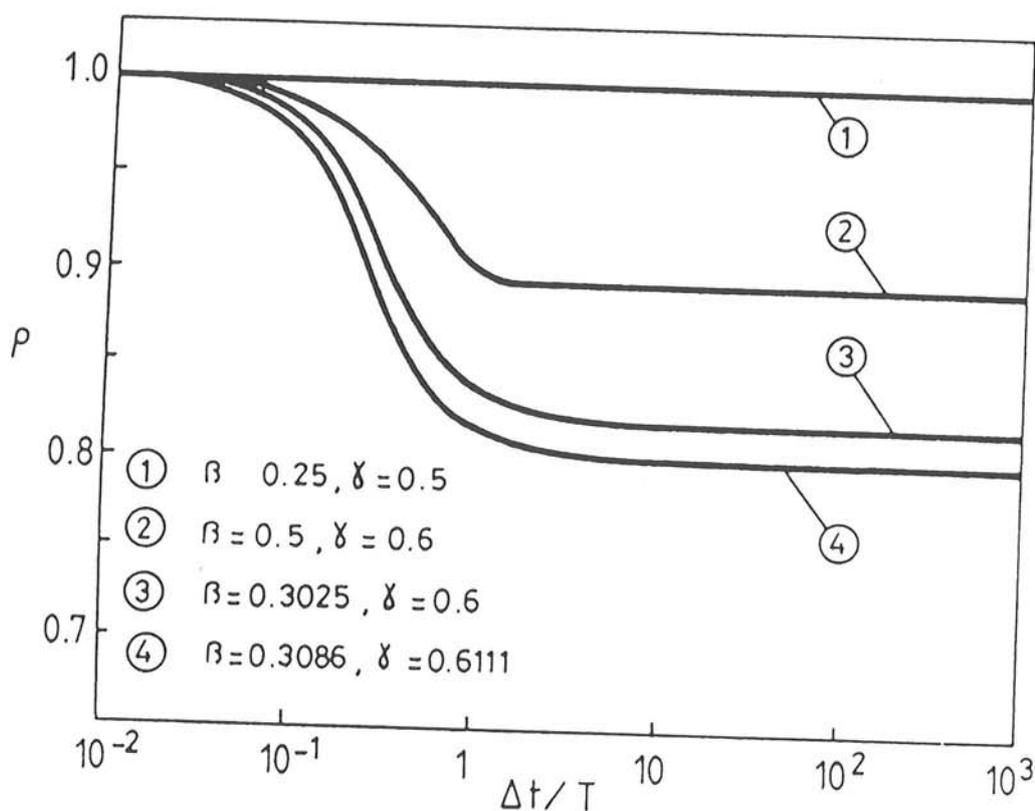


Figura 4.2 Método de Newmark. Variación del radio espectral en función de $\Delta t/T$.

$$\mathbf{a}_{i+1} = \Delta \mathbf{a}_{i+1} + \mathbf{a}_i \quad (4.26)$$

Con ello puede empezarse ya la iteración (véase la figura 4.3). En la primera etapa se sustituye (4.24), (4.25) y (4.26) en (4.11) quedando

$$\hat{K} \Delta \mathbf{a}_{i+1}^{(1)} = \hat{\mathbf{f}}_{i+1}^{(1)} \quad (4.27)$$

donde se han introducido las notaciones

$$\hat{K} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{A} + \mathbf{K}_0 \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{f}}_{i+1}^{(1)} = & \mathbf{f} - \mathbf{M} j \ddot{\mathbf{a}}_{g,i+1} + \mathbf{M} \left[\frac{1}{\beta \Delta t} \dot{\mathbf{a}}_i + \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\mathbf{a}}_i \right] \\ & - \mathbf{A} \left[\left(1 - \frac{\gamma}{\beta} \right) \dot{\mathbf{a}}_i + \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta} \right) \Delta t \ddot{\mathbf{a}}_i \right] - \int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_i dV \end{aligned} \quad (4.29)$$

donde \mathbf{K}_0 es la matriz de rigidez elástica inicial. El término $\int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_i dV$ ha reemplazado el término $\mathbf{K} \mathbf{a}_i$ que se obtuviera al substituir (4.26) en (4.11). En el dominio de comportamiento elástico los dos términos son exactamente iguales (véase el capítulo 2) mientras que en la zona no lineal dicha igualdad cesa de existir. La razón de dicho reemplazo es la optimización del algoritmo de integración aprovechando el estado tensional no lineal ya calculado para el paso de tiempo anterior, de esta manera disminuyéndose el número de iteraciones necesarias para conseguir el equilibrio (véase la figura 4.3).

Se resuelve el sistema lineal (4.27) obteniéndose el valor $\Delta \mathbf{a}_{i+1}^{(1)}$

$$\Delta \mathbf{a}_{i+1}^{(1)} = \hat{\mathbf{K}}^{-1} \hat{\mathbf{f}}_{i+1}^{(1)} \quad (4.30)$$

Las aceleraciones y velocidades se calculan mediante las expresiones

$$\ddot{\mathbf{a}}_{i+1}^{(1)} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} \Delta \mathbf{a}_{i+1}^{(1)} - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{\mathbf{a}}_i - \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\mathbf{a}}_i \quad (4.31)$$

$$\dot{\mathbf{a}}_{i+1}^{(1)} = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \Delta \mathbf{a}_{i+1}^{(1)} + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta} \right) \dot{\mathbf{a}}_i + \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta} \right) \Delta t \ddot{\mathbf{a}}_i \quad (4.32)$$

y los desplazamientos totales se obtienen en la forma

$$\mathbf{a}_{i+1}^{(1)} = \mathbf{a}_i + \Delta \mathbf{a}_{i+1}^{(1)} \quad (4.33)$$

Sin embargo, al no ser éste, en general, el valor correcto, tendrán que realizarse sucesivas iteraciones. Para ello hay que hallar las fuerzas residuales correspondientes a esta primera etapa. Ello se consigue calculando las tensiones $\boldsymbol{\sigma}_{i+1}^{(1)}$, correspondientes a los desplazamientos $\mathbf{a}_{i+1}^{(1)}$, según el modelo constitutivo adoptado. Las fuerzas residuales valdrán (relación 1.55)

$$\boldsymbol{\Psi}_{i+1}^{(1)} = \mathbf{K}_0 \Delta \mathbf{a}_{i+1}^{(1)} + \int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_i dV - \int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_{i+1}^{(1)} dV \quad (4.34)$$

En general, al resolver la etapa (j) se partirá de los resultados obtenidos en la etapa ($j - 1$). Las expresiones (4.12) y (4.13) para esta etapa (j) se escribirán

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{a}}_{i+1}^{(j)} &= \frac{1}{\beta \Delta t^2} \Delta \mathbf{a}_{i+1}^{(j)} - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{\mathbf{a}}_i - \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\mathbf{a}}_i \\ &= \frac{1}{\beta \Delta t^2} \delta \mathbf{a}^{(j)} + \ddot{\mathbf{a}}_{i+1}^{(j-1)} \end{aligned} \quad (4.35)$$

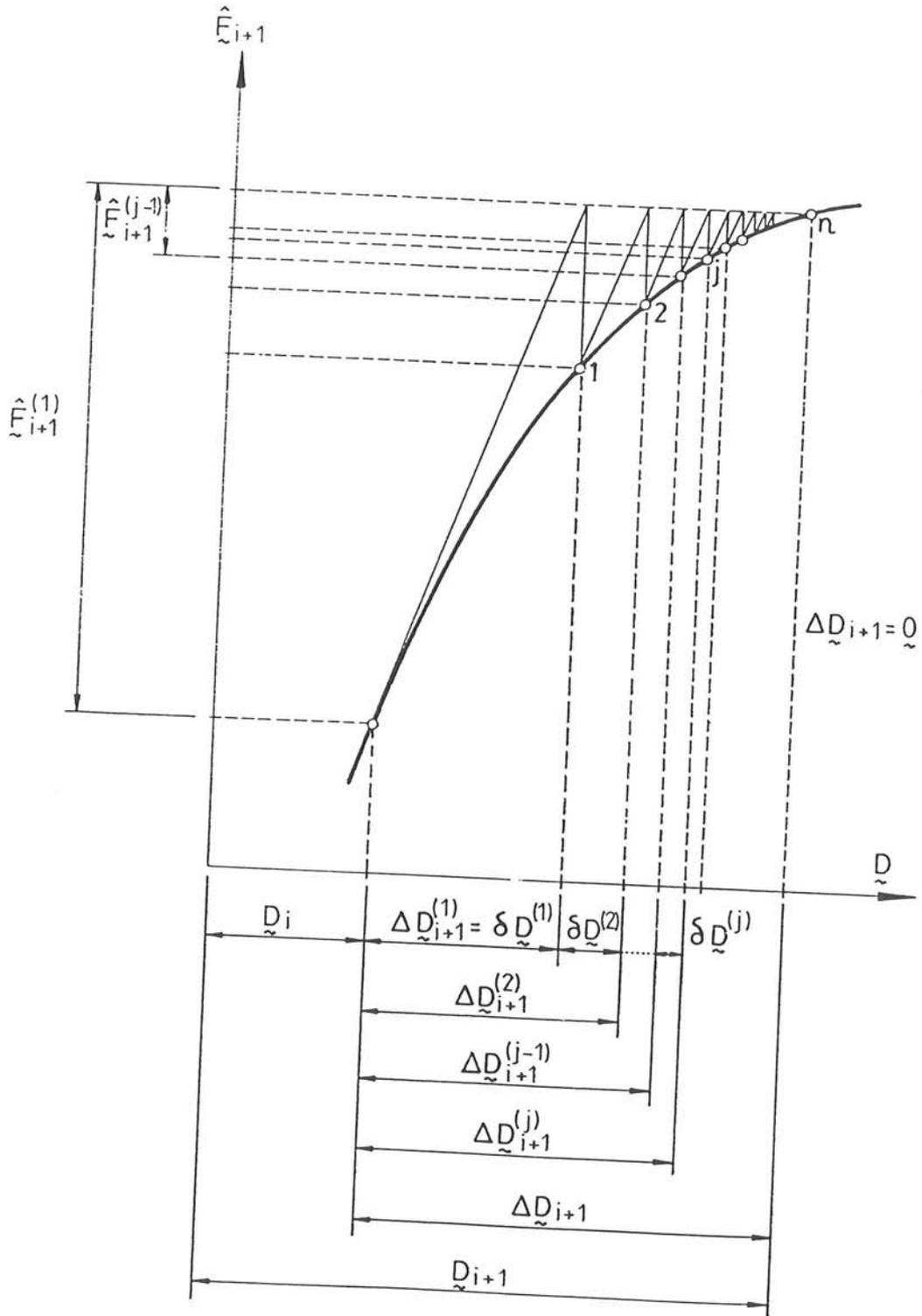


Figura 4.3 Esquema de iteración en un problema dinámico no lineal.

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{a}}_{i+1}^{(j)} &= \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \Delta \mathbf{a}_{i+1}^{(j)} + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right) \dot{\mathbf{a}}_i + \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right) \Delta t \ddot{\mathbf{a}}_i \\ &= \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \delta \mathbf{a}_{i+1}^{(j)} + \dot{\mathbf{a}}_{i+1}^{(j-1)}\end{aligned}\quad (4.36)$$

siendo

$$\delta \mathbf{a}_{i+1}^{(j)} = \Delta \mathbf{a}_{i+1}^{(j)} - \Delta \mathbf{a}_{i+1}^{(j-1)} = \mathbf{a}_{i+1}^{(j)} - \mathbf{a}_{i+1}^{(j-1)} \quad (4.37)$$

Las ecuaciones del movimiento se escribirán para la iteración (j) en la forma

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{a}}_{i+1}^{(j)} + \mathbf{A} \dot{\mathbf{a}}_{i+1}^{(j)} + \left[\mathbf{K}_0 \delta \mathbf{a}_{i+1}^{(j)} + \int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_{i+1}^{(j-1)} dV \right] = \mathbf{f} - \mathbf{M} \mathbf{j} \ddot{\mathbf{a}}_{g,i+1} \quad (4.38)$$

en donde $\boldsymbol{\sigma}_{i+1}^{(j-1)}$ es el vector que representa las tensiones debidas al vector de desplazamientos $\mathbf{a}_{i+1}^{(j-1)}$. Introduciendo (4.35) y (4.36) en (4.38) se obtiene

$$\hat{\mathbf{K}} \delta \mathbf{a}_{i+1}^{(j)} = \hat{\mathbf{f}}_{i+1}^{(j)} \quad (4.39)$$

donde

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{f}}_{i+1}^{(j)} &= \mathbf{f} - \mathbf{M} \mathbf{j} \ddot{\mathbf{a}}_{g,i+1} - \left[\mathbf{M} \ddot{\mathbf{a}}_{i+1}^{(j-1)} + \mathbf{A} \dot{\mathbf{a}}_{i+1}^{(j-1)} + \int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_{i+1}^{(j-1)} dV \right] \\ &\equiv \boldsymbol{\Psi}_{i+1}^{(j-1)} = \mathbf{K}_0 \delta \mathbf{a}_{i+1}^{(j-1)} + \int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_{i+1}^{(j-2)} dV - \int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_{i+1}^{(j-1)} dV\end{aligned}\quad (4.40)$$

La resolución del sistema lineal (4.39) a la vez que el posterior empleo del modelo constitutivo proporcionan las aceleraciones, las velocidades, los desplazamientos y las tensiones $\boldsymbol{\sigma}_{i+1}^{(j)}$, preparándose de esta manera las condiciones para poder pasarse a la iteración siguiente. El proceso iterativo finaliza una vez alcanzada la tolerancia deseada, es decir cuando

$$\frac{|\boldsymbol{\Psi}_{i+1}^{(j)}|}{|\mathbf{f} - \mathbf{M} \mathbf{j} \ddot{\mathbf{a}}_{g,i+1}|} \leq \text{Tolerancia} \quad (4.41)$$

4.3 MODELO DE DAÑO VISCO-ELÁSTICO

El efecto de amortiguamiento del movimiento de la estructura es simulado a través del modelo Kelvin que consiste del montaje en paralelo de un amortiguador a la estructura hiperelástica estudiada anteriormente (véase la figura 4.4). Como la estructura y el amortiguador mantienen la misma deformación ϵ , la tensión total del sistema será la suma de una tensión estructural σ^{str} y una tensión viscosa σ^{vis} que, según la ley de Newton, tiene la siguiente expresión[3]:

$$\sigma = \sigma^{str} + \sigma^{vis} = \mathbf{C}^s \epsilon + \eta^s \dot{\epsilon} \quad (4.42)$$

donde η^s es la matriz constitutiva viscosa secante definida por

$$\eta^s = \frac{\eta}{E^0} \mathbf{C}^s = \alpha \mathbf{C}^s \quad (4.43)$$

En esta ecuación η es el parámetro viscoso unidimensional y α el tiempo de retardo, definido como el tiempo necesitado por el sistema estructura-amortiguador para llegar a una configuración estable en el estado no dañado.

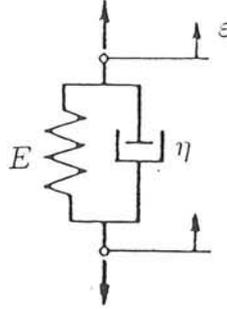


Figure 4.4 Modelo Kelvin.

En estos supuestos, el comportamiento del sistema bajo variaciones virtuales de las variables libres (deformaciones y velocidades de deformación) puede obtenerse como

$$\begin{aligned} \delta\sigma &= \delta\sigma^{str} + \delta\sigma^{vis} = \mathbf{C}^D \delta\epsilon + \alpha \left(\mathbf{C}^s \delta\dot{\epsilon} + \delta\mathbf{C}^s \dot{\epsilon} \right) \\ &= \mathbf{C}^D \delta\epsilon + \alpha \left(\mathbf{C}^s \delta\dot{\epsilon} - \mathbf{C}^0 \dot{\epsilon} \delta d \right) \end{aligned} \quad (4.45)$$

Introduciendo la notación $\sigma_v^0 = \alpha \mathbf{C}^0 \dot{\epsilon}$ y utilizando la relación (3.39), la relación incremental visco-elástica se obtiene como

$$\delta\sigma = \mathbf{C}_v^D \delta\epsilon + \alpha \mathbf{C}^s \delta\dot{\epsilon} = (\mathbf{I} - \mathbf{D}_v) \mathbf{C}^0 \delta\epsilon + \alpha \mathbf{C}^s \delta\dot{\epsilon} \quad (4.46)$$

donde D_v toma la siguiente forma (análoga a la relación 3.40):

$$D_v = dI + \frac{dG(\bar{\sigma})}{d\bar{\sigma}} (\sigma^o + \sigma_v^o) \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma^o} \quad (4.47)$$

Siguiéndose el mismo procedimiento que para fuerzas inerciales y elásticas (véase el apartado 1.3.4), pueden deducirse las expresiones de la matriz constitutiva viscosa generalizada $\hat{\eta}$ y del vector elemental de fuerzas viscosas F_v , como

$$\hat{\eta} = \int_A S^T \eta S dA \Rightarrow F_v = \int_{\ell} B^T \hat{\sigma}^{vis} dx = \int_{\ell} B^T \hat{\eta} B dx \dot{a} = A \dot{a} \quad (4.48)$$

donde A es la matriz de amortiguamiento de un elemento finito que se va a utilizar en el análisis dinámico.

El modelo de Kelvin junto con el modelo de daño propuesto permite la decomposición de la tensión total actuando en un punto de la estructura en una parte hiperelástica y una parte viscosa. Estos términos introducidos dentro de un esquema de elementos finitos producen las matrices clásicas de amortiguamiento y de rigidez (tal como puede verse en el apartado 1.4.3).

4.3.1 Análisis no lineal - método de la rigidez tangente

La ecuación de equilibrio dinámico, correspondiente a este modelo de daño viscoso, escrita para el instante $t = t_{i+1}$, toma la siguiente forma, análoga a la relación (4.11):

$$M \ddot{a}_{i+1} + \int_{\ell} B^T \hat{\sigma}_{i+1} dx = f(t_{i+1}) \quad (4.49)$$

donde $\hat{\sigma}_{i+1}$ es el vector de tensiones seccionales totales, que puede descomponerse en una parte estructural y otra parte viscosa. Según las relaciones (4.42) y (4.45), pueden obtenerse las siguientes expresiones para este vector y para su incremento temporal:

$$\hat{\sigma}_i = \hat{\sigma}_i^{str} + \hat{\sigma}_i^{vis} = \hat{C}^s B a_i + \hat{\eta}^s B \dot{a}_i \quad (4.50)$$

$$\Delta \hat{\sigma}_{i+1} = \hat{C}_v^D B \Delta a_{i+1} + \hat{\eta}^s B \Delta \dot{a}_{i+1} \quad (4.51)$$

donde $\hat{C}^s = \int_A S^T () S dA$ son matrices seccionales. Si se substituye la relación $\hat{\sigma}_{i+1} = \hat{\sigma}_i + \Delta \hat{\sigma}_{i+1}$ junto con las relaciones (4.24-4.26) y (4.50-4.51) en la ecuación (4.49), la ecuación de equilibrio deviene

$$\hat{K} \Delta \mathbf{a}_{i+1}^{(1)} = \hat{f}_{i+1}^{(1)} \quad (4.52)$$

donde el índice superior indica el número de iteración corriente. Se han introducido las siguientes notaciones:

$$\hat{K} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} M + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} A + K_T \quad (4.53)$$

$$\begin{aligned} \hat{f}_{i+1}^{(1)} = & f(t_{i+1}) + M \left[\frac{1}{\beta \Delta t} \dot{\mathbf{a}}_i + \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\mathbf{a}}_i \right] \\ & - A \left[\left(1 - \frac{\gamma}{\beta} \right) \dot{\mathbf{a}}_i + \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta} \right) \Delta t \ddot{\mathbf{a}}_i \right] - K_s \mathbf{a}_i \end{aligned} \quad (4.54)$$

En las relaciones de arriba aparecen conjuntamente tanto matrices secantes como tangentes, cuyos valores son

$$K_s = \int_{\ell} \mathbf{B}^T \hat{\mathbf{C}}^s \mathbf{B} dx ; \quad K_T = \int_{\ell} \mathbf{B}^T \hat{\mathbf{C}}^D \mathbf{B} dx ; \quad A = \int_{\ell} \mathbf{B}^T \hat{\eta}^s \mathbf{B} dx \quad (4.55)$$

y todas las tres dependen del nivel de daño, por lo cual son variables en el tiempo.

Resolviéndose el sistema linealizado (4.52) se obtienen los incrementos de desplazamientos $\Delta \mathbf{a}_{i+1}^{(1)}$ y luego todas las demás variables, que corresponden a la primera iteración del paso de tiempo (i+1). Si el nivel de degradación haya cambiado, se actualizan las matrices (4.55) y esto implica la aparición probable de unas fuerzas de desequilibrio dinámico. Estas son las fuerzas residuales $\Psi_{i+1}^{(1)}$, cuyos valores son dadas por la diferencia entre el estado tensional previsto $\hat{\sigma}_i + \Delta \hat{\sigma}_{i+1}^{(1)}$, y el estado tensional real $\hat{\sigma}_{i+1}^{(1)}$, calculado utilizando las matrices actualizadas de amortiguamiento y de rigidez

$$\begin{aligned} \Psi_{i+1}^{(1)} &= f(t_{i+1}) - M \ddot{\mathbf{a}}_{i+1}^{(1)} - \int_{\ell} \mathbf{B}^T \hat{\sigma}_{i+1}^{(1)} dx \\ &= \int_{\ell} \mathbf{B}^T \left(\hat{\sigma}_i + \Delta \hat{\sigma}_{i+1}^{(1)} - \hat{\sigma}_{i+1}^{(1)} \right) dx \end{aligned} \quad (4.56)$$

Esta fuerza residual es aplicada como segundo miembro de la ecuación (4.52) y se resuelve el sistema después de haber actualizado la matriz \hat{K} , obteniéndose una nueva corrección del incremento de desplazamientos. Este proceso iterativo finaliza cuando la norma de las fuerzas residuales se reduzca por debajo de la tolerancia impuesta.

Tabla 4.1 Algoritmo de cálculo.

A. Primera iteración (el pase desde el instante i al instante $i+1$)
 - se actualizan

$$K_S = \int_L B^T \hat{C}^S B dx ; K_T = \int_L B^T \hat{C}_v^D B dx ; A = \int_L B^T \hat{\eta}^S B dx$$

- se recalculan

$$\hat{K} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} M + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} A + K_T$$

$$\hat{f}_{i+1}^{(1)} = f(t_{i+1}) + M \left[\frac{1}{\beta \Delta t} \dot{a}_i + \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{a}_i \right] - A \left[\left(1 - \frac{\gamma}{\beta} \right) \dot{a}_i + \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta} \right) \Delta t \ddot{a}_i \right] - K_S a_i$$

- se calculan las primeras aproximaciones para el instante $i+1$:

$$\Delta a_{i+1}^{(1)} = \hat{K}^{-1} \hat{f}_{i+1}^{(1)}$$

$$\begin{aligned} \ddot{a}_{i+1}^{(1)} &= \frac{1}{\beta \Delta t^2} \Delta a_{i+1}^{(1)} - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{a}_i - \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{a}_i \\ \dot{a}_{i+1}^{(1)} &= \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \Delta a_{i+1}^{(1)} + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta} \right) \dot{a}_i + \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta} \right) \Delta t \ddot{a}_i \\ a_{i+1}^{(1)} &= \Delta a_{i+1}^{(1)} + a_i \end{aligned}$$

B. Sigüientes iteraciones (se busca el equilibrio para el instante $i+1$)

I. se actualizan

$$K_S = \int_L B^T \hat{C}^S B dx ; K_T = \int_L B^T \hat{C}_v^D B dx ; A = \int_L B^T \hat{\eta}^S B dx$$

$$\hat{K} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} M + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} A + K_T$$

$$\hat{f}_{i+1}^{(j+1)} = \Psi_{i+1}^{(j)} = f(t_{i+1}) - M \ddot{a}_{i+1}^{(j)} - A \dot{a}_{i+1}^{(j)} - K_S a_{i+1}^{(j)}$$

II. Si $\Psi_{i+1}^{(j)}$ no es suficientemente pequeño, continuar a calcular:

$$\delta a_{i+1}^{(j+1)} = \hat{K}^{-1} \hat{f}_{i+1}^{(j+1)}$$

$$\begin{aligned} \ddot{a}_{i+1}^{(j+1)} &= \frac{1}{\beta \Delta t^2} \delta a_{i+1}^{(j+1)} + \ddot{a}_{i+1}^{(j)} \\ \dot{a}_{i+1}^{(j+1)} &= \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \delta a_{i+1}^{(j+1)} + \dot{a}_{i+1}^{(j)} \\ a_{i+1}^{(j+1)} &= \delta a_{i+1}^{(j+1)} + a_{i+1}^{(j)} \end{aligned}$$

III. Volver al paso I.

4.3.2 El algoritmo de integración en tiempo

Este apartado se dedica a explicitar el orden de las operaciones necesarias para integrar en el tiempo la ecuación de equilibrio dinámico en el caso elasto-viscoso-degradable tratado en el apartado anterior (véase la página anterior).

En conclusión, el algoritmo de integración en el tiempo descrito combina el método de Newmark con un algoritmo no lineal de tipo Newton-Raphson total. Además, este algoritmo es de tipo predictor-corrector en lo que se refiere al nivel de daño, en el sentido de que se utilizan los índices locales de daño conocidos para predecir las características de la estructura en el paso o la iteración siguiente, luego corrigiéndose dichos niveles en función del nuevo estado de la estructura.

4.4 EJEMPLOS DE CÁLCULO

• Pórtico sometido a acción sísmica

Con la metodología descrita se ha estudiado la evolución del proceso de daño en un pórtico plano de hormigón armado (figura 4.5) sometido a cargas sísmicas.

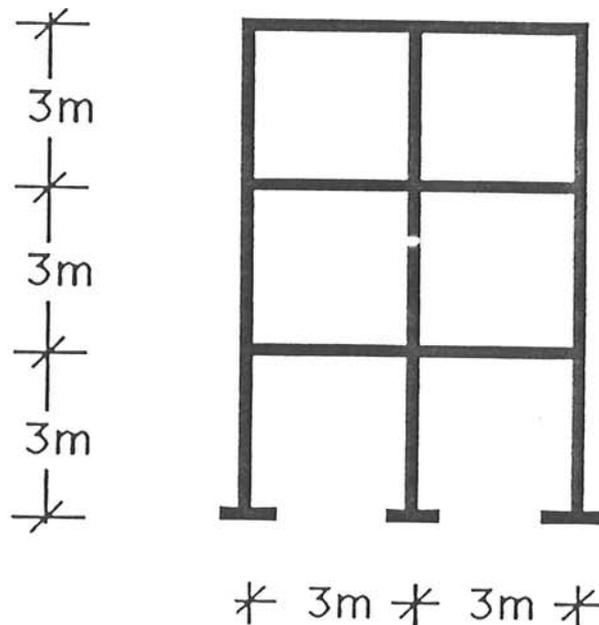


Figura 4.5 Geometría del pórtico estudiado.

El pórtico tiene una altura de 5 metros, un ancho de 6 metros y se extiende sobre 3 niveles. Las columnas tienen una sección transversal de 30cm por 30 cm de hormigón armado con 4.35% de acero. Las vigas son altas de 40cm y anchas de 30cm con 5.3% acero. La estructura es discretizada en 45 elementos finitos cuadráticos de barra, de tres nodos y dos puntos de integración Gauss

cada uno. De esta manera, el modelo dinámico del pórtico contiene 87 nodos, con tres grados de libertad por nodo. Cada elemento finito tiene una longitud de 1 metro y la sección dividida en 20 capas omogéneas de igual espesor. La segunda y la decimonovena capa es de acero y las demás son de hormigón. La relación de acero está controlada a través del ancho de las capas de acero. El estado del material se verifica en los puntos de contacto entre capas, de manera separada en cada capa, y luego de interpola linealmente sobre el espesor de la capa. Esto proporciona 40 puntos de control en las secciones correspondientes a cada punto de Gauss.

Los materiales involucrados tienen las siguientes propiedades físicas: (a) acero - $E = 2.1 \cdot 10^6$ daN/cm², $\sigma^o = 4,200$ daN/cm², $\nu = 0.25$, $\rho = 8$ g/cm³; (b) hormigón - $E = 2.0 \cdot 10^5$ daN/cm², $\sigma^o = 300$ daN/cm², $\nu = 0.17$, $\rho = 2.5$ g/cm³.

Las ecuaciones de movimiento dinámicas han sido resueltas utilizando el algoritmo paso a paso de Newmark, con $\beta = 0.25$ y $\gamma = 0.5$, así como está descrito al principio de este capítulo. El paso de tiempo utilizado constituye la trigésima parte del período fundamental de la estructura, que es de 0.14 segundos. Como la integración de la ley constitutiva puede hacerse analíticamente, el cálculo del índice de daño se reduce a la fórmula explícita (3.21), lo que implica una importante reducción del coste del cálculo.

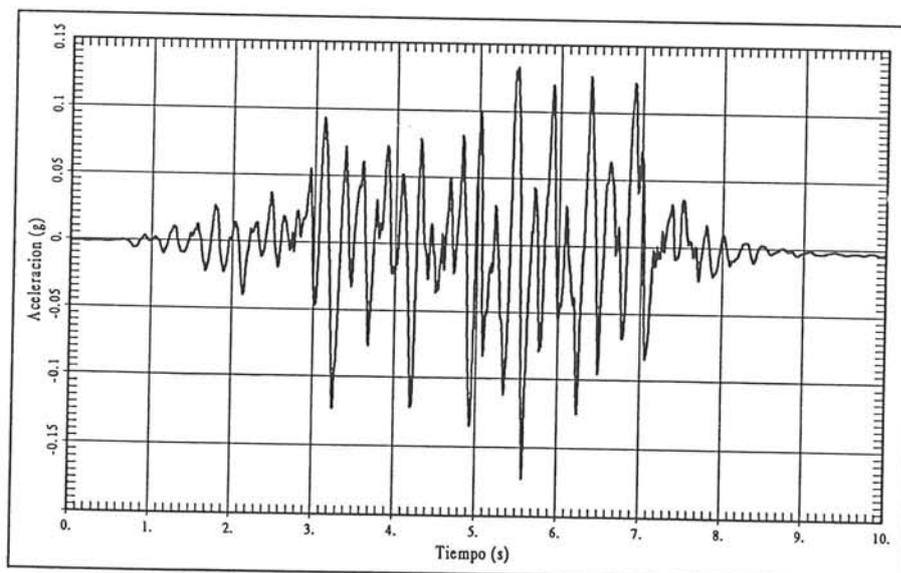


Figura 4.6 Acelerograma sintético.

La estructura, sometida al efecto de un acelerograma sintético (figura 4.6) de frecuencia dominante de 4 Hz y de amplitud máxima de 0.175 g, se ha calculado en dos casos de carga: (a) sin considerar efectos de viscosidad del material (figura 4.7a) y (b) tomando en cuenta dichos efectos a través de un tiempo de retardo de $\alpha = 0.001$ s (figura 4.7b).

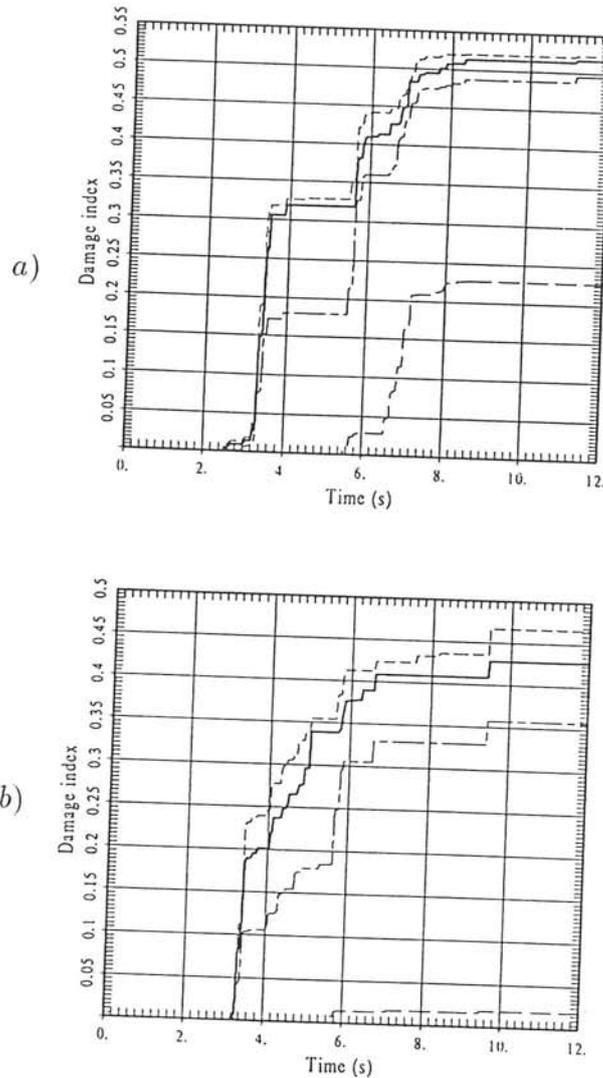


Figura 4.7 Índices de daño globales. — global; - - - primer piso; - · - segundo piso; - - - tercer piso.

Las figuras 4.10 y 4.11 muestran la distribución del daño seccional a lo largo de los elementos de la estructura, según la fórmula (3.58). Las dos figuras corresponden a un terremoto mediano y a otro destructivo obtenido multiplicando por dos las amplitudes del primero, calculados sin considerar efectos viscosos. El mayor grado de degradación se observa en las zonas de junta entre pisos y columnas, que es exactamente la localización esperada para este tipo de estructura y carga. Comparando los valores de los índices de daño locales con la evolución de los índices de daño globales, se observa que dichos índices toman valores sólo un poco menores que los daños seccionales máximos que se presentan en la base de las columnas.

Este hecho confirma la rigurosidad la elección del índice global de daño

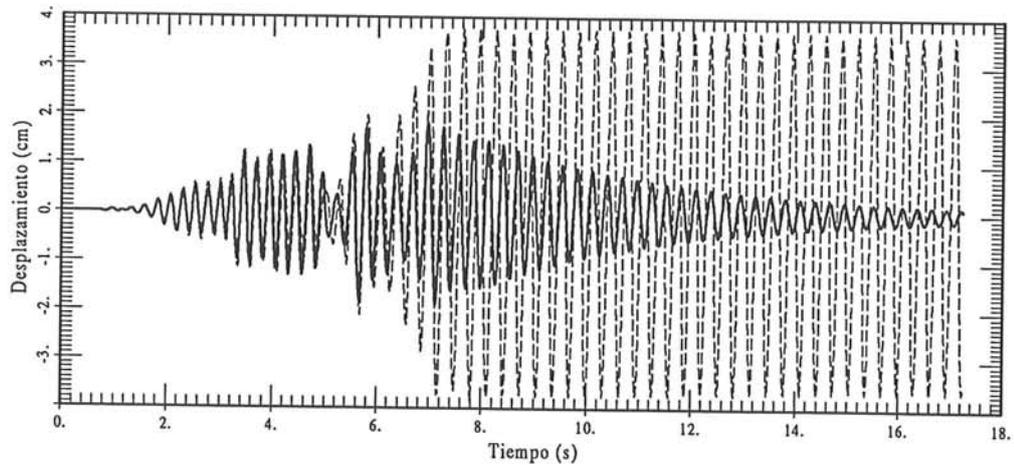


Figura 4.8 Evolución del desplazamiento horizontal del tercer piso con y sin viscosidad.

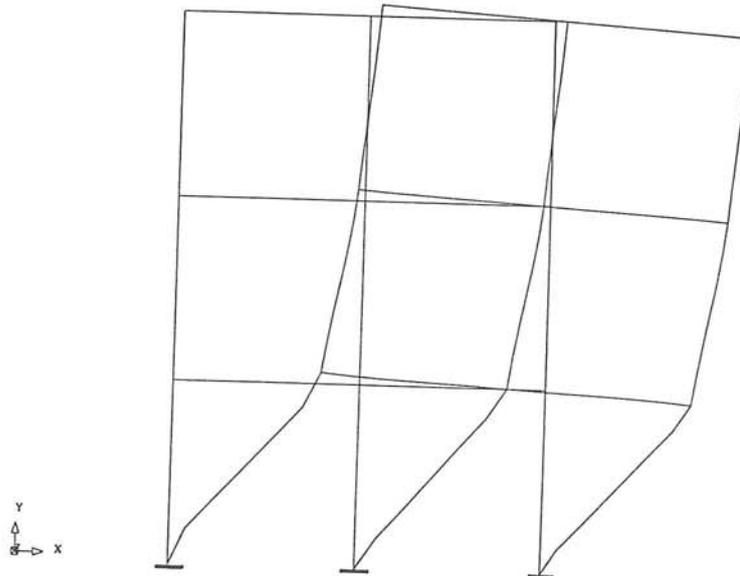


Figura 4.9 Deformada de la estructura cerca al momento del colapso en el caso de un terremoto fuerte.

como el porcentaje de la energía potencial, correspondiente a un comportamiento supuestamente lineal, que no se almacena en el estado degradado corriente. Las líneas interrumpidas en las figuras 7 grafican las evoluciones de los índices de daño de los distintos pisos. El daño del primer piso sigue de cerca la evolución del daño global, tomando valores ligeramente mayores debido al hecho de que es el piso más afectado, mientras el segundo y el tercer piso presentan niveles de degradación sensiblemente menores, confirmando así que el daño decrece con la altura del edificio.

Otra propiedad interesante del índice de daño propuesto por los autores reside en la posibilidad de predecir el mecanismo de fallo de una estructura. Esto se consigue observando la evolución de los índices de daño de los puntos y comparándolos continuamente con el valor del índice global de la estructura.

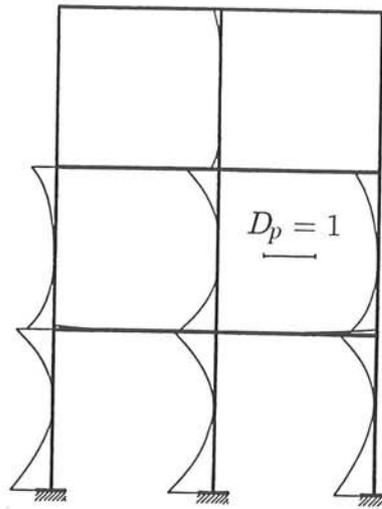


Figura 4.10 Distribución del daño seccional D_p , después de la acción del terremoto del caso a).

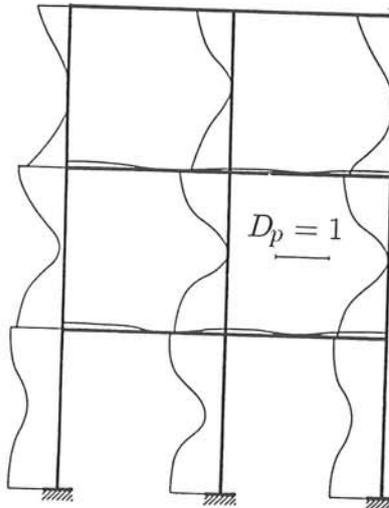


Figura 4.11 Distribución del daño seccional D_p , después de la acción de un terremoto igual que en el caso a), con amplitudes dobladas.

Cuando este último índice empieza tomar valores cercanos al valor máximo de un índice local y los demás puntos cesan de degradarse más, significa que se han indentificado los puntos críticos de la estructura. El fallo de estos puntos conduce a la formación de un mecanismo, lo que provoca la destrucción del edificio. Mientras haya nuevos puntos que se incorporen y se queden en el grupo de puntos cuyos índices de daño evolue significa que la estructura aún tiene reservas de resistencia. Cuando el número de puntos dañados se estabiliza y el índice global sigue aumentando, la estructura se encuentra en un estado de mecanismo, con lo cual está completamente destruida. Estos criterios pueden permitir tomar decisiones acerca de la reparabilidad de estructuras que han sufrido acciones por encima de los límites previstos en el proyecto.

REFERENCIAS

1. A. H. Barbat & J. Miquel Canet, *Structural Response Computations in Earthquake Engineering*, Pineridge Press Limited, Swansea, U.K., 1989.
2. J. Donéa (editor), *Advanced Structural Dynamics* Applied Science Publishers Limited, London, U.K., 1980.
3. J. C. Simo & T. J. R. Hughes, *Elastoplasticity and Viscoplasticity, Computational Aspects*, 1988

CENTRO INTERNACIONAL DE METODOS NUMERICOS EN INGENIERIA

Lista de monografías publicadas en la serie de Ingeniería Sísmica

Las monografías pueden adquirirse dirigiéndose al Departamento de Publicaciones del Centro Internacional de Métodos Numericos en Ingeniería, Edificio C1, Campus Norte UPC, c/ Gran Capitán s/n, 08034 Barcelona, teléfono: 93-401.60.37, Fax: 93-401-65-17.

- IS-1. *Qualitative Reasoning for Earthquake Resistant Buildings*,
Luís M. Bozzo, 1993.
- IS-2. *Control predictivo en sistemas de protección sísmica de estructuras*,
R. Andrade Cascante, J. Rodellar, F. López Almasa, 1993.
- IS-3. *Simulación numérica del comportamiento no lineal de presas de hormigón
ante acciones sísmicas*,
M. Galindo, J. Oliver, M. Cervera, 1994.

Los autores interesados en publicar monografías en esta serie deben contactar con el editor para concretar las normas de preparación del texto.