

Una técnica simple para el cálculo de las integrales en el sentido del valor principal en el MEC 3D

Francisco Chirino, Orlando Maeso y Juan José Aznárez

ETS Ingenieros Industriales
Universidad de Las Palmas de Gran Canaria
Campus Universitario de Tafira
35017 Las Palmas de Gran Canaria, España
Tel.: 34-928-45 19 20/14/08, Fax: 34-928-45 18 79
e-mail: maeso@cicei.ulpgc.es

Resumen

Se presenta una estrategia para la evaluación directa de las integrales en el sentido del Valor Principal de Cauchy en el Método de los Elementos de Contorno. El procedimiento propuesto permite regularizar en coordenadas cartesianas los términos fuertemente singulares de los núcleos de integración, que finalmente se expresan como suma de integrales no singulares, evaluables numéricamente con cuadraturas estándar. Se analizan los distintos términos de la solución fundamental y se extrae la singularidad mediante la aplicación del teorema de Stokes. El procedimiento es completamente general y aplicable a elementos tridimensionales curvos de cualquier orden y tipo. Asimismo, puede extrapolarse fácilmente a elementos discontinuos y formulaciones en las que el punto de colocación no forme parte de la discretización. Se aborda en primer lugar el problema elastostático, y a continuación la técnica se generaliza a los casos elastodinámico y poroelastodinámico armónicos. Se presentan distintos resultados que demuestran la validez del procedimiento.

A SIMPLE PROCEDURE FOR COMPUTING PRINCIPAL-VALUE INTEGRALS IN 3D B.E.M.

Summary

A strategy for direct computing Cauchy Principal Value integrals in Boundary Element Method is presented. The proposed procedure allows regularize the strongly singular terms of integration kernels in cartesian coordinates, that finally can be expressed as a sum of non singular integrals computed numerically with low order standard quadratures. The fundamental solution terms are analyzed and the singularity is extracted by the application of Stokes theorem. The procedure has full generality and can be applied to curved tridimensional elements of any order and type. Also, it can be easily extrapolated to discontinuous elements when collocation point is not a discretization node. The elastostatic problem is first studied, and then the technique is generalized to elastodynamic and poroelastodynamic problems in the frequency domain. Several results are presented showing the validity of the procedure.

INTRODUCCIÓN

Sin duda, la búsqueda de una estrategia eficiente para la evaluación de las integrales singulares, que deben entenderse en el sentido del Valor Principal de Cauchy (VPC), sigue siendo un tema del máximo interés dentro del Método de los Elementos de Contorno (MEC). Debe recordarse que los coeficientes de influencia que surgen de evaluar los términos singulares son diagonalmente dominantes en la matriz del sistema de ecuaciones, por lo que la precisión de la técnica global está fuertemente gobernada por la precisión en la evaluación de tales coeficientes. Por otro lado, en cualquier representación integral con el MEC (problemas de potencial, elástico o poroelástico, estáticos o dinámicos) surgen inevitablemente integrales de superficie con singularidades del orden $O(1/r)$ y $O(1/r^2)$, siendo r la distancia desde el punto de aplicación. La posibilidad de una integración analítica se limita en la práctica al caso de elementos planos, por lo que para una aplicación general con funciones de aproximación de orden superior (o incluso jerarquizadas) la integración debe abordarse de forma numérica. Existen en la bibliografía del MEC estrategias indirectas (aunque rigurosas) que evitan el cálculo de las integrales del VPC. Piénsese en el movimiento de sólido rígido (MSR) para el caso elastostático, o el campo equipotencial estático para un problema de potencial (ver Brebbia y Domínguez¹). Estos procedimientos indirectos tienen la ventaja que evitan también el cálculo de los términos libres c_{ij} . Sin embargo tienen algunas desventajas que no pueden obviarse. De hecho no existe un procedimiento general indirecto, y cada problema particular requiere la definición concreta del tipo de estrategia. Por ejemplo, en el caso elástico axisimétrico es preciso definir un estado de tensiones hidroestático para obtener los términos en la dirección radial². Aun más, cuando se trata de problemas armónicos, la aplicación del MSR exige combinar las ecuaciones del problema dinámico con las del caso estático³, y si además el dominio en estudio contiene regiones no acotadas, se hace necesario cerrar la discretización con *elementos ficticios* sobre los que integrar la solución fundamental estática. En otros casos como por ejemplo en los llamados elementos discontinuos (donde todos los nodos están en el interior del elemento y por lo tanto $c_{ij} = 0, 5 \delta_{ij}$) puede resultar más interesante evaluar directamente las integrales del VPC en el elemento singular, que la solución fundamental estática en todos los elementos del contorno.

Es amplia la bibliografía del MEC acerca de la obtención de las integrales del VPC. Así, la *singularidad débil* $O(1/r)$ ha sido resuelta mediante la subdivisión del elemento en triángulos^{4,5} y, o bien usando una transformación a coordenadas polares, o bien una degeneración de cada triángulo hacia un cuadrilátero. En ambos casos se concentran puntos de la cuadratura hacia el punto singular al tiempo que se consigue un jacobiano que se anula en dicho punto. Li *et al.*⁵ resuelven también la *singularidad fuerte* $O(1/r^2)$ para el caso de elementos triangulares planos lineales retomando una idea previa de Cruse⁶ quien la aplicó a elementos triangulares planos y aproximación constante.

Los antecedentes más cercanos de evaluación directa de las integrales del VPC en elementos curvos de orden superior lo constituyen los trabajos de Giugiani *et al.*^{7,8}. Estos autores utilizan una estrategia de transformación a polares desde el punto singular, y una expansión asintótica del integrando, expresado en las nuevas coordenadas. Tras algunas operaciones matemáticas, las integrales singulares de superficie se expresan como suma de integrales regulares.

El trabajo que aquí se presenta sigue la línea de los anteriores en el sentido de que ambos muestran cómo la dificultad de obtención del VPC es realmente ficticia, puesto que la singularidad *se desvanece* con la contribución de los elementos adyacentes. Sin embargo a juicio de los autores es una estrategia más simple y menos costosa desde el punto de vista matemático. El procedimiento es válido para elementos curvos de cualquier orden y tipo y se basa en la identificación concreta de los términos fuertemente singulares, que son regularizados directamente en coordenadas cartesianas de forma conveniente para obtener una integral de superficie y otra lineal extendida al perímetro del elemento, ambas no singulares

y evaluables con cuadraturas estándar. Este método muestra de forma clara dónde radica la contribución de los elementos adyacentes para cancelar la singularidad en el entorno cercano del punto de aplicación. La técnica permite mantener la estructura clásica de los códigos de elementos de contorno por lo que su implementación en programas ya existentes es muy directa. La idea se ilustra abordando en primer lugar el problema elastostático. A continuación se generaliza su aplicación para las formulaciones elastodinámica y poroelastodinámica en régimen armónico, teniendo en cuenta que el orden de las singularidades es el mismo en todos los casos. Para verificar la efectividad del método se abordan algunos experimentos numéricos. Los resultados resultan ser muy precisos en todos los casos, independientemente del tipo de discretización empleada.

PROBLEMAS ELÁSTICOS

Ecuaciones básicas

El punto de partida para el análisis de cualquier problema elástico mediante el MEC lo constituye la representación integral de desplazamientos y tensiones en el contorno Γ del medio en estudio Ω . Así, en el caso de fuerzas de volumen nulas y para un punto i de coordenadas $\mathbf{x}_i$ puede escribirse

$$c_{lk}(\mathbf{x}_i)u_k(\mathbf{x}_i) + \int_{\Gamma} p_{lk}^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i)u_k(\mathbf{x})d\Gamma(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} u_{lk}^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i)p_k(\mathbf{x})d\Gamma(\mathbf{x}) \quad (1)$$

donde las integrales sobre Γ han de ser entendidas en el sentido del Valor Principal de Cauchy (VPC); $c_{lk}(\mathbf{x}_i) = \delta_{lk}$ cuando $\mathbf{x}_i$ es un punto interno a Ω y $c_{lk}(\mathbf{x}_i) = 0,5\delta_{lk}$ cuando $\mathbf{x}_i$ es un punto suave del contorno; $u_k(x)$ y $p_k(x)$ representan las componentes en dirección k de los desplazamientos y tracciones en puntos de Γ siendo $u_{lk}^*(x)$ y $p_{lk}^*(x)$ la solución fundamental en desplazamientos y tensiones respectivamente, para los mismos puntos, en dirección k cuando una carga puntual actúa en la dirección l en el punto i . La expresión (1) es válida tanto para problemas estáticos como dinámicos, si bien en cada caso difiere la expresión de la solución fundamental. Así, para el caso elastostático

$$u_{lk}^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)r}[(3-4\nu)\delta_{lk} + r_{,k}r_{,l}] \quad (2a)$$

$$p_{lk}^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) = -\frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)r^2} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n}[(1-2\nu)\delta_{lk} + 3r_{,k}r_{,l}] + (1-2\nu)(r_{,k}n_l - r_{,l}n_k) \right\} \quad (2b)$$

donde $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|$, $\mathbf{n}$ es la normal exterior al contorno en el punto $\mathbf{x}$, siendo μ y ν las constantes elásticas del material. Para el problema elastodinámico en el dominio de la frecuencia

$$u_{lk}^*((\mathbf{x}, \mathbf{x}_i; \omega) = \frac{1}{4\pi\rho c_2^2}[\Psi\delta_{lk} - \chi r_{,k}r_{,l}] \quad (3a)$$

$$p_{lk}^*((\mathbf{x}, \mathbf{x}_i; \omega) = \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n}(A\delta_{lk} + Br_{,l}r_{,k}) + (Ar_{,k}n_l + Cr_{,l}n_k) \right\} \quad (3b)$$

donde

$$\begin{aligned} A &= \frac{d\Psi}{dr} - \frac{\chi}{r} \\ B &= 2 \left(\frac{2\chi}{r} - \frac{d\chi}{dr} \right) \\ C &= \left[\left(\frac{c_1}{c_2} \right)^2 - 2 \right] \left(\frac{d\Psi}{dr} - \frac{d\chi}{dr} - \frac{2\chi}{r} \right) - \frac{2\chi}{r} \end{aligned} \quad (3c)$$

siendo c_1 y c_2 las velocidades de las ondas P y S respectivamente. La expresión de las funciones ψ y χ se escriben en el Apéndice.

ELEMENTOS DE CONTORNO

Haciendo uso de notación vectorial la ecuación (1) puede ser escrita como

$$\mathbf{c}^i \mathbf{u}^i + \int_{\Gamma} \mathbf{p}^* \mathbf{u} d\Gamma = \int_{\Gamma} \mathbf{u}^* \mathbf{p} d\Gamma \quad (4)$$

donde $\mathbf{u}$ y $\mathbf{p}$ representan vectores de tres componentes y $\mathbf{c}^i$, $\mathbf{u}^*$ y $\mathbf{p}^*$ tensores de 3×3 . Para el planteamiento numérico de esta ecuación, el contorno Γ se divide en un número NE de elementos. Cada elemento j contiene NJ nodos, de manera que los campos de desplazamientos $\mathbf{u}$ y tracciones $\mathbf{p}$ sobre en el mismo se pueden aproximar a partir de los valores nodales

$$\mathbf{u} = \Phi \mathbf{u}^j \quad \mathbf{p} = \Phi \mathbf{p}^j \quad (5)$$

donde $\mathbf{u}^j$ y $\mathbf{p}^j$ representan vectores de $3NJ$ componentes y Φ una matriz de $(3 \times NJ)$ que contiene las funciones de forma. Si bien el tratamiento de las singularidades es directamente extrapolable a cualquier tipo y orden de elementos, en el presente análisis se han utilizado elementos cuadráticos cuadriláteros y triangulares de nueve y seis nodos respectivamente (Figura 1). Las funciones de forma para los primeros en coordenadas intrínsecas ξ_1 y ξ_2 se escriben a continuación

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{1}{4} \xi_1 (\xi_1 - 1) \xi_2 (\xi_2 - 1); & \phi_2 &= \frac{1}{2} (1 - \xi_1^2) \xi_2 (\xi_2 - 1); \\ \phi_3 &= \frac{1}{4} \xi_1 (\xi_1 + 1) \xi_2 (\xi_2 - 1); & \phi_4 &= \frac{1}{2} \xi_1 (\xi_1 + 1) (1 - \xi_2^2); \\ \phi_5 &= \frac{1}{4} \xi_1 (\xi_1 + 1) \xi_2 (\xi_2 + 1); & \phi_6 &= \frac{1}{2} (1 - \xi_1^2) \xi_2 (\xi_2 + 1); \\ \phi_7 &= \frac{1}{4} \xi_1 (\xi_1 - 1) \xi_2 (\xi_2 + 1); & \phi_8 &= \frac{1}{2} \xi_1 (\xi_1 - 1) (1 - \xi_2^2); \\ \phi_9 &= (1 - \xi_1^2) (1 - \xi_2^2) \end{aligned} \quad (6)$$

Para los elementos triangulares las funciones de forma son

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \xi_1 (2\xi_1 - 1); & \phi_2 &= \xi_2 (2\xi_2 - 1); & \phi_3 &= \xi_3 (2\xi_3 - 1); \\ \phi_4 &= 4\xi_1 \xi_2; & \phi_5 &= 4\xi_2 \xi_3; & \phi_6 &= 4\xi_1 \xi_3; \\ & & & & (\xi_3 &= 1 - \xi_1 - \xi_2) \end{aligned} \quad (7)$$

La geometría del elemento es interpolada de la misma forma

$$\mathbf{x} = \Phi \mathbf{x}^j \quad (8)$$

donde $\mathbf{x}^j$ contiene las $3NJ$ coordenadas de los nodos del elemento j . Tras el proceso de discretización la ecuación (4) se convierte en

$$\mathbf{c}^i \mathbf{u}^i + \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \int_{\Gamma_j} \mathbf{p}^* \Phi d\Gamma \right\} \mathbf{u}^j = \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \int_{\Gamma_j} \mathbf{u}^* \Phi d\Gamma \right\} \mathbf{p}^j \quad (9)$$

la cual puede escribirse para todos los nodos del contorno para obtener finalmente el sistema de ecuaciones

$$\mathbf{H}\mathbf{u} = \mathbf{G}\mathbf{p} \quad (10)$$

donde $\mathbf{u}$ y $\mathbf{p}$ contienen todos los valores nodales del problema. Una vez aplicadas las condiciones de contorno puede resolverse (10) y así obtener los valores desconocidos de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{p}$ en los nodos del contorno. Durante el desarrollo, las integrales a evaluar sobre cada elemento para cada punto de colocación son del tipo

$$\begin{aligned} \mathbf{G}\mathbf{W} &= \int_{\Gamma_j} \mathbf{u}^* \Phi d\Gamma = \int_{\xi_1} \int_{\xi_2} \mathbf{u}^* \Phi |J_A| d\xi_1 d\xi_2 \\ \mathbf{H}\mathbf{W} &= \int_{\Gamma_j} \mathbf{p}^* \Phi d\Gamma = \int_{\xi_1} \int_{\xi_2} \mathbf{p}^* \Phi |J_A| d\xi_1 d\xi_2 \end{aligned} \quad (11)$$

donde $|J_A|$ es el jacobiano de la transformación de las coordenadas cartesianas a las coordenadas naturales ξ_1 y ξ_2 (Figura 1). La evaluación de estas integrales puede realizarse mediante una cuadratura gaussiana estándar cuando el punto de colocación i no pertenece al elemento j . En caso contrario los núcleos $\mathbf{u}^*$ y $\mathbf{p}^*$ presentan singularidades del orden $(1/r)$ y $(1/r^2)$ respectivamente (2)(3). Las singularidades del primer tipo pueden ser tratadas numéricamente mediante un proceso de subdivisión del elemento en triángulos^{4,5}. En el presente artículo se plantea un procedimiento para la evaluación directa de las integrales singulares $O(1/r^2)$.

Figura 1. Elementos cuadráticos tridimensionales

EVALUACIÓN DE LAS INTEGRALES FUERTEMENTE SINGULARES

Problema elastostático

A la vista de (2b) las integrales correspondientes a la solución fundamental en tensiones serán del tipo

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_j} p_{lk}^* \phi_q d\Gamma = & -\frac{1}{8\pi(1-\nu)} \left\{ \int_{\Gamma_j} \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial n} [(1-2\nu)\delta_{lk} + 3r_{,k}r_{,l}] \phi_q d\Gamma + \right. \\ & \left. + (1-2\nu) \int_{\Gamma_j} \frac{1}{r^2} (r_{,k}n_l - r_{,l}n_k) \phi_q d\Gamma \right\} \end{aligned} \quad (12)$$

Como $\partial r / \partial n = O(r)$, la primera integral es regular y puede evaluarse numéricamente. La segunda, si $l \neq k$, presenta una singularidad del tipo $(1/r^2)$ cuando $\phi_q \neq 0$ en el punto de colocación. El proceso de cancelación de esta singularidad, que representa el núcleo central de este artículo, se realiza en varias fases. En primer lugar, podemos reescribir el segundo término de (12) como sigue (ver Davis y Rabinowitz⁹)

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_j} \frac{1}{r^2} (r_{,k}n_l - r_{,l}n_k) \phi_q d\Gamma = & \int_{\Gamma_j} \frac{1}{r^2} (r_{,k}n_l - r_{,l}n_k) (\phi_q - \phi_q^i) d\Gamma + \\ & + \phi_q^i \int_{\Gamma_j} \frac{1}{r^2} (r_{,k}n_l - r_{,l}n_k) d\Gamma = I_1 + I_2 \end{aligned} \quad (13)$$

siendo ϕ_q^i el valor de la función de forma en el punto de colocación. Con ello, I_1 es regular y puede evaluarse numéricamente. La singularidad se concentra en I_2 . La idea consiste en expresar el subintegrando de I_2 en términos del flujo del rotacional de un campo vectorial. Así, por ejemplo, para el caso $l = 1$ y $k = 2$ el campo vectorial es del tipo $Z = 1/r \mathbf{e}_3$, donde $\mathbf{e}_3$ representa un vector unitario en la dirección de x_3 . Llamando $\mathbf{n}$ a la normal exterior al elemento en cualquier punto, podemos escribir

$$\int_{\Gamma_j} (\nabla \times Z) \mathbf{n} d\Gamma = - \int_{\Gamma_j} \frac{1}{r^2} (r_{,2}e_1 - r_{,1}e_2) \mathbf{n} d\Gamma = - \int_{\Gamma_j} \frac{1}{r^2} (r_{,2}n_1 - r_{,1}n_2) d\Gamma \quad (14)$$

Aplicando el teorema de Stokes al citado campo vectorial

$$\int_{\Gamma_j} (\nabla \times Z) \mathbf{n} d\Gamma = \oint_{S_j} Z d\mathbf{S} \quad (15)$$

donde S_j representa el perímetro del elemento Γ_j (la Figura 2 muestra el caso de aplicación de carga en el nodo 1). Todas las integrales están entendidas en el sentido del VPC. Así, introduciendo (14) en (15)

$$- \int_{\Gamma_j} \frac{1}{r^2} (r_{,2}n_1 - r_{,1}n_2) d\Gamma = \oint_{S_j} \frac{1}{r} \mathbf{e}_3 d\mathbf{S} = \oint_{S_j} \frac{1}{r} dx_3 \quad (16)$$

Figura 2. Recorrido de la integral curvilínea. Colocación nodo 1

Por tanto, si $l = 1$, $k = 2$; $Z = 1/r\mathbf{e}_3$, podemos escribir

$$I_2 = - \oint_{S_j} \frac{1}{r} dx_3 \quad (17a)$$

Operando de forma análoga se obtienen el resto de términos singulares. Para $l = 1$, $k = 3$; $Z = 1/r\mathbf{e}_2$

$$I_2 = \oint_{S_j} \frac{1}{r} dx_2 \quad (17b)$$

si $l = 2$, $k = 3$; $Z = 1/r\mathbf{e}_1$

$$I_2 = - \oint_{S_j} \frac{1}{r} dx_1 \quad (17c)$$

Aún cuando estas integrales monodimensionales mantienen la singularidad, el camino para su cancelación ha quedado trazado. Consideremos el elemento Γ_j y los de su entorno tal y como aparecen en la Figura 3. La integral curvilínea en que ha quedado transformada I_2 sobre Γ_j puede descomponerse según las curvas que constituyen el perímetro del elemento

$$\oint_{S_j} \frac{1}{r} dx_\alpha = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_{j1}} \frac{1}{r} dx_\alpha + \int_{S_{j2}} \frac{1}{r} dx_\alpha + \int_{S_{j3}} \frac{1}{r} dx_\alpha + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_{j4}} \frac{1}{r} dx_\alpha + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_{j\varepsilon}} \frac{1}{\varepsilon} dx_\alpha \quad (18)$$

Figura 3. Cancelación de la singularidad. Colocación nodo esquina

Las integrales sobre S_{j2} y S_{j3} (curvas que no contienen el punto de colocación) no presentan problemas y pueden ser evaluadas de acuerdo a una cuadratura estándar monodimensional. Las extendidas a lo largo de S_{j1} y S_{j4} (singulares) se cancelan con las correspondientes a los elementos Γ_k y Γ_n . Por último, la integral curvilínea sobre $S_{j\epsilon}$, lógicamente, no requiere ser evaluada, ya que si se considera la aportación conjunta de los elementos que confluyen en el punto de colocación ($m = j, k, l, n$), puede ser escrita como

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\sum_m \int_{S_{m\epsilon}} \frac{1}{\epsilon} dx_\alpha \right) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\epsilon} \oint_{S_\epsilon} dx_\alpha \right) = 0 \quad (19)$$

Por tanto, la integral de superficie en el elemento (12) ha sido expresada como suma de dos integrales de superficie y una tercera curvilínea, todas ellas regulares. La Figura 4 representa la generalización del procedimiento para otras situaciones del punto de colocación. Esta técnica es directamente aplicable si el punto de colocación no corresponde a ningún nodo de la discretización. También lo es para problemas que impliquen soluciones fundamentales con el mismo tipo de singularidad. A continuación veremos algunos.

Figura 4. Cancelación de la singularidad. Colocación nodo interno o borde

Problema elastodinámico en el dominio de la frecuencia

Como es bien conocido, la solución fundamental en movimientos y tensiones para este problema (3a,b) presenta una singularidad del mismo tipo que el caso elastostático ($1/r$ y $1/r^2$ respectivamente) cuando $\phi_q \neq 0$. La singularidad fuerte, como en el caso anterior, se encuentra en el segundo término de (3b) (ver Domínguez³)

$$I = \int_{\Gamma_j} (Ar_{,k}n_l + Cr_{,l}n_k)\phi_q d\Gamma \quad (20)$$

siendo $A = O(1/r^2)$ y $C = O(1/r^2)$. Las expresiones de estas funciones pueden ser reescritas de la manera siguiente

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{r^2} A' \\ C &= \frac{1}{r^2} C' \end{aligned} \quad (21)$$

A partir de aquí, un proceso de eliminación de la singularidad similar al utilizado anteriormente nos va a conducir al término fuertemente singular tal como aparece en (12).

Para ello, estudiemos primero A' y C' en el límite. Puede llegarse a

$$\begin{aligned}\lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{1}{K} A' \right) &= -1 \\ \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{1}{K} C' \right) &= 1\end{aligned}\tag{22}$$

siendo $K = (1 - 2\nu)/[2(1 - \nu)]$. Con ello, (20) puede escribirse como sigue

$$\begin{aligned}I &= K \int_{\Gamma_j} \frac{1}{r^2} \left[\left(\frac{1}{K} A' + 1 \right) r_{,k} n_l + \left(\frac{1}{K} C' - 1 \right) r_{,l} n_k \right] \phi_q d\Gamma \\ &= -K \int_{\Gamma_j} \frac{1}{r^2} (r_{,k} n_l - r_{,l} n_k) \phi_q d\Gamma\end{aligned}\tag{23}$$

siendo la primera de estas integrales regular y, por tanto evaluable numéricamente. La segunda puede obtenerse con procedimiento descrito en el subapartado anterior.

PROBLEMA POROELASTODINÁMICO EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA

Ecuaciones básicas

Replanteemos para este problema el significado de las variables de la ecuación integral de partida (4).

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \tau \end{Bmatrix} \quad \mathbf{p} = \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ U_n \end{Bmatrix}\tag{24}$$

donde u_k y t_k constituyen, respectivamente, las componentes del desplazamiento y la tracción del esqueleto sólido; τ y U_n representan, respectivamente, la tensión equivalente y el movimiento normal de la fase líquida. Los tensores de la solución fundamental son ahora

$$\mathbf{u}^* = \begin{pmatrix} u_{11}^* & u_{12}^* & u_{13}^* & -\tau_1^* \\ u_{21}^* & u_{22}^* & u_{23}^* & -\tau_2^* \\ u_{31}^* & u_{32}^* & u_{33}^* & -\tau_3^* \\ u_{01}^* & u_{02}^* & u_{03}^* & -\tau_0^* \end{pmatrix} \quad \mathbf{p}^* = \begin{pmatrix} t_{11}^* & t_{12}^* & t_{13}^* & -U_{n1}^* \\ t_{21}^* & t_{22}^* & t_{23}^* & -U_{n2}^* \\ t_{31}^* & t_{32}^* & t_{33}^* & -U_{n3}^* \\ t_{01}^* & t_{02}^* & t_{03}^* & -U_{n0}^* \end{pmatrix}\tag{25}$$

y c_i el tensor correspondiente al término libre

$$\mathbf{c}^i = \begin{pmatrix} c_{11}^e & c_{12}^e & c_{13}^e & 0 \\ c_{21}^e & c_{22}^e & c_{23}^e & 0 \\ c_{31}^e & c_{32}^e & c_{33}^e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -Jc^p \end{pmatrix}\tag{26}$$

donde c_{lk}^e representan las componentes del término libre para el problema elastostático con las propiedades del esqueleto sólido, ya que la solución fundamental poroelastodinámica tiende a la elastostática cuando $r \rightarrow 0$. Asimismo, c^p coincide con el término libre correspondiente al problema de potencial estático. Detalles relativos a la formulación integral poroelastodinámica planteada pueden encontrarse en Domínguez¹⁰.

Solución fundamental

La igualdad integral para el problema poroelastodinámico en el dominio de la frecuencia ha sido obtenida para dos conjuntos de soluciones fundamentales. El primero corresponde a la aplicación de una carga puntual en las tres direcciones del esqueleto sólido. El segundo a una fuente puntual aplicada en la fase líquida. La respuesta en términos de movimiento y tensión en el esqueleto sólido, tensión equivalente y movimiento normal en el fluido para ambos casos de carga, se escriben a continuación. Esfuerzo especial se ha invertido en conseguir escribir las expresiones de forma tal que los distintos términos singulares queden indentificados por comparación con la solución fundamental elastodinámica, ya estudiada.

a) Carga aplicada en dirección l en el esqueleto sólido

a1) Respuesta en movimientos y tensiones en dirección k en el esqueleto sólido

$$u_{lk}^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i, \omega) = \frac{1}{4\pi(\lambda + 2\mu)z_{21}} [\hat{\Psi}\delta_{lk} - \hat{\chi}r_{,k}r_{,l}] \quad (27a)$$

$$t_{lk}^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i, \omega) = \frac{\mu}{4\pi(\lambda + 2\mu)z_{21}} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} (\hat{A}\delta_{lk} + \hat{B}r_{,l}r_{,k}) + (\hat{A}r_{,k}n_l + \hat{C}r_{,l}n_k) \right\} \quad (27b)$$

donde

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \frac{d\hat{\Psi}}{dr} - \frac{\hat{\chi}}{r} \\ \hat{B} &= 2 \left(\frac{2\hat{\chi}}{r} - \frac{d\hat{\chi}}{dr} \right) \\ \hat{C} &= \frac{\lambda}{\mu} \left(\frac{d\hat{\Psi}}{dr} - \frac{d\hat{\chi}}{dr} - \frac{2\hat{\chi}}{r} \right) - \frac{2\hat{\chi}}{r} + \frac{Q}{R\mu} i\omega\eta\hat{\phi} \end{aligned} \quad (27c)$$

a2) Respuesta en tensiones equivalentes y desplazamiento normal en el fluido

$$\tau_l^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i, \omega) = \frac{i\omega\eta}{4\pi(\lambda + 2\mu)z_{21}} \hat{\phi}r_{,l} \quad (27d)$$

$$U_{nl}^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i, \omega) = \frac{1}{4\pi(\lambda + 2\mu)z_{21}} \left(\frac{\partial r}{\partial n} \hat{D}r_{,l} + \hat{E}n_l \right) \quad (27e)$$

siendo

$$\begin{aligned} \hat{D} &= Ji\omega\eta \left(\frac{d\hat{\phi}}{dr} - \frac{\hat{\phi}}{r} \right) - Z\hat{\chi} \\ \hat{E} &= Ji\omega\eta \frac{\hat{\phi}}{r} + Z\hat{\Psi} \end{aligned} \quad (27f)$$

b) Fuente puntual en la fase líquida

b1) Respuesta el movimientos y tensiones en dirección k en el esqueleto sólido

$$u_{ok}^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i, \omega) = \frac{\gamma}{4\pi(\lambda + 2\mu)z_{21}} \hat{\phi}r_{,k} \quad (27g)$$

$$t_{ok}^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i, \omega) = \frac{\gamma\mu}{4\pi(\lambda + 2\mu)z_{21}} \left(\frac{\partial r}{\partial n} \hat{F}r_{,k} + \hat{G}n_k \right) \quad (27h)$$

siendo

$$\begin{aligned}\hat{F} &= 2 \left(\frac{d\hat{\varphi}}{dr} - \frac{\hat{\varphi}}{r} \right) \\ \hat{G} &= \frac{\lambda}{\mu} \left(\frac{d\hat{\varphi}}{dr} + \frac{2\hat{\varphi}}{r} \right) + \frac{2\hat{\varphi}}{r} + \frac{Q}{R\gamma} \hat{\kappa}\end{aligned}\tag{27i}$$

b2) Respuesta en tensiones equivalentes y desplazamientos normales en el fluido

$$\tau_o^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i, \omega) = \frac{\mu}{4\pi(\lambda + 2\mu)z_{21}} \hat{\kappa}\tag{27j}$$

$$U_{no}^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i, \omega) = \frac{\mu}{4\pi(\lambda + 2\mu)z_{21}} \frac{\partial r}{\partial n} \hat{H}\tag{27k}$$

donde

$$\hat{H} = J \frac{d\hat{\kappa}}{dr} + \frac{Z\gamma}{\mu} \hat{\varphi}\tag{27l}$$

En el Apéndice están recogidas las expresiones de las todas las funciones que aparecen en la solución fundamental. El análisis detallado del tipo de singularidad que implican los términos de la misma se resume a continuación

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_1} u_{lk}^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1, \omega) &= 0 \left(\frac{1}{r} \right) & \lim_{x \rightarrow x_1} t_{lk}^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1, \omega) &= 0 \left(\frac{1}{r^2} \right) \\ \lim_{x \rightarrow x_1} \tau_k^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1, \omega) &= 0 \left(r^0 \right) & \lim_{x \rightarrow x_1} U_{ni}^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1, \omega) &= 0 \left(\frac{1}{r} \right) \\ \lim_{x \rightarrow x_1} u_{ok}^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1, \omega) &= 0 \left(r^0 \right) & \lim_{x \rightarrow x_1} t_{ok}^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1, \omega) &= 0 \left(\frac{1}{r} \right) \\ \lim_{x \rightarrow x_1} \tau_o^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1, \omega) &= 0 \left(\frac{1}{r} \right) & \lim_{x \rightarrow x_1} U_{no}^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1, \omega) &= 0 \left(\frac{1}{r} \right)\end{aligned}\tag{28}$$

donde la singularidad problemática se centra en los términos correspondientes a la tensión en el esqueleto sólido debido a una carga puntual en el mismo.

Al igual que en el caso de los problemas elásticos, es posible emplear la técnica del MSR para obviar el cálculo tanto de las integrales del VPC como el de los términos libres $\mathbf{c}^i$. Así, un movimiento *estático* del esqueleto sólido, con presiones y movimientos nulos de la fase líquida, permite obtener los términos de la submatriz de 3×3 del esqueleto sólido sobre la diagonal principal de $\mathbf{H}$. Por otro lado, un campo equipotencial estático de presiones en el fluido, con tensiones y desplazamientos nulos en el sólido, permite obtener la integral de la solución fundamental en movimientos para el fluido junto al término $\mathbf{c}^p$. En ambos casos, esta estrategia supone evaluar también la parte no singular de la solución fundamental dinámica. El resto de términos, con singularidades evaluables numéricamente, incorporan aportaciones nulas del término libre. A continuación se generaliza la estrategia ya presentada para la evaluación directa de las integrales del VPC al caso poroelastodinámico.

Evaluación de las integrales singulares

Como ya se ha comentado, la integración de los términos correspondientes a las tensiones sobre el esqueleto sólido cuando la carga actúa en éste, presenta una singularidad del tipo $(1/r^2)$ (28). Dicha singularidad es del mismo tipo que la analizada en los problemas elásticos e igualmente se encuentra centrada en el segundo término de la solución fundamental (27b)

$$\hat{I} = \int_{\Gamma_j} (\hat{A} r_{,k} n_l + \hat{C} r_{,l} n_k) \phi_q d\Gamma \quad (29)$$

siendo $\hat{A} = O(1/r^2)$ y $\hat{C} = O(1/r^2)$. Es sencillo escribir

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \frac{1}{r^2} \hat{A}' \\ \hat{C} &= \frac{1}{r^2} \hat{C}' \end{aligned} \quad (30)$$

Un análisis en el límite de estos términos permite llegar a

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{1}{z_{21}} \hat{A}' \right) &= -1 \\ \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{1}{z_{21}} \hat{C}' \right) &= 1 \end{aligned} \quad (31)$$

Por tanto, (29) puede ser escrita como sigue

$$\begin{aligned} \hat{I} &= z_{21} \int_{\Gamma_j} \frac{1}{r^2} \left[\left(\frac{1}{z_{21}} \hat{A}' + 1 \right) r_{,k} n_l + \left(\frac{1}{z_{21}} \hat{C}' - 1 \right) r_{,l} n_k \right] \phi_q d\Gamma \\ &= z_{21} \int_{\Gamma_j} \frac{1}{r^2} (r_{,k} n_l - r_{,l} n_k) \phi_q d\Gamma \end{aligned} \quad (32)$$

La primera integral de (32) es regular. La segunda ha quedado preparada para ser evaluada teniendo en cuenta la aportación de los elementos contiguos, tal y como se ha desarrollado para los casos elastostático y elastodinámico.

EJEMPLOS NUMÉRICOS

Problema elástico

Para validar el procedimiento de obtención de las integrales singulares en el sentido del VPC, se analiza el cuerpo tridimensional que aparece en la Figura 5 para un problema elastostático. La misma idea y geometría fue empleada por Guiggiani y Gigante⁸ para un test similar. La discretización consta de 16 elementos cuadriláteros de nueve nodos. El material está caracterizado por las constantes $\mu = 1$ y $\nu = 0,3$.

Los núcleos de integración correspondientes a las tensiones han sido obtenidas para tres puntos de colocación (1, 2 y 3) con distintas geometrías locales. Los núcleos recogen la aportación de todos los elementos a los que cada nodo pertenece. Los resultados obtenidos se comparan con los evaluados de forma indirecta a través de la técnica del movimiento de sólido rígido (Tablas I, II y III). Esta técnica, como se ha comentado, permite la obtención de la suma de las integrales en el sentido del VPC y el coeficiente c_{ik} correspondiente al término libre.

Figura 5. Sólido elástico. Geometría y discretización

Núcleo	Int. VPC (1)	c_{lk} (2)	Total (1)+(2)	MRS
$h_{11} = h_{22}$	-0,017148	0,495573	0,478425	0,478425
$h_{12} = h_{21}$	0,012660	0,003162	0,015822	0,015825
$h_{13} = h_{31}$	$\cong 0, 0$	$\cong 0, 0$	$\cong 0, 0$	$\cong 0, 0$
$h_{23} = h_{32}$	$\cong 0, 0$	$\cong 0, 0$	$\cong 0, 0$	$\cong 0, 0$
h_{33}	-0,014011	0,495573	0,481562	0,481562

Tabla I. Núcleos de integración en *nodo 1* (contorno suave). Evaluación directa de la integral del VPC y cálculo indirecto utilizando MRS

Núcleo	Int. VPC (1)	c_{lk} (2)	Total (1)+(2)	MRS
h_{11}	-0,024929	0,25	0,225071	0,225093
$h_{12} = h_{21}$	0,008491	0,0	0,008491	0,008492
h_{13}	-0,011095	-0,043504	-0,054599	-0,054623
h_{22}	-0,007947	0,25	0,242053	0,242058
h_{23}	-0,028070	-0,105028	-0,133098	-0,133102
h_{31}	0,011561	-0,043504	-0,031943	-0,031966
h_{32}	0,029196	-0,105028	-0,075832	-0,075836
h_{33}	-0,011937	0,25	0,238063	0,238054

Tabla II. Núcleos de integración en *nodo 2* (borde del contorno). Evaluación directa de la integral del VPC y cálculo indirecto utilizando MRS

Núcleo	Int. VPC (1)	c_{lk} (2)	Total (1)+(2)	MRS
h_{11}	-0,007452	0,123096	0,115644	0,115644
h_{12}	0,008317	-0,056830	-0,048513	-0,048513
h_{13}	-0,000717	0,056048	0,055331	0,055330
h_{21}	-0,007874	-0,056830	-0,064704	-0,064704
h_{22}	-0,001121	0,124682	0,123561	0,123562
h_{23}	-0,010433	-0,056836	-0,067269	-0,067268
h_{31}	-0,004972	0,056048	0,051076	0,051075
h_{32}	0,010691	-0,056836	-0,046145	-0,046144
h_{33}	-0,003502	0,123889	0,120387	0,120386

Tabla III. Núcleos de integración en *nodo 3* (esquina del contorno). Evaluación directa de la integral del VPC y cálculo indirecto utilizando MRS

En la evaluación directa de los núcleos de integración singulares, las integrales de superficie (con singularidad débil), previa subdivisión en triángulos, se realizan mediante una cuadratura gaussiana bidimensional estándar con 6×6 puntos. Para las integrales curvilíneas (15a, b y c) se utiliza una cuadratura monodimensional con seis puntos en cada lado del elemento.

El análisis realizado requiere de la obtención del termino libre para la discretización empleada. Se ha seguido el procedimiento propuesto por Hartmann¹¹. Los valores obtenidos de c_{lk} , como es lógico, dependen de la geometría local y de la discretización empleada a través de la ecuación (8).

Como puede observarse en las tablas adjuntas (columnas 3 y 4), los resultados proporcionados por ambas técnicas son prácticamente coincidentes. Se concluye que el planteamiento directo de resolución de las integrales en el sentido del VPC presentado en este artículo es insensible a la discretización local, sencillo en su implementación y, según los resultados obtenidos, competente.

Problema poroelastodinámico. Dominio cerrado

A la hora de contrastar el procedimiento empleado para la integración de los núcleos en problemas dinámicos nos centraremos en el caso de dominios poroelásticos. En primer lugar analizaremos un problema monodimensional con solución analítica conocida¹². Dicho problema consiste en un sólido saturado confinado entre paredes rígidas sin fricción e impermeables. La parte superior de la columna está drenada y sometida a una tensión armónica del tipo $-P_o e^{i\omega t}$ (Figura 6a). Las propiedades del material¹³ son: $\mu = 6 \times 10^9$ N/m², $\lambda = 4 \times 10^9$ N/m², $R = 0,444 \times 10^9$ N/m², $Q = 1,399 \times 10^9$ N/m², $b = 4 \times 10^9$ N/m⁴, $\beta = 0,19$, $\rho_s = 2800$ kg/m³, $\rho_f = 1000$ kg/m³, $\rho_a = 150$ kg/m³. La discretización empleada se muestra en la Figura 6b. Consta de 14 elementos cuadriláteros iguales de nueve nodos.

Figura 6. Sólido poroelástico monodimensional bajo carga dinámica: a) Condiciones de contorno; b) Discretización empleada

La Figura 7 muestra el módulo del desplazamiento correspondiente al esqueleto sólido en la parte superior de la columna frente a la frecuencia. El desplazamiento es normalizado con el desplazamiento estático de un medio elástico con las propiedades no drenadas del material. La frecuencia es adimensionalizada con la primera frecuencia natural del mismo medio

$$\omega_1 = \frac{\pi}{2L} \sqrt{\frac{E_u}{\rho}}$$

donde

$$E_u = \frac{2\mu(1 - \nu_u)}{1 - 2\nu_u}; \quad \rho = (1 - \beta)\rho_s + \beta\rho_f$$

siendo L la longitud de la probeta, ρ_s la densidad del sólido, ρ_f la densidad del fluido, β la porosidad y E_u y ν_u (0,33) el módulo de elasticidad y el coeficiente de Poisson del material no drenado, respectivamente. Esta normalización con las propiedades no drenadas se realiza teniendo en cuenta la baja permeabilidad del medio. Ello hace que el material se comporte de manera que el esqueleto sólido y el fluido trabajen de forma conjunta. Sólo a baja frecuencia puede considerarse un comportamiento drenado del material.

Figura 7. Módulo del desplazamiento del esqueleto sólido en cara superior

El rango de frecuencia adimensional estudiado va de 0 a 4 y, a la vista de la figura, se aprecia una coincidencia total entre la solución exacta y la aportada por modelo MEC tridimensional.

La Figura 8 muestra la presión de poro para cuatro frecuencias adimensionales (0,2; 0,5; 0,8 y 1,2) en puntos internos a lo largo de la profundidad de la columna. En este caso, como es conocido, los núcleos de integración no son singulares y una cuadratura gaussiana estándar de 6×6 puntos es suficiente para su correcta evaluación. Una vez más, la concordancia entre la solución exacta y la aportada por el MEC es evidente.

Figura 8. Módulo de la presión de poro en puntos internos

Flexibilidad dinámica de cimentaciones superficiales

Se ha escogido este ejemplo porque se trata de un problema donde el dominio en estudio es infinito, y por lo tanto, cualquier técnica indirecta de evaluación de los términos singulares a través del MSR exige *cerrar* el contorno con elementos *ficticios*, esto es, elementos que sólo se emplean para integrar sobre ellos la solución fundamental estática, pero sobre los cuales no se evalúa incógnita alguna. Esto representa una clara desventaja del procedimiento indirecto de MSR frente a la evaluación directa del VPC.

Se va a analizar la respuesta vertical de una cimentación superficial rígida de geometría cuadrada sobre un semiespacio poroelástico. La discretización únicamente incluye la interfase cimentación-terreno. Teniendo en cuenta la simetría del problema, sólo se trabaja con un cuarto de la geometría, la cual es discretizada con 16 elementos cuadriláteros iguales. Las condiciones de contorno en la interfase se consideran relajadas e impermeables. Las propiedades del medio poroso son las correspondientes a una arena gruesa^{14,15}: $\mu = 9,79 \times 10^7 \text{ N/m}^2$, $\lambda = 1,47 \times 10^8 \text{ N/m}^2$, $R = 2,74 \times 10^8 \text{ N/m}^2$, $Q = 2,80 \times 10^8 \text{ N/m}^2$, $b = 0,89 \times 10^7 \text{ N/m}^4$, $\beta = 0,48$, $\rho_s = 2670 \text{ kg/m}^3$, $\rho_f = 994 \text{ kg/m}^3$. Se considera nula la densidad añadida ($\rho_a = 0$).

Se prescribe un desplazamiento unitario en la dirección vertical a los nodos de la interfase y se determina la flexibilidad adimensional correspondiente $C_{\nu\nu} = \mu B / K_{\nu\nu}$, siendo B el semiancho de la cimentación y $K_{\nu\nu}$ la impedancia dinámica vertical. Las Figura 9 y Figura 10 muestran respectivamente la parte real e imaginaria de $C_{\nu\nu}$ frente a la frecuencia adimensional. Los resultados obtenidos se comparan con los presentados por Halpern y Christiano¹⁴ para el mismo medio. Estos autores emplean una estrategia de colocación y evaluación analítica de los coeficientes de influencia expresados a partir de funciones de Green, lo cual puede abordarse dada la simplicidad de la geometría del problema. Los valores de estos autores se han extraído directamente de las figuras de su artículo y podrían tener pequeñas discrepancias con los resultados numéricos. Se aprecia un buen acuerdo en todo el rango de frecuencias.

Figura 9. Cimentación superficial cuadrada impermeable. Flexibilidad vertical. Parte real

Figura 10. Cimentación superficial cuadrada impermeable. Flexibilidad vertical. Parte imaginaria

CONCLUSIONES

En este artículo se ha desarrollado un procedimiento para la evaluación directa de las integrales del VPC en el Método de los Elementos de Contorno para problemas tridimensionales. Dicho procedimiento constituye una estrategia simple, robusta y aplicable a elementos curvos de cualquier orden y tipo. La técnica se ha aplicado a problemas elastostáticos y generalizado a problemas elastodinámicos y poroelastodinámicos, ambos en el dominio de la frecuencia. En los tres casos, los términos fuertemente singulares son idénticos y pueden evaluarse de la misma forma.

La estrategia desarrollada reduce las integrales singulares en el sentido del VPC a una suma de integrales regulares evaluables de forma numérica con cuadraturas estándar de bajo orden. El término fuertemente singular se regulariza en coordenadas cartesianas. La incorporación del procedimiento a los programas tridimensionales de elementos de contorno ya existentes es directa. Se han presentado resultados numéricos para algunos problemas. La comparación con la solución exacta o la numérica aportada por otros autores avalan la validez del planteamiento.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido financiado en parte por la Dirección General de Enseñanza Superior e Investigación Científica de España, a través del Proyecto subvencionado PB96-1322-C03-03.

APÉNDICE

La expresión de las funciones Ψ y χ para el problema elastodinámico son

$$\Psi = - \left(\frac{c_2}{c_1} \right)^2 \left(\frac{1}{z_1^2 r^2} - \frac{1}{z_1 r} \right) E_1 + \left(\frac{1}{z_2^2 r^2} - \frac{1}{z_2 r} + 1 \right) E_2 \quad (A1)$$

$$\chi = - \left(\frac{c_2}{c_1} \right)^2 \left(\frac{3}{z_1^2 r^2} - \frac{3}{z_1 r} + 1 \right) E_1 + \left(\frac{3}{z_2^2 r^2} - \frac{3}{z_2 r} + 1 \right) E_2 \quad (A2)$$

siendo $z_j = -ik_j$ y $E_j = e^{z_j r}/r$ ($j = 1, 2$), donde k_1 y k_2 representan los números de onda de las ondas longitudinales (P) y transversales (S).

Las funciones correspondientes al problema poroelastodinámico son

$$\begin{aligned} \hat{\Psi} = & - \left(\frac{i\omega}{K} - z_1^2 \right) \left(\frac{1}{z_1^2 r^2} - \frac{1}{z_1 r} \right) E_1 + \left(\frac{i\omega}{K} - z_2^2 \right) \left(\frac{1}{z_2^2 r^2} - \frac{1}{z_2 r} \right) E_2 + \\ & + \frac{z_{21}(\lambda + 2\mu)}{\mu} \left(\frac{1}{z_3^2 r^2} - \frac{1}{z_3 r} + 1 \right) E_3 \end{aligned} \quad (A3)$$

$$\begin{aligned} \hat{\chi} = & - \left(\frac{i\omega}{K} - z_1^2 \right) \left(\frac{3}{z_1^2 r^2} - \frac{3}{z_1 r} + 1 \right) E_1 + \left(\frac{i\omega}{K} - z_2^2 \right) \left(\frac{3}{z_2^2 r^2} - \frac{3}{z_2 r} + 1 \right) E_2 + \\ & + \frac{z_{21}(\lambda + 2\mu)}{\mu} \left(\frac{3}{z_3^2 r^2} - \frac{3}{z_3 r} + 1 \right) E_3 \end{aligned} \quad (A4)$$

$$\hat{\varphi} = z_1 \left(\frac{1}{z_1 r} - 1 \right) E_1 - z_2 \left(\frac{1}{z_2 r} - 1 \right) E_2 \quad (A5)$$

$$\hat{\kappa} = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} (z_2^2 E_2 - z_1^2 E_1) + z_3^2 (E_1 - E_2) \quad (A6)$$

siendo $z_j = -ik_j$ ($j = 1, 2, 3$) y $z_{21} = z_2^2 - z_1^2$. En estas expresiones, k_1 y k_2 representan los números de onda de las ondas irrotacionales, siendo k_3 el correspondiente a la onda equivoluminal. Finalmente, $E_j = e^{z_j r}/r$.

Las variables poroelásticas incluidas en la solución fundamental (27) son

$$\begin{aligned} \eta &= i\omega \left(\rho_{12} - \rho_{22} \frac{Q}{R} \right) - b \left(1 + \frac{Q}{R} \right) \\ K &= \frac{R}{b + i\omega \rho_{22}} \\ J &= \frac{1}{i\omega b - \omega^2 \rho_{22}} \\ Z &= J(i\omega b + \omega^2 \rho_{12}) \end{aligned} \quad (A7)$$

siendo λ , μ , Q y R constantes elásticas del material poroso, b la constante de disipación del mismo y ρ_{11} , ρ_{12} y ρ_{22} parámetros de densidad vinculados a la densidad de ambas fases a través de la porosidad β del material.

REFERENCIAS

- 1 C.A. Brebbia y J. Domínguez, “*Boundary elements. An introductory course*”, 2ª ed., Computational Mechanics Publications, Southampton and McGraw-Hill, New York, (1992).
- 2 V. Sarihan y S. Mukherjee, “Axisymmetric viscoplastic deformation by the boundary element method”, *Computers and Structures*, Vol. **33**, pp. 1113-1128, (1982).
- 3 J. Domínguez, “Boundary elements in dynamics”, Computational Mechanics Publications, Southampton and Elsevier, London (1993).
- 4 J.C. Lachat y J.O. Watson, “Effective numerical treatment of boundary integral equations”, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. **10**, pp. 991-1005, (1976).

- 5 H.B. Li, G.M. Han y H.A. Mang, "A new method for evaluating singular integrals in stress analysis of solids by the direct boundary element method", *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. **21**, pp. 2071–2098, (1985).
- 6 T.A. Cruse, "Numerical solutions in three dimensional elastostatics", *Int. J. Solids Struct.*, Vol. **5**, pp. 1259–1274, (1969).
- 7 M. Guiggiani y P. Casalini, "Direct computation of Cauchy Principal Value integrals in advanced boundary elements", *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. **24**, pp. 1711–1720, (1987).
- 8 M. Guiggiani y A. Gigante, "A general algorithm for multidimensional Cauchy Principal Value integral in boundary element method", *ASME J. Applied Mechanics*, Vol. **57**, pp. 906–915, (1990).
- 9 P.J. Davis y P. Rabinowitz, "Methods of numerical integration", Academic Press, (1984).
- 10 J. Domínguez, "Boundary element approach for dynamic poroelastic problems", *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. **35**, pp. 307–324, (1992).
- 11 F. Hartmann, "Computing C-matrix in non-smooth boundary points", *New Developments in Boundary Element Methods*, C.A. Brebbia ed., pp. 367–379, (1980).
- 12 A.H.D. Cheng, T. Badmus y D.E. Beskos, "Integral equation for dynamic poroelasticity in frequency domain with boundary element solution", *J. Eng. Mech. ASCE*, Vol. **117**, pp. 1136–1157 (1991).
- 13 J. Rice y M.P. Cleary, "Some basic stress-diffusion solutions for fluid saturated elastic porous media with compressible constituents", *Rev. Geophys. Space Phys.*, Vol. **14**, pp. 227–241 (1976).
- 14 M.R. Halpern y P. Christiano, "Steady-state harmonic response of a rigid plate bearing on a liquid-saturated poroelastic halfspace", *Earthq. Eng. Struct. Dyn.*, Vol. **14**, pp. 439–454, (1986).
- 15 Y. Kim y H. Kingsbury, "Dynamic characterization of poroelastic materials", *Exper. Mech.*, Vol. **19**, pp. 252–258, (1979).