

# Método de diferencias finitas en mallas irregulares con soluciones analíticas parciales aplicado al flujo hidrodinámico

Ricardo Fuentes R.

Departamento de Ingeniería Mecánica  
Universidad de Tarapacá  
18 de Septiembre 2222, Arica, Chile  
Tel.: 56-58-20 52 68; Fax: 56-58-20 52 51  
e-mail: rfuentes@uta.cl

L. Fernando Carvajal G.

Departamento de Mecánica  
Universidad Santa María  
Casilla 110V, Valparaíso, Chile  
Tel.: 56-32-65 44 50; Fax: 56-32-79 74 72  
e-mail: fernando.carvajal@usm.cl

## Resumen

Se investiga la aplicación de diferencias finitas en mallas irregulares con funciones interpoladoras que son soluciones analíticas de las ecuaciones de Navier-Stokes para el flujo hidrodinámico. El dominio se divide en regiones y en cada una de ellas la solución se aproxima por una serie de funciones que cumplen con la ecuación diferencial. Para la solución del flujo hidrodinámico se utiliza el método de proyección usando las citadas funciones para la evaluación de las derivadas de la velocidad. La ecuación de Poisson se resuelve aplicando el mismo método, con funciones que cumplen esta ecuación. Se obtiene una solución muy promisoría para la cavidad cuadrada con un flujo en una cara, con una malla muy gruesa.

## FINITE DIFFERENCES METHOD IN IRREGULAR MESHES WITH PARTIAL ANALYTICAL SOLUTIONS APPLIED TO HYDRODYNAMIC FLOW

## Summary

The application of finite difference method in irregular meshes with functions which are analytic solutions of the Navier-Stokes equation for the hydrodynamic flow is investigated. The domain is divided in regions in each of them the solution is approaches for a series of functions that fulfils the differential equation. For hydrodynamic flow solution the projection method is utilized using the cited functions for the evaluation of the velocities derivatives. The Poisson equation is solved applying the same method, with functions that fulfils this equation. A very promising solution for the square cavity with a flow in a face, with a very rough mesh is obtained.

## INTRODUCCIÓN

Los métodos de diferencias finitas rectangulares son muy restringidos cuando se trata de hacer un refinamiento local de la malla debido a que la propagación paralela del refinamiento hasta los límites del dominio produce un aumento de los nodos en sectores que no los requieren<sup>1,2</sup>. En diferencias finitas en mallas irregulares se han desarrollado métodos que permiten un proceso de refinamiento selectivo local<sup>3,4,5</sup> usando expansiones de Taylor bidimensionales, las cuales tienen que truncarse en los primeros términos para mantener bajo el número de coeficientes indeterminados que deberán calcularse. Una formulación de diferencias finitas en mallas irregulares que no usa series truncadas sino soluciones analíticas en cada subdominio ha sido propuesta para el análisis de la ecuación de transporte<sup>6</sup>. Por su parte, el método de elementos finitos por su intrínseca característica de malla irregular tiene una alta flexibilidad para la definición de la malla<sup>7,8</sup>, aunque un refinamiento local requiere de remallados que pueden llegar a tener costos computacionales muy altos. Los recientes avances en nuevos métodos que buscan definir el dominio exclusivamente con los nodos y no con su interrelación, prescindiendo así de una malla, han generado los llamados métodos “sin malla” o “meshless”, “gridless”, “element free”, etc.<sup>9,10</sup>.

La búsqueda de flexibilidad en la discretización tiene efectos importantes en la definición de los dominios geométricos, las características físicas y las condiciones de borde del problema así como en la facilidad de refinamiento selectivo o localizado. Esto conduce a dos importantes consecuencias: a) menor esfuerzo en la preparación de la información de entrada y b) facilidad para realizar un procedimiento adaptativo de refinamiento o desrefinamiento local.

## CARACTERÍSTICAS BÁSICAS DEL MÉTODO

Mientras el método de puntos finitos<sup>11,12</sup> realiza una aproximación local mediante una aproximación local por medio de mínimos cuadrados ponderados sobre polinomios 2D, el método que aquí se expone realiza una aproximación local por medio de funciones que cumplen con la ecuación diferencial que gobierna el fenómeno físico bajo análisis<sup>6</sup>.

Para un problema escalar con la ecuación gobernante

$$A(\phi) = b \quad \text{en } \Omega \quad (1)$$

con las correspondientes condiciones iniciales y de contorno que definen la situación física

$$\begin{cases} \phi = \phi_{\text{ini}} & \text{en } t = 0 \\ \phi = \phi_0 & \text{en } \Gamma_\phi \\ b(\phi) = s & \text{en } \Gamma_t \end{cases} \quad (2)$$

en el borde  $\Gamma$  de  $\Omega$ , con  $\Gamma_\phi \cup \Gamma_t = \Gamma$ .

$A$  y  $b$  son operadores diferenciales apropiados en la descripción del fenómeno,  $\phi$  es la función incógnita en tanto que  $\phi_0$  y  $s$  corresponden a las condiciones de borde de Dirichlet y Neumann, respectivamente.

Sean  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{N-1}$  funciones que satisfacen la ecuación diferencial gobernante (1) en su forma homogénea  $A(\phi) = 0$  y  $\varphi_N$  una solución particular para esa ecuación. El valor de la función  $\phi$  en una región local se expresa aproximadamente como

$$\phi \approx \sum_{j=1}^N C_j \varphi_j(x, y)_R \quad (3)$$

donde los  $C_j$  son coeficientes para cada una de las funciones  $\varphi_j$ . Es evidente que si las  $N$  funciones  $\varphi_j$  son el conjunto de todas las soluciones de la ecuación (1), entonces la solución dada por la ecuación (3) será la solución exacta. Sin embargo, en general estas funciones  $\varphi_j$  se conocen (o se pueden conocer) en un número limitado y pequeño.

Al aplicar la ecuación (3) a los  $K$  nodos pertenecientes a una región local  $R$  (Figura 1), se obtiene un sistema de  $K$  ecuaciones

$$\phi_k = \sum_{j=1}^N C_j \varphi_{kj}(x, y)_R \quad k = 1, 2, \dots, K \quad (4)$$

donde  $\varphi_{kj}$  designa la evaluación de  $\varphi_j$  en el nodo  $k$  ubicado en  $(x_k, y_k)$ .

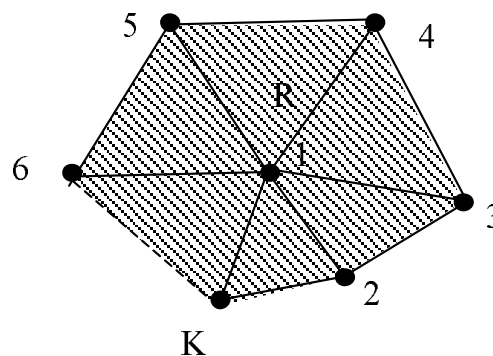


Figura 1. Región local  $R$  y su discretización

Los  $K$  coeficientes  $C_j$  son aún desconocidos. Esta ecuación se puede escribir en forma matricial como

$$\phi = \varphi \mathbf{C} \quad (5)$$

Debe notarse que los elementos de la matriz  $\varphi$  son evaluaciones de las funciones  $\varphi_j$  en los nodos  $(x_k, y_k)$  y como cada una de ellas es una función solución de la ecuación (1), la matriz depende sólo de las coordenadas  $(x, y)$  de los nodos, por lo cual,  $\varphi$  se conoce en forma explícita.

Si  $K = N$ , entonces la matriz  $\varphi$  es cuadrada y si, además, es no singular, con su inversa  $\mathbf{G} = \varphi^{-1}$ , entonces el conjunto de los coeficiente de  $C_j$  se puede expresar como un vector  $\mathbf{C}$

$$\mathbf{C} = \mathbf{G} \phi \quad (6)$$

Aislando el último valor de  $\mathbf{C}$ , correspondiente a la solución particular, se obtiene

$$C_N = \sum_{j=1}^N g_{Nj} \phi_j \quad (7)$$

Usando la aproximación de  $\phi$  de la ecuación (3) y considerando al operador diferencial  $A$  como lineal (o linealizado), la ecuación (1) se puede expresar como

$$A \left( \sum_{j=1}^{N-1} C_j \varphi_j \right) + A(C_N \varphi_N) = b \quad (8)$$

Se puede observar que el primer término es la suma de soluciones de la ecuación (1) en su forma homogénea, por lo tanto, su valor es cero, quedando sólo el término de la solución particular

$$A(C_N \varphi_N) = b \quad (9)$$

y  $C_N$ , que es un coeficiente constante, se puede despejar como

$$C_N = \frac{b}{A(\varphi_N)} \quad (10)$$

Así, igualando las ecuaciones (7) y (10), se obtiene

$$\sum_{j=1}^N g_{Nj} \phi_j = \frac{b}{A(\varphi_N)} \quad (11)$$

El operador  $A$  aplicado a  $\varphi_N$ ,  $A(\varphi_N)$ , puede tener un valor explícito o un valor implícito a evaluar en coordenadas espaciales o en el tiempo. En coordenadas espaciales se puede asignar el valor correspondiente a las coordenadas del nodo central de la región local, mientras que en la coordenada de tiempo habrá que plantear un esquema de discretización temporal apropiado.

Al aplicar la ecuación (11) a los  $M$  nodos que componen el dominio  $\Omega$ , se obtienen  $M$  ecuaciones para las  $M$  incógnitas  $\phi_j$  con  $j = 1, 2, \dots, M$ .

## APLICACIÓN AL FLUJO HIDRODINÁMICO MÉTODO DE PROYECCIÓN

El método de proyección, que fue propuesto independientemente por Chorin y por Teman, debe su nombre al hecho de que el segundo paso puede ser considerado como una proyección del campo vectorial provisional de velocidad  $\mathbf{V}^*$  hacia su subespacio con divergencia cero satisfaciendo las condiciones de contorno apropiadas<sup>13</sup>.

Para la ecuación de Navier-Stokes

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{V}\mathbf{V}) + \frac{1}{\rho} \nabla p - \nu \nabla^2 \mathbf{V} = 0 \quad (12)$$

donde  $\nu$  es la viscosidad cinemática y la  $\rho$  densidad del fluido; el primer paso es obtener un campo de velocidad provisional  $\mathbf{V}^*$  considerando un campo de presión uniforme y una aproximación lineal de la derivada temporal. Se obtiene entonces

$$\mathbf{V}^* = \mathbf{V}^n + (\nu \nabla^2 \mathbf{V}^n - \nabla \cdot (\mathbf{V}^n \mathbf{V}^n)) \Delta t \quad (13)$$

Este campo provisional no es el real, pues no cumple la condición de divergencia cero, es decir, no cumple la ecuación de continuidad, por lo que es necesario restablecer esta condición de conservación de la masa en cada punto del flujo. Así, en el segundo paso, para obtener el campo de presión  $p^{n+1}$  y el de velocidad  $\mathbf{V}^{n+1}$  se impone la condición de divergencia cero para  $\mathbf{V}^{n+1}$ . Se obtiene así

$$\nabla^2 p^{n+1} = \frac{\rho}{\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{V}^* \quad (14)$$

que es la ecuación de Poisson para el campo de presión. Resuelta esta ecuación es posible

evaluar el campo de velocidad en  $t(n+1)$  con la expresión

$$\mathbf{V}^{n+1} = \mathbf{V}^* - \frac{\Delta t}{\rho} \nabla p^{n+1} \quad (15)$$

En el primer cálculo del proceso, para  $t=0$  ( $n=0$ ), el campo  $\mathbf{V}^*$  en la ecuación (13) es conocido, pues corresponde a la condición inicial. Así, para cualquier tiempo, resuelto el campo para  $t(n+1)$ , se considera este campo como condición inicial y con las ecuaciones (14) y (15) se repite el proceso.

## APLICACIÓN DEL ESQUEMA NUMÉRICO AL MÉTODO DE PROYECCIÓN PARA EL FLUJO HIDRODINÁMICO

En la ecuación (13) las componentes  $u, v$  de la velocidad se pueden expresar localmente, en cada región de la discretización, como

$$u = \sum_{j=1}^N C_j^u \varphi_j \quad (16a)$$

$$v = \sum_{j=1}^N C_j^v \varphi_j \quad (16b)$$

Si las funciones  $\varphi_j$  son las mismas para  $u$  y para  $v$ , los coeficientes  $C_j^u$  y  $C_j^v$  se pueden expresar como un vector

$$\mathbf{C}_j = \left\{ \begin{array}{c} C_j^u \\ C_j^v \end{array} \right\} \quad (17)$$

y entonces el campo vectorial se puede expresar como

$$\mathbf{V} = \sum_{j=1}^N \mathbf{C}_j \varphi_j \quad (18)$$

Los términos de derivadas espaciales de la velocidad en la ecuación (13) se pueden evaluar una vez que se han logrado las expresiones de la velocidad en cada estrella o región local.

Ya que el campo de velocidad  $\mathbf{V}^n$  es conocido, en particular para  $t(n=0)$  correspondiente a la condición inicial,  $\mathbf{V}_k^n$  es conocido para cada nodo  $k$ . La velocidad  $u$  de cada nodo  $k$  se escribe como

$$u_k = \sum_{j=1}^N \varphi_{kj} C_j^u \quad (19)$$

donde  $\varphi_{kj} = \varphi_j(k)$  es cada función  $\varphi_j$  evaluada en el nodo  $k$ . Escrito en forma matricial es

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\varphi} \mathbf{C}^u \quad (20)$$

Como la matriz  $\boldsymbol{\varphi}$  es conocida explícitamente, pues corresponde a la evaluación de las funciones  $\varphi_j$  en las coordenadas de cada nodo  $k$ , se pueden obtener los valores de  $C_j^u$  siempre y cuando la matriz  $\boldsymbol{\varphi}$  sea no singular y tenga, por lo tanto, inversa. Así

$$\mathbf{C}^u = \boldsymbol{\varphi}^{-1} \mathbf{u} \quad (21)$$

Análogamente se obtienen los valores de  $C_j^v$

$$\mathbf{C}^v = \boldsymbol{\varphi}^{-1}\mathbf{v} \quad (22)$$

Con estos valores de los coeficientes  $C_j^u$  y  $C_j^v$  se pueden evaluar las derivadas espaciales de la velocidad. Así, el primer componente de la velocidad  $\nabla^2 u$ , el laplaciano de  $u$ , se puede escribir como

$$\nabla^2 u = \sum_{j=1}^N C_j^u \nabla^2 \varphi_j \quad (23)$$

donde, por supuesto,

$$\nabla^2 \varphi_j = \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial y^2}$$

En tanto, el término convectivo es

$$\nabla \cdot (\mathbf{V}\mathbf{V}) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} \\ \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} \end{array} \right\} \quad (24)$$

Cada uno de las componentes de este vector se evalúa de manera análoga y así al considerar los  $N$  nodos cercanos se puede realizar el cálculo de  $\mathbf{V}^*$  para cada nodo y luego, determinando los valores de  $C_j^u$  y  $C_j^v$ , evaluar las derivadas parciales en el nodo en cuestión.

Es evidente la forma explícita del esquema. El procedimiento va recorriendo cada una de las regiones y obteniendo el valor de  $\mathbf{V}^*$  para el nodo central usando los valores de los nodos vecinos. También puede ser realizada esta evaluación de  $\mathbf{V}^*$  mediante un esquema implícito para el cálculo de los coeficientes  $C_j^u$  y  $C_j^v$ , donde en la ecuación (21) se obtiene cada valor de  $C_j$  como

$$C_j = \sum_{k=1}^N g_{jk} \phi_k \quad (25)$$

donde  $g_{jk}$  son los elementos de la matriz inversa  $\boldsymbol{\varphi}^{-1}$ . Reemplazando estos  $C_j$  en la función  $\phi(x, y)$ , se tiene

$$\phi(x, y) = \sum_{k=1}^N N_k(x, y) \phi_k \quad (26)$$

donde  $N_k(x, y)$  es

$$N_k(x, y) = \sum_{j=1}^N g_{jk} \varphi_j(x, y) \quad (27)$$

Y con la ecuación (26) se evalúan todas las derivadas espaciales de la ecuación (13). Este procedimiento implícito para los  $C_j$  se muestra más estable en los resultados numéricos.

En este trabajo se considerarán las funciones de aproximación para el campo de velocidades presentadas en la Tabla I. Es fácil verificar que cada una de estas funciones satisface la ecuación (12).

$\varphi_1 = 1$ $\varphi_2 = my - nx$ $\varphi_3 = e^{mx+ny}$ $\varphi_4 = (my - nx)e^{mx+ny}$	soluciones de la ecuación homogénea
$\varphi_5 = (mx + ny)$	solución particular

donde  $m = u/v$ ,  $n = v/v$

**Tabla I.** Funciones para el campo de velocidades

## LA ECUACIÓN DE POISSON

La solución de la ecuación de Poisson sigue un procedimiento similar, aunque por supuesto las funciones a considerar son otras, ya que la ecuación es distinta.

Al definir el valor del intervalo  $\Delta t$ , la ecuación (14) se expresa como

$$\nabla^2 p^{n+1} = D \quad (28)$$

donde  $D = \frac{\rho}{\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{V}^*$

Para cada uno de los nodos se puede evaluar el valor de  $D$ , ya que los valores de  $\mathbf{V}^*$  han sido calculados previamente en tanto que la evaluación de  $\nabla \mathbf{V}^*$  se realiza de manera análoga a la evaluación de las derivadas espaciales de  $\mathbf{V}^n$ .

El campo de presión  $p^{n+1}$  se puede expresar en cada región análogamente al campo de velocidad como

$$p(x, y)_R = \sum_{j=1}^N C_j \pi_j \quad (29)$$

donde las funciones  $\pi_j$  satisfacen la ecuación de Poisson. En este trabajo se usarán las funciones de la Tabla II.

$\pi_1 = 1$ $\pi_2 = x + y + xy$ $\pi_3 = e^x \sin y$ $\pi_4 = e^y \sin x$	soluciones de la ecuación homogénea
$\pi_5 = x^2 + y^2$	solución particular

**Tabla II.** Funciones para el campo de presión

El laplaciano de la presión con la aproximación (29), se expresa como

$$\nabla^2 p^{n+1} = \nabla^2 \left( \sum_{j=1}^5 C_j^p \pi_j \right) \quad (30)$$

Las cuatro primeras funciones  $\pi_j$  (con  $j = 1, 2, 3, 4$ ) son soluciones de la ecuación homogénea, sus laplacianos son cero, quedando entonces

$$\nabla^2 p^{n+1} = C_5^p \nabla^2 \pi_5 \quad (31)$$

que con la función  $\pi_5 = x^2 + y^2$  el laplaciano de la presión es

$$\nabla^2 p^{n+1} = 4 C_5^p \quad (32)$$

El valor del coeficiente  $C_5^p$  se obtiene de la forma expuesta para  $C_N$  (ecuación (10))

$$C_5^p = \sum_{j=1}^5 g_{5j} p_j \quad (33)$$

donde  $g_{ij}$  es el elemento de la matriz  $\boldsymbol{\pi}^{-1}$ .

Reemplazando (28) en (33) y en (31), se obtiene

$$\sum_{j=1}^5 g_{5j} p_j = \frac{D}{4} \quad (34)$$

Aplicando esta ecuación a cada uno de los  $M$  nodos del dominio completo (cada uno como nodo central rodeado de 4 nodos formando la estrella), se tiene  $M$  ecuaciones para  $M$  valores  $p_j$ . Este sistema de ecuaciones se expresa como

$$\mathbf{G}_5 \mathbf{p} = \mathbf{D}^e \quad (35)$$

donde  $\mathbf{G}_5$  es la matriz que reúne los coeficientes  $g_{5j}^e$  de las matrices inversas de cada estrella,  $\mathbf{p}$  el vector que reúne los  $M$  valores de  $p$  y  $\mathbf{D}^e$  el vector que reúne los valores de  $D^e/4$  de cada una de las correspondientes estrellas.

Las condiciones de contorno para la presión se aplican considerando que

$$\left( \frac{\partial p}{\partial n} \right)_{\Gamma} = -\frac{\rho}{\Delta t} (\mathbf{V}_{\Gamma}^{n+1} - \mathbf{V}_{\Gamma}^*) \cdot \mathbf{n} \quad (36)$$

en el borde  $\Gamma$ , donde  $\mathbf{n}$  es el vector unitario normal al borde<sup>13</sup>. El tratamiento de  $p$  con la aproximación (29) es análogo al procedimiento descrito, considerando un nodo ficticio fuera del dominio.

Finalmente, la evaluación del campo de velocidad  $\mathbf{V}^{n+1}$  se realiza con la ecuación (15), la cual se expresa en sus componentes como

$$\begin{Bmatrix} u^{n+1} \\ v^{n+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u^* \\ v^* \end{Bmatrix} - \frac{\Delta t}{\rho} \begin{Bmatrix} \partial p / \partial x \\ \partial p / \partial y \end{Bmatrix} \quad (37)$$

Los valores de  $\partial p / \partial x$  y  $\partial p / \partial y$  se obtienen de manera análoga a la obtención de  $\nabla \mathbf{V}^*$ , usando los valores  $p^{n+1}$  para la obtención de los coeficientes  $C_j^p$ .



## RESTRICCIONES DEL MÉTODO

El método presenta algunas restricciones importantes, dos de las cuales son de fácil solución. Las matrices  $\varphi$  y  $\Delta\pi$  deben tener inversa, por lo cual sus determinantes deben ser no cero. Los campos de velocidades de fluidos en reposo no deben ser cero. En tal caso,  $m$  y  $n$  serán cero en las funciones  $\varphi_j$  y producirán filas de la matriz de valor cero, por lo que la matriz  $\varphi$  será singular. También algunas situaciones geométricas pueden producir determinantes nulos, en particular cuando en una región hay tres nodos alineados y la velocidad del flujo sigue exactamente esa línea. Tales casos se pueden evitar con sólo cambiar un nodo de la estrella, es decir, redefinir temporalmente la región  $R$ . Es posible la existencia de otras restricciones menos evidentes.

## APLICACIÓN A LA CAVIDAD CUADRADA

Se aplica el procedimiento descrito a la siguiente geometría correspondiente a la cavidad cuadrada con un flujo en una de sus caras. Las dimensiones de la cavidad son de  $0,1 \times 0,1$  m, el fluido tiene una viscosidad cinemática  $\nu = 1 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$  y el flujo paralelo en la cara superior es de  $10 \text{ m s}^{-1}$ . Se consideran 41 nodos, lo cual obviamente es una discretización muy gruesa (Figura 2).

El campo de velocidad obtenido es el mostrado en la Figura 3.

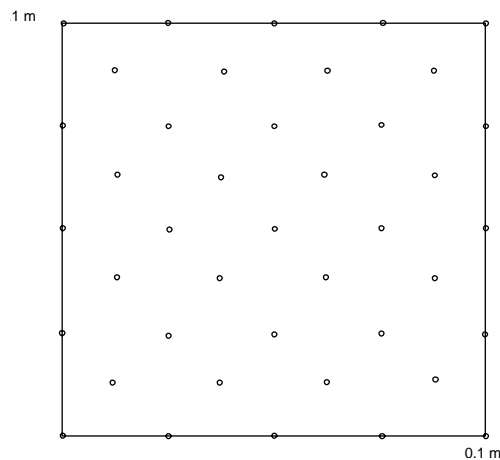


Figura 2. Discretización para el análisis de la cavidad cuadrada

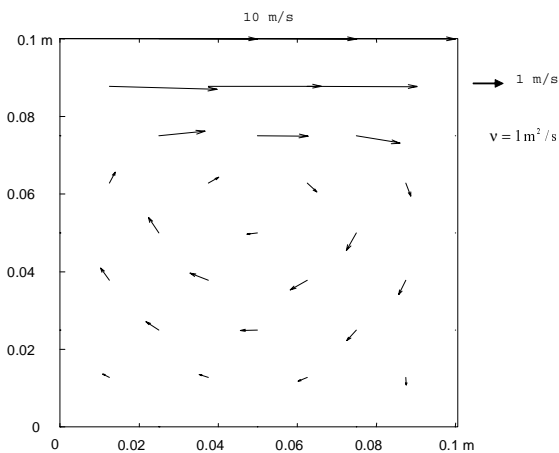


Figura 3. Campo de velocidad de la cavidad cuadrada obtenida con el presente método

Se observa que el campo calculado tiene un comportamiento esperado a pesar de la gruesa discretización, destacándose la asimetría vertical y horizontal de la circulación y la respuesta cerca de las esquinas inferiores.

## CONCLUSIONES

El método de diferencias finitas irregulares con soluciones analíticas parciales tiene una formulación de mucha consistencia, con sólo un par de aproximaciones necesarias, lo que le da una cierta elegancia que invita a investigar sus potencialidades. El aumento del número de funciones empleadas debería mejorar su comportamiento.

El método proporciona resultados promisorios en el problema hidrodinámico a pesar de lo grueso de la discretización usada y de lo reconocidamente difícil del tratamiento de este problema.

Las posibilidades futuras se vislumbran con claridad en:

- la aplicación a métodos sin malla,
- el refinamiento de la discretización mediante inserción de nodos,
- aumento del número de funciones utilizadas.

Será necesario realizar un análisis matemático riguroso para establecer, si es posible, condiciones necesarias y suficientes para la estabilidad y convergencia de este método.

## REFERENCIAS

- 1 S.V. Patankar, “*Numerical heat transfer and fluid flow*”, Hemisphere Pub. Corp., (1980).
- 2 C.A.J. Fletcher, “*Computational techniques for fluid dynamics*”, Vol. 1 y 2, Springer Verlag, (1988).
- 3 N. Perrone y R. Kao, “A general finite difference method for arbitrary meshes”, *Comp. & Struct.*, Vol. 5, pp. 45, (1975).
- 4 K.C. Chung, “A generalized finite difference method for heat transfer problems of irregular geometries”, *Num. Heat Transfer*, Vol. 4, pp. 345, (1981).
- 5 A.A. Tseng, “A generalized finite difference scheme for convection dominated metal forming problems”, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 20, pp. 1885, (1984).
- 6 L.F. Carvajal, “Mallas irregulares en diferencias finitas: ecuación de transporte transiente”, *VI Congreso Latinoamericano de Transferencia de Calor y Materia*, Brasil, pp. 571–574, (1996).
- 7 O.C. Zienkiewicz y R.L. Taylor, “*El método de los elementos finitos*”, Vol. 1 y 2, McGraw Hill, (1994).
- 8 O. Pironneau, “*Finite element methods for fluids*”, John Wiley & Sons, (1989).
- 9 T. Belytschko, Y. Krongauz, D. Organ, M. Fleming y P. Krysl, “Meshless method: an overview and recent developments”, *Computer method in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 139, pp. 3–48, (1996).
- 10 E. Oñate e S. Idelsohn, “A mesh free finite point method for advective-diffusive transport and fluid flow problems”, *Computational Mechanics*, Vol. 21, pp. 283–292, (1998).
- 11 E. Oñate, S. Idelsohn, O.C. Zienkiewicz y T. Fisher, “A finite point method for analysis of fluid flow problems”, *Proceedings of the 9th Int. Conference on Finite Element Methods in Fluids*, Veniza, Italia, 15–21 October, (1995).
- 12 E. Oñate, S. Idelsohn, O.C. Zienkiewicz y R.L. Taylor, “A stabilized finite point method in computational mechanics. Applications to convective transport and fluid flow”, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 39, pp. 3839–3866, (1996).
- 13 R. Peyret y T.D. Taylor, “*Computational methods for fluid flow*, Springer Verlag”, (1983).