

Avances en el método de puntos finitos para la mecánica de sólidos

Franco Perazzo

Departamento de Mecánica
Universidad Técnica Federico Santa María
Avenida España 1680, Valparaíso, Chile
Tel.: 56 32 65 41 62; Fax: 56 32 79 74 72
e-mail: franco.perazzo@usm.cl

Sergio Oller, Juan Miquel y Eugenio Oñate

Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería (CIMNE)
Universidad Politécnica de Cataluña
Gran Capitán s/n, Edificio C1, Campus Norte
08034 Barcelona, España
Tel.: 34 93 205 70 16; Fax: 34 93 401 65 17
e-mail: cimne@cimne.upc.es

Resumen

La evaluación del método sin malla de puntos finitos (MPF) para problemas de la mecánica de sólidos, hasta la fecha, se ha efectuado usando medidas para cuantificar el error relativo tomando como base a una solución analítica conocida. En el presente trabajo se desarrolla un indicador del error para el MPF, basado en la evaluación del funcional de mínimos cuadrados utilizado para el cálculo de la función de forma. La capacidad del indicador propuesto se analiza mediante el desarrollo de ejemplos para la elasticidad lineal de sólidos con densidades de puntos en forma regular e irregular. Los resultados muestran además la posibilidad de implementar un proceso de solución adaptable, basado en la equidistribución del error.

Palabras clave:

método sin malla, método de puntos finitos, indicación del error.

ADVANCES IN THE FINITE POINT METHOD FOR SOLID MECHANICS

Summary

The accuracy of the meshless finite points method (FPM) for numerical simulation in solids, has been evaluated in the past using the relative error of a well-known analytical solution. In this paper a new procedure to estimate the error in the FPM is presented. The method is based on the evaluation of functional used for the calculation of the shape function. Several numerical examples with regular and irregular density of points are presented to demonstrate the performance of the proposed indicator. The possibilities of implementing an adaptive refinement is also been investigated.

Keywords:

meshless method, finite points method, error indication.

INTRODUCCIÓN

Una de las principales ventajas de todo método numérico sin malla radica en la disminución del tiempo invertido en la etapa de preproceso del modelo geométrico. La discretización de un cuerpo o dominio de la solución basada en un conjunto de puntos permite enfocar la atención de los analistas en las etapas posteriores, y no precisamente en la construcción de una malla razonable para realizar el análisis del mismo.

La manera de realizar la interpolación local de la función aproximada y la forma de obtener el sistema de ecuaciones diferenciales discretas que gobiernan el problema ha dado lugar a distintas familias de métodos sin malla^{1,2,3}. En el método de puntos finitos (MPF) la aproximación local se obtiene mediante la técnica estándar de mínimos cuadrados ponderados, utilizándose colocación puntual para obtener el sistema de ecuaciones discretas^{4,5,6,7}. De esta forma se obtiene un método totalmente libre de malla, cuya consistencia y convergencia ha sido analizada con anterioridad por los autores, comprobándose su correcto comportamiento para problemas de la estática y la dinámica lineal de sólidos^{8,9,10,11}.

Del mismo modo, la ausencia de una malla de elementos o elementos y sus conectividades permite implementar un procedimiento de solución adaptable, puesto que sólo es necesario agregar más nodos en las zonas de interés sin preocuparse por la cercanía con los demás. Una posibilidad de efectuar esto manteniendo el número de grados de libertad es adaptar la ubicación de los puntos a la distribución del error, sin embargo, esto supone desarrollar un método para estimar el error cometido en la aproximación.

En el presente trabajo se analiza el error numérico del MPF mediante el estudio del funcional de mínimos cuadrados ponderados utilizado para cálculo de la función de forma. Los ejemplos desarrollados permiten comprobar que la información entregada por este funcional se puede utilizar como una indicación del error. Esto permite agregar puntos en las zonas de interés con una mejora importante de la solución numérica.

APROXIMACIÓN SIN MALLA DE PUNTOS FINITOS

Sea Ω_I el subdominio de interpolación de una función $u(\mathbf{x})$, llamado usualmente nube en los métodos sin malla, y s_j con $j = 1, 2, \dots, n$ una colección de n puntos con coordenadas $\mathbf{x}_j \in \Omega_I$. El subíndice I en las expresiones identifica aquel punto de la nube, donde se requiere evaluar la aproximación, también denominado nodo estrella. La función incógnita $u(\mathbf{x})$ puede ser aproximada en el interior de Ω_I por

$$u(\mathbf{x}) \cong \hat{u}(\mathbf{x}) = \sum_{l=1}^m p_l(\mathbf{x})\alpha_l = \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\alpha \quad \forall \mathbf{x}_I \in \Omega, \forall \mathbf{x} \in \Omega_I \quad (1)$$

donde $\alpha^T = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_m]$, y el vector $\mathbf{p}(\mathbf{x})$, llamado “base de interpolación”, contiene típicamente monomios que aseguran en el espacio de coordenadas una base completa. Como ejemplo para un problema en 2D, tomando un polinomio cuadrático, se tiene

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = [p_1 \ p_2 \ p_3 \ p_4 \ p_5 \ p_6] = [1 \ x \ y \ x^2 \ xy \ y^2] \quad \text{con } m = 6$$

La función incógnita $u(\mathbf{x})$ puede ser evaluada en los n puntos de la nube Ω_I , obteniendo

$$\mathbf{u}^h = \left\{ \begin{array}{c} u_1^h \\ u_2^h \\ \vdots \\ u_n^h \end{array} \right\} \cong \left\{ \begin{array}{c} \hat{u}_1^h \\ \hat{u}_2^h \\ \vdots \\ \hat{u}_n^h \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{p}_1^T \\ \mathbf{p}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{p}_n^T \end{array} \right\} \alpha = \mathbf{C}\alpha \quad (2)$$

donde $u_j^h = u(\mathbf{x}_j)$ son las incógnitas, pero los valores buscados $\hat{u}_j = \hat{u}(\mathbf{x}_j)$ son los valores aproximados y $\mathbf{p}_j = \mathbf{p}(\mathbf{x}_j)$.

En una aproximación mediante elementos finitos el número de puntos en el subdominio se escoge de forma que $m = n$. En este caso, \mathbf{C} es una matriz cuadrada y el procedimiento conduce a las funciones de forma estándar del método de elementos finitos¹².

Si $n > m$, la aproximación utilizada no se puede adaptar a todos los valores de u_j^h . El problema puede ser resuelto determinando los valores de \hat{u} , que minimicen la suma de la distancia al cuadrado o error en cada punto, ponderado por una función $w(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}_j)$, es decir

$$\mathbf{J}_I = \sum_{l=1}^n w(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}_j)(u_j^h - \hat{u}(\mathbf{x}_j))^2 \quad \text{mínimo} \quad (3)$$

La función de ponderación utilizada en el MPF corresponde a la función de Gauss normalizada. Mayores antecedentes acerca de las principales características de esta función, como también de otras utilizadas en el contexto de los métodos sin malla, puede ser consultada en Perazzo y co-autores¹⁰.

Reemplazando la aproximación (1) en (3) y tomando mínimo respecto de α , se obtiene

$$\alpha = \mathbf{C}_I^{-1} \mathbf{u}^h, \quad \mathbf{C}_I^{-1} = \mathbf{A}_I^{-1} \mathbf{B}_I \quad (4)$$

donde las componentes de $\mathbf{A}(\mathbf{x}_I) = \mathbf{A}_I$ (matriz de momentos) y $\mathbf{B}(\mathbf{x}_I) = \mathbf{B}_I$ son

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}_I]_{ij} &= \sum_{k=1}^n p_i(\mathbf{x}_k) w(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}_k) p_j(\mathbf{x}_k) & i, j = 1, \dots, m \\ [\mathbf{B}_I]_{ij} &= p_i(\mathbf{x}_j) w(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}_j) & i = 1, \dots, m \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (5)$$

Substituyendo α de la ecuación (4) en (1), la aproximación final adopta la siguiente forma

$$\hat{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{C}_I^{-1} \mathbf{u}^h \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_I \quad (6)$$

con las funciones de forma

$$N_I^i(x) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{C}_I^{-1} \quad i = 1, \dots, n \quad (7)$$

Se debe notar que de acuerdo con el carácter de mínimos cuadrados de la aproximación

$$u(\mathbf{x}_j) \cong \hat{u}(\mathbf{x}_j) \neq u_j^h \quad (8)$$

es decir, los valores locales de la función aproximada no coinciden con los valores nodales de la función incógnita (Figura 1). De todas formas \hat{u} es una aproximación válida, con la cual se busca satisfacer la ecuación diferencial y condiciones de contorno, siendo u_j^h simplemente parámetros desconocidos.

La aproximación mediante mínimos cuadrados ponderada descrita anteriormente depende en gran medida de la forma y manera de aplicar la función de ponderación $w(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}_j)$. Esta usualmente se construye de forma que adopte valores unitarios en la vecindad del “nodo estrella” y se anule fuera de la “nube” o subdominio Ω_I . La forma más simple consiste en definirla como una función fija (Figura 1), entonces

$$\begin{aligned} w(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}) &= 1, & \mathbf{x} = \mathbf{x}_I \\ w(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}) &\neq 0, & \mathbf{x} \in \Omega_I \\ w(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}) &= 0, & \mathbf{x} \notin \Omega_I \end{aligned} \quad (9)$$

De acuerdo con (1), la función aproximada $\hat{u}(\mathbf{x})$ se define para cada subdominio de interpolación Ω_I , por lo que la aproximación para un punto i , que pertenezca a dos nubes Ω_I y Ω_J respectivamente, no tiene un único valor ($N_I^i \neq N_J^i$). En el MPF esta disyuntiva se resuelve utilizando colocación puntual^{3,4,5}.

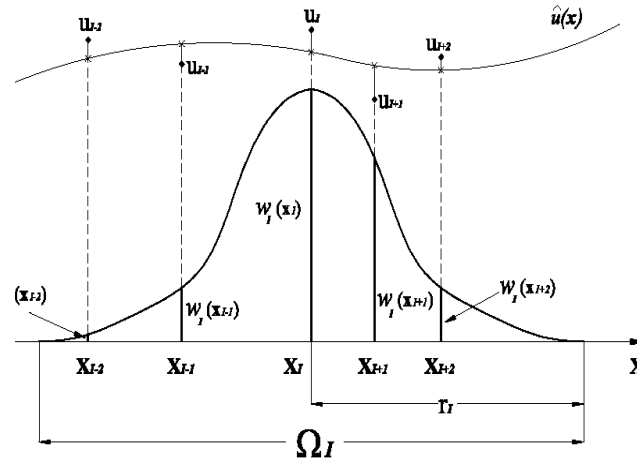


Figura 1. Interpolación de mínimos cuadrados ponderados. Función de ponderación fija

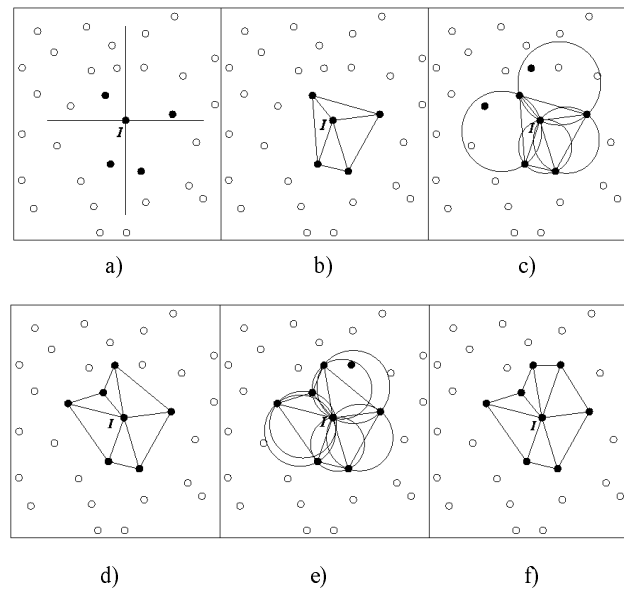


Figura 2. Generación de una nube en el dominio mediante triangulación local de Delaunay: a) selección de los puntos más cercanos al nodo estrella I por cada cuadrante; b) construcción de los triángulos para buscar puntos alrededor del nodo estrella; c) trazado de la circunferencia circunscrita para cada triángulo seleccionándose nuevos puntos adicionales; d) construcción de los triángulos sobre la nueva nube obtenida; e) búsqueda de nuevos puntos; y f) nube definitiva

IMPLEMENTACIÓN NUMÉRICA

Generación de los subdominios de interpolación

Una de las etapas fundamentales en la utilización del MPF consiste en la correcta definición de los puntos que formarán la nube. El algoritmo de búsqueda y selección implementado, igual para el dominio como para el contorno, se basa en una triangulación local de Delaunay¹³. Esta técnica, de fácil implementación, permite obtener una adecuada simetría de las nubes tanto para una discretización regular como irregular de puntos. A modo de ejemplo, la Figura 2 indica los principales pasos para generar las nubes en el dominio con esta técnica. Similar procedimiento se adopta también para las nubes del contorno.

Cálculo de la función de forma

Uno de los aspectos importantes cuando se utiliza una aproximación por mínimos cuadrados, tal como lo establece la ecuación (4), es la necesidad de invertir la matriz de momentos \mathbf{A}_I para cada punto de la discretización. Para evitar un posible mal condicionamiento de esta matriz cuando las coordenadas globales del punto se alejan del origen del sistema de referencia, es deseable expresar la base de interpolación en coordenadas locales (centrada en el nodo estrella) y adimensionales¹⁰. Con este cambio de coordenadas la nueva base cuadrática para un caso 2D queda como

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = \left[1 \quad \frac{x - x_I}{dx_{\max}} \quad \frac{y - y_I}{dy_{\max}} \quad \left(\frac{x - x_I}{dx_{\max}} \right)^2 \quad \left(\frac{x - x_I}{dx_{\max}} \right) \left(\frac{y - y_I}{dy_{\max}} \right) \quad \left(\frac{y - y_I}{dy_{\max}} \right)^2 \right]$$

donde, tal como se indica en la Figura 3, se han utilizado para adimensionalizar la base las distancias máximas en la nube respecto al nodo estrella.

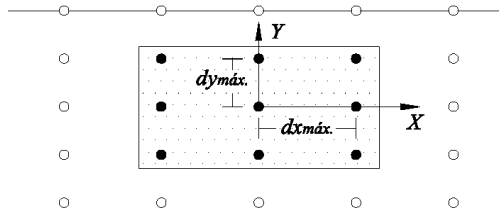


Figura 3. Parámetros utilizados para adimensionalizar la base de interpolación en una nube

Resolución del sistema de ecuaciones discretas

Para conservar el carácter sin malla del método es deseable que la función de forma, igual que sus derivadas, queden definidas únicamente por la posición de los puntos localizados dentro del dominio de análisis. En métodos sin malla con aproximación del tipo integral¹⁴⁻¹⁷ (Galerkin, colocación por subdominios, etc.) es necesario recurrir a diversos procedimientos para realizar la integración como utilizar mallas auxiliares o de fondo.

En el MPF no hace falta realizar integración alguna, puesto que se utiliza un esquema de colocación puntual. El procedimiento de colocación puntual con una interpolación de mínimos cuadrados ha sido utilizado por Batina¹⁸ para desarrollar algoritmos sin malla en la solución de problemas de flujos de Euler y Navier-Stokes. Sin embargo, diversos trabajos posteriores han comprobado, que el uso de una función de ponderación (mínimos cuadrados ponderados) mejora la exactitud de la solución^{5,6,7}.

Utilizando la técnica de colocación puntual, el sistema de ecuaciones discretas que gobierna el comportamiento de un sólido, cuyas fuerzas de inercias son despreciables, es

$$[\nabla\sigma(\mathbf{x}) + \rho\mathbf{b}(\mathbf{x})]_i = 0 \quad i = 1, N_a \quad i \in (\Omega - \Gamma) \quad (10)$$

$$[\sigma(\mathbf{x})\mathbf{n} - \mathbf{t}(\mathbf{x})]_j = 0 \quad j = 1, N_t \quad j \in \Gamma_t \quad (11)$$

$$[\hat{u}(\mathbf{x}) - u_p(\mathbf{x})]_k = 0 \quad k = 1, N_u \quad k \in \Gamma_u \quad (12)$$

donde N_a es el número de puntos en el interior del dominio Ω y N_t , y N_u es el número de puntos en los contornos Γ_t y Γ_u , respectivamente; ($\Gamma = \Gamma_t + \Gamma_u$). Reemplazando la aproximación del MPF definida en (6) para aproximar $\hat{u}(\mathbf{x})$, y las relaciones tensión-deformación y deformación-desplazamiento para un sólido lineal elástico, se obtiene un sistema de ecuaciones en forma matricial compacta como

$$\mathbf{K}\mathbf{u}^h = \mathbf{f} \quad (13)$$

El vector \mathbf{u}^h contiene los valores buscados de los parámetros u_i^h ($i = 1, \dots, N$, siendo el número total de puntos $N = N_a + N_t + N_u$), en tanto que el vector \mathbf{f} contiene la contribución de las fuerzas de cuerpo $\mathbf{b}(\mathbf{x})$, y de los valores prescritos de las tensiones $\mathbf{t}(\mathbf{x})$ y del desplazamiento $u_p(\mathbf{x})$. Desafortunadamente, el anterior sistema de ecuaciones presenta algunos problemas debido al mal condicionamiento de la matriz \mathbf{K} por el tipo de aproximación numérica utilizada. Se debe notar de acuerdo con (10) que la ecuación de equilibrio del sólido se impone únicamente en los puntos del interior del dominio. Diferentes técnicas han sido propuestas en el pasado para estabilizar la solución numérica, cuando se utiliza un procedimiento de colocación puntual^{19,20,21}.

En el MPF se ha implementado un proceso de estabilización basado en la técnica de cálculo finitesimal desarrollada por Oñate^{22,23}.

Estabilización del sistema de ecuaciones

Aplicando los conceptos de la técnica de cálculo finitesimal a la aproximación del MPF se obtiene la forma estabilizada de las ecuaciones (10) (11) como¹⁰

$$\left[\mathbf{r} - \frac{1}{2}\mathbf{h}^T\nabla\mathbf{r} \right]_i = 0 \quad i = 1, N_a \quad i \in (\Omega - \Gamma) \quad (14)$$

$$\left[\sigma(\mathbf{x})\mathbf{n} - \mathbf{t}(\mathbf{x}) - \frac{1}{2}h_n\mathbf{r} \right]_j = 0 \quad j = 1, N_t \quad j \in \Gamma_t \quad (15)$$

$$\mathbf{r}[\nabla\sigma(\mathbf{x}) + \rho\mathbf{b}(\mathbf{x})] \quad (16)$$

siendo \mathbf{h} una longitud característica del dominio “finito”, donde son impuestas las ecuaciones de equilibrio y $h_n = |\mathbf{h}^T\mathbf{n}|$. Una importante diferencia, y seguramente una de las principales dificultades en la implementación de los métodos sin malla es la forma de prescribir las condiciones de contorno de Dirichlet (12). Tal como se ha puntualizado anteriormente, la aproximación sin malla no es capaz de capturar los valores nodales de la función incógnita. Diferentes autores han propuesto para solventar este problema técnicas como métodos de penalización, aproximación mediante multiplicadores de Lagrange, principios variacionales o acoplar en el contorno una franja de elementos finitos^{1,2,14-17}. A través de los diversos ejemplos resueltos se ha comprobado, que en el MPF se obtienen buenos resultados, cuando la condición de contorno de Dirichlet se impone en el sentido de los mínimos cuadrados tal como en la ecuación (12).

Se debe notar que si en las ecuaciones (14) y (15) \mathbf{h} tiende a cero, es decir, cuando la longitud característica del dominio es infinitesimal, se recuperan en su forma original las ecuaciones de gobierno del problema (10) y (11). En los ejemplos, que se analizan a

continuación, se han calculado h_n como una proporción de un parámetro típico de la nube de la siguiente forma

$$h_n = d^{\min} \quad (17)$$

donde d^{\min} es la distancia en una nube entre el nodo estrella y el nodo más cercano a éste.

DESARROLLO DE UN INDICADOR DEL ERROR

Un test para comprobar la convergencia de un método sin malla, ampliamente difundido en la literatura “meshless”, consiste en resolver una ecuación diferencial, cuya solución analítica permita generar un gradiente de magnitud controlada en un punto concreto del dominio de análisis^{2,15}. En particular, se propone resolver la ecuación de Poisson 1D

$$\frac{d^2u}{dx^2} = b(x) \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (18)$$

cuando el término independiente y condiciones de contorno se ajustan a lo siguiente

$$b(x) = 2 \frac{\delta}{1 + \delta^2(x - x_0)^2} + 2(1 - x)(x - x_0) \frac{\delta^3}{(1 + \delta^2(x - x_0)^2)^2}$$

$$u(x)_{x=0} = u(x)_{x=1} = 0$$

y $\delta = 60$, $x_0 = 0,5$ son los parámetros que controlan la magnitud del gradiente y el punto del dominio, en donde este se genera, respectivamente. Utilizando distribuciones regulares de 11, 21, 41 y 81 puntos con nubes de $n = 5$ puntos y un polinomio cuadrático de interpolación, las Figuras 4 y 5 muestran una correcta convergencia del MPF para este test. Como se puede ver de las figuras, existe una marcada tendencia del error relativo, que se comete en los distintos puntos. Esto es debido a que los errores máximos en la solución se encuentran en la primera mitad del dominio, mientras que los errores en la derivada se concentran alrededor del gradiente. Como se sabe cuáles son las zonas donde se concentra el error, es razonable suponer que adaptando la discretización de puntos en estas zonas, el error global de la solución disminuya.

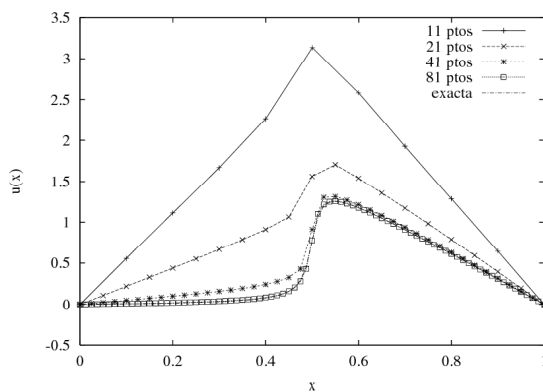


Figura 4. Convergencia de la solución. Test 1D con gradiente

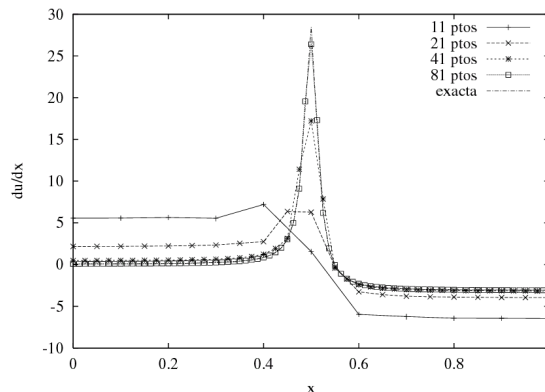


Figura 5. Convergencia de la derivada de la solución. Test 1D con gradiente

Para comprobar esto se analiza la distribución del error, pero esta vez se realiza una discretización de 51 puntos espaciados por tramos según el siguiente criterio

$$\begin{aligned} 0 &\leq x \leq 0,3 & h^* &= 0,02 \\ 0,3 &< x \leq 0,5 & h^* &= 0,01 \\ 0,5 &< x \leq 0,75 & h^* &= 0,025 \\ 0,75 &< x \leq 1,0 & h^* &= 0,05 \end{aligned}$$

lo que permite concentrar mayor cantidad de puntos en la zona, donde se genera el gradiente (h^* es la distancia entre puntos). La Tabla I demuestra la disminución del error, que se consigue en la solución y su derivada, utilizando este criterio de adaptabilidad. Se han utilizado además para comparar el error global en el dominio las normas L_2 y en energía H_1 para un caso 1D. Este ejemplo permite comprender la ventaja de contar con un indicador del error para poder concentrar más puntos en las zonas donde exista una deficiente aproximación.

	L_2	H_1	error máximo $u(x)$	error máximo $\partial u(x)/\partial x$
$N = 51$, uniforme	0,018	0,14	0,66	1,12
$N = 51$, adaptado	0,0078	0,011	0,16	0,29
Disminución relativa	43 %	8,1 %	25 %	26 %

Tabla I. Comparación del error para una discretización de puntos uniformes y una discretización adaptable

Para saber si existe una relación directa entre la disminución del error y el valor del funcional J_I en la zona donde se han agregado nuevos puntos, se muestra gráficamente su valor considerando los dos tipos de discretizaciones. La Figura 6 demuestra que existe un mayor valor de este funcional cuando no se utiliza la distribución adaptada; también se puede comprobar una disminución efectiva de su valor al utilizar el criterio de adaptabilidad. Por otro lado se puede ver que no existe una diferencia significativa entre la versión ponderada y no ponderada de este funcional.

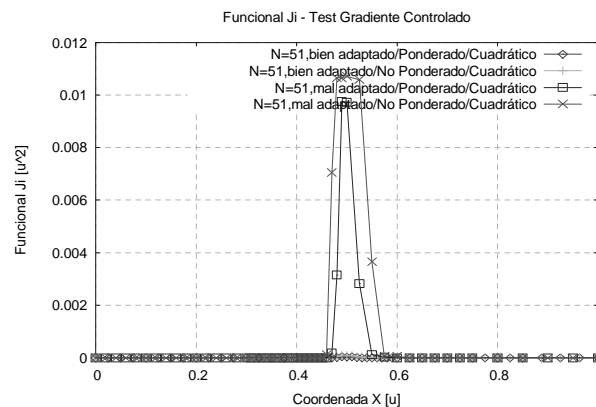


Figura 6. Tendencia del funcional J_I para una distribución uniforme y adaptada de puntos

Si bien en este caso se conocen las zonas donde es posible ubicar nuevos puntos, a continuación se muestran algunos ejemplos, en los que se ejemplifica la utilización del funcional J_I (recordar ecuación 3) como posible indicador del error para lograr una mejora de la solución numérica.

Placa infinita en tensión con agujero

Se ha resuelto como primer ejemplo una placa infinita en tensión con un agujero circular. Utilizando las propiedades para el material $E = 1000$ y $\nu = 0,3$, se procede a modelar un cuarto de la placa bajo un estado de tensión plana. La placa infinita se encuentra sometida a esfuerzo remoto de valor unitario en la dirección positiva de x , pero tal como se aprecia en la Figura 7, en las cercanías del agujero (contornos $x = 4$ e $y = 4$) se prescriben esfuerzos según la solución teórica²⁴.

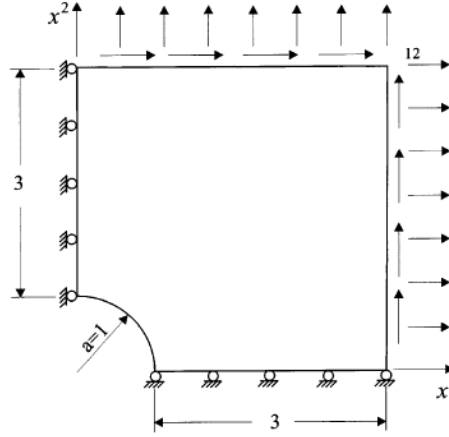


Figura 7. Placa infinita en tensión

Como se establece en la formulación teórica del MPF, el valor del funcional J_I es una cantidad vectorial, que indica para cada nube de interpolación el error ponderado, que se comete al tratar de ajustar las contribuciones nodales al valor de la función aproximada en el punto. Para un caso 2D se puede obtener un valor en cada punto, si se toma su norma cuadrática como

$$J_{GI} = \sqrt{J_{I_x}^2 + J_{I_y}^2}$$

De esta forma, si N representa el número total de puntos para una discretización en particular, se puede construir un sencillo indicador del error efectuando una equidistribución de este nuevo funcional sobre todo el dominio:

$$\xi_I = \frac{NJ_{GI}}{\sum_{I=1}^N J_{GI}} \quad (19)$$

Adaptando la ubicación de los puntos al valor del indicador (19), la Tabla II muestra la disminución del error, que se consigue para este ejemplo. Para salvaguardar el carácter sin malla de la aproximación se han utilizado las siguientes expresiones equivalentes para el cálculo del error

$$L_2 \approx \frac{\left\{ \sum_{I=1}^N (\mathbf{u}_I^r - \mathbf{u}_I)^T (\mathbf{u}_I^r - \mathbf{u}_I) \right\}^{\frac{1}{2}}}{\left\{ \sum_{I=1}^N (\mathbf{u}_I^T \mathbf{u}_I) \right\}^{\frac{1}{2}}}$$

$$H_2 \approx \frac{\left\{ \sum_{I=1}^N (\varepsilon_I^r - \varepsilon_I)^T \mathbf{D} \varepsilon_I^r - \varepsilon_I \right\}^{\frac{1}{2}}}{\left\{ \sum_{I=1}^N \varepsilon_I^T \mathbf{D} \varepsilon_I \right\}^{\frac{1}{2}}}$$

donde las cantidades $(\cdot)_I^r$, $(\cdot)_I$ representan los valores de la solución numérica y teórica en el punto I , respectivamente, siendo \mathbf{D} la matriz constitutiva.

Nº de puntos	Norma L_2 tensiones	Norma energética H_1
57	0,1404	0,1662
69	0,1129	0,1305
138	0,0572	0,0651
171	0,0525	0,0572
213	0,0381	0,0432

Tabla II. Convergencia del error para la placa con agujero y una discretización de puntos adaptable

La Figura 8 muestra los resultados, que se obtienen concentrando nuevos puntos según la tendencia que muestra el indicador para una discretización de 57, 69 y 138 puntos.

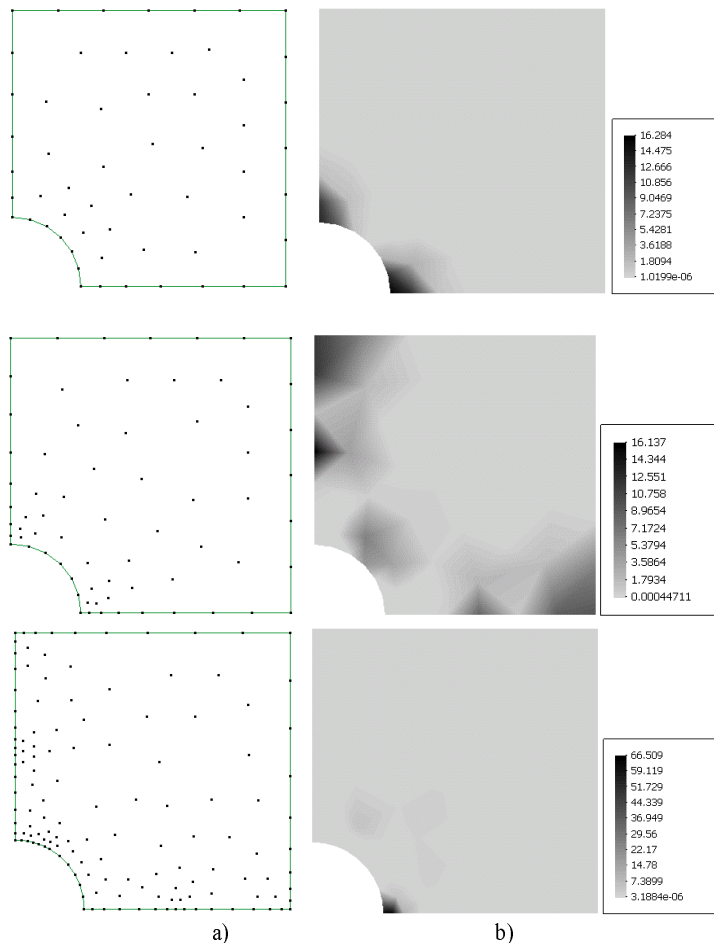


Figura 8. Evolución de a) la discretización y b) del indicador del error para la placa infinita en tensión, $N = 57, 69$ y 138 puntos Viga en cantilever

Viga en cantilever

Un segundo ejemplo analizado consiste en modelar el comportamiento de una viga empotrada con un cortante parabólico en su extremo bajo condiciones de tensión plana (Figura 9). Las propiedades utilizadas son: $E = 1000$ y $\nu = 0,3$, siendo la carga total $P = 1,0$. Sobre el contorno $x = 0, y = \pm 2$ se prescriben los desplazamientos obtenidos de la solución teórica²⁴.

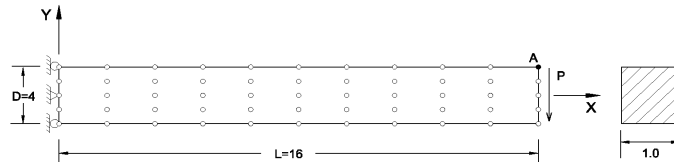


Figura 9. Viga en cantilever

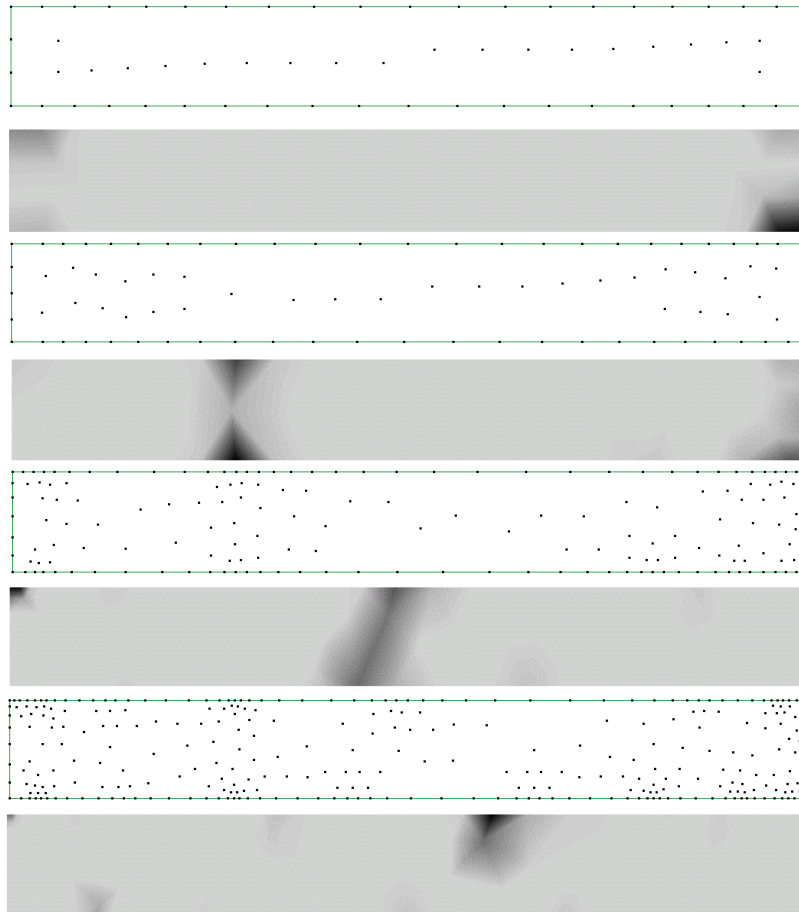


Figura 10. Evolución de la discretización y del indicador del error para la viga en cantilever, $N = 66, 88, 173$ y 314 puntos

La Figura 10 muestra los resultados, que se obtienen para la evolución de la discretización y del indicador cuando se utilizan inicialmente 66 puntos. Al igual que en el caso anterior se utiliza la información del indicador propuesto para agregar puntos en las zonas, donde

éste presenta un valor elevado. Finalmente, la Tabla III indica la disminución del error, que se consigue en este ejemplo utilizando dicho procedimiento. Ambos ejemplos desarrollados muestran una correcta correlación con los valores teóricos de la solución.

Nº de puntos	Norma L_2 tensiones	Norma energética H_1
66	0,0934	0,1077
88	0,0914	0,0996
173	0,0815	0,0846
314	0,0644	0,0649
401	0,0335	0,0338

Tabla III. Convergencia del error para la viga en cantilever y una discretización de puntos adaptable

Disco bajo compresión diametral

La geometría para este problema se muestra en la Figura 11 y consiste en someter al disco a una carga puntual de $P = 1,0$ a lo largo de su diámetro $D = 0,5$. Este ensayo, de especial interés para materiales bituminosos y frágiles, se encuentra estandarizado según la norma ASTM D-4123 1987.

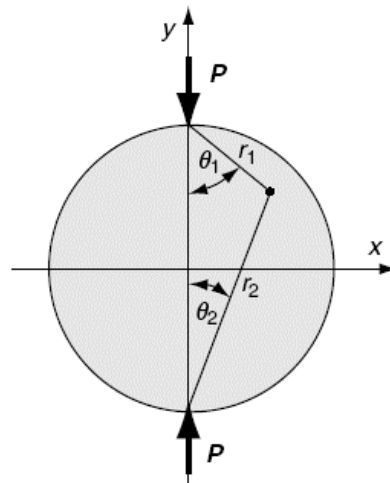


Figura 11. Disco bajo compresión diametral

Realizando un cambio de coordenadas apropiado y considerando el radio del disco $R = \frac{D}{2}$, se puede obtener el siguiente campo de esfuerzos para la solución analítica²⁴

$$\sigma_x = -\left(\frac{2P}{\pi}\right) \left[\frac{(R-y)x^2}{r_1^4} + \frac{(R+y)x^2}{r_2^4} - \frac{1}{D} \right]$$

$$\sigma_y = -\left(\frac{2P}{\pi}\right) \left[\frac{(R-y)^3 x^2}{r_1^4} + \frac{(R+y)x^3}{r_2^4} - \frac{1}{D} \right]$$

$$\tau_{xy} = \frac{2P}{\pi} \left[\frac{(R-y)^2 x}{r_1^4} - \frac{(R+y)x^2}{r_2^4} \right]$$

Utilizando condiciones en deformación plana se procede a discretizar el disco inicialmente con 104 puntos, adaptando posteriormente la ubicación de nuevos puntos a los valores del indicador. Para cada punto se procede a comparar y calcular el esfuerzo cortante máximo según

$$\tau_{\max} = \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4} + \tau_{xy}^2}$$

La evolución del esfuerzo cortante máximo para las diferentes distribuciones de puntos se puede ver en la Figura 12. Se aprecia una clara tendencia hacia la distribución esperada (Figura 13), cuando se agregan puntos en las zonas, donde el indicador del error lo señala.

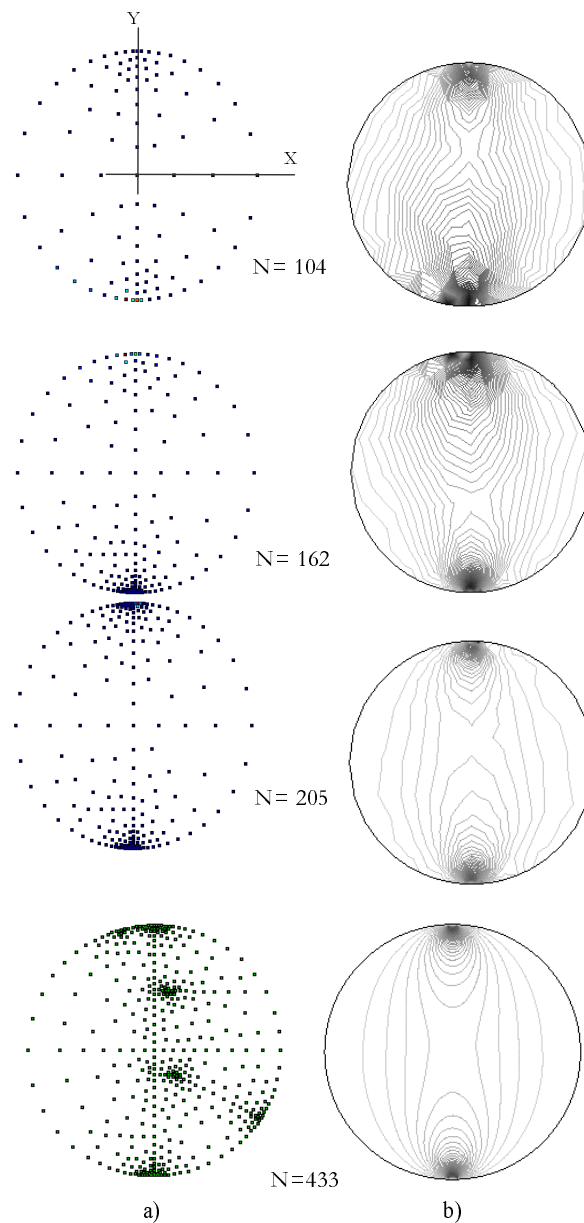


Figura 12. Disco bajo compresión diametral: a) discretización y b) isolíneas de esfuerzo cortante máximo

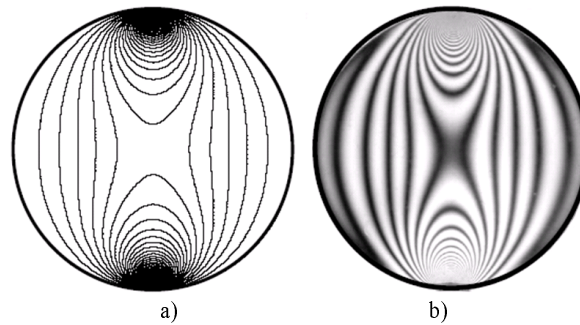


Figura 13. Contornos de esfuerzo cortante máximo para disco bajo compresión diametral: a) teórico y b) de análisis fotoelástico

Finalmente, para analizar el comportamiento global de la solución se muestra en la Tabla IV la evolución del error en norma L_2 para las tensiones en el eje $y = 0$.

Número de puntos	Error norma L_2 eje $y = 0$
104	0,2508
162	0,1385
205	0,0479
433	0,0383
514	0,0207

Tabla IV. Convergencia del error para el disco bajo compresión diametral

CONCLUSIONES

Se han presentado las tendencias del funcional de mínimos cuadrados ponderados en el MPF para problemas con distribución regular e irregular de puntos. A la vista de los resultados que se obtienen, se puede concluir, que el funcional J efectivamente entrega indicios del error de interpolación numérica. Esta información puede ser utilizada para visualizar aquellas zonas, donde se hace necesario agregar más puntos de forma localizada, sin un aumento significativo en el número de grados de libertad del problema. La equidistribución del error basado en a este funcional resulta ser un indicador fácil de calcular e implementar en el MPF. Por otro lado, no se ha constatado una diferencia sustancial en el uso de la versión ponderada del funcional, respecto de la versión estándar, a efectos de estimación del error.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el soporte entregado para la realización del presente trabajo a la Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica del Gobierno de Chile, mediante el Proyecto FONDECYT 1040371 y a la Dirección General de Investigación y Postgrado de la Universidad Técnica Federico Santa María a través del Proyecto USM 250521.

REFERENCIAS

- 1 T. Belytschko, Y. Krongauz, D. Organ, M. Fleming y P. Krysl, "Meshless method: An overview and recent developments", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. **139** pp. 3–48, (1996b).
- 2 A. Duarte C., "A review of some meshless method to solve partial differential equations", University of Texas, TICAM Report 95–06, (1995).
- 3 E. Oñate, S. Idelsohn y O.C. Zienkiewicz, "Finite point method in computational mechanics", Research Report N° 67, CIMNE, Barcelona, (1995).
- 4 E. Oñate, S. Idelsohn, O.C. Zienkiewicz y T. Fisher, "A finite point method for analysis of fluid flow problems", *Proceedings of the 9th Int. Conference on Finite Element Methods in Fluids*, Venecia, Italia, pp. 15–21, (1995).
- 5 E. Oñate, S. Idelsohn, O.C. Zienkiewicz y R.L. Taylor, "A finite point method in computational mechanics. Applications to convective transport and fluid flow", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **39**, pp. 3839–3866, (1996).
- 6 E. Oñate, S. Idelsohn, O.C. Zienkiewicz y R.L. Taylor, "A stabilized finite point method for analysis of fluid mechanics problems", *Comput. Meth. in Appl. Engng.*, Vol. **139**, pp. 315–347, (1996).
- 7 E. Oñate y S. Idelsohn, "A mesh free finite point method for advective-diffusive transport and fluid flow problems", *Computational Mechanics*, Vol. **21**, pp. 283–292, (1998).
- 8 E. Oñate, F. Perazzo y J. Miquel, "Advances in stabilized finite point method for structural mechanics", Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería (CIMNE), Research Report N° 164, Barcelona, (1999).
- 9 E. Oñate, F. Perazzo y J. Miquel, "A finite point method for elasticity problems", *Computers & Structures*, Vol. **79**, pp. 2151–2163, (2001).
- 10 F. Perazzo, J. Miquel y E. Oñate, "Una metodología numérica sin malla para la resolución de las ecuaciones de elasticidad mediante el método de puntos finitos", Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería (CIMNE), Monografía M81, Barcelona, (2003).
- 11 F. Perazzo, J. Miquel y E. Oñate, "El método de puntos finitos para problemas de la dinámica de sólidos", *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, Vol. **20**, N° 3, pp. 235–246, (2004).
- 12 O.C. Zienkiewicz y R.L. Taylor, "The finite element method", *4th Edition*, Vol. **1**, McGraw Hill, (1989).
- 13 R. Löhner, C. Sacco, E. Oñate y S. Idelsohn, "A finite point method for compressible flow", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **53**, pp. 1765–1779, (2002).
- 14 T. Belytschko, Y. Lu y L. Gu, "Element free Galerkin methods", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **37**, pp. 229–256, (1994).
- 15 J. Dolbow y T. Belytschko, "An introduction to programming the meshless element free Galerkin method", *Archives of Comput. Meth. in Engng.*, Vol. **5**, N° 3, pp. 207–241, (1998).
- 16 W.K. Liu, S. Jun, S. Li, J. Adee y T. Belytschko, "Reproducing Kernel particle methods for structural dynamics", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **38**, pp. 1655–1679, (1995).
- 17 W.K. Liu, Y. Chen, S. Jun, J.S. Chen, T. Belytschko, C. Pan, R.A. Uras y C.T. Chang, "Overview and applications of the Reproducing Kernel particle method", *Archives of Comput. Meth. Engng.*, Vol. **3**, N° 1, pp. 3–80, (1996).
- 18 J. Batina, "A gridless Euler/Navier-Stokes solution algorithm for complex aircraft applications", AIAA 93-0333, Reno NV, January 11–14, (1993).
- 19 T. Liszka, C.A. Duarte y W. Tworzydło, "hp-Meshless cloud method", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. **139**, pp. 263–288, (1996).
- 20 J. Orkisz, "Meshless finite difference method. I basic approach. II Adaptive approach", "Proceedings of IACM-Fourth World Congress of Computational Mechanics", Idelsohn-Oñate-Dvorkin (Eds.) CIMNE, Barcelona, España (1998).
- 21 X. Zhang, X.H. Liu, K.Z. Song y M.W. Lu, "Least-square collocation meshless method", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **51**, pp. 1089–1100, (2001).
- 22 E. Oñate, "On the stabilization of numerical Solution for advective-diffusive transport and fluid flow problem", Report CIMNE N° 81, (1996).
- 23 E. Oñate, "Possibilities of finite calculus in computational mechanics", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **60**, pp. 255–281, (2004).
- 24 S.P. Timoshenko y J.N. Goodier, "Theory of elasticity", 3ª edición, McGraw Hill, (1970).