

Un sistema para la reconstrucción de superficies mediante técnicas de interpolación de datos dispersos

J. Zavaleta Sánchez,^{1*} P. Barrera Sánchez,¹ G. F. González Flores¹

¹Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional Autónoma de México

* Correo electrónico: jorge.zavaleta@ciencias.unam.mx

Resumen

La interpolación de datos dispersos es de gran utilidad en la ciencia e ingeniería para el análisis y modelación de una gran cantidad de fenómenos físicos y experimentos que se presentan en estos campos. Por ello, se ha desarrollado un sistema que resuelve este problema eligiendo entre varias técnicas como, distancia inversa, funciones de base radial, B-spline multinivel y kriging. En este escrito se describe a grandes rasgos el sistema y se mostrará su aplicación a la generación de mallas estructuradas en 3D.

Palabras clave: Interpolación; datos dispersos; software; mallas estructuradas.

1 Introducción

En términos simples, la interpolación de datos dispersos se refiere al problema de ajustar una superficie a través de muestras de datos con distribución no uniforme o aleatoria. Este tema es de gran importancia práctica dentro de diversos campos de la ciencia e ingeniería debido a que en ellos es necesario analizar y modelar varios fenómenos físicos, experimentos, valores computacionales, entre otros, a partir de datos obtenidos en posiciones irregulares dentro de un dominio de interés. Por ejemplo, de acuerdo con Lee *et al.* [4], mediciones no uniformes de cantidades físicas de varios fenómenos son tomadas en geología, meteorología, oceanografía, ingeniería petrolera y minería; datos dispersos experimentales son producidos en química, física e ingeniería; y valores computacionales espaciados de manera no uniforme surgen en la salida de las soluciones de ecuaciones diferenciales parciales obtenidas mediante elemento finito. Por esta razón dichos campos requieren utilizar la interpolación

para propagar la información sobre todas las posiciones de un dominio de interés para ayudar con las tareas de análisis y modelación.

Con el objetivo de facilitar la resolución del problema de interpolación de datos dispersos en dos dimensiones se ha desarrollado el sistema UNAMSI, el cual es una herramienta computacional que utiliza algunas técnicas con diferentes enfoques, entre las que se encuentran los métodos de distancia inversa, las funciones de base radial, B-splines multinivel y en particular kriging que es probablemente el más utilizado en la práctica. Dentro del sistema se ha creado un módulo para la generación de mallas 3D a partir de la reconstrucción de superficies, ya que en numerosas aplicaciones es necesario construir una malla estructurada 3D que sea adecuada para la simulación numérica de algún fenómeno dentro de una región de interés. Una muestra de ello se encuentra en la simulación numérica del flujo de hidrocarburos dentro de un yacimiento, donde la malla 3D que nos permite modelar este fenómeno debe ser construida a partir de los

datos geológicos y petrofísicos recabados en los pozos.

Aquí se presenta el sistema de interpolación de datos dispersos y su aplicación para la generación de mallas hexaedrales estructuradas. Con este fin, se describe el problema de interpolación de datos dispersos en 2D, para después mostrar el sistema y las ideas de la construcción de la malla utilizadas en módulo de generación.

2 Interpolación de datos dispersos en dos dimensiones

El problema de interpolación en dos dimensiones puede ser formulado como sigue: Sea $\mathcal{P} = \{(x_i, y_i, z_i)\} \subset \mathbb{R}^3$ un conjunto de puntos dispersos en el espacio, donde $\mathbf{x}_i = (x_i, y_i)^T \in \mathcal{D}$ para $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ un dominio en el plano e $i = 1, \dots, N$. Resolver el problema consiste en encontrar una función escalar continua bivariada F , tal que $F(\mathbf{x}_i) = F(x_i, y_i) = z_i$. En algunas ocasiones cuando los datos tienen errores de medición es útil considerar el problema de aproximación en lugar del problema de interpolación, es por ello que también se trata este problema. Análogamente, resolver el problema de aproximación consiste en encontrar una función escalar continua bivariada F , tal que $F(\mathbf{x}_i) \approx z_i$.

Existe una gran variedad de métodos para resolver este problema, aunque aquí solo se enuncian algunos de los que han sido utilizados en la práctica (Franke [3]). Todos los métodos están basados en la idea de que el valor desconocido en algún punto $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$ debe ser muy parecido a los valores de los datos z_i en las posiciones \mathbf{x}_i que estén más cercanas a \mathbf{x} . Los métodos se pueden clasificar en dos grupos: Globales, que utilizan todos los puntos de los datos y locales, en el caso contrario. Utilizando esta clasificación los métodos utilizados en el sistema son los siguientes:

- Globales
 - Método de Shepard (distancia inversa).
 - Funciones de base radial.

- Aproximación B-spline multinivel.
- Kriging (ordinario y universal).

- Locales

- Método de Shepard modificado (distancia inversa).

Una exposición amplia sobre los métodos y mayores referencias sobre estos puede ser consultado en Zavaleta [6].

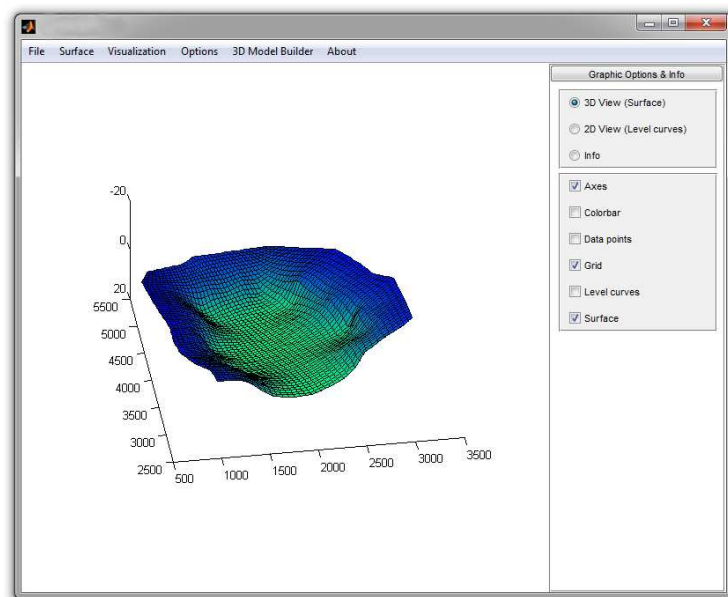
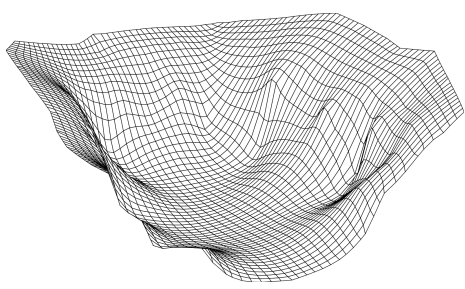


Figura 1: Sistema de interpolación de datos dispersos.

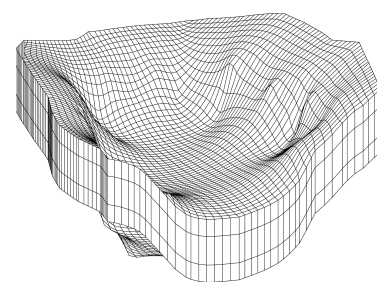
3 Sistema de interpolación de datos dispersos

El sistema UNAMSI para interpolación de datos dispersos (figura 1) fue desarrollado en Matlab con el objetivo de tener una herramienta que facilite la resolución de este problema en dos dimensiones. La razón de tener diferentes métodos de resolución es para que el usuario tenga la posibilidad de elegir el que mejor se adecue a sus necesidades.

Dicho sistema está pensado para trabajar con un conjunto de datos a la vez. Cuenta con herramientas para la visualización y edición de los datos, reconstrucción de la superficie mediante los distintos métodos descritos y una herramienta para el cálculo del variograma, que sirve para



(a) Superficie base



(b) Malla 3D

Figura 2: Proceso de la construcción de la malla 3D.

el análisis de la correlación espacial de los datos, identificación de anisotropía y principalmente para el cálculo de variogramas experimentales y ajuste de modelos admisibles de variograma necesarios para kriging.

Para utilizar los métodos de interpolación dentro del sistema solo basta con elegir el método deseado y la malla sobre la que se proyecta la superficie reconstruida. Cada método tiene sus parámetros correspondientes definidos por defecto para facilitar su uso, sin embargo, para usuarios expertos, se tiene la posibilidad de cambiar tales valores.

Las mallas usadas para la reconstrucción son mallas estructuradas en el plano. Para ello se pueden elegir mallas rectangulares euclidianas y mallas generadas por el sistema UNAMalla 4.0 (UNAMALLA GROUP [5]), un sistema para generación de mallas estructuradas sobre regiones irregulares en el plano (Barrera *et al.* [1]). Una descripción más detallada sobre el sistema puede ser encontrada en Zavaleta [6].

3.1. Módulo de construcción de mallas 3D

Una de las primeras aplicaciones del sistema ha sido la generación de mallas 3D. La idea de la construcción de las mallas se divide en dos pasos:

- Realizar la reconstrucción de una superficie en una región de interés mediante los métodos de interpolación de datos dispersos utilizando mallas estructuradas en dos dimensiones para generar la superficie base (véase figura 2a).

- Construir la malla 3D a partir de copias verticales de la superficie base, como se observa en la figura 2b.

El módulo, que se muestra en la figura 3, está pensado para aprovechar la estructura de las mallas utilizadas para la reconstrucción de la superficie. De este modo cuando se generan las copias verticales para construir la malla 3D es fácil extender y conservar esta propiedad de las mallas en el plano utilizadas (Barrera *et al.* [1]). La herramienta de construcción permite visualizar la superficie base y definir el número de bloques (copias) que se deseen utilizar. Para ello permite especificar el grosor de los bloques de manera uniforme o con diferentes valores para las separaciones entre capa y capa, dando flexibilidad para ciertas aplicaciones.

Con el fin de generar una malla hexaedral, se formula un problema variacional el cual puede resolverse como un problema de optimización a gran escala sin restricciones (Barrera *et al.* [2]). La malla inicial para este proceso es justamente la malla construida mediante las copias verticales; al final del mismo se obtiene una malla estructurada y hexaedral.

4 Conclusiones

El sistema permite la resolución del problema de interpolación mediante diferentes métodos, esto para que el usuario tenga la posibilidad de elegir el que mejor se adecue a sus necesidades. Además, proporciona herramientas visuales para el procesamiento de los datos, permite efectuar el cálculo de algunos estadísticos univaria-

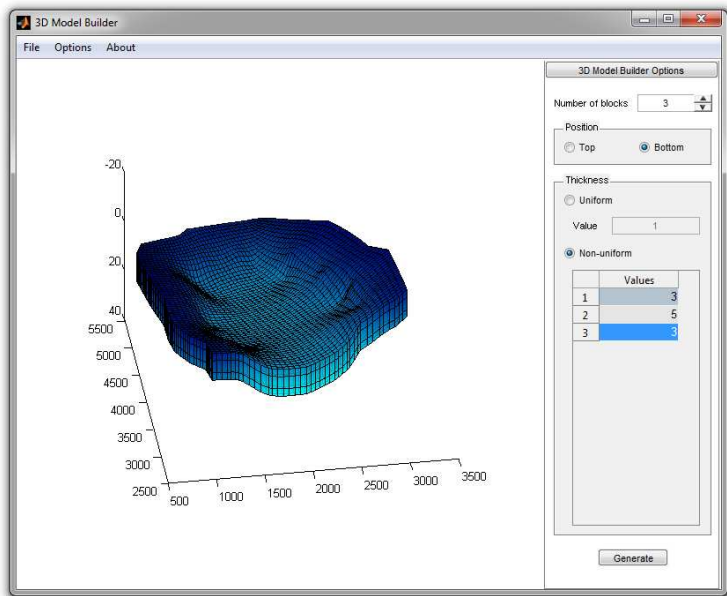


Figura 3: Módulo de generación de mallas hexaedrales.

dos y del variograma, para el análisis de los mismos. El módulo incorporado sirve para construir de forma sencilla mallas 3D sobre algunas regiones complicadas aprovechando las cualidades de las mallas obtenidas por el sistema UNAMalla, y construir finalmente una malla hexaedral estructurada para ser usada en una gama amplia de aplicaciones.

Referencias

- [1] Barrera P., Cortés, J.J., González G., Domínguez Mota F.J., Tinoco J.G. Smoothness and Convex Area Functionals-Revisited. *Journal on Scientific Computing, SIAM*, 32(4):1913–1928, 2010.
- [2] Barrera P., Cortés J.J., González G. Harmonic Hexahedral Structured Grid Generation. *Mathematical and Computer Modelling Journal, ELSEVIER*, 57(9–10):2289–2301, 2011.
- [3] Franke R. Scattered Data Interpolation: Test of Some Methods. *Mathematics of Computations*, 33(157):181–200, 1982.
- [4] Lee S., Wolberg G., Shin S.Y. Scattered Data Interpolation with Multilevel B-

Splines. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 3(3):228–244, 1997.

- [5] UNAMALLA GROUP. Página web del grupo UNAMALLA. <http://www.matematicas.unam.mx/unamalla>
- [6] J. Zavaleta Sánchez. *Un sistema para la reconstrucción de superficies mediante técnicas de interpolación de datos dispersos*. UNAM, 2014.