

MÉTODOS PARA RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA NO LINEAL DE EQUILIBRIO ESTÁTICO EN SISTEMAS MULTICUERPO

GOIZALDE AJURIA
RAFAEL AVILÉS
ARMANDO BILBAO
y
SANTIAGO NAVALPOTRO

*Escuela Superior de Ingenieros
Alameda de Urquijo s/n, 48013 Bilbao, España
Tel.: + 34-94-427 8055, Fax: + 34-94-441 4041*

RESUMEN

En este trabajo se aborda la resolución del problema no lineal de posición de equilibrio estático y de otros problemas de posición en sistemas mecánicos multicuerpo complejos, que incluyen elementos rígidos y elásticos. En el estudio se utiliza una función de error sencilla, que se basa en la función potencial e incluye en el análisis a los elementos rígidos por medio de restricciones no lineales. Se presenta la aplicación de los Multiplicadores de Lagrange, Funciones de Penalización, Rigideces Ponderadas y de diferentes versiones del método de los Multiplicadores Aumentados o método Primal-Dual.

Palabras clave: Equilibrio estático/Sistemas multicuerpo/análisis no lineal

SOLUTION OF THE NONLINEAR EQUILIBRIUM POSITION PROBLEM IN MULTIBODY SYSTEMS

SUMMARY

This paper presents different approaches for the solution of non-linear equilibrium problems in multibody systems. These systems can include rigid and elastic elements. The ideas here presented are also able to deal with other position problems, for instance those which appear in the kinematic analysis of linkages. The error function used is very simple and is based in the potential of the system. The rigid elements are considered through non-linear constraints. Different approaches are described: Lagrange Multipliers, Penalty Functions, Primal-Dual methods and Weighted Stiffnesses.

Keywords: Static Equilibrium/Multibody systems/Non-linear analysis

Recibido: Enero 1997

INTRODUCCIÓN

El diseño de mecanismos, que son un caso particular de sistemas multicuerpo en los que existe la posibilidad de movimiento relativo de sólido rígido entre sus elementos, comienza por la síntesis estructural, es decir, por la selección de la cadena cinemática que se considera más idónea para una aplicación dada; continúa por la síntesis dimensional, que trata de obtener las dimensiones óptimas de los elementos para verificar las condiciones cinemáticas buscadas¹⁻⁷ y posteriormente se procede al análisis cinemático y dinámico en su caso. En el análisis cinemático se pueden distinguir a su vez dos grandes grupos de problemas a resolver, de un lado los lineales: velocidades, aceleraciones, sobreaceleraciones y de otro los no lineales: fundamentalmente los problemas de posición. A su vez estos últimos pueden ser de posición inicial, posiciones sucesivas, posición deformada y posición de equilibrio estático, así como los problemas directo e inverso en el caso de mecanismos de cadena abierta o mixta¹⁻⁷. Excepto el de posiciones sucesivas, todos los restantes son también planteables para sistemas multicuerpo sin movimientos de sólido rígido (es decir, que no sean mecanismos).

El problema de posición inicial consiste en la determinación de las posiciones de los elementos de un mecanismo o de un sistema multicuerpo cualquiera, cuando se conocen las dimensiones de todos sus elementos, la posición de los puntos relacionados con el soporte y las posiciones de los elementos de entrada en el caso de tratarse de mecanismos. Por su parte, el de posiciones sucesivas trata de obtener las posiciones de un mecanismo para una secuencia dada de variación de los parámetros de entrada. El de posición deformada consiste en obtener la posición de equilibrio de los elementos de un sistema cuando a éste se le obliga a ocupar posiciones fuera de su posición (o posiciones) de sólido rígido. Este problema tiene interés por ejemplo en la síntesis de mecanismos, tal y como se describe en las referencias³⁻⁶. Finalmente, el problema de posición de equilibrio estático, al cual se dedica fundamentalmente este trabajo, se ocupa de obtener la posición de equilibrio de un sistema compuesto por elementos indeformables y por resortes elásticos, cuando sobre él actúa un sistema de fuerzas exteriores que produce grandes desplazamientos.

El Método de los Elementos Finitos ha demostrado ser una herramienta capaz y versátil para estudiar muy diversos problemas en sistemas mecánicos, incluidos mecanismos y sistemas multicuerpo de cualquier tipo. Sin embargo, hoy día la mayoría de las aplicaciones del Método de los Elementos Finitos se realizan en el campo del análisis resistente de sólido deformable, estático y dinámico, en régimen lineal y no lineal de piezas o componentes aislados. Frecuentemente, esos análisis resistentes se aplican a elementos o componentes de mecanismos cuyo análisis cinemático y dinámico se han realizado previamente mediante otros métodos. No obstante, se pueden encontrar también algunas referencias bibliográficas sobre la aplicación de los conceptos de elementos finitos al análisis de mecanismos, comenzando por la década de los 70, como por ejemplo las de^{9,10} o la de este mismo trabajo. En los años siguientes han continuado realizándose algunas aportaciones, algunas de las cuales guardan una estrecha relación con los métodos presentados en este trabajo⁶⁻⁸ y otras con diferentes enfoques como por ejemplo las de¹¹⁻¹⁴.

El procedimiento que se va a utilizar para modelizar los mecanismos es básicamente

el mismo que se describe en las referencias^{4,6,7} y que se basa en construir un sencillo modelo de elementos finitos de tipo barra biarticulada u otros distintos en su caso. Por tanto, los desarrollos matemáticos subsiguientes se apoyan básicamente en las propiedades de la matriz de rigidez. Las restricciones cinemáticas correspondientes a los pares cinemáticos, distintos del de revolución, se obtienen como condiciones de ligadura entre varios nudos y se introducen en las matrices del sistema. Las referencias^{6,7} describen detalladamente estos aspectos para mecanismos de cadena cerrada, en la⁷ se hace además un estudio especial del caso de los de cadena abierta y mixta. Cuando el sistema mecánico incluya además resortes entre sus nudos, éstos simplemente se consideran como unos elementos más: barra de rigidez dada entre dos nudos en el caso de los de tracción-compresión, o una rigidez finita concentrada en un nudo en el caso de los de torsión. Estos elementos resorte pueden ser además de rigidez constante o variable, es decir, ser de tipo elástico lineal o no lineal.

En el caso particular de los mecanismos de cadena abierta o mixta, y en general en los que tienen varios grados de libertad de sólido rígido, se suele hacer además referencia a los problemas de posición denominados como directo e inverso. El directo es simplemente el mismo problema de posición inicial antes descrito, o el de posiciones sucesivas si se trata de una secuencia de movimientos. El inverso trata de obtener los valores de los parámetros de entrada para posiciones dadas de determinados puntos o elementos del mecanismo^{7,15}. También algunos de los problemas que se tratan de resolver en las estructuras adaptativas celulares de geometría variable (Variable Geometry Truss o VGT)¹⁶⁻²⁰ son abordables con los conceptos aquí expuestos. De hecho, y desde un punto de vista de la Teoría de Mecanismos y Máquinas, esas estructuras son mecanismos de cadena abierta de muy alta redundancia cinemática. Algunos de los accionamientos tienen como misión producir los movimientos de sólido rígido del sistema, como se describe por ejemplo en las referencias¹⁸⁻²⁰. Pueden existir además otros accionamientos que se utilizan para producir pequeños movimientos de ajuste a fin de compensar deformaciones estáticas o dinámicas durante su funcionamiento²¹⁻²⁴.

DESCRIPCIÓN DE LA FUNCIÓN OBJETIVO

Para la resolución de los problemas de posición, incluido el de equilibrio estático y el de posición deformada, utilizaremos una función objetivo φ , basada en la función potencial del sistema mecánico, de modo análogo a lo que se hace en las referencias^{2-7,14}

$$\varphi(\{x\}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r s_i (d_i(\{x\}) - D_i)^2 - \{F\}^T \{x\} \quad (1)$$

siendo r el número de elementos elásticos, d_i la longitud del elemento elástico i en una iteración cualquiera, correspondiente al vector de coordenadas nodales $\{x\}$, D_i la longitud nominal (sin deformar) de dicho elemento y s_i su rigidez (en principio supuesta constante); el vector $\{F\}$ contiene los valores de las fuerzas aplicadas en los nudos. Pero dado que estos sistemas mecánicos pueden estar compuestos por elementos

rígidos y elásticos, como en el caso de la Figura 1, se debe exigir al mismo tiempo que la longitud de los rígidios no varíe, utilizando para ello ecuaciones de restricción de la forma

$$c_i(\{x\}) = l_i(\{x\}) - L_i = 0 \quad i = 1, \dots, b \quad (2)$$

siendo b el número de elementos rígidios, l_i la longitud de la barra i en una iteración cualquiera, correspondiente al vector de coordenadas nodales $\{x\}$ y L_i su longitud sin deformar.

Esta función se puede utilizar para todos los problemas de posición, sin más que modificar el significado de las variables y eliminar algún término en su caso. Por ejemplo, en los problemas de posición inicial y sucesivas no existe el segundo término, dependiente del vector de fuerzas, ni tampoco las restricciones (2). La solución, o soluciones, se alcanzan cuando φ se hace cero (deformación nula de todos los elementos) y utilizando el método como el de Newton-Raphson se llega a la convergencia en unas pocas iteraciones, aun cuando la posición de partida esté muy alejada de una solución, tal y como se describe detalladamente en las referencias^{7,14}. En el problema de posición deformada tampoco existen las restricciones de (2) y casi siempre tampoco el término dependiente del vector de fuerzas, pero ahora el mínimo de φ ya no está en cero, por lo que el método de búsqueda de mínimos presenta mayores dificultades que en el caso anterior³⁻⁷.

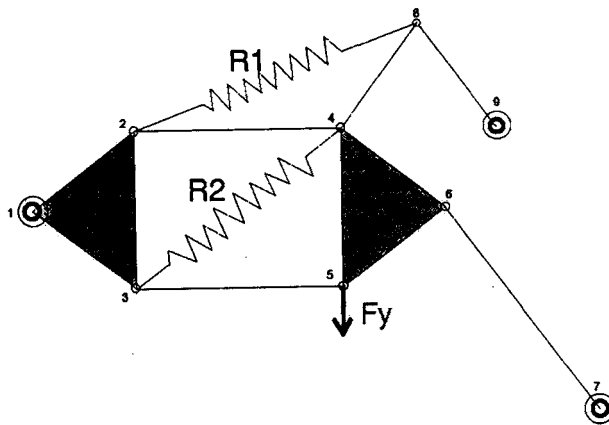


Figura 1. Sistema mecánico compuesto por 8 elementos rígidos y 2 resortes elásticos.
Modelo con 11 barras, 9 nudos y 18 grados de libertad

Seguidamente se van a presentar diferentes procedimientos de minimización de la función de error (1) sometida a las restricciones de (2).

MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

Éste es un método clásico de resolución de este tipo de problemas^{2,25,26}. Se basa en la formación de una función objetivo ampliada \mathcal{L} , suma de la función objetivo primitiva (1) más el producto de cada una de las restricciones por unas nuevas variables auxiliares, que son los multiplicadores de Lagrange λ_i .

$$\mathcal{L}(\{x\}, \{\lambda\}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r s_i (d_i(\{x\}) - D_i)^2 - \{F\}^T \{x\} + \sum_{i=1}^b \lambda_i (l_i(\{x\}) - L_i) \quad (3)$$

Se demuestra que la posición solución $\{\hat{x}\}$ debe verificar

$$\{\nabla_x \mathcal{L}\} = \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \{x\}} \right\} = \{0\} \quad (4)$$

donde

$$\left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \{x\}} \right\} = \sum_{i=1}^r s_i (d_i(\{x\}) - D_i) \left\{ \frac{\partial d_i(\{x\})}{\partial \{x\}} \right\} - \{F\} + \sum_{i=1}^b \lambda_i \left\{ \frac{\partial l_i(\{x\})}{\partial \{x\}} \right\} \quad (5)$$

Sea el vector $\{h\}_i$ descrito en las referencias³⁻⁷

$$\{h\}_i = \begin{pmatrix} -\cos \theta_i \\ -\sin \theta_i \\ \cos \theta_i \\ \sin \theta_i \end{pmatrix} \quad (6)$$

siendo θ_i el ángulo de posición del elemento barra i , supongamos por ejemplo entre los nudos 1(x_{11}, x_{21}) y 2(x_{21}, x_{22}), cuya longitud es l_i

$$\left. \begin{aligned} \cos \theta_i &= (x_{12} - x_{11})/l_i \\ \sin \theta_i &= (x_{22} - x_{21})/l_i \\ l_i &= [(x_{22} - x_{21})^2 + (x_{12} - x_{11})^2]^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

en las referencias^{6,7} se demuestra que

$$\left\{ \frac{\partial l_i(\{x\})}{\partial \{x\}} \right\} = \{\bar{h}\}_i \quad (8)$$

siendo $\{\bar{h}\}_i$ el vector $\{h\}_i$ expandido a la dimensión del modelo completo. Algo análogo sucede para d_i . En consecuencia

$$\left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \{x\}} \right\} = \sum_{i=1}^r s_i (d_i - D_i) \{\bar{h}\}_i - \{F\} + \sum_{i=1}^b \lambda_i \{\bar{h}\}_i \quad (9)$$

Si n es el número de nudos del modelo, (9) representa un sistema de $2n$ ecuaciones recogidas en el vector $\{\hat{x}\}$ solución, más los b multiplicadores de Lagrange, incluidos en $\{\hat{\lambda}\}$; se necesitan por tanto las b ecuaciones de restricción adicionales descritas en (4) para que el sistema sea resoluble

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}(\{x\}, \{\lambda\})}{\partial \{x\}} \right\} \\ \{c(\{x\})\} \end{array} \right\} = \{0\} \quad (10)$$

siendo

$$\{c(\{x\})\} = \begin{Bmatrix} c_1(\{x\}) \\ c_2(\{x\}) \\ \vdots \\ c_b(\{x\}) \end{Bmatrix} \quad (11)$$

El sistema de ecuaciones (10) es no lineal y para resolverlo se empleará el método de Newton-Raphson^{25,26}. Sea

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} \{x\} \\ \{\lambda\} \end{Bmatrix} \quad (12)$$

entonces se verifica

$$\left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \{x\}} \right\}_{k+1} \approx \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \{x\}} \right\}_k + \left[\frac{\partial \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \{x\}} \right\}}{\partial \{q\}} \right]_k (\{q\}_{k+1} - \{q\}_k) \quad (13)$$

y además

$$\{c\}_{k+1} \approx \{c\}_k + \left[\frac{\partial \{c\}}{\partial \{q\}} \right]_k (\{q\}_{k+1} - \{q\}_k) \quad (14)$$

con lo que el sistema de ecuaciones no lineales (10) se aproxima en cada iteración k por el sistema lineal siguiente

$$\left[\begin{array}{l} \left[\frac{\partial \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \{x\}} \right\}}{\partial \{q\}} \right] \\ \left[\frac{\partial \{c\}}{\partial \{q\}} \right] \end{array} \right]_k \left(\begin{Bmatrix} \{x\} \\ \{\lambda\} \end{Bmatrix}_{k+1} - \begin{Bmatrix} \{x\} \\ \{\lambda\} \end{Bmatrix}_k \right) = \begin{Bmatrix} - \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \{x\}} \right\} \\ - \{c\} \end{Bmatrix}_k \quad (15)$$

Desarrollando la matriz del sistema anterior

$$[A] = \left[\begin{array}{l} \left[\frac{\partial \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \{x\}} \right\}}{\partial \{q\}} \right] \\ \left[\frac{\partial \{c\}}{\partial \{q\}} \right] \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} \left[\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \{x\}^2} \right]_{2n \times 2n} & \left[\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \{x\} \partial \{\lambda\}} \right]_{2n \times b} \\ \left[\frac{\partial \{c\}}{\partial \{x\}} \right]_{b \times 2n} & \left[\frac{\partial \{c\}}{\partial \lambda} \right]_{b \times b} \end{array} \right] \quad (16)$$

A partir de (8) se deduce que

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \{c\}}{\partial \{x\}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \{l\}}{\partial \{x\}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\bar{h}\}_1^T \\ \{\bar{h}\}_2^T \\ \vdots \\ \{\bar{h}\}_b^T \end{bmatrix} \quad (17)$$

y como los términos c_i no dependen de $\{\lambda\}$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \{c\}}{\partial \lambda} \end{bmatrix} = [0] \quad (18)$$

Derivando la ecuación (9) se obtiene fácilmente

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \{x\} \partial \{\lambda\}} \end{bmatrix} = [\{\bar{h}\}_1 \{\bar{h}\}_2 \dots \{\bar{h}\}_b] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \{c\}}{\partial \{x\}} \end{bmatrix}^T \quad (19)$$

Es decir, la matriz $[A]$ de (16) es simétrica

$$[A] = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \{x\}^2} \end{bmatrix}_{2n \times 2n} & \begin{bmatrix} \frac{\partial \{c\}}{\partial \{x\}} \end{bmatrix}_{2n \times b}^T \\ \begin{bmatrix} \frac{\partial \{c\}}{\partial \{x\}} \end{bmatrix}_{b \times 2n} & [0]_{b \times b} \end{bmatrix} \quad (20)$$

a partir también de (8) se obtiene

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \{x\}^2} \end{bmatrix} = [\nabla_x^2 \mathcal{L}] = \sum_{i=1}^r s_i \left(\left\{ \frac{\partial d_i}{\partial \{x\}} \right\} \{\bar{h}\}_i^T + \delta D_i \begin{bmatrix} \frac{\partial \{\bar{h}\}_i}{\partial \{x\}} \end{bmatrix} \right) + \sum_{i=1}^b \lambda_i \begin{bmatrix} \frac{\partial \{\bar{h}\}_i}{\partial \{x\}} \end{bmatrix} \quad (21)$$

que operando resulta

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \{x\}^2} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^r s_i \left(\{\bar{h}\}_i \{\hat{h}\}_i^T + \delta D_i \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 d_i}{\partial \{x\}^2} \end{bmatrix} \right) + \sum_{i=1}^b \lambda_i \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 d_i}{\partial \{x\}^2} \end{bmatrix} \quad (22)$$

denominando $[g]_i$ a la matriz geométrica del elemento i , que es coincidente con la matriz de rigidez $[k]_i$ si ese elemento tuviera rigidez unidad²⁻⁷, y denominando $[\bar{g}]_i$ a la expansión a la dimensión del modelo completo, se puede comprobar que⁴⁻⁷

$$\{\bar{h}\}_i \{\bar{h}\}_i^T = [\bar{g}]_i \quad (23)$$

Por otro lado, si se deriva dos veces la longitud d_i respecto de $\{x\}$ teniendo en cuenta (7) se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 d_i}{\partial \{x\}^2} &= d_i^{-1} \begin{bmatrix} \sin^2 \theta_i & -\cos \theta_i \sin \theta_i & -\sin^2 \theta_i & -\cos \theta_i \sin \theta_i \\ -\cos \theta_i \sin \theta_i & \cos^2 \theta_i & \cos \theta_i \sin \theta_i & -\cos^2 \theta_i \\ -\sin^2 \theta_i & \cos \theta_i \sin \theta_i & \sin^2 \theta_i & -\cos \theta_i \sin \theta_i \\ \cos \theta_i \sin \theta_i & -\cos^2 \theta_i & -\cos \theta_i \sin \theta_i & +\cos^2 \theta_i \end{bmatrix}_{\text{EXP}} = \\ &= d_i^{-1} ([t]_i - [\bar{g}]_i) \end{aligned} \quad (24)$$

siendo $[t]$ una matriz complementaria^{2,6,7}, cuya expresión es

$$[t] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (25)$$

Por lo tanto, la matriz hessiana de (21) quedará de la forma

$$\left[\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \{x\}^2} \right] = \sum_{i=1}^r s_i \left([\bar{g}]_i + \frac{\delta D_i}{d_i} ([t]_i - [\bar{g}]_i) \right) + \sum_{i=1}^b \frac{\lambda_i}{l_i} ([t]_i - [\bar{g}]_i) \quad (26)$$

y agrupando términos se obtiene

$$\left[\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \{x\}^2} \right] = \sum_{i=1}^r \frac{s_i}{d_i} \left(D_i [\bar{g}]_i + \delta D_i [t]_i \right) + \sum_{i=1}^b \frac{\lambda_i}{l_i} ([t]_i - [\bar{g}]_i) \quad (27)$$

En definitiva, si se calculan los valores de las matrices (27) y (16), es decir, de la matriz de (19) y los vectores (8) y (10), para una iteración k se podrá resolver el sistema de ecuaciones lineales (14) y obtener así el valor de

$$\{\delta q\}_k = \left\{ \begin{matrix} \{x\} \\ \{\lambda\} \end{matrix} \right\}_{k+1} - \left\{ \begin{matrix} \{x\} \\ \{\lambda\} \end{matrix} \right\}_k \Rightarrow \{q\}_{k+1} = \left\{ \begin{matrix} \{x\} \\ \{\lambda\} \end{matrix} \right\}_{k+1} = \left\{ \begin{matrix} \{x\} \\ \{\lambda\} \end{matrix} \right\}_k + \{\delta q\}_k \quad (28)$$

con lo que se tiene el valor de $\{q\}$ para la siguiente iteración.

MÉTODO DE LAS FUNCIONES DE PENALIZACIÓN

En este otro enfoque, también clásico en el campo de la optimización con restricciones, se define una función objetivo de la forma

$$P_Q(\{x\}, r_p) = \varphi(\{x\}) + r_p \sum_{i=1}^b c_i^2(\{x\}) \quad (29)$$

es decir

$$P_Q(\{x\}, r_p) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r s_i (d_i(\{x\}) - D_i)^2 - \{F\}^T \{x\} + r_p \sum_{i=1}^b (l_i(\{x\}) - L_i)^2 \quad (30)$$

donde el valor positivo r_p se denomina factor de penalización y $\sum_{i=1}^b c_i^2(\{x\})$ es el término de penalización. A partir de este momento se procederá a la minimización de P_Q tratándola como a una función sin restricciones. En cuanto al término r_p , se considera

como una constante en cada iteración y se actualiza su valor para la siguiente iteración en la forma

$$r_{p(k+1)} = \gamma \cdot r_{p(k)} \quad (31)$$

siendo γ una constante positiva. La elección de un valor acertado para $r_{p(0)}$ (valor inicial del factor de penalización) resulta muy importante para la convergencia del método. Para obtener el mínimo de P_Q mediante el método de Newton se parte de la aproximación cuadrática de la función

$$P_Q(\{x\}) \approx \bar{P}_Q(\{x\}) = P_Q(\{k\}_k) + \{\nabla P_Q\}_k^T \{\delta\}_k + \frac{1}{2} \{\delta\}_k^T [H]_k \{\delta\}_k \quad (32)$$

donde $\{\nabla P_Q\}_k$ es el gradiente evaluado en $\{x\}_k$, $[H]_k$ la matriz de derivadas segundas en el mismo punto y $\{\delta\}_k$ el vector de desplazamientos nodales

$$\{\delta\}_k = \{x\}_{k+1} - \{x\}_k \quad (33)$$

Derivando respecto de $\{x\}$ e igualando al vector nulo, se obtiene el mínimo de \bar{P}_Q , que es una aproximación al mínimo de P_Q

$$[H]_k \{\delta\}_k = -\{\nabla P_Q\}_k \quad (34)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones (34) se obtiene el valor del vector $\{\delta\}_k$ y así la posición correspondiente a la siguiente iteración se obtendrá de (33). Por lo tanto, en primer lugar se calcula el vector gradiente

$$\begin{aligned} \{\nabla P_Q(\{x\})\} &= \left\{ \frac{\partial P_Q(\{x\})}{\partial \{x\}} \right\} = \sum_{i=1}^r s_i (d_i(\{x\}) - D_i) \left\{ \frac{\partial d_i(\{x\})}{\partial \{x\}} \right\} - \{F\} + \\ &+ 2r_p \sum_{i=1}^b (l_i(\{x\}) - L_i) \left\{ \frac{\partial l_i(\{x\})}{\partial \{x\}} \right\} \end{aligned} \quad (35)$$

que de manera análoga a lo desarrollado en el apartado anterior queda de la forma

$$\{\nabla P_Q\} = \sum_{i=1}^r s_i (d_i - D_i) \{\bar{h}\}_i - \{F\} + 2r_p \sum_{i=1}^b (l_i - L_i) \{\bar{h}\}_i \quad (36)$$

Y derivando nuevamente respecto de $\{x\}$ se calculará la matriz de derivadas segundas

$$\begin{aligned} [H] &= \left[\frac{\partial^2 P_Q}{\partial \{x\}^2} \right] = \sum_{i=1}^r s_i \left(\left\{ \frac{\partial d_i}{\partial \{x\}} \right\} \{\bar{h}\}_i^T + \delta D_i \left[\frac{\partial \{\bar{h}\}_i}{\partial \{x\}} \right] \right) + \\ &+ 2r_p \sum_{i=1}^b \left(\left\{ \frac{\partial l_i}{\partial \{x\}} \right\} \{\bar{h}\}_i^T + \delta L_i \left[\frac{\partial \{\bar{h}\}_i}{\partial \{x\}} \right] \right) \end{aligned} \quad (37)$$

que siguiendo los mismos pasos del apartado anterior resulta

$$[H] = \sum_{i=1}^r \frac{s_i}{d_i} (D_i[\bar{g}]_i + \delta D_i[\bar{t}]_i) + 2r_p \sum_{i=1}^b \frac{l}{l_i} (L_i[\bar{g}]_i + \delta L_i[\bar{t}]_i) \quad (38)$$

Con los valores obtenidos de las expresiones anteriores puede resolverse el sistema lineal, en el que la matriz del sistema $[H]$ es simétrica.

El principal problema de convergencia que presenta este método es el siguiente: a medida que $\{x\}_k$ se aproxima al punto solución y al aumentar el valor de r_p , la matriz hessiana de P_Q , $[H]$ tiende a estar mal condicionada debido a que presenta una pendiente muy elevada en la zona cercana al mínimo buscado, cuando el valor de r_p sea alto. Consecuentemente, pequeños incrementos en las componentes de $\{x\}$ supondrán grandes cambios en el valor de la función objetivo, dando lugar a una situación de inestabilidad.

MÉTODO DE LAS RIGIDECES PONDERADAS

Es simplemente una sencilla variante del método expuesto en el apartado anterior y consiste en elegir un valor inicial suficientemente elevado para $r_{p(o)}$, pero que ahora va a permanecer constante durante todas las iteraciones ($\gamma = 1$). Su interpretación física es la de atribuir una elevada rigidez a las barras rígidas, mucho mayor que la correspondiente a la de los elementos elásticos. A fin de evitar problemas de mal condicionamiento de las matrices, así como de obtener una precisión aceptable (ya que ahora se permite a los elementos rígidos una pequeña deformación) se recomienda tomar valores del siguiente orden

$$r_p = 1000 \frac{\sum_{i=1}^r s_i}{2r} \quad (39)$$

Todos los elementos son así tratados como deformables, no siendo necesario en principio introducir ninguna restricción del tipo de las de (2). En este caso la matriz de derivadas segundas de (38) se convierte en una matriz de rigidez del sistema mecánico $[K]$, en la que unos elementos (los teóricamente rígidos) tienen una rigidez comparativamente muy elevada respecto de otros (los resortes), más una matriz complementaria debida a la no linealidad^{6,7}. Esto mismo sucede cuando se plantea la resolución de los problemas de posición inicial, directa, posiciones sucesivas y deformada.

En el caso del problema no lineal de equilibrio estático, la minimización de la función (1) con los valores de las correspondientes rigideces de los elementos deformables y de los valores de (39) para los rígidos, conducirá así directamente a una solución "aproximada". Este es un procedimiento muy sencillo, que en la práctica ha demostrado unas buenas características de convergencia con un esfuerzo computacional comparativamente reducido.

MÉTODOS BASADOS EN LA LAGRANGIANA AUMENTADA

Estos métodos se basan en la formación de la función lagrangiana aumentada

$$\mathcal{L}_A(\{x\}, \{\lambda\}, r_p) = \varphi(\{x\}) + \sum_{i=1}^b \lambda_i c_i(\{x\}) + r_p \sum_{i=1}^b c_i^2(\{x\}) \quad (40)$$

que se obtiene ampliando la función lagrangiana clásica con el término de penalización; ésta será la nueva función objetivo a minimizar, ahora ya como una función objetivo sin restricciones. Estos métodos tienen como finalidad el tratar de reducir los problemas que aparecen debidos al mal condicionamiento habitual de los métodos basados en la función de penalización. Para ello se fija un valor límite máximo de r_p , que no podrá ser superado. Para utilizar ahora el método de Newton-Raphson en la minimización de \mathcal{L}_A es preciso encontrar los valores del gradiente y del hessiano de dicha función. De forma análoga a lo desarrollado en apartados anteriores se deduce que

$$\{\nabla \mathcal{L}_A\} = \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial \{x\}} \right\} = \sum_{i=1}^r s_i (d_i - D_i) \{\bar{h}\}_i - \{F\} + \sum_{i=1}^b \lambda_i \{\bar{h}\}_i + 2r_p \sum_{i=1}^b (l_i - L_i) \{\bar{h}\}_i \quad (41)$$

y también

$$\begin{aligned} [H_{\mathcal{L}_A}] = \left\{ \frac{\partial^2 \mathcal{L}_A}{\partial \{x\}^2} \right\} &= \sum_{i=1}^r \frac{s_i}{d_i} (D_i [\bar{g}]_i + \delta D_i [\bar{t}]_i) + \sum_{i=1}^b \frac{\lambda_i}{l_i} ([\bar{t}]_i - [\bar{g}]_i) + \\ &+ 2r_p \sum_{i=1}^b \frac{l}{l_i} (L_i [\bar{g}]_i + \delta L_i [\bar{t}]_i) \end{aligned} \quad (42)$$

Estas expresiones se emplearán para resolver en cada iteración el sistema de ecuaciones lineales

$$[H_{\mathcal{L}_A}]_k \{\delta\}_k = -\{\nabla \mathcal{L}_A\}_k \quad (43)$$

hasta alcanzar la convergencia, según los criterios que se indicarán posteriormente.

Los distintos métodos existentes basados en la lagrangiana aumentada se diferencian básicamente en la forma de obtener las nuevas estimaciones de los multiplicadores. El papel llevado a cabo por éstas es esencial, ya que la serie de estimaciones de los multiplicadores debe converger a su valor $\{\hat{\lambda}\}$ correspondiente al óptimo de coordenadas nodales buscando $\{\hat{x}\}$, para que dicho óptimo sea alcanzado en la minimización de \mathcal{L}_A . Además, puede demostrarse que el ratio de convergencia hacia $\{\hat{x}\}$ de las iteraciones $\{x\}_k$ nunca podrá ser superior que el de las estimaciones $\{\lambda\}_k$ hacia $\{\hat{\lambda}\}$. Por ello, aunque se emplee para minimizar \mathcal{L}_A como función sin restricciones el método de Newton, que es una técnica cuadráticamente convergente, el procedimiento únicamente convergerá cuadráticamente si se emplean técnicas cuadráticas de estimación de los multiplicadores. A continuación se describirán tres formas posibles de obtener estimaciones de los multiplicadores de Lagrange, que constituyen los tres métodos principales basados en la lagrangiana aumentada.

Estimación directa

El primer procedimiento es la estimación directa, muy sencilla de demostrar y de aplicar; esta forma de estimar los multiplicadores es la más simple, pero a la vez es la que mayores limitaciones tiene. Se empleaba en las versiones iniciales de los métodos de la lagrangiana aumentada²⁶ y consiste en aplicar para cada iteración

$$\{\lambda\}_{k+1} = \{\lambda\}_k + 2r_p\{c(\{x\}_k)\} \quad (44)$$

En los ejemplos realizados se ha comprobado que presenta frecuentes problemas de convergencia, por lo que no es recomendable su uso más que en el caso de sistemas mecánicos sencillos. Las técnicas lineales y cuadráticas, que se describen a continuación, no presentan esos inconvenientes, y por ello son mucho más útiles en la práctica.

Estimación lineal de los multiplicadores de Lagrange

Si por simplicidad de nomenclatura se denomina

$$\left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial \{x\}} \right\} = \{\nabla \varphi\} \quad (45)$$

y definiendo $[G_C]$ como matriz de gradientes de las restricciones

$$[G_C] = \left[\left\{ \frac{\partial c_1}{\partial \{x\}} \right\} \left\{ \frac{\partial c_2}{\partial \{x\}} \right\} \cdots \left\{ \frac{\partial c_b}{\partial \{x\}} \right\} \right] \quad (46)$$

se podrá expresar la relación que han de verificar los multiplicadores de Lagrange para la posición solución $\{\hat{x}\}$ como

$$\{\nabla \varphi\} + [G_C]\{\hat{\lambda}\} = \{0\} \quad (47)$$

Esta relación sugiere que una buena estimación del valor solución $\{\hat{\lambda}\}$, será el vector $\{\lambda\}$ que resuelva el siguiente problema de mínimos cuadrados

$$\underset{\{\lambda\}}{\text{minimizar}} \quad \|[G_C]_k\{\lambda\} + \{\nabla \varphi\}_k\|_2^2 \quad (48)$$

donde $\|[G_C]_k\{\lambda\} + \{\nabla \varphi\}_k\|_2^2$ representa la norma euclídea al cuadrado del vector $[G_C]_k\{\lambda\} + \{\nabla \varphi\}_k$.

Para obtener el valor de $\{\lambda\}$ que minimice dicha norma euclídea al cuadrado, es decir, que resuelva el problema de mínimos cuadrados, se seguirá el proceso que se indica a continuación. Los $[G_C]_k$ y $\{\varphi\}_k$, que servirán como base para calcular la nueva estimación $\{\lambda\}_k$ se evaluarán para la posición $\{x\}_k$ recién obtenida tras minimizar $\mathcal{L}_A(\{x\}, \{\lambda\}_{k-1}, r_{p(k-1)})$. Los resultados de las derivadas necesarias ya han sido previamente obtenidos en apartados anteriores

$$\left. \begin{aligned} \left\{ \frac{\partial c_i}{\partial \{x\}} \right\} &= \left\{ \frac{\partial l_i}{\partial \{x\}} \right\} = \{\bar{h}\}_i \Rightarrow [G_C] = [\{\bar{h}\}_1 \ \{\bar{h}\}_2 \ \dots \ \{\bar{h}\}_b] \\ \{\nabla \varphi\} &= \sum_{i=1}^r s_i(d_i - D_i)\{\bar{h}\}_i - \{F\} \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

Por simplicidad de notación, en toda la descripción siguiente del método de resolución del problema de mínimos cuadrados, se empleará la nomenclatura

$$\begin{cases} [G_C]_k = [G] \\ \{\nabla\varphi\}_k = \{g\} \end{cases} \quad (50)$$

Con los que (48) será equivalente a

$$\underset{\{\lambda\}}{\text{minimizar}} \quad \|[G]\{\lambda\} + \{g\}\|_2^2 \quad (51)$$

Si se multiplica una matriz ortogonal por un vector, la longitud euclídea de dicho vector no varía (es equivalente a una rotación del vector alrededor de un cierto eje). Por lo tanto, dada una matriz ortogonal $[Q]$ se verifica

$$\|[G]\{\lambda\} + \{g\}\|_2 = \|[Q]([G]\{\lambda\} + \{g\})\|_2 = \|[Q][G]\{\lambda\} + [Q]\{g\}\|_2 \quad (52)$$

Se buscará una matriz $[Q]$ que transforme $[G]$ de la siguiente manera

$$[Q]_{2n \times 2n} [G]_{2n \times b} = \begin{bmatrix} [R]_{b \times b} \\ [0]_{(2n-b) \times b} \end{bmatrix}_{2n \times b} \quad (53)$$

siendo $[R]$ una matriz triangular superior, n el número de nudos y b el de barras rígidas. En consecuencia

$$\|[G]\{\lambda\} + \{g\}\|_2^2 = \left\| \begin{bmatrix} [R] \\ [0] \end{bmatrix} \{\lambda\} + [Q]\{g\} \right\|_2^2 = \left\| \begin{bmatrix} [R]_{b \times b} \\ [0]_{(2n-b) \times b} \end{bmatrix} \{\lambda\}_{b \times 1} + \begin{Bmatrix} \{q_I\}_{b \times 1} \\ \{q_{II}\}_{(2n-b) \times 1} \end{Bmatrix} \right\|_2^2 \quad (54)$$

Y por lo tanto, el valor de $\{\lambda\}$ que minimice el residuo (54) se podrá obtener como solución del sistema de b ecuaciones lineales

$$[R]\{\lambda\} = -\{q_I\} \quad (55)$$

en el que, como $[R]$ es ya triangular superior, resultando prácticamente inmediato hallar $\{\lambda\}$. La matriz ortogonal $[Q]$ es el resultado del producto de b matrices ortogonales

$$[Q] = [H_b] \dots [H_2][H_1] \quad (56)$$

premultiplicando a la matriz $[G]$ y al vector $\{g\}$ primero por $[H_1]$, seguidamente a la matriz y al vector resultantes se les volverá a premultiplicar por $[H_2]$, y así sucesivamente hasta llegar a $[H_b]$

$$\begin{cases} [H_b] \dots [H_2][H_1][G] = \begin{bmatrix} [R] \\ [0] \end{bmatrix} \\ [H_b] \dots [H_2][H_1]\{g\} = \begin{Bmatrix} \{q_I\} \\ \{q_{II}\} \end{Bmatrix} \end{cases} \quad (57)$$

Cada matriz ortogonal $[H_i]$ es una matriz de transformación de Householder y se expresa como

$$[H_i]_{2n \times 2n} = [I]_{2n \times 2n} - \frac{1}{\beta_i} \{\omega_i\}_{2n \times 1} \{\omega_i\}_{1 \times 2n}^T \quad (58)$$

donde $[I]$ es la matriz unidad y β_i se define como

$$\beta_i = \frac{1}{2} \|\{\omega_i\}\|_2^2 = \frac{1}{2} (\omega_{i1}^2 + \omega_{i2}^2 + \dots + \omega_{i2n}^2) \quad (59)$$

siendo $\{\omega_i\}$

$$\{\omega_i\} = \begin{Bmatrix} \omega_{i1} \\ \omega_{i2} \\ \vdots \\ \omega_{i2n} \end{Bmatrix} \quad (60)$$

un vector que se definirá a continuación para cada transformación.

Sea a_{jk} el elemento de la fila j y columna k de la matriz $[G]$ inicial o la obtenida después de una serie de transformaciones de Householder (premultiplicaciones de las matrices $[H_i]$ correspondientes por $[G]$). Se definen

- $\{\omega_1\}$

$$\{\omega_1\} = \begin{Bmatrix} a_{11} - \text{sig}(a_{11}) \cdot |r_1| \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{2n,1} \end{Bmatrix} \quad (61)$$

siendo $a_{11}, a_{21}, \dots, a_{2n,1}$ elementos pertenecientes a la matriz $[G]$ inicial, $\text{sig}(a_{11})$ el signo del elemento a_{11} y $|r_1|$ el valor absoluto de r_1

$$r_1 = (a_{11}^2 + a_{21}^2 + \dots + a_{2n,1}^2)^{1/2} \quad (62)$$

- $\{\omega_2\}$

$$\{\omega_2\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ a_{22} - \text{sig}(a_{22}) \cdot |r_2| \\ a_{32} \\ \vdots \\ a_{2n,2} \end{Bmatrix} \quad (63)$$

donde $a_{22}, a_{32}, \dots, a_{2n,2}$ son elementos pertenecientes a la matriz resultante de la primera transformación de Householder ($[H_1][G]$), $\text{sig}(a_{22})$ es el signo del elemento a_{22} y $|r_2|$ el valor absoluto de r_2

$$r_2 = (a_{22}^2 + a_{32}^2 + \dots + a_{2n,2}^2)^{1/2} \quad (64)$$

- y así sucesivamente hasta llegar a $\{\omega_b\}$

$$\{\omega_b\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_{bb} - \text{sig}(a_{bb}) \cdot |r_b| \\ a_{b+1,b} \\ \vdots \\ a_{2n,b} \end{array} \right\} \quad (65)$$

en la que $a_{bb}, a_{b+1,b}, \dots, a_{2n,b}$ son elementos pertenecientes a la matriz resultante de $(b-1)$ transformaciones de Householder ($[H_{b-1}][H_{b-2}] \dots [H_1][G]$), $\text{sig}(a_{bb})$ es el signo del elemento a_{bb} y $|r_b|$ el valor absoluto de r_b

$$r_b = (a_{bb}^2 + a_{b+1,b}^2 + \dots + a_{2n,b}^2)^{1/2} \quad (66)$$

En general, para la transformación i cualquiera

$$\left. \begin{array}{l} j < i \Rightarrow \omega_{ij} = 0 \\ j = i \Rightarrow \omega_{ij} = a_{ii} - \text{sig}(a_{ii}) \cdot |r_i|; \quad r_i = (a_{ii}^2 + a_{i+1,i}^2 + \dots + a_{2n,i}^2)^{1/2} \\ j > i \Rightarrow \omega_{ij} = a_{ji} \end{array} \right\} \quad (67)$$

El resultado de cada transformación i sobre la matriz $[G]$ será la aparición de ceros por debajo del elemento de la diagonal principal en la columna i . Por eso, la matriz $[R]$ obtenida finalmente es triangular superior.

Estimación cuadrática de los multiplicadores de Lagrange

Se supondrá que la última aproximación recién calculada de la posición solución es $\{x\}_k$. Si se desarrollan $\{\nabla\varphi\}$ y $[G_C]$ alrededor de la posición $\{x\}_{k-1}$

$$\left. \begin{array}{l} \{\nabla\varphi\} \approx \{\nabla\varphi\}_{k-1} + [H]_{k-1}\{\hat{\delta}\} \\ [G_C]\{\hat{\lambda}\} \approx [G_C]_{k-1}\{\hat{\lambda}\} + \sum_{i=1}^b \hat{\lambda}_i \left[\frac{\partial^2 c_i}{\partial \{x\}^2} \right]_{k-1} \{\hat{\delta}\} \end{array} \right\} \quad (68)$$

siendo

$$\left. \begin{aligned} [H]_{k-1} &= \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \{x\}^2} \right]_{k-1} \\ \{\hat{\delta}\} &= \{\hat{x}\} - \{x\}_{k-1} \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

Despreciando términos de segundo orden

$$[G_C]_{k-1} \{\hat{\lambda}\} + \{\nabla \varphi\}_{k-1} + \left([H]_{k-1} + \sum_{i=1}^b \hat{\lambda}_i \left[\frac{\partial^2 c_i}{\partial \{x\}^2} \right]_{k-1} \right) \{\hat{\delta}\} = \{0\} \quad (70)$$

Tomando las mejores aproximaciones de $\{\hat{\delta}\}$ y $\{\hat{\lambda}\}$ calculadas hasta el momento

$$\left. \begin{aligned} \{\hat{\delta}\} &\approx \{\delta\}_{k-1} = \{x\}_k - \{x\}_{k-1} \\ \{\hat{\lambda}\} &\approx \{\lambda\}_{k-1} \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

Teniendo en cuenta la ecuación (70) y siguiendo un razonamiento paralelo al del apartado anterior, se calcula la nueva estimación $\{\lambda\}_k$ del valor solución $\{\hat{\lambda}\}$ buscado como el vector $\{\eta\}$ que resuelve el siguiente problema de mínimos cuadrados

$$\text{minimizar } \left\| \left[G_C \right]_{k-1} \{\eta\} + \left(\{\nabla \varphi\}_{k-1} + \left([H]_{k-1} + \sum_{i=1}^b \lambda_{i,k-1} \left[\frac{\partial^2 c_i}{\partial \{x\}^2} \right]_{k-1} \right) \{\delta\}_{k-1} \right) \right\|_2^2 \quad (72)$$

Es decir, una vez resuelto (72) se asignará

$$\{\lambda\}_k = \{\eta\} \quad (73)$$

Para resolver el problema de mínimos cuadrados se procederá como se explicó en el apartado anterior. Recordando la nomenclatura utilizada entonces, los nuevos valores de $[G]$ y $\{g\}$ serán

$$\left. \begin{aligned} [G_C] &= [G_C]_{k-1} \\ \{g\} &= \{\nabla \varphi\}_{k-1} + \left([H]_{k-1} + \sum_{i=1}^b \lambda_{i,k-1} \left[\frac{\partial^2 c_i}{\partial \{x\}^2} \right]_{k-1} \right) \{\delta\}_{k-1} \end{aligned} \right\} \quad (74)$$

Las expresiones que aparecen en (74) han sido ya desarrolladas en las páginas anteriores.

Aunque este método, por ser cuadrático, podría esperarse que converja más rápidamente que el anterior, sin embargo se ha observado en los ejemplos realizados que la efectividad de ambos es similar. Ello es debido a que, para realizar la estimación cuadrática de los multiplicadores, en el cálculo del gradiente y del hessiano de la función potencial no se puede partir de la posición solución recién calculada y hay que partir de la posición solución de la iteración anterior (como ya se ha indicado en el desarrollo del método).

CRITERIOS DE CONVERGENCIA

A continuación se definen los criterios de convergencia que se pueden utilizar para determinar que se ha alcanzado una posición solución y finalizar el proceso iterativo. El primero de ellos se basa en que la variación, en valor absoluto, de los multiplicadores de Lagrange en iteraciones sucesivas deberá ser menor que un valor suficientemente pequeño ϵ_1

$$|\lambda_{i(k)} - \lambda_{i(k-1)}| < \epsilon_1 \quad (75)$$

Otro criterio se apoya en la suma de los cuadrados de las deformaciones de las barras rígidas, que deberá ser menor de un cierto valor suficientemente pequeño ϵ_2

$$\sum_{i=1}^b (l_i(\{x\}_k) - L_i)^2 < \epsilon_2 \quad (76)$$

Por otra parte, también la diferencia, en valor absoluto, de la función potencial evaluada en dos iteraciones sucesivas deberá ser menor que un cierto valor ϵ_3

$$|\varphi(\{x\}_k) - \varphi(\{x\}_{k-1})| < \epsilon_3 \quad (77)$$

Para el método de los multiplicadores de Lagrange y los métodos basados en la lagrangiana aumentada se deberán verificar los tres criterios anteriores simultáneamente. Para el método de la función de penalización cuadrática y el método de las rigideces elevadas de las barras sólo se podrán aplicar los dos últimos criterios, ya que el primero hace referencia a los multiplicadores de Lagrange, que no aparecen en dichos métodos.

Además, es recomendable verificar que los criterios de convergencia se cumplen sucesivamente durante, por ejemplo, tres o cuatro iteraciones seguidas, antes de dar por finalizado el proceso de optimización. Ello evitará que se admita como solución una posición que no lo sea, pero en la que, por casualidad, se verifique en ellas una variación mínima de los multiplicadores y del potencial, así como una deformación pequeña de las barras rígidas.

EJEMPLOS

Para comprobar el comportamiento de los diferentes enfoques descritos en este trabajo se han utilizado diez modelos diferentes, que van desde uno muy sencillo, con tan sólo dos elementos (uno elástico y uno rígido) hasta los más complejos, con decenas de elementos barra y elásticos. En cada uno se han probado varias hipótesis de carga a su vez, y el número total de análisis realizados, y clasificado para su comparación, se acerca a los ciento cincuenta. Como resumen se puede decir que el método del factor de penalización presenta unas características de convergencia muy diferentes, no convergiendo a una solución en la mayoría de las ocasiones. Algo mejor se comporta el ALM básico, pero en general también presenta serios problemas de convergencia. Los mejores resultados se han obtenido con los multiplicadores de Lagrange, rigideces ponderadas y ALM lineal y cuadrático (estos dos muy similares en la práctica).

Por ejemplo, en la Figura 2 se presentan los resultados obtenidos con los Multiplicadores de Lagrange para un sistema con 29 elementos rígidos y 9 resortes sometido al sistema de fuerzas que allí se representa. En tan sólo 7 iteraciones se alcanza la convergencia. Si se utiliza el método de las rigideces ponderadas, se obtiene la convergencia en 11 iteraciones. Dado que este último método es muy sencillo, y pese a requerir algunas iteraciones más que el antes comentado y dar tan sólo una solución "aproximada", el esfuerzo computacional se reduce aproximadamente en un 40 % respecto del de los Multiplicadores de Lagrange y en 60 % de los ALM.

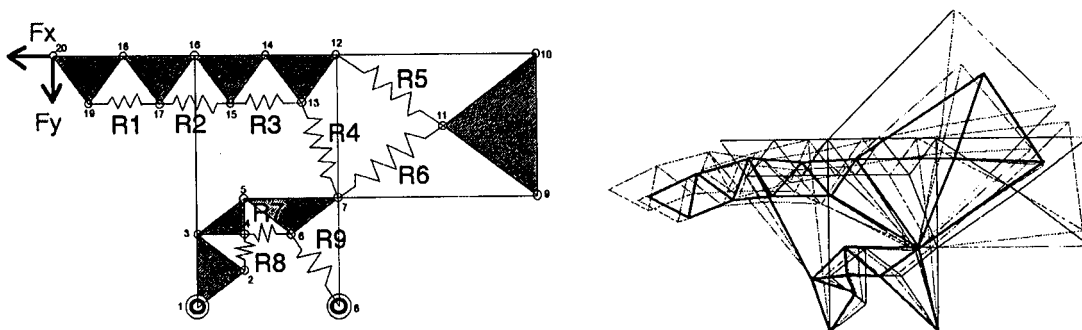


Figura 2. Sistema en su posición inicial e iteraciones y posición de equilibrio obtenidas mediante los Multiplicadores de Lagrange

Finalmente, en la Figura 3 se representa otro sistema mecánico junto con las iteraciones correspondientes utilizando ALM lineal y cuadrático. Estas iteraciones son diferentes, pero el esfuerzo computacional necesario es muy similar en ambos casos. Se puede afirmar, en términos generales que, para desplazamientos moderadamente grandes, los Multiplicadores necesitan un esfuerzo computacional menor, con un número de iteraciones también menor, que las técnicas de ALM. Sin embargo, en algunos de los modelos más complejos, en los que se han utilizado muy grandes desplazamientos, se ha obtenido, en ocasiones, un menor esfuerzo computacional utilizando los ALM.

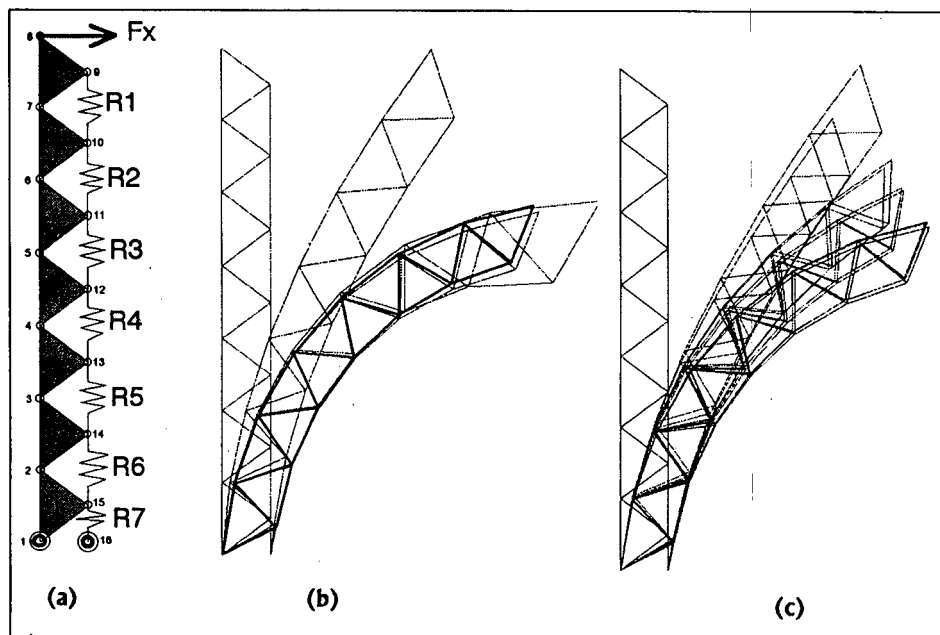


Figura 3. a) Sistema con 7 elementos rígidos y 7 resortes elásticos (modelo de 21 barras rígidas y 7 deformables), b) ALM lineal, c) ALM cuadrático

CONCLUSIONES

En este trabajo se han presentado varios enfoques para la resolución del problema no lineal de equilibrio estático en sistemas multicuerpo. Todos ellos se han basado en el análisis de la función potencial del sistema mecánico, que es un criterio válido para todos los problemas de posición aquí tratados. Para ello se han aplicado las Funciones de Penalización, los Multiplicadores de Lagrange y los Multiplicadores Aumentados o método Primal-Dual con estimación directa, lineal y cuadrática. Además se ha descrito un sencillo procedimiento aproximado basado en la atribución de rigideces finitas a los elementos rígidos.

Para comprobar las características de los diferentes métodos se han realizado numerosos ejemplos, utilizando diferentes sistemas mecánicos planos, desde los más simples hasta otros complejos, con decenas de elementos. En esos ejemplos se han podido constatar los problemas de convergencia que en general presentan las Funciones de Penalización y, en menor grado, el ALM con estimación directa. Los métodos más eficaces son el de los Multiplicadores de Lagrange y el ALM lineal o cuadrático, no observándose diferencias significativas entre estos dos últimos. El procedimiento de rigideces ponderadas también proporciona buenos resultados, a condición de que se tome un valor adecuado para la rigidez de los elementos teóricamente indeformables. En general el esfuerzo computacional necesario con los ALM es superior al de los Multiplicadores de Lagrange, pero aquellos presentan algunas ventajas de convergencia cuando los desplazamientos son muy grandes.

AGRADECIMIENTOS

Los desarrollos presentados en este trabajo corresponden a parte de los resultados obtenidos en el financiado por CICYT (Ministerio de Educación y Ciencia) referencia TAP95-0739.

REFERENCIAS

1. A.G. Erdman (Ed.), "Modern Kinematics: Developments in the Last Forty Years", *Wiley Series in Design Engineering*, USA, (1993).
2. J. García de Jalón y E. Bayo, "*Kinematic and Dynamic Simulation of Multibody Systems: The Real Time Challenge*", Springer-Verlag, (1994).
3. R. Avilés, M.B.G. Ajuria y J. García de Jalón, "A Fairly General Method for the Optimum Synthesis of Mechanisms", *Mechanism & Machine Theory*, Vol. **20**, pp. 321-328, (1985).
4. R. Avilés, S. Navalpotro, E. Amezua y A. Hernández, "An Energy-Based General Method for the Optimum Synthesis of Mechanisms", *J. Mech. Design*, ASME, Vol. **116**, No.1, pp. 127-136, (1994).
5. J. Vallejo, R. Avilés, A. Hernández y E. Amezua, "Nonlinear Optimization of Planar Linkages for Kinematic Syntheses", *Mechanism & Machine Theory*, Vol. **30**, No.4, pp. 501-518, (1995).
6. R. Avilés, M.B.G. Ajuria, J. Vallejo y A. Hernández, "A Procedure for the Optimal Synthesis of Planar Mechanisms Based on Nonlinear Position Problems", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, en prensa.
7. R. Avilés, M.B.G. Ajuria, M.V. Hormaza y A. Hernández, "A Procedure Based on Finite Elements for the Solution of Nonlinear Problems in the Kinematic Analysis of Mechanisms", *Int. J. F.E. in Analysis and Design*, Vol. **22**, No.4, pp. 305-328, (1996).
8. A. Hernández, E. Amezua, M.B.G. Ajuria y J.I. Llorente, "Multiple Points on the Coupler Curve of Transitional Four-Hinge Planar Linkages", *Mechanism and Machine Theory*, Vol. **29**, No.7, pp. 1015-1032, (1994).
9. K. Van der Werff, "*Kinematic and Dynamic Analysis of Mechanisms, A Finite Element Approach*", Delft University Press (NL), (1997).
10. J.F. Besseling, L.J. Ernst y K. Van der Werff, "Geometrical and Physical Nonlinearities: Some Developments in the Netherlands", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. **17/18**, pp. 131-157, (1979).
11. A. Cardona y M. Géradin, "Modelling of Superelements in Mechanism Analysis", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **32**, No.8, pp. 1565-1594, (1991).
12. O. Friberg, "A Method for Selecting Deformation Modes in Flexible Multibody Dynamics", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **32**, No.8, pp. 1637-1655, (1991).
13. M. Géradin, "Computational Aspects of the Finite Element Approach to Flexible Multibody Systems", in "*Advanced Multibody System Dynamics*", Kluwer Academic Press, Dodrecht (NL), pp. 337-354, (1993).
14. J. García de Jalón, M.A. Serna y R. Avilés, "Computer Method for Kinematic Analysis of Lower-Pair Mechanisms - II: Position Problems", *Mechanism and Machine Theory*, Vol. **16**, No.5, pp. 557-566, (1981).
15. Y. Nakamura, "*Advanced Robotics: Redundancy and Optimization*", Addison-Wesley Publishing Company, (1991).

16. K. Miura y H. Furuya, "Adaptive Structure Concept for Future Space Applications", *AIAA Journal*, Vol. 26, No.8, pp. 995-1002, (1988).
17. B.K. Wada, J.I. Fanson y E.F. Crawley, "Adaptive Structures", *Mechanical Engineering*, ASME, pp. 41-45, (1995).
18. S. Jain y S.N. Kramer, "Forward and Inverse Kinematic Solution of the Variable Geometry Truss Robot Based on an N-Celled Tetrahedron-Tetrahedron Truss", *J. Mech. Design*, ASME, Vol. 112, pp. 16-22, (1988).
19. M. Subramaniam y S.N. Kramer, "The Inverse Kinematic Solution of the Tetrahedron Based Variable-Geometry Truss Manipulator", *J. Mech. Design*, ASME, Vol. 114, pp. 433-437, (1992).
20. S. Utku, A.V. Ramesh, S.K. Das, B.K. Wada y G.S. Chen, "Control of a Slow-Moving Space Crane as an Adaptive Structure", *AIAA Journal*, Vol. 29, No.6, pp. 961-967, (1991).
21. R.T. Haftka, "Optimum Placement of Controls for Static Deformations of Space Structures", *AIAA Journal*, Vol. 22, No.9, pp. 1293-1298, (1984).
22. R.T. Haftka y H.M. Adelman, "An Analytical Investigation of Shape Control of Large Space Structures by Applied Temperatures", *AIAA Journal*, Vol. 23, No.3, pp. 450-457, (1985).
23. R.A. Burdisso y R.T. Haftka, "Optimal Location of Actuators for Correcting Distorsions in Large Truss Structures", *AIAA Journal*, Vol. 27, No.10, pp. 1406-1411, (1989).
24. A.K. Dhingra y B.H. Lee, "Optimal Placement of Actuators in Actively Controlled Structures", *Engineering Optimization*, Vol. 23, pp. 99-118, (1994).
25. R.T. Haftka y Z. Gürdal, "*Elements of Structural Optimization*", Kluwer Academic Publishers, (1992).
26. G.N. Vanderplaats, "*Numerical Optimization Techniques for Engineering Design: With Applications*", McGraw Hill, (1984).