

ENRUGAMENTO DE MEMBRANAS ANULARES

DJENANE C. PAMPLONA

*Departamento de Engenharia Civil, PUC, Rio,
Rua Marquês de São Vicente, 225, Gávea,
22453, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.*

RESUMEN

No presente trabalho estuda-se a estabilidade de membranas axissimétricas homogêneas, isotrópicas e incompressíveis, sujeitas à deformações finitas. Nestas membranas inicialmente planas, atuam cargas axiais distribuídas $\bar{f}$ e $\bar{m}$. As equações de equilíbrio e condições de contorno são obtidas através do princípio da energia potencial estacionária. Considera-se o material da membrana como sendo neo-Hookeano. Através da teoria de pequenas perturbações fez-se o estudo da estabilidade da membrana, comprovando-se com um modelo experimental rudimentar.

SUMMARY

The present work studies the stability of homogeneous, isotropic, incompressible membranes, subjected to finite deformations. In those initially flat membranes, vertical and moment loads $\bar{f}$ and $\bar{m}$, acts. The general equilibrium equations and boundary conditions were established through the principle of stationary potential energy. The material was considered as being neo-Hookean. Through small perturbations theory the stability was studied and checked with a simple experimental model.

INTRODUÇÃO

O estudo de membranas sujeitas a grandes deformações fez-se cada dia mais necessário. Seu emprego é imprescindível no estudo de balões meteorológicos, na bioengenharia estudando cartilagens e artérias, só para citar algumas das inúmeras aplicações.

A referência clássica na teoria não linear de membranas é Green e Adkins¹. Porém, atualmente existem muitos trabalhos envolvendo membranas em grandes deformações. Enquanto muitos pesquisadores estão preocupados com as equações de equilíbrio das referidas membranas, este trabalho enfoca a instabilidade e o estudo pós-crítico.

O presente trabalho estuda membranas anulares de material homogêneo, isotrópico do tipo neo-Hookeano. Estas membranas estão sujeitas a cargas transversais

Recibido: Noviembre 1991

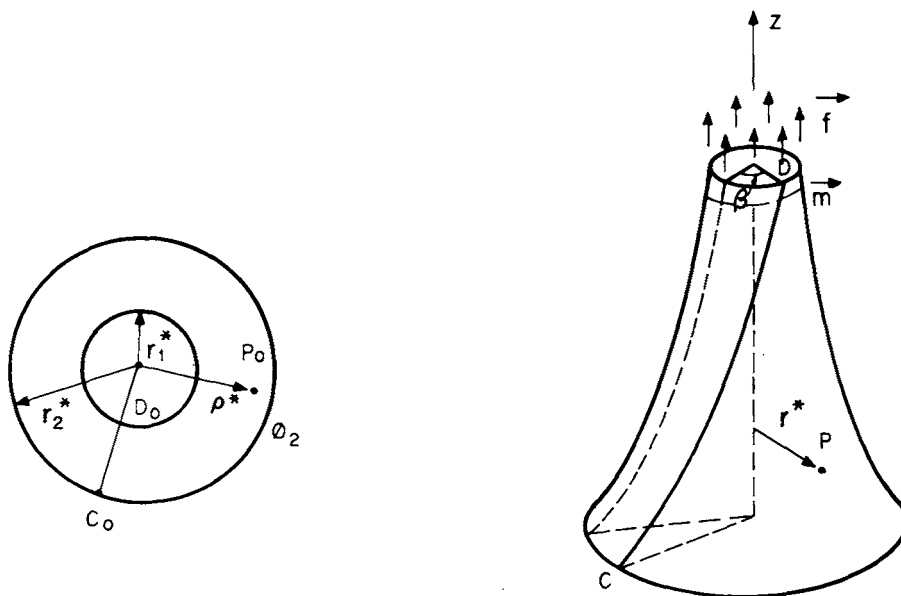


Figura 1. Superfície média da membrana.

axissimétricas do tipo força e momento, estando as configurações de equilíbrio obtidas em².

A carga momento ao agir, provoca uma distorção e consequente mudança das direções principais. Devido à hipótese de membrana, esta não apresenta resistência à compressão, o que provocará o aparecimento de rugas na membrana deformada.

Através da teoria de pequenas perturbações elásticas³, pode-se obter o número de rugas que ocorrerá na membrana após a bifurcação.

Um trabalho experimental qualitativamente comprova os resultados obtidos numericamente.

EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO

Com os materiais geralmente utilizados em grandes deformações são elastômeros, assume-se o material isotrópico, elástico e incompressível do tipo Neo-Hookeano, cuja função densidade de energia W é:

$$W = C_1(I_1 - 3) \quad (1)$$

Sendo o primeiro invariante de deformação, I_1 :

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2, \quad (2)$$

onde λ_i são as extensões principais.

Como assume-se uma completa simetria, elástica e geométrica da membrana deformada e indeformada. A superfície média será tomada como superfície de referência.

Considerando-se o sistema de coordenadas (ρ^*, θ) fixo no espaço, as coordenadas de um ponto genérico, P_0 , da superfície indeformada são:

$$x_1 = \rho \cos \theta, \quad (3)$$

$$x_2 = \rho \sin \theta. \quad (4)$$

Após a deformação, provocada pelos esforços $\vec{f}$ e $\vec{m}$, as coordenadas do ponto genérico da superfície média da membrana deformada, P , são:

$$X^1 = r \cos (\theta + \beta), \quad (5)$$

$$X^2 = r \sin (\theta + \beta), \quad (6)$$

$$X^3 = z, \quad (7)$$

sendo:

$$r = r(\rho), \beta = \beta(\rho) \text{ e } z = z(\rho),$$

grandezas estas que quando é o caso foram adimensionalizadas, através de sua divisão pelo menor raio da membrana r_1^* .

Utilizando-se os tensores métricos como em⁴, é possível obter o primeiro invariante de deformação,

$$I_1 = r'^2 + r^2 \beta'^2 + z'^2 + \frac{r^2}{\rho^2} + \frac{\rho^2}{r^2(r'^2 + z'^2)}, \quad (8)$$

aonde foi levada em consideração a incompressibilidade do material e sendo:

$$(\quad)' = \frac{d(\quad)}{d\rho}. \quad (9)$$

A energia elástica de deformação, E , é a integral volumétrica de função W em R_0 , isto é:

$$E = \int \int_{h_0} r_1^{*3} \rho h_0 W d\rho d\theta \quad (10)$$

onde $h_0 = h_0(\rho)$ é a espessura.

O termo referente ao trabalho realizado, T_r , pelos esforços $\vec{f}$ e $\vec{m}$ é:

$$T_r = \int_{\phi_1} r_1^* f z ds + \int_{\phi_1} m \beta ds \quad (11)$$

sendo: $ds = r_1^* d\theta$.

A energia potencial total, Π , definida como a diferença entre a energia elástica, E , e o trabalho realizado, T_r , pode ser escrita

$$\Pi = E - T_r, \quad (12)$$

Equações de Equilíbrio:

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left[-\frac{r' T^*}{z} \right] = 2\rho \left\{ r\beta'^2 + \frac{r}{\rho^2} - \frac{\rho^2}{r^3(r'^2 + z'^2)} \right\} \quad (13)$$

$$z' = \frac{T^*}{2\rho \left\{ 1 - \frac{\rho^2}{r^2(r'^2 + z'^2)} \right\}} \quad (14)$$

$$\beta' = -\frac{K^*}{2r^2\rho} \quad (15)$$

Condições de contorno:

$$\begin{aligned} r(1) &= 1 \\ r(r_2) &= r_2 \\ z(r_2) &= 0 \\ \beta(r_2) &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

sendo:

$$T^* = \frac{F}{2\Pi r_1^{*2} C_1 h_0} \text{ e } K^* = \frac{M}{2\Pi r_1^{*3} C_1 h_0}$$

O problema foi solucionado através de métodos numéricos, utilizando o método de Runge Kutta de quarta-ordem, método do tiro e das aproximações sucessivas, exaustivamente comentado em⁴.

INSTABILIDADE

Diz-se que há estabilidade elástica na membrana se em todos os pontos da mesma, a menor tensão principal σ for maior que ε , sendo ε positivo e tão pequeno quanto se deseje. A partir de então um acréscimo na carga momento K^* , provocará o aparecimento de rugas, já que pela hipótese de membrana esta não apresenta resistência à compressão.

Em⁴ foi observado que até uma determinada carga momento, $\bar{K}^*$, a tensão $\sigma_{\min}$ ocorre no bordo externo $\rho = r - 2$, a partir desta carga surge um ponto de mínimo relativo, $\bar{\rho}$, próximo ao menor bordo, $r = 1$.

A base da teoria de perturbações elásticas é que qualquer parâmetro, v , pode ser escrito com a soma da solução conhecida, v , com o parâmetro perturbado $\tilde{v}$. Obtém-se então novas equações para $\tilde{v}$, que podem ser mais fáceis de solucionar que a equação original.

Neste estudo utiliza-se teoria de perturbações linearizadas, sendo $\tilde{v}$ muito pequena os termos das equações que contiveram potências das quantidades perturbadas serão ignorados.

Com o aparecimento das rugas o problema deixa de ser axissimétrico. Sendo necessário determinar as equações de equilíbrio para o novo problema.

Utilizando-se a mesma formulação variacional do item anterior, onde:

$$I_1 = r_\rho^2 + r^2 \beta_\rho^2 + z_\rho^2 + \frac{r_\theta^2 + r^2(1 + \beta_\theta)^2 + z_\theta^2}{\rho^2} + \lambda_3^2 \quad (17)$$

sendo:

$$(\quad)_\rho = \frac{\partial(\quad)}{\partial \rho} \text{ e } (\quad)_\theta = \frac{\partial(\quad)}{\partial \theta}, \text{ obtém-se}$$

$$W = W(r, r_\theta, r_\rho, \beta, \beta_\theta, \beta_\rho, z, z_\theta, z_\rho, \rho, \theta), \quad (18)$$

e a energia potencial total pode ser escrita.

$$\Pi = \int \int_{R_0} r_1^* \rho h_0 W d\rho d\theta - \oint_{\phi_1} f z ds - \oint_{\phi_1} m \beta ds. \quad (19)$$

Por ser Π estacionária, obtém-se:

Equações de equilíbrio:

$$\rho W_r - \frac{\partial}{\partial \rho}[\rho W_{r_\rho}] - \frac{\partial}{\partial \theta}[\rho W_{r_\theta}] = 0 \quad (20)$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho}[\rho W_{z_\rho}] - \frac{\partial}{\partial \theta}[\rho W_{z_\theta}] = 0 \quad (21)$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho}[\rho W_{\beta_\rho}] - \frac{\partial}{\partial \theta}[\rho W_{\beta_\theta}] = 0 \quad (22)$$

Condições de contorno:

$$z(r_2) = \beta(r_2) = 0 \quad (23)$$

$$r(1) = 1 \quad r(r_2) = r_2 \quad (24)$$

$$\rho W_{\beta_\rho} + \rho W_{\beta_\theta} - M = 0 \quad (25)$$

em C_2

$$\rho W_{z_\rho} + \rho W_{z_\theta} - F = 0 \quad (26)$$

Considerando-se as perturbações

$$r = \overset{\circ}{r} + \tilde{r} \quad (27)$$

$$z = \overset{\circ}{z} + \tilde{z} \quad (28)$$

$$\beta = \overset{\circ}{\beta} + \tilde{\beta} \quad (29)$$

a desprezando-se as potências de ordem superior das grandezas perturbadas, obtém-se:
Equações diferenciais

$$\rho^2 \tilde{r}_{\rho\rho} + \rho \tilde{r}_{\rho} + \tilde{r}_{\theta\theta} - \tilde{r}(\rho^2 \overset{\circ}{\beta}_{\rho}^2 + 1) - 2\overset{\circ}{r}\rho^2 \overset{\circ}{\beta}_{\rho} \tilde{\beta}_{\rho} - 2\overset{\circ}{r}\tilde{\beta}_{\theta} = 0 \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{r}^2 \rho^2 \tilde{\beta}_{\rho\rho} + \overset{\circ}{r}^2 \tilde{\beta}_{\theta\theta} + \tilde{\beta}_{\rho}(\rho \overset{\circ}{r}^2 + 2\overset{\circ}{r}r_{\rho}\rho^2) + 2\tilde{\beta}_{\rho}(\overset{\circ}{r}_{\rho}\tilde{r}\rho^2 + \overset{\circ}{r}\tilde{r}_{\rho}\rho^2) + \\ + 2\overset{\circ}{r}\tilde{r}_{\theta}^2 + 2\overset{\circ}{r}\tilde{r}\rho^2 \overset{\circ}{\beta}_{\rho\rho} = 0 \end{aligned} \quad (31)$$

condições de contorno:

$$\tilde{r}(1) = \tilde{r}(r_2) = 0 \quad (32)$$

$$\tilde{\beta}(r_2) = 0 \quad \tilde{\beta}_{\rho} = -\tilde{\beta}_{\theta} \text{ em } \rho = 1 \quad (33)$$

Supondo-se as perturbações da forma:

$$\tilde{\beta} = V^* \cos^2 \left[\frac{\Pi (\rho - \bar{\rho})}{2 (\bar{\rho} - 1)} \right] \cos n(\theta - T) \text{ e} \quad (34)$$

$$\tilde{r} = V \cos^2 \left[\frac{\Pi (\rho - \bar{\rho})}{2 (\bar{\rho} - 1)} \right] \sin n(\theta - T). \quad (35)$$

onde

$$T = -\frac{[\rho^2 + \frac{T^*}{4}]}{\rho} + \varrho n(\rho + [\rho^2 + \frac{T^*}{4}]^{1/2}) + C^{te} \text{ e}$$

$\bar{\rho}$ é a coordenada do mínimo relativo da menor tensão principal, referido anteriormente.

Utilizando-se o método de Galerkin, nas equações diferenciais (30) e (31) com a substituição de (34) e (35). Obtém-se após a integração, uma equação relacionando a carga momento K^* e o número de rugas n , supondo-se a existência de uma solução não trivial para o problema.

Denominaremos de carga crítica $\overline{K^*}$ à menor carga momento das acima obtidas, e com isso torna-se possível obter o número de rugas $\bar{n}$ que ocorrerá na membrana deformada.

RESULTADOS

Com a formulação matemática até aqui desenvolvida, torna-se possível obter o número de rugas para a membrana de borracha, com as seguintes dimensões:

$$r_2 = 5.20\text{cm}$$

$$r_1 = 1.08\text{cm}$$

$$h_0 = 0.10\text{cm}$$

em que foi aplicada uma força T^* de 10.387, obtendo-se para deslocamento máximo $z = 7.78$ cm.

Através da metodologia descrita, obtém-se a tabela abaixo:

K^*	3.67	3.57	3.56	3.54	3.62	3.70	3.80
n	7	8	9	10	11	12	13

Tabela I. Relação entre rotação e número de rugas.

indicando a carga momento crítica, $\overline{K^*} = 3.54$, que corresponde à formação de 10 rugas. Rugas estas que podem ser visualizadas na Fotografia 1 e 2.

CONCLUSÕES

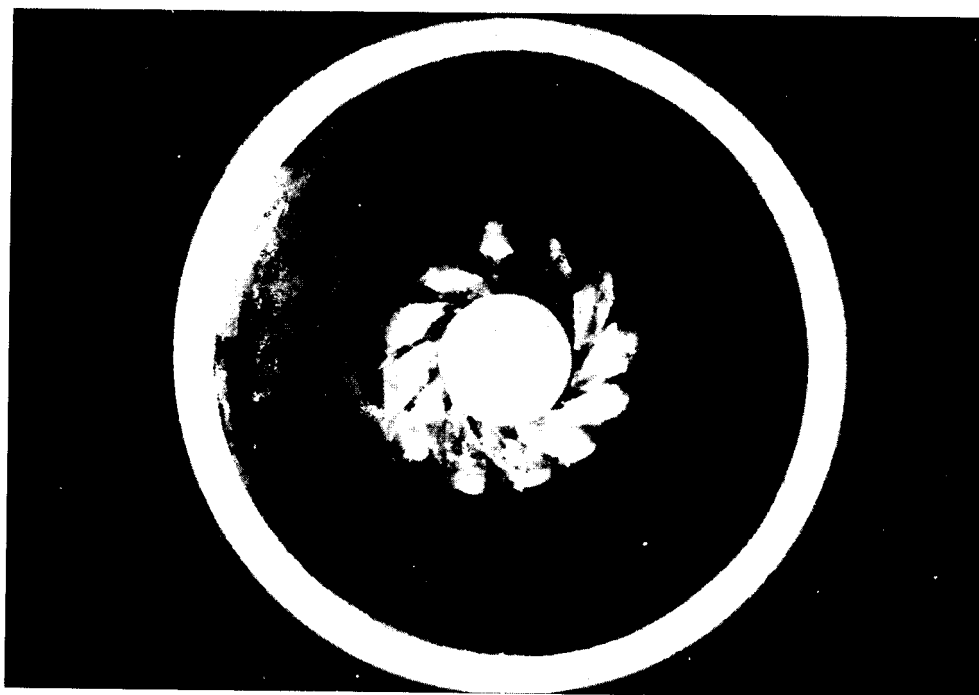
Nos exemplos rodados observou-se uma total concordância entre os resultados obtidos para carga momento crítica e os resultados em⁴, onde utilizou-se o critério da menor tensão principal.

A pequena discrepância entre o número de rugas obtido experimentalmente e numericamente deve-se à diversos fatores, sendo os dois mais importantes, a modelagem do material como sendo neo-Hookeano, o que foi feito devido a simplicidade das equações em detrimento do pequeno "necking" observado na membrana, típico dos materiais de Mooney-Rivlin e a precariedade do trabalho experimental, que tinha como objetivo somente uma análise qualitativa do problema.

Em futuro próximo pretende-se incorporar ao problema matemático, maior não linearidade do material a fazer um estudo experimental cuidadoso do problema aqui estudado.



Fotografia 1. Membrana deformada.



Fotografia 2. Membrana deformada com rugas imprimidas.

REFERENCIAS

1. A.E. Green e J.E. Adkins, "*Large Deformations on Non-linear Continuum Mechanics*", Oxford Press, (1960).
2. D.C. Pamplona e L. Bevilacqua, "Large Deformations Under Axial Force and Moment Loads of Initially Flat Annular Membranes", *International J. Non-linear Mech.*, a aparecer.
3. A.M. Ratner, "Tensile Stability of Cilindrical Membranes", *Int. J. Non-linear Mech.*, Vol. 18, pp. 133-147, (1983).
4. D.C. Pamplona, "Análise do Comportamento e Instabilidade de Membranas Anulares Inicialmente Planas sob a Ação de Cargas de Bordo Axissimétricas", *Tese de Doutorado*, PUC, Rio de Janeiro, (1988).

