

Develación del dominio de un fluido de Stokes estacionario

Louis Breton Tenorio^{1*}, Jesus López Estrada¹

¹Facultad de Ciencias, UNAM

* Correo electrónico: louis.breton@ciencias.unam.mx, jelpze@gmail.com

Resumen

El problema de la develación o reconstrucción de un dominio tiene diversas aplicaciones, que van desde el diseño de piezas mecánicas en ingeniería hasta la detección de obstrucciones parciales en el flujo sanguíneo o tumores en medicina. En este trabajo se prueba que la solución de la ecuación de Stokes estacionaria, con condiciones de frontera de Dirichlet, es continua con respecto a su dominio de definición y no sólo con respecto a fuerzas externas y condiciones de frontera. También se presenta un estudio numérico sobre el problema inverso de flujo sanguíneo: *develación de una obstrucción parcial* en una cavidad tubular en 2D por donde fluye un fluido estacionario Newtoniano modelado por la ecuación de Stokes.

Palabras clave: Ecuación de Stokes; reconstrucción de dominio; problema bien planteado; deformaciones del dominio; problema inverso.

1. Introducción

El padecimiento de estenosis en arterias coronarias es un problema de salud pública de impacto mundial [1], pues el infarto al miocardio (heart attack, en inglés) es una de las causas principales de muerte en varios países del primer mundo, con una incidencia creciente en países en vías de desarrollo como México.

Estas enfermedades se deben a la formación de placas ateroscleróticas dentro de las paredes de las arterias coronarias a causa de la acumulación gradual de colesterol, ácidos grasos, calcio y tejido fibroso conectivo, entre otros. La presencia de estas placas ateroscleróticas dan lugar a una obstrucción local (estenosis u oclusión) al flujo sanguíneo con consecuencias fatales, como el infarto al miocardio, con frecuencia difícil de diagnosticar, causando en muchas ocasiones la muerte.

El paradigma de nuestro trabajo de investigación sobre el relevante problema de la detección temprana de estenosis en coronarias, o la prevención de infartos al miocardio, por medios no-invasivos, se basa en dos hechos físicos bien conocidos: Uno, la presencia de una obstrucción parcial (estenosis) en un ducto (coronaria) da lugar a un flujo sanguíneo turbulento post obstrucción. Dos, este flujo turbulento genera una onda acústica, que se propaga desde la pared del vaso coronario a través del tórax hasta alcanzar la superficie del pecho, donde se puede registrar con la ayuda de sensores especiales.

Siguiendo este paradigma, el problema de la detección temprana de estenosis en coronarias es abordado como un problema inverso, la de develar la obstrucción a partir de la información acústica registrada por sensores colocados sobre el pecho. La idea es ver a este problema inverso como un problema de estimación numérica

de parámetros en un sistema de Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP's), que nos permitan develar una obstrucción en las paredes de vasos coronarios. El Sistema de EDP's para el correspondiente problema directo está constituido por las ecuaciones de Navier-Stokes para un flujo sanguíneo pulsátil que interactúa de manera especial con las paredes de los vasos coronarios (sub-problema de flujo-estructura) acopladas a las ecuaciones de propagación de ondas acústicas en un medio visco-elástico (biotejido) que se propagan a través de la cavidad torácica alcanzando la superficie del pecho.

Dada la complejidad de este problema que nos ocupa, en este trabajo se presentan alentadores resultados preliminares con respecto a un problema inverso de flujo sanguíneo simplificado, que en sí, constituye un nuevo paradigma alternativo al antes expuesto. Concretamente, la develación de una obstrucción en el ducto de un flujo sanguíneo modelado por la ecuación de Stokes en 2D, a partir de registros de la presión sobre ciertos puntos cercanos a la pared del ducto coronario. El problema se aborda a continuación en diferentes secciones. En la sección 2 se formula el problema, en la sección 3 se introduce la noción de convergencia de dominios mediante la convergencia de difeomorfismos. En las secciones 4 y 5 se establece que el problema directo de la ecuación de Stokes estacionaria con condiciones de frontera de Dirichlet depende continuamente de la forma de su dominio, resultado fundamental y sin el cuál carece de sentido abordar el problema inverso simplificado antes planteado. En la sección 6 se reporta un primer estudio numérico para el problema sobre la develación de una obstrucción sobre el ducto de un flujo viscoso modelado por la ecuación de Stokes en 2D, usando registros post-obstrucción de la presión. La sección 7 trata sobre el trabajo futuro de investigación sobre el problema que se estudia en este trabajo. Finalmente, en la sección 7 se exponen nuestras conclusiones.

2. Formulación del problema

En esta sección se presenta el planteamiento del problema.

2.1. Descripción de dominio

El dominio físico de definición en 2D para la ecuación estacionaria de Stokes es de la forma:

$$\Omega(b, c) = ([0, 30D] \times [0, D]) \setminus V(b, c)$$

y que ilustra en la siguiente figura:

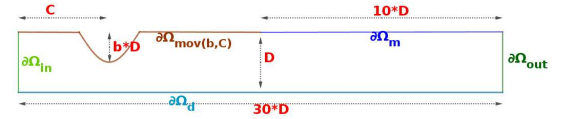


Figura 1: Representación geométrica del dominio $\Omega(b, c)$

donde la frontera de la obstrucción $V(b, c)$ sobre el borde superior está modelada paramétricamente por la función:

$$h(x) = D - \frac{b}{2} (1 - \cos(2\pi(x - c)/D))$$

$$|x - c| \leq D, \quad 0 < b < D < 2c$$

y $h(x) = D$, en otro caso. Este dominio ha sido propuesto por Seo et al. [2] y modela una arteria con una obstrucción parcial sobre una de sus paredes.

El objetivo en este trabajo consiste en investigar la viabilidad de resolver el problema de Stokes inverso siguiente: develar el tamaño b y la posición c de tal obstrucción, usando mediciones de la presión sobre el fluido en cierta parte de la frontera del dominio $\Omega(b, c)$, donde el flujo de un fluido viscoso está modelado por la ecuación de Stokes estacionaria:

$$\begin{cases} -\mu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = 0 & x \in \Omega_{(b,c)} \\ \text{div}(\mathbf{u}) = 0 & x \in \Omega_{(b,c)} \end{cases} \quad (2.1)$$

En esta ecuación la variable de estado u representa el campo de velocidades del flujo y la variable p representa la presión sobre el fluido, y en donde μ es el coeficiente de viscosidad cinemática del fluido. Por simplicidad se decidió tomar las condiciones de frontera de Dirichlet siguientes:

$$\begin{cases} \mathbf{u} = (1, 0) & x \in \partial\Omega_{in} \cup \partial\Omega_{out} \\ \mathbf{u} = (0, 0) & x \in \partial\Omega_{mov(b,c)} \cup \partial\Omega_d \cup \partial\Omega_m \end{cases}$$

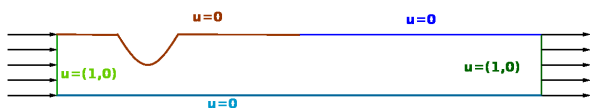


Figura 2: Condiciones de frontera

2.2. Mediciones de la presión

En su formulación varicional, el problema directo de un fluido viscoso de Stokes estacionario, la presión p vive en el espacio de funciones $L^2(\Omega)$ (véase [3]), espacio cuyo dual no admite funcionales de evaluación. Por ello, es conveniente recurrir a funcionales alternativas de evaluación de la presión que pertenezcan al dual de $L^2(\Omega)$. Una natural es la evaluación promedio local de la presión.

Dada $\epsilon > 0$ razonablemente pequeña y $x \in \Omega$, considérese a las funcionales promedio de la presión $\bar{v}_{x,\epsilon} : L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\bar{v}_{x,\epsilon}(p) = \frac{1}{|B(x,\epsilon)|} \int_{B(x,\epsilon)} p(x) dx \quad (2.2)$$

Claramente, $\bar{v}_{x,\epsilon}$ pertenece al dual de $L^2(\Omega)$, si $B(x,\epsilon) \subset \Omega$.

En caso de que (\mathbf{u}, p) sea solución de las ecuaciones estacionarias de Stokes

$$\begin{aligned} -\mu\Delta\mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f}, & x \in \Omega \\ \text{div}(\mathbf{u}) &= 0, & x \in \Omega \\ \mathbf{u} &= \boldsymbol{\varphi}, & x \in \partial\Omega \end{aligned} \quad (2.3)$$

esta funcional se puede ver como la representación de una medición de la presión en el punto $x \in \Omega$ con una precisión $\epsilon > 0$ dada.

Estrictamente vamos a estudiar la ecuación Stokes homogénea, pero al reducir las condiciones de Dirichlet de no-homogénea a homogéneas se da lugar a una ecuación de Stokes homogénea con término fuente.

En este contexto, se considerará como observables un número adecuado $n \in \mathbb{N}$ mediciones de la presión $p(\cdot; b^*, c^*)$ en el dominio $\Omega(b^*, c^*)$ desconocido, en una primera instancia, libres de error por medición¹

$$\{\bar{p}_{x_j} = \bar{v}_{x_j,\epsilon}(p(\cdot; b^*, c^*))\}_{j=1}^n$$

nuestro problema consiste en reconstruir (vislumbrar) el dominio $\Omega(b^*, c^*)$

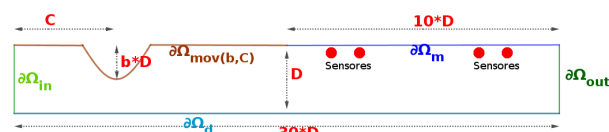


Figura 3: Sensores de medición

tomando para ello, a la l_α -funcional objetivo i.e.:

$$J(b, c) = \sum_{j=1}^N |\bar{p}_{x_j} - \bar{v}_{x_j,\epsilon}(p(\cdot; b, c))|^\alpha$$

donde $\alpha \geq 1$ y $(\mathbf{u}(\cdot; b, c), p(\cdot; b, c))$ es solución de las ecuaciones de Stokes (2.3) en el dominio $\Omega(b, c)$.

De esta manera, el problema inverso que nos interesa estudiar y resolver se reduce a un problema de optimización. Específicamente, en hallar:

$$(\hat{b}, \hat{c}) = \underset{(b,c) \in \Theta}{\text{argmin}} J(b, c)$$

donde Θ es un conjunto de parámetros admisibles.

¹Pues en otro caso, se debería considerar como observables a:

$$\{\bar{p}_{x_j} = \bar{v}_{x_j,\epsilon}(p(\cdot; b^*, c^*) + \varepsilon_j)\}_{j=1}^n$$

donde las ε_j usualmente se suponen variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con distribución normal con media 0 y varianza σ^2 (desconocida).

Otro problema inverso de interés práctico consiste en vislumbrar el dominio $\Omega(b^*, c^*)$ y también en determinar el número y la ubicación óptima de los sensores de medición de la presión en un fluido viscoso de Stokes a través de un ducto con una obstrucción parcial. Para este problema el funcional objetivo a considerar sería:

$$J(b, c; \{x_i\}, N) = \sum_{i=1}^N |\bar{p}_{x_j} - \bar{v}_{x_j, \epsilon}(p(\cdot; b, c))|^\alpha$$

3. Problema de Stokes

Dado el planteamiento formulado en la sección anterior del problema inverso para develar una obstrucción parcial en el ducto por donde fluye un fluido viscoso estacionario de Stokes; o sea, vislumbrar la geometría del dominio $\Omega(b^*, c^*)$ a partir de mediciones de la presión, plantea la problemática central para su problema directo asociado: probar la dependencia continua de la solución del problema de Stokes (2.3) con respecto a su dominio $\Omega(a, b)$ y no sólo con respecto a f y φ .

Más precisamente, se quiere demostrar que la solución del problema de Dirichlet para la ecuación estacionaria de Stokes en un dominio acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} -\mu\Delta\mathbf{u} + \nabla p &= f, & x \in \Omega \\ \operatorname{div}(\mathbf{u}) &= 0, & x \in \Omega \\ \mathbf{u} &= \varphi, & x \in \partial\Omega \end{aligned} \quad (3.1)$$

depende continuamente con respecto a f , φ y su dominio Ω . En particular, en relación con Ω en el sentido siguiente: dada una sucesión de dominios Ω_n que converge, en sentido por precisar a Ω , entonces $(\mathbf{u}_{\Omega_n}^{f, \varphi}, p_{\Omega_n}^{f, \varphi}) \rightarrow (\mathbf{u}_{\Omega}^{f, \varphi}, p_{\Omega}^{f, \varphi})$.

Para tal propósito, se requiere primero establecer que este problema de Stokes es bien planteado con respecto a f y φ .

Cabe mencionar que un problema similar ha sido estudiado por A. Henrot y M. Pierre [4] para

la ecuación de Poisson con condiciones de frontera de Dirichlet *homogéneas*:

$$\begin{aligned} -\mu\Delta\mathbf{u} &= f, & x \in \Omega \\ \mathbf{u} &= \varphi, & x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

3.1. Formulación variacional

Para presentar la formulación variacional del problema de Stokes², es conveniente introducir ciertos espacios de funciones. Iniciemos con el espacio de funciones vectoriales de divergencia cero:

$$\mathcal{V}(\Omega) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{D}(\Omega) \mid \operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0\}$$

en donde $\mathbf{D}(\Omega) = [D(\Omega)]^n$. Y se definen a $\mathbf{V}(\Omega)$ y a $\mathbf{H}(\Omega)$ como las cerraduras de $\mathcal{V}(\Omega)$ en $\mathbf{H}_0^1(\Omega) = [H_0^1(\Omega)]^n$ y $\mathbf{L}^2(\Omega) = [L^2(\Omega)]^n$, respectivamente. Vale la pena enfatizar la siguiente caracterización de $\mathbf{V}(\Omega)$.

Teorema 3.1. *Si Ω es un dominio abierto, acotado y Lipschitz entonces*

$$\mathbf{V}(\Omega) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \mid \operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0\}$$

Para su demostración véase el Teorema 1.6 en R. Temam [3].

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado y de Lipschitz, la formulación variacional de la ecuación *estacionaria* de Stokes (ó problema de Stokes) con condiciones de frontera de Dirichlet *homogéneas*:

Hallar $\mathbf{u} \in \mathbf{V}(\Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} \mu \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} \, dx = \int_{\Omega} f \mathbf{v} \, dx, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}(\Omega) \quad (3.2)$$

es directa de obtener:³

Teorema 3.2. *Temam [3] [Teorema 2.1] Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un dominio acotado de clase \mathcal{C}^2 , entonces el problema variacional (3.2), para toda $f \in$*

²En esta subsección se sigue a R. Temam [3].

³Véanse las páginas 21–22 en R. Temam [3].

$L^2(\Omega)$ (or $f \in \mathbf{H}^{-1}(\Omega)$) dada, tiene una única solución $\mathbf{u}_e \in \mathbf{V}(\Omega)$, satisfaciendo que

$$\|\mathbf{u}_e\|_V \leq C\|f\|_{L^2}$$

Además, existe $p \in L^2(\Omega)$ tal que:

- i) $-\mu\Delta\mathbf{u} + \nabla p = f$,
- ii) $\operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0$, y
- iii) $\gamma_0\mathbf{u} = 0$,

en sentido distribucional en Ω . Y en donde $\gamma_0 : \mathbf{H}^1(\Omega) \rightarrow \mathbf{H}^{1/2}(\partial\Omega)$ es el operador de traza de Dirichlet.

Este teorema dice que el problema de la ecuación de Stokes con condiciones de frontera de Dirichlet homogéneas, esencialmente tiene una única solución (\mathbf{u}_e, p_e) y que es, parcialmente un problema bien planteado a la Hadamard con respecto a las “fuerzas externas“ f y su demostración es una consecuencia directa del Teorema de Lax-Milgram aplicado a la forma bilineal $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mu \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} \, dx$$

que es continua y coercitiva.

Para el problema de Stokes no homogéneo:

$$\begin{aligned} -\mu\Delta\mathbf{u} + \nabla p &= f, & x \in \Omega \\ \operatorname{div}(\mathbf{u}) &= g, & x \in \Omega \\ \mathbf{u} &= \varphi, & x \in \partial\Omega \end{aligned} \quad (3.3)$$

con condición de compatibilidad:

$$\int_{\Omega} g \, dx = \int_{\partial\Omega} \varphi \cdot \nu \, dS \quad (3.4)$$

considerando que $\mathbf{H}^1(\partial\Omega) = \gamma_0 \mathbf{H}^1(\Omega)$, se tiene que existe $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ tal que $\gamma_0\mathbf{u}_0 = \varphi$. Luego, por la condición de compatibilidad (3.4) y aplicando el teorema de la divergencia, se sigue que:

$$\int_{\Omega} (g - \operatorname{div}(\mathbf{u}_0)) \, dx = 0.$$

Así, usando el siguiente Lema ⁴

⁴Véase el Lema 2.4 en Temam [3].

Lema 3.1. Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un dominio acotado y Lipschitz entonces el operador gradiente mapea $\mathbf{H}^1(\Omega)$ sobre

$$L^2(\Omega)/\mathbb{R} \equiv \{g \in L^2(\Omega) : \int_{\Omega} g \, dx = 0\}$$

existe $\mathbf{u}_1 \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ tal que $\mathbf{u}_1 = g - \mathbf{u}_0$. Ahora, tomando $w = \mathbf{u} - \mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_1$ el problema de Stokes con condiciones de Dirichlet no-homogéneas (3.3) se reduce al problema de Stokes con condiciones de Dirichlet homogéneas, ya antes tratado. Consecuentemente, la existencia y unicidad de su solución queda establecida.

Teorema 3.3. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2$ o 3 de clase \mathcal{C}^r , $r = \max\{m + 2, 2\}$, donde $m \geq -1$ es un entero. Si $f \in \mathbf{H}^m(\Omega)$, $g \in H^{m+1}(\Omega)$, y $\varphi \in \mathbf{H}^{m+3/2}(\partial\Omega)$ satisfaciendo las condiciones de compatibilidad (3.4) entonces el problema de Stokes con condiciones de Dirichlet no-homogéneas (3.3) tiene una única solución $\mathbf{u}_e \in \mathbf{H}^{m+2}(\Omega)$ y $p_e \in H^{m+1}(\Omega)$ tales que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_e\|_{H^{m+2}(\Omega)} + \|p_e\|_{H^{m+1}(\Omega)/\mathbb{R}} \\ \leq c_0 \left(\|f\|_{H^m(\Omega)} + \|g\|_{H^{m+1}(\Omega)} \right. \\ \left. + \|\varphi\|_{H^{m+3/2}(\partial\Omega)} \right) \end{aligned} \quad (3.5)$$

para una $c_0 > 0$.

Este teorema ⁵ dice que el problema de Stokes con condiciones de Dirichlet no-homogéneas en dimensiones 2 y 3 es un problema bien-planteado a la Hadamard. Nótese que en nuestro caso, $g \equiv 0$.

3.2. Convergencia de dominios

Como el problema de Stokes con condiciones de Dirichlet no-homogéneas, se reduce al caso de condiciones de Dirichlet homogéneas, como se hizo notar en la anterior subsección, basta con demostrar que: $(\mathbf{u}_{\Omega_k}^f, p_{\Omega_k}^f) \rightarrow (\mathbf{u}_{\Omega}^f, p_{\Omega}^f)$ en algún sentido. Para ello, se introduce primero el tipo de convergencia entre dominios. Con este afán se dan las siguientes definiciones:

⁵Véase la Proposición 2.3 en Temam [3]

Definición 3.1. Una sucesión de conjuntos $\{\Omega_k\} \subset \mathbb{R}^n$ converge difeomórficamente a un conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ si y sólo si existe una familia de difeomorfismos $\psi_k : \Omega \rightarrow \Omega_k$, $\{\psi_k\} \in C^2(\overline{\Omega}, \overline{\Omega}_k)$, tal que:

$$\psi_k, \psi_k^{-1} \rightarrow id \text{ map, uniformemente; y}$$

$$\nabla \psi_k, \nabla \psi_k^{-1} \rightarrow I \text{ matriz, uniformemente.}$$

Definición 3.2. Una sucesión de dominios abiertos $\{\Omega_n\}$ converge compactamente a un dominio Ω si y sólo para todo compacto $K \subset \Omega$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset \Omega_n$, para $n > n_0$.

Al espacio de dominios en \mathbb{R}^n se le puede equiparar con diversas topologías. A este respecto se recomienda la lectura de la brillante discusión que viene en el libro de A. Henrot y M. Pierre [4].

3.3. Resultados preliminares

Para abordar el problema que nos ocupa, esto es, que el problema de Stokes estacionario con condiciones de Dirichlet homogéneas es bien planteado, son útiles las siguientes definiciones y resultados sobre espacios de Sobolev y operadores de traza.

Proposición 3.1. [Lema 6.21 en Allaire [5]] Sean $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos acotados y de Lipschitz. Si $\psi \in C^1$ un difeomorfismo tal que $\psi(\Omega) = \Omega'$ entonces

$$\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega') \text{ si y sólo si } \mathbf{u} \circ \psi \in \mathbf{H}^1(\Omega)$$

Más aún,

$$\nabla \mathbf{u} \circ \psi = (\nabla \psi)^{-t} \nabla (\mathbf{u} \circ \psi)$$

Proposición 3.2. Sean $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{R}^n$ dominios acotados y de Lipschitz tales que existe un difeomorfismo $\psi \in C^1$ con $\psi(\Omega) = \Omega'$, y sea $\gamma^\Omega \in \mathcal{L}(\mathbf{H}^1(\Omega), \mathbf{H}^{1/2}(\partial\Omega))$ el operador de traza. Si $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega')$ entonces

$$\gamma^{\Omega'}(\mathbf{u}) \circ \psi = \gamma^\Omega(\mathbf{u} \circ \psi)$$

Demostración.

Puesto que $C^1(\Omega')$ es denso en $H^1(\Omega')$, es suficiente probar la proposición para $C^1(\Omega')$. Sea $\mathbf{u} \in C^1(\Omega)$ entonces:

$$\begin{aligned} \gamma^{\Omega'}(\mathbf{u}) \circ \psi &= \mathbf{u}|_{\partial\Omega'} \circ \psi \\ &= (\mathbf{u} \circ \psi)|_{\partial\Omega} \\ &= \gamma^\Omega(\mathbf{u} \circ \psi) \end{aligned}$$

Como los operadores γ^Ω y $\gamma^{\Omega'}$ son continuos, utilizando la densidad de $C^1(\Omega)$ en $H^1(\Omega)$, se tiene que

$$\gamma^{\Omega'}(\mathbf{u}) \circ \psi = \gamma^\Omega(\mathbf{u} \circ \psi)$$

para $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega')$. \square

Proposición 3.3. Sean $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{R}^n$ dominios acotados y de Lipschitz. Si existe un difeomorfismo $\psi \in C^1$ tal que $\psi(\Omega) = \Omega'$ entonces

$$\mathbf{u} \in H_0^1(\Omega') \text{ si y sólo si } \mathbf{u} \circ \psi \in H_0^1(\Omega)$$

Demostración.

Utilizando la proposición 3.1 sabemos que $\mathbf{u} \in H^1(\Omega)$ si y sólo si $\mathbf{u} \circ \psi \in H_0^1(\Omega')$. Por lo tanto, sólo se tiene que probar que

$$\gamma^{\Omega'}(\mathbf{u}) = 0 \Leftrightarrow \gamma^\Omega(\mathbf{u} \circ \psi) = 0$$

Pero ésto se sigue de la proposición 3.2 anterior. \square

4. Continuidad de la solución respecto a su dominio

En esta sección se discute un punto central con respecto al problema directo, el problema de Stokes que se ha venido discutiendo. Esto es, la dependencia continua de la solución del problema de Stokes con respecto a su dominio de definición. Explícitamente, se establece que si $\{\Omega_n \subset \mathbb{R}^n\}$ es una sucesión de dominios que converge difeomórficamente a un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Entonces, bajo ciertas condiciones, se tiene que

la solución $(\mathbf{u}_n, p_n) \in V(\Omega_n) \times L^2(\Omega_n)$ del problema de Stokes (3.2) en el dominio Ω_n converge a $(\mathbf{u}_\Omega, p_\Omega) \in V(\Omega) \times L^2(\Omega)$ en el siguiente sentido:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_\Omega - \mathbf{u}_n \circ \psi_n\|_{H_0^1(\Omega)} &\rightarrow 0 \\ \|p_\Omega - p_n \circ \psi_n\|_{L^2(\Omega)} &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

donde $(\mathbf{u}_\Omega, p_\Omega)$ es la solución del problema de Stokes (3.2) en el dominio Ω .⁶

Para tal propósito, primeramente se procederá a demostrar que la parte vectorial \mathbf{u}_n de la solución del problema de Stokes (3.1) con dominio Ω_n converge a la correspondiente parte vectorial de la solución del mismo problema de Stokes sobre el dominio Ω .

Nota 4.1. *Por simplicidad de los enunciados de los resultados que se verán en lo que sigue de este trabajo, se considerará que se tiene $D \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado y que dada una secuencia $\{\Omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de dominios acotados y de Lipschitz tal que $\Omega_n \subset D$ para toda n que converge difeomórficamente y compactamente a un dominio $\Omega \subset D$ acotado y Lipschitz. Más aún, se considerará a $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ como la familia de difeomorfismos según la definición 3.1; es decir:*

$$\psi_n(\Omega) \rightarrow \Omega$$

4.1. Continuidad débil de la solución

Lema 4.1. *Dada $f \in L^2(D)$, sea $\mathbf{u}_n \in V(\Omega_n)$ la solución del problema de Stokes en formulación variacional (3.2). Si $\mathbf{w}_n = \mathbf{u}_n \circ \psi_n$ entonces*

- 1) $\mathbf{w}_n \in H_0^1(\Omega)$
- 2) \mathbf{w}_n está acotada
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|\mathbf{w}_n\|_{H_0^1(\Omega)}}{\|\mathbf{u}_n\|_{H_0^1(\Omega_n)}} = 1$

Demostración.

- 1) Por la Proposición 3.3 se tiene que:

$$\mathbf{w}_n \in H_0^1(\Omega).$$

- 2) Viendo que:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{w}_n\|_{H_0^1(\Omega)}^2 &= \int_{\psi_n^{-1}(\Omega_n)} |\nabla \mathbf{w}_n|_F^2 dx \\ &= \int_{\Omega_n} |\nabla \mathbf{w}_n|_F^2 \circ \psi_n^{-1} |det(\nabla \psi_n^{-1})| \end{aligned}$$

donde, para $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se tiene que $|A|_F^2 \equiv (A, A)$, con el producto interior de Frobenius $(A, B) \equiv Tr(B^t A)$. Luego, usando la regla de la cadena se tiene:

$$\begin{aligned} |\nabla \mathbf{w}_n|_F^2 \circ \psi_n^{-1} &= (\nabla \mathbf{w}_n \cdot \nabla \mathbf{w}_n) \circ \psi_n^{-1} \\ &= ((\nabla \psi_n)^t \nabla \mathbf{u}_n \cdot (\nabla \psi_n)^t \nabla \mathbf{u}_n) \\ &= |(\nabla \psi_n)^t \nabla \mathbf{u}_n|_F^2 \end{aligned}$$

Ahora, como $|AB|_F \leq |A|_2 |B|_F$ ⁷, y el hecho que $(\nabla \psi_n)^t$ y $|det(\nabla \psi_n^{-1})|$ son continuas, se sigue que:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{w}_n\|_{H_0^1(\Omega)}^2 &= \int_{\Omega_n} |(\nabla \psi_n)^t \nabla \mathbf{u}_n|_F^2 |det(\nabla \psi_n^{-1})| dx \\ &\leq \int_{\Omega_n} |(\nabla \psi_n)^t|_2^2 |\nabla \mathbf{u}_n|_F^2 |det(\nabla \psi_n^{-1})| dx \\ &\leq \sup_{x \in \bar{\Omega}_n} (|(\nabla \psi_n)^t|_2^2 |det(\nabla \psi_n^{-1})|) \|\mathbf{u}_n\|_{H_0^1(\Omega_n)}^2 \end{aligned} \tag{4.1}$$

$$\leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{x \in \bar{\Omega}_n} (|(\nabla \psi_n)^t|_2^2 |det(\nabla \psi_n^{-1})|) \|\mathbf{u}_n\|_{H_0^1(\Omega_n)}^2 \tag{4.2}$$

Puesto que $\nabla \psi_n \rightarrow I$ uniformemente, se tiene que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |(\nabla \psi_n)^t|_2^2 |det(\nabla \psi_n^{-1})| = 1$$

Por lo tanto, existe $N \in \mathbb{N}$ y $C^* > 0$ tal que si $n \geq N$

$$|(\nabla \psi_n)^t|_2^2 |det(\nabla \psi_n^{-1})| < C^* \tag{4.3}$$

⁶Esto significa que si calculamos la solución de Stokes en un dominio Ω_n cercano a Ω entonces la composición de \mathbf{u}_n con un difeomorfismo $\psi_n(\Omega) \rightarrow \Omega_n$ está cerca a la solución \mathbf{u}_Ω .

⁷Recordando que, para $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, se define $|A|_2 \equiv \max_{x \neq 0} \frac{|Ax|_2}{|x|_2}$, siendo $|\cdot|_2$, la norma euclidiana en \mathbb{R}^n .

Usando (4.3) en (4.2), si $n \geq N$, se sigue que:

$$\|\mathbf{w}_n\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \sqrt{C^*} \|\mathbf{u}_n\|_{H_0^1(\Omega_n)} \quad (4.4)$$

Dado $C \in \mathbb{R}$ como en el Teorema 3.2 y por (4.4) se tiene que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{w}_n\|_{H_0^1(\Omega)} &\leq \sqrt{C^*} \|\mathbf{u}_n\|_{H_0^1(\Omega_n)} \\ &\leq \sqrt{C^*} C \|f\|_{L^2(D)} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\{\mathbf{w}_n\}$ está acotada.

3) Usando (4.1), se tiene que

$$\frac{\|\mathbf{w}_n\|_{H_0^1(\Omega)}}{\|\mathbf{u}_n\|_{H_0^1(\Omega_n)}} \leq \sup_{x \in \bar{\Omega}_n} \sqrt{|(\nabla \psi_n)^t|_2^2 |det(\nabla \psi_n^{-1})|} \quad (4.5)$$

De manera análoga se puede deducir que:

$$\left(\sup_{x \in \bar{\Omega}} \sqrt{|(\nabla \psi_n)^{-t}|_2^2 |det(\nabla \psi_n)|} \right)^{-1} \leq \frac{\|\mathbf{w}_n\|_{H_0^1(\Omega)}}{\|\mathbf{u}_n\|_{H_0^1(\Omega_n)}} \quad (4.6)$$

Otra vez, ya que $\nabla \psi_n, \nabla \psi_n^{-1} \rightarrow I$ uniformemente, se sigue que:

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{|(\nabla \psi_n)^t|_2^2 |det(\nabla \psi_n^{-1})|} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{|(\nabla \psi_n)^{-t}|_2^2 |det(\nabla \psi_n)|} \\ &= 1 \end{aligned} \quad (4.7)$$

Tomando los límites en (4.5), (4.6) y usando (4.7) se obtiene que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|\mathbf{w}_n\|_{H_0^1(\Omega)}}{\|\mathbf{u}_n\|_{H_0^1(\Omega_n)}} = 1$$

□

Lema 4.2. Sea $f \in L^2(D)$ dada, $\mathbf{u}_n \in V(\Omega_n)$ la solución del problema variacional de Stokes y $\mathbf{w}_n = \mathbf{u}_n \circ \psi_n$. Si $\{\psi_n\}$ converge difeomórficamente a Ω . Entonces \mathbf{w}_n converge débilmente a $\mathbf{u}_\Omega \in V(\Omega)$ donde \mathbf{u}_Ω es solución del problema variacional de Stokes:

$$\int_{\Omega} \mu \nabla \mathbf{u}_\Omega \cdot \nabla \mathbf{v} \, dx = \int_{\Omega} f \mathbf{v} \, dx, \quad \forall \mathbf{v} \in V(\Omega)$$

Demostración.

Por el Lema 4.1, la sucesión $\{\mathbf{w}_n\}$ tiene una subsucesión que converge débilmente a algún $\mathbf{w}^* \in H_0^1(\Omega)$. Por simplicidad, se renombrará a esta subsucesión como \mathbf{w}_n .

Sea

$\mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{D}(\Omega) \mid \text{div}(\mathbf{v}) = 0\}$, como $\Omega_n \rightarrow \Omega$ difeomórficamente, existe n_0 tal que $\mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega_n)$, para $n > n_0$.

Así, se tiene que:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_n} f \cdot \mathbf{v} \, dx &= \int_{\Omega_n} \nabla \mathbf{u}_n \cdot \nabla \mathbf{v} \, dx \\ &= \int_{\psi_n(\Omega)} \nabla \mathbf{u}_n \cdot \nabla \mathbf{v} \, dx \\ &= - \int_{\psi_n(\Omega)} \mathbf{u}_n \cdot \Delta \mathbf{v} \, dx \\ &= - \int_{\Omega} \mathbf{w}_n \cdot (\Delta \mathbf{v} \circ \psi_n) |det(\nabla \psi_n)| \, dx \end{aligned} \quad (4.8)$$

Por definición $\psi_n \rightarrow id$, y $\nabla \psi_n \rightarrow I$ uniformemente y $\mathbf{v} \in C_c^\infty(\Omega)$. Luego, se sigue que:

$$(\Delta \mathbf{v} \circ \psi_n) |det(\nabla \psi_n)| \rightarrow \Delta \mathbf{v}, \text{ uniformemente.} \quad (4.9)$$

Usando el hecho que \mathbf{w}_n converge débilmente a \mathbf{w}^* , se tiene de (2.9) que⁸:

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} - \int_{\Omega} \mathbf{w}_n \cdot (\Delta \mathbf{v} \circ \psi_n) |det(\nabla \psi_n)| \, dx \\ &= - \int_{\Omega} \mathbf{w}^* \cdot \Delta \mathbf{v} \, dx \\ &= \int_{\Omega} \nabla \mathbf{w}^* \cdot \nabla \mathbf{v} \, dx \end{aligned} \quad (4.10)$$

Por otro lado, se tiene también que:

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega_n} f \cdot \mathbf{v} \, dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (f \cdot \mathbf{v}) \circ \psi_n |det(\nabla \psi_n)| \, dx \\ &= \int_{\Omega} f \cdot \mathbf{v} \, dx \end{aligned} \quad (4.11)$$

⁸Usando la siguiente desigualdad

$|\langle \mathbf{w}_n, \mathbf{v}_n \rangle - \langle \mathbf{w}^*, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{w}_n\| \|\mathbf{v}_n - \mathbf{v}\| + |\langle \mathbf{w}_n, \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{w}^*, \mathbf{v} \rangle|$

Ahora, tomando el límite en (4.8) y usando (4.10)-(4.11), se obtiene que:

$$\int_{\Omega} \nabla \mathbf{w}^* \cdot \nabla \mathbf{v} \, dx = \int_{\Omega} f \cdot \mathbf{v} \, dx \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega)$$

Nótese, sin embargo, que como $\mathcal{V}(\Omega)$ es denso en $V(\Omega)$, esto implica que:

$$\int_{\Omega} f \cdot \mathbf{v} \, dx = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{w}^* \cdot \nabla \mathbf{v} \, dx \quad \forall \mathbf{v} \in V(\Omega) \quad (4.12)$$

Para probar que $w^* \in V(\Omega)$, obsérvese que:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\nabla \mathbf{u}_n \circ \psi_n) &= \text{Tr}(\nabla \mathbf{u}_n) \circ \psi_n \\ &= \text{div}(\mathbf{u}_n) \circ \psi_n \quad (4.13) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, usando la regla de la cadena tenemos:

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{u}_n \circ \psi_n &= \nabla \psi_n^{-t} \nabla (\mathbf{u}_n \circ \psi_n) \\ &= \nabla \psi_n^{-t} \nabla \mathbf{w}_n \quad (4.14) \end{aligned}$$

Substituyendo (4.14) en (4.13) se tiene que:

$$\text{Tr}(\nabla \psi_n^{-t} \nabla \mathbf{w}_n) = 0$$

Y puesto, $\nabla \psi_n^{-t} \nabla \mathbf{w}_n$ converge débilmente a $\nabla \mathbf{w}^*$, y Tr es un operador lineal y acotado⁹, se sigue que:

$$\text{div}(\mathbf{w}^*) = 0$$

Consecuentemente, se tiene $\mathbf{w}^* \in V(\Omega)$. Por (4.12) y el hecho que la solución del problema de Stokes tiene única solución se sigue que:

$$\mathbf{w}^* = \mathbf{u}_{\Omega}$$

□

4.2. Continuidad fuerte de la solución

Lema 4.3. *Sea $\Omega_n \subset D$, para toda n , $\Omega \subset D$ un dominio acotado y sea $f \in L^2(\Omega)$ dada. Si $f_n = f \circ \psi_n$ entonces*

- 1) $f_n \in L^2(\Omega)$
- 2) f_n converge fuertemente a f en $L^2(\Omega)$.

⁹ $\text{Tr} \in \mathcal{L}(L^2(\Omega)^{n \times n}, L^2(\Omega))$

Demostración.

1) Nótese que:

$$\begin{aligned} \|f_n\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \int_{\psi_n^{-1}(\Omega_n)} |f \circ \psi_n|^2 \, dx \\ &= \int_{\Omega_n} |f|^2 |\det(\nabla \psi_n^{-1})| \, dx \quad (4.15) \\ &\leq \sup_{x \in \overline{\Omega_n}} |\det(\nabla \psi_n^{-1})| \|f\|_{L^2(\Omega_n)}^2 \\ &\leq C_{(n)} \|f\|_{L^2(\Omega_n)}^2 \end{aligned}$$

donde $C_{(n)} = \sup_{x \in \overline{\Omega_n}} |\det(\nabla \psi_n^{-1})| > 0$. Ya que $\nabla \psi_n^{-1}$ es continuo y $\overline{\Omega_n}$ es acotado. Luego, se sigue que

$$f_n \in L^2(\Omega)$$

2) Obsérvese, de (4.15), que:

$$\begin{aligned} \|f_n\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{x \in \Omega_n} |\det(\nabla \psi_n^{-1})| \|f\|_{L^2(D)}^2 \\ \frac{\|f_n\|_{L^2(\Omega)}^2}{\|f\|_{L^2(D)}^2} &\leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{x \in \Omega_n} |\det(\nabla \psi_n^{-1})| \quad (4.16) \end{aligned}$$

Análogamente, se deduce que:

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{x \in \Omega} |\det(\nabla \psi_n)| \|f_n\|_{L^2(D)}^2 \\ \frac{1}{\sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{x \in \Omega} |\det(\nabla \psi_n)|} &\leq \frac{\|f_n\|_{L^2(\Omega)}^2}{\|f\|_{L^2(D)}^2} \quad (4.17) \end{aligned}$$

y puesto que $|\det(\nabla \psi_n)| \rightarrow 1$ uniformemente, tomando límite en (4.16)-(4.17), se tiene:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (4.18)$$

Por lo tanto, $\{f_n\}$ es acotado y tiene una subsucesión débilmente convergente a algún elemento f^* . Por comodidad, se renombrará a esta subsucesión como f_n .

Solo falta probar que $f^* = f$.

Si $g \in C_c(\Omega)$ entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $g \in C_c(\Omega_n)$, si $n \geq N$.¹⁰ Observando que:

¹⁰Pues $\{\Omega_n\}$ converge compactamente a Ω .

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} f_n g \, dx &= \int_{\Omega_n} f_n g \, dx \\
&= \int_{\psi_n^{-1}(\Omega)} f_n g \, dx \\
&= \int_{\Omega} (f_n \circ \psi_n^{-1})(g \circ \psi_n^{-1}) |\det(\nabla \psi_n^{-1})| \, dx \\
&= \int_{\Omega} f (g \circ \psi_n^{-1}) |\det(\nabla \psi_n^{-1})| \, dx
\end{aligned}$$

O sea:

$$\int_{\Omega} f_n g \, dx = \int_{\Omega} f (g \circ \psi_n^{-1}) |\det(\nabla \psi_n^{-1})| \, dx \quad (4.19)$$

puesto que $f_n = f \circ \psi_n$.

Y como $g \in C_c(\Omega)$, se sigue que $(g \circ \psi_n^{-1}) |\det(\nabla \psi_n^{-1})| \rightarrow g$ uniformemente. Pero también se tiene que $f_n \rightarrow f^*$ débilmente, por lo que tomando límites de ambos lados en (4.19), se obtiene que:

$$\int_{\Omega} f^* g \, dx = \int_{\Omega} f g \, dx$$

Dado que $g \in C_c(\Omega)$ es arbitraria y $C_c(\Omega)$ es denso en $L^2(\Omega)$, se obtiene que:

$$f^* = f \quad (4.20)$$

O bien que f_n converge débilmente a f . Este hecho junto con (4.18) nos permiten concluir que:

$$f_n \rightarrow f \text{ in } L^2(\Omega)$$

□

Lema 4.4. Sea $f \in L^2(D)$ dada y sea \mathbf{u}_n la solución del problema de Stokes (3.2) en $V(\Omega_n)$, i.e.:

$$\int_{\Omega_n} \mu \nabla \mathbf{u}_n \cdot \nabla \mathbf{v} \, dx = \int_{\Omega_n} f \mathbf{v} \, dx \quad \forall \mathbf{v} \in V(\Omega_n)$$

Si $\mathbf{w}_n = \mathbf{u}_n \circ \psi_n$ entonces \mathbf{w}_n converge fuertemente a $\mathbf{u}_{\Omega} \in V(\Omega)$, donde \mathbf{u}_{Ω} es la solución del problema de Stokes:

$$\int_{\Omega} \mu \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} \, dx = \int_{\Omega} f \mathbf{v} \, dx, \quad \forall \mathbf{v} \in V(\Omega)$$

Demostración.

Nótese que:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_n} \nabla \mathbf{u}_n \cdot \nabla \mathbf{u}_n \, dx &= \int_{\Omega_n} f \cdot \mathbf{u}_n \, dx \\
&= \int_{\Omega} f \circ \psi_n \cdot \mathbf{u}_n \circ \psi_n |\det(\nabla \psi_n)| \, dx \\
&= \int_{\Omega} \mathbf{w}_n (f_n |\det(\nabla \psi_n)|) \, dx \quad (4.21)
\end{aligned}$$

1) Del Lema 4.3 se tiene que $f_n = f \circ \psi_n \rightarrow f$ en $L^2(\Omega)$.

2) Por definición $\nabla \psi_n$ converge uniformemente a I . Por lo tanto, $|\det(\nabla \psi_n)| f_n \rightarrow f$ en $L^2(\Omega)$.

3) Por el Lema 4.2 sabemos que \mathbf{w}_n converge débilmente a \mathbf{u}_{Ω} .

Por lo tanto, tomando el límite en (4.21)¹¹:

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{u}_n\|_{H_0^1(\Omega_n)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \mathbf{w}_n f_n |\det(\nabla \psi_n)| \, dx \\
&= \int_{\Omega} \mathbf{u}_{\Omega} f \, dx \\
&= \|\mathbf{u}_{\Omega}\|_{H_0^1(\Omega)} \quad (4.22)
\end{aligned}$$

Por lo tanto usando el Lema 4.1, obtenemos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|\mathbf{w}_n\|_{H_0^1(\Omega)}}{\|\mathbf{u}_n\|_{H_0^1(\Omega_n)}} = 1 \quad (4.23)$$

Por lo tanto, de (4.22) y (4.23), se sigue que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{w}_n\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\mathbf{u}_{\Omega}\|_{H_0^1(\Omega)}$$

□

5. Convergencia fuerte: extensión por cero

Considérese a un dominio $D \subset \mathbb{R}^n$ acotado y a una sucesión $\{\Omega_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset D$ de dominios acotados y de Lipschitz que converge difeomórficamente y compactamente a algún dominio acotado y Lipschitz $\Omega \subset D$. Sea $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ la familia de difeomorfismos como en la definición 3.1.

¹¹Usando la siguiente desigualdad $|\langle \mathbf{w}_n, \mathbf{v}_n \rangle - \langle \mathbf{w}^*, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{w}_n\| \|\mathbf{v}_n - \mathbf{v}\| + |\langle \mathbf{w}_n, \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{w}^*, \mathbf{v} \rangle|$

Sea $\mathbf{u}_\Omega \in V(\Omega)$ la solución del problema variacional de Stokes (3.2). Considérese la extensión por cero de \mathbf{u}_Ω a $H_0^1(D)$:

$$\tilde{\mathbf{u}}_\Omega = \begin{cases} \mathbf{u}_\Omega & x \in \Omega \\ 0 & x \in D \setminus \Omega \end{cases}$$

Nótese que si $\tilde{\varphi}$ es la extensión por cero de alguna función $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ entonces $\tilde{\varphi} \in C_0^\infty(D)$, y que

$$\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\tilde{\varphi}\|_{H_0^1(D)} \\ \widetilde{\nabla\varphi} = \nabla\tilde{\varphi}$$

Se puede probar por un argumento de densidad que esto es cierto si $\varphi \in H_0^1(\Omega)$.

Teorema 5.1. *Sea $f \in L^2(D)$ dada. Si $\mathbf{u}_n \in V(\Omega_n)$ es la solución del problema variacional de Stokes (3.2) entonces $\tilde{\mathbf{u}}_n$ converge fuertemente $V(\Omega)$ a $\tilde{\mathbf{u}}_\Omega$, donde \mathbf{u}_Ω es la solución del problema variacional de Stokes:*

$$\int_\Omega \mu \nabla \mathbf{u}_\Omega \cdot \nabla \mathbf{v} \, dx = \int_\Omega f \mathbf{v} \, dx, \quad \forall \mathbf{v} \in V(\Omega)$$

Demostración.

De las demostraciones de la subsección 4.2, y por (4.22), sabemos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{u}_n\|_{H_0^1(\Omega_n)} = \|\mathbf{u}_\Omega\|_{H_0^1(\Omega)}$$

Puesto que $\tilde{\mathbf{u}}_n$ y $\tilde{\mathbf{u}}_\Omega$ son extensiones por cero respectivamente, se tiene que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\tilde{\mathbf{u}}_n\|_{H_0^1(D)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{u}_n\|_{H_0^1(\Omega_n)} \\ = \|\mathbf{u}_\Omega\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\tilde{\mathbf{u}}_\Omega\|_{H_0^1(D)}$$

Por lo que sólo se tiene que probar que $\tilde{\mathbf{u}}_n$ converge débilmente a $\tilde{\mathbf{u}}_\Omega$.

Sea:

$$\mathbf{w}_n = \mathbf{u}_n \circ \psi_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Dada $\mathbf{v} \in H_0^1(D)$, obsérvese que

$$\begin{aligned} \int_D \nabla \mathbf{v} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{u}}_n \, dx &= \int_{\Omega_n} \nabla \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{u}_n \, dx \\ &= \int_{\psi_n(\Omega)} \nabla \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{u}_n \, dx \\ &= \int_\Omega (\nabla \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{u}_n) \circ \psi_n |det(\nabla \psi_n)| \, dx \\ &= \int_\Omega (\nabla \mathbf{v} \circ \psi_n) \cdot \nabla \mathbf{w}_n |det(\nabla \psi_n)| \, dx \end{aligned} \quad (5.1)$$

y ya que $\psi_n \rightarrow id$ y $\nabla \psi_n \rightarrow I$ uniformemente, por el Lema 4.3, se sigue que:

$$(\nabla \mathbf{v} \circ \psi_n) |det(\nabla \psi_n)| \rightarrow \nabla \mathbf{v}, \quad \text{en } L^2(\Omega) \quad (5.2)$$

Por lo que tomando el límite en (5.1) y usando la convergencia fuerte de $\mathbf{w}_n \rightarrow \mathbf{u}_\Omega$ en $H_0^1(\Omega)$ y (5.2) se obtiene que:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_D \nabla \mathbf{v} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{u}}_n \, dx &= \int_\Omega \nabla \mathbf{v} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{u}}_\Omega \, dx \\ &= \int_D \nabla \mathbf{v} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{u}}_\Omega \, dx \end{aligned}$$

Puesto que esto es cierto para toda $\mathbf{v} \in H_0^1(D)$, se puede afirmar que $\tilde{\mathbf{u}}_n$ converge débilmente a $\tilde{\mathbf{u}}_\Omega$. Y puesto que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{u}_n\|_{H_0^1(D)} = \|\mathbf{u}_\Omega\|_{H_0^1(D)}$ se tiene que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_\Omega\|_{H_0^1(D)} = 0$$

□

5.1. Continuidad débil de la presión

En esta subsección se demuestra que también la presión depende continuamente del dominio de definición del problema de Stokes estacionario bajo estudio.

Lema 5.1. *Sea $\{\Omega_n\}$, $\Omega_n \subset \mathbb{R}^n$ una sucesión de conjuntos que converge difeomórficamente a $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ con respecto a la familia de difeomorfismos $\{\psi_n\}$. Dada $f \in L^2(D)$, sea (\mathbf{u}_n, p_n) la*

solución (en formulación variacional), del problema de Stokes (3.1) en $H_0^1(\Omega_n) \times L^2(\Omega_n)$, i.e:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_n} \mu \nabla \mathbf{u}_n \cdot \nabla v \, dx - \int_{\Omega_n} p_n \operatorname{div}(v) \, dx \\ &= \int_{\Omega_n} f \cdot \mathbf{v} \, dx, \quad \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega_n) \end{aligned} \quad (5.3)$$

Si $q_n = p_n \circ \psi_n$ entonces q_n converge débilmente a $p_\Omega \in L^2(\Omega)$, donde $(\mathbf{u}_\Omega, p_\Omega)$ es la solución del problema de Stokes (5.3) sobre el dominio Ω .

Demostración.

Sea $\mathbf{v} \in \mathbf{D}(\Omega)$ un campo vectorial cualquiera dado, como $\Omega_n \rightarrow \Omega$ converge compactamente existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\mathbf{v} \in \mathbf{D}(\Omega_n)$, si $n > N$. Consecuentemente, se tiene que:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_n} \mu \nabla \mathbf{u}_n \cdot \nabla \mathbf{v} \, dx - \int_{\Omega_n} p_n \operatorname{div}(\mathbf{v}) \, dx \\ &= \int_{\Omega_n} f \cdot \mathbf{v} \, dx, \quad n > N \end{aligned} \quad (5.4)$$

Tomando $\mathbf{w}_n = \mathbf{u}_n \circ \psi_n$ y usando el Teorema 5.1 se tiene:

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega_n} p_n \operatorname{div}(\mathbf{v}) \, dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{\Omega_n} \mu \nabla \mathbf{u}_n \cdot \nabla \mathbf{v} \, dx - \int_{\Omega_n} f \cdot \mathbf{v} \, dx \right) \\ &= \int_{\Omega} \mu \nabla \mathbf{u}_\Omega \cdot \nabla \mathbf{v} \, dx - \int_{\Omega} f \cdot \mathbf{v} \, dx \\ &= \int_{\Omega} p_\Omega \operatorname{div}(\mathbf{v}) \, dx \end{aligned} \quad (5.5)$$

Observando que:

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Omega_n} p_n \operatorname{div}(\mathbf{v}) - \int_{\Omega} q_n \operatorname{div}(\mathbf{v}) \right| \\ &= \left| \int_{\Omega} q_n (\operatorname{div}(\mathbf{v}) \circ \psi_n) \det(\nabla \psi_n) \, dx \right. \\ & \quad \left. - \int_{\Omega} q_n \operatorname{div}(\mathbf{v}) \, dx \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \leq \left| \int_{\Omega} q_n (\operatorname{div}(\mathbf{v}) \circ \psi_n - \operatorname{div}(\mathbf{v})) \det(\nabla \psi_n) \, dx \right| \\ & \quad + \left| \int_{\Omega} q_n (\operatorname{div}(\mathbf{v}) - \operatorname{div}(\mathbf{v})) \det(\nabla \psi_n) \, dx \right| \\ & \leq \|q_n\|_{L^2(\Omega)} \left(\|(\operatorname{div}(\mathbf{v}) \circ \psi_n - \operatorname{div}(\mathbf{v})) \det(\nabla \psi_n)\|_{L^2(\Omega)} \right. \\ & \quad \left. + \|\operatorname{div}(\mathbf{v}) - \operatorname{div}(\mathbf{v}) \det(\nabla \psi_n)\|_{L^2(\Omega)} \right) \\ & \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)} \left(\|(\operatorname{div}(\mathbf{v}) \circ \psi_n - \operatorname{div}(\mathbf{v})) \det(\nabla \psi_n)\|_{L^2(\Omega)} \right. \\ & \quad \left. + \|\operatorname{div}(\mathbf{v}) - \operatorname{div}(\mathbf{v}) \det(\nabla \psi_n)\|_{L^2(\Omega)} \right) \end{aligned} \quad (5.6)$$

Usando la convergencia uniforme de los difeomorfismos tenemos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega_n} p_n \operatorname{div}(\mathbf{v}) \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} q_n \operatorname{div}(\mathbf{v}) \, dx \quad (5.7)$$

De (5.5) y (5.7) se tiene:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} q_n \operatorname{div}(\mathbf{v}) \, dx = \int_{\Omega} p_\Omega \operatorname{div}(\mathbf{v}) \, dx \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{D}(\Omega) \quad (5.8)$$

Utilizando un argumento de densidad podemos afirmar que:

$$q_n \rightarrow p_\Omega, \quad \text{débilmente en } L^2(\Omega). \quad (5.9)$$

□

Para concluir esta sección notemos que si tomamos \tilde{p}_n la extensión por cero a D , y $\phi \in D(D)$. Se tiene que:

$$\begin{aligned} \int_D \tilde{p}_n \cdot \phi \, dx &= \int_{\Omega_n} p_n \cdot \phi \, dx \\ &= \int_{\Omega} q_n \cdot (\phi \circ \psi_n) \, dx \end{aligned}$$

Tomando límites y usando el hecho $(\phi \circ \psi_n) \rightarrow \phi$, y que $q_n \rightarrow p_\Omega$, débilmente en $L^2(\Omega)$.

Se tiene que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_D \tilde{p}_n \cdot \phi \, dx = \int_{\Omega} p_\Omega \cdot \phi \, dx = \int_D \tilde{p}_\Omega \cdot \phi \, dx$$

6. Experimentos numéricos

Una vez que se ha probado que el problema directo sobre el flujo estacionario de un fluido viscoso modelado con la ecuación Stokes, es bien planteado; i.e., que su solución depende continuamente con respecto a las condiciones de frontera, fuerzas externas y de su dominio de definición, se ha dado un primer paso en firme para abordar el problema inverso sobre la develación de una obstrucción parcial sobre el ducto de flujo estacionario de un fluido viscoso. En esta sección se presentan algunos de los resultados preliminares obtenidos de nuestros experimentos numéricos para la develación de una obstrucción parcial en el ducto de un flujo viscoso. Cabe mencionar que nuestros experimentos fueron obtenidos usando un servidor con el sistema operativo ubuntu, procesador core i7 920 (2.8GHz) con arquitectura de 62 bits y usando el método de elementos finitos con elementos mixtos (P1 para la presión y P2 para la velocidad [3]), implementado con software el *FreeFem++* para la resolución numérica del problema directo que a continuación se describe.

El problema directo a considerar es la ecuación de Stokes:

$$\begin{cases} -\mu\Delta\mathbf{u} + \nabla p = 0 & x \in \Omega(b,c) \\ \text{div}(\mathbf{u}) = 0 & x \in \Omega(b,c) \end{cases} \quad (6.1)$$

con las condiciones de frontera de Dirichlet siguientes:

$$\begin{cases} \mathbf{u} = (1, 0) & x \in \partial\Omega_{in} \cup \partial\Omega_{out} \\ \mathbf{u} = (0, 0) & x \in \partial\Omega_{mov(b,c)} \cup \partial\Omega_d \cup \partial\Omega_m \end{cases}$$

que se ilustran en la Figura 4 siguiente:



Figura 4: Condiciones de frontera

Nuestro objetivo consiste en develar la obstrucción $V(b, c)$ sobre la frontera superior del ducto descrito en la Figura 4 modelada paramétricamente por la función:

$$h(x) = D - \frac{b}{2} (1 - \cos(2\pi(x - c)/D))$$

$$|x - c| \leq D, \quad 0 < b < D$$

donde el parámetro b da la pérdida del claro de luz transversal al ducto y c da la ubicación de la obstrucción, usando para ello sólo mediciones de la presión (Véase la subsección 2.2).

Para tal propósito se tomaron los valores para la presión media con un parámetro $\epsilon = 0.01$, invasión por la obstrucción del claro de luz del ducto y ubicación siguientes:

$$p^* = L_S, \quad b^* = 0.5 \quad \text{y} \quad c^* = 5.0 \quad (6.2)$$

Con estos datos se resolvió numéricamente el problema directo de Stokes y se registraron presiones locales promedio en puntos cercanos a la frontera superior. Así, el problema inverso de develar la obstrucción consiste en hallar una estimación de los parámetros b y c .

$$(\hat{b}, \hat{c}) = \text{argmin}_{(b,c) \in \Theta} J(b, c) \quad (6.3)$$

donde el funcional $J(b, c)$, está dado por:

$$J(b, c) = \sum_{j=1}^N |\bar{p}_{x_j} - \bar{v}_{x_j, \epsilon}(p(\cdot; b, c))| \quad (6.4)$$

donde $(\mathbf{u}(\cdot; b, c), p(\cdot; b, c))$ es solución de las ecuaciones de Stokes (6.1) sobre el dominio $\Omega(b, c)$.

Cabe mencionar que se decidió usar este funcional, ya que el método de optimización que se uso es libre de derivadas; y que además, como es bien sabido, es más robusto en la estimación de parámetros en comparación con el funcional de mínimo de cuadrados [6].

Sin embargo, no fue posible lograr la develación de la obstrucción. Para explicar esto, se pasó a analizar la funcional objetivo $J(b, c)$, resultando que ésta no es convexa (Véase la Figura 5 a continuación).

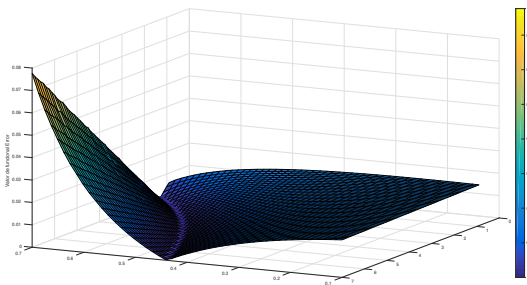


Figura 5: Gráfica de $J(b, c)$

No obstante, nótese que el funcional parece convexo en dirección al eje b que corresponde a la profundidad de la obstrucción (Véase Figura 5). Por ello, se pasó a hallar la solución del siguiente problema:

$$\hat{b} = \operatorname{argmin}_{(b,c) \in \Theta} J(b, c^*) \quad (6.5)$$

Utilizando el método simplex en Matlab se obtuvieron los siguientes resultados. En las segunda y tercera columnas de las tablas 1 y 2, se muestran los resultados sin errores de medición en las presiones promedio observadas resultando, redondeando a 3 cifras decimales, iguales al valor exacto de la profundidad $b_* = 0.5$ y $b_* = 0.75$. Mientras que en las dos últimas columnas se muestran los resultados con un error de medición del 10% en las presiones promedio observadas resultando, redondeando a 2 cifras decimales, iguales al valor exacto de la profundidad.

Es importante decir que el centro de las N mediciones x_j está dado por la siguiente función:

$$x_j = \left(10.0 + 20.0 \frac{j}{N}, 0.8\right) \quad (6.6)$$

Error de medición	Ninguno		$\mathcal{N}(0, 0.1)$	
	$ b_{exacto} - b_{aprox} $	b_{aprox}	$ b_{exacto} - b_{aprox} $	b_{aprox}
3	2.0602E-04	5.0021E-01	1.5852E-01	3.4148E-01
4	1.5735E-06	5.0000E-01	1.7365E-01	3.2635E-01
5	2.5806E-04	5.0026E-01	8.5375E-03	5.0854E-01
6	2.1161E-04	5.0021E-01	1.9499E-03	5.0195E-01
7	8.9752E-06	4.9999E-01	3.2242E-02	5.3224E-01
8	1.3954E-05	4.9999E-01	2.1715E-02	5.2171E-01
9	8.5663E-05	5.0009E-01	4.6842E-02	5.4684E-01
10	8.7768E-06	4.9999E-01	1.9481E-02	4.8052E-01

Tabla 1: Tabla de errores, $b_{exact} = 0.5$

Error de medición	Ninguno		$\mathcal{N}(0, 0.1)$	
	$ b_{exacto} - b_{aprox} $	b_{aprox}	$ b_{exacto} - b_{aprox} $	b_{aprox}
3	6.9160E-06	7.4999E-01	1.4431E-03	7.5144E-01
4	1.3413E-05	7.4999E-01	4.5747E-04	7.4954E-01
5	5.8467E-06	7.5001E-01	6.8557E-03	7.5686E-01
6	6.9160E-06	7.4999E-01	1.1624E-02	7.6162E-01
7	6.9387E-06	7.4999E-01	1.7595E-06	7.5000E-01
8	8.5166E-06	7.5001E-01	3.6683E-03	7.5367E-01
9	2.7696E-06	7.5000E-01	5.3395E-03	7.5534E-01
10	8.5178E-06	7.5001E-01	1.9540E-03	7.4805E-01

Tabla 2: Tabla de errores, $b_{exact} = 0.75$

En la Figura 7, se muestran los errores absolutos en la develación de la profundidad de la obstrucción con respecto al número de sensores (mediciones de la presión promedio observadas), uniformemente colocados cerca del borde superior del ducto usando la ecuación (6.6) para dos casos ($b_{exacta} = 0.5$ izquierda, $b_{exacta} = 0.75$ derecha). Las gráficas negras son el error de aproximación sin errores en las mediciones y las gráficas rosas cuando se tiene 10% de error en las mediciones.

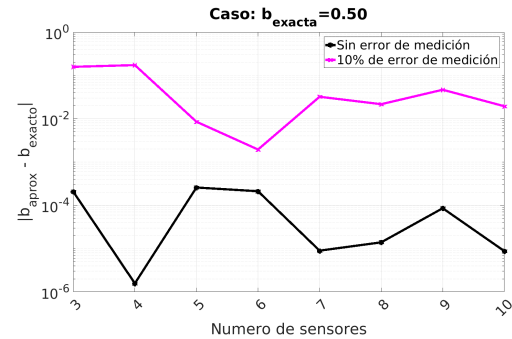


Figura 6: Error de aproximación vs número de sensores, $b_{exacta} = 0.5$

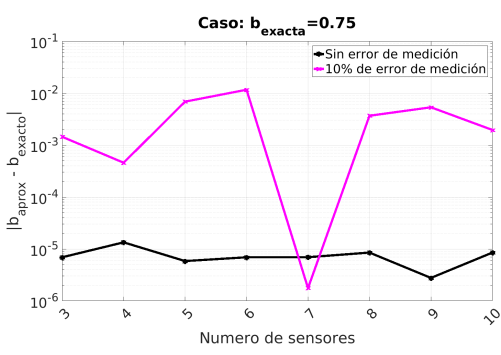


Figura 7: Error de aproximación vs número de sensores, $b_{exacta} = 0.75$

7. Trabajo futuro

En nuestro plan de trabajo a futuro, está contemplado como paso siguiente investigar la *develación* de la obstrucción en el ducto a través del cual fluye un fluido viscoso modelado por las ecuaciones de Navier no-estacionarias, usando mediciones de la presión y alternativamente del campo vectorial. Aunque nuestro primer objetivo central consiste en resolver nuestro problema inverso de flujo sanguíneo usando las ecuaciones de Navier-Stokes no-estacionarias:

$$\begin{cases} \mathbf{u}_t + \mathbf{u} \nabla \mathbf{u} - \mu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = 0 & x \in \Omega_{(b,c)} \\ \operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0 & x \in \Omega_{(b,c)} \end{cases} \quad (7.1)$$

y las condiciones de frontera de Dirichlet siguientes:

$$\begin{cases} \mathbf{u} = (\sin(\pi y)(\cos((2.0\pi)t + \pi) + 1), 0) & (x, y) \in \partial\Omega_{in} \cup \partial\Omega_{out} \\ \mathbf{u} = (0, 0) & (x, y) \in \partial\Omega_{mov(b,c)} \cup \partial\Omega_d \cup \partial\Omega_m \end{cases} \quad (7.2)$$

A continuación se muestran unas simulaciones numéricas del flujo de un fluido viscoso a través de un ducto con una obstrucción parcial obtenidas al resolver numéricamente el problema de Navier-Stokes antes descrito.

En las figuras que siguen, se ilustra la simulación numérica en tres instantes de tiempo $t = 0.8, 1.6$ y 2 segundos, de un flujo con turbulencias de un fluido viscoso a través de un ducto con una obstrucción parcial de profundidad del 70 %, resolviendo el problema de Navier-Stokes no-estacionario (7.1)-(7.2), usando un servidor con el sistema operativo ubuntu, procesador core i7 920 (2.8GHz) con arquitectura de 62 bits y usando el método de elementos finitos con elementos mixtos ($P1$ para la presión y $P2$ para la velocidad [3]) combinado con euler implícito, implementado en software *FreeFem++*



Figura 8: Simulación NS, $T = 0.8, b = 0.7$

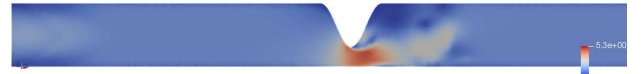


Figura 9: Simulación NS, $T = 1.6, b = 0.7$



Figura 10: Simulación NS, $T = 2, b = 0.7$

Mientras que en las figuras que siguen, en los mismos instantes de tiempo, es casi imperceptible un flujo turbulento de un fluido viscoso a través de un ducto con una obstrucción de profundidad del 30 %.



Figura 11: Simulación NS, $T = 0.8, b = 0.3$

8. Conclusiones

En este trabajo se reportan resultados preliminares sobre el problema inverso de flujo sanguíneo: *detección temprana de estenosis en coronarias por medios no invasivos*, o la prevención de infartos al miocardio.

En una primera aproximación se ha considerado al flujo sanguíneo modelado mediante las ecuaciones de Stokes en su caso estacionario, demostrando que el problema directo asociado a nuestro problema inverso, es un problema *bien planteado* a la Hadamard con respecto a fuerzas externas, condiciones iniciales y de frontera y en especial con respecto al dominio (frontera) de definición de su solución, pues el problema inverso que nos interesa, en esencia, consiste en develar parte de la geometría de la frontera del dominio de definición de la solución del problema directo.

Nuestras primeras simulaciones numéricas sobre el problema inverso de Stokes estacionario, usando mediciones de la presión promedio en puntos cercanos a la frontera resultaron parcialmente alentadores. Pues, debido a la geometría de la gráfica de la funcional objetivo de mínimo de cuadrados (6.4) que no es convexa y presenta una “barranca” casi plana, sólo fue posible determinar la profundidad de la obstrucción con muy aceptable precisión en presencia de errores de observación del orden del 10 %.

Finalmente, cabe subrayar que los mejores resultados de develación de la profundidad para una obstrucción parcial del 50 % y el 70 % con mediciones de la presión promedio sin ruido y colocados uniformemente cerca de la pared superior del ducto en 2D, se obtuvieron con 4 y 7 sensores, respectivamente. Mientras que para lecturas de las presiones promedio con un ruido de hasta el 10 %, fueron 6 y 7, respectivamente.

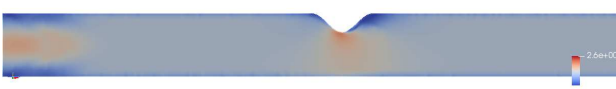


Figura 12: Simulación NS, $T = 1.6$, $b = 0.3$



Figura 13: Simulación NS, $T = 2$, $b = 0.3$

Cabe mencionar que esto está de acuerdo con la experiencia clínica, pues se espera que nuestra propuesta de detección temprana de estenosis en coronarias resulte efectiva para estenosis con una invasión (profundidad), entre el 50 y el 75 % del claro (sección transversal) del ducto coronario.

En la Figura 14 se representan las mediciones de la presión en el tiempo usando un solo sensor colocado de acuerdo con la ecuación (6.6), para dos profundidades de la obstrucción $b_{0.3}$ (azul), $b_{0.7}$ (roja). Como se puede apreciar la presión no varía considerablemente al cambiar la profundidad de la obstrucción, esto puede ser un indicio que para la develación completa de la obstrucción (profundidad y ubicación) es necesario considerar también mediciones del campo vectorial de velocidades.

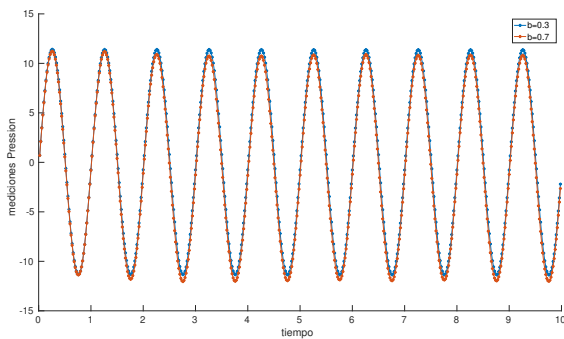


Figura 14: Simulación NS, mediciones de la presión con un sensor. ($b_{0.3}$ roja, $b_{0.7}$ azul)

Referencias

- [1] V. L. Roger, A. S. Go, D. M. Lloyd-Jones, E. J. Benjamin, J. D. Berry, W. B. Borden, D. M. Bravata, S. Dai, E. S. Ford, C. S. Fox, *et al.*, “Heart disease and stroke statistics—2012 update: a report from the american heart association,” *Circulation*, pp. CIR–0b013e31823ac046, 2011.
- [2] J. H. Seo and R. Mittal, “A coupled flow-acoustic computational study of bruits from a modeled stenosed artery,” *Medical & biological engineering & computing*, vol. 50, no. 10, pp. 1025–1035, 2012.
- [3] R. Temam, *Navier-Stokes equations: theory and numerical analysis*, vol. 343. American Mathematical Soc., 2001.
- [4] A. Henrot and M. Pierre, *Variation et optimisation de formes: une analyse géométrique*, vol. 48. Springer Science & Business Media, 2006.
- [5] G. Allaire, *Numerical analysis and optimization: an introduction to mathematical modeling and numerical simulation*. Oxford University Press, 2007.
- [6] P. J. Huber, “Robust statistics,” in *International Encyclopedia of Statistical Science*, pp. 1248–1251, Springer, 2011.