

Modelo de elementos rígidos para el análisis de estructuras de mampostería

Siro Casolo

Dipartimento di Ingegneria Strutturale
Politecnico di Milano, Pza. Leonardo da Vinci 32
20133 Milano, Italia
Tel.: 39-02-2399 4356; Fax: 39-02-2399 4220
e-mail: Siro.Casolo@polimi.it

Fernando Peña

Instituto de Ingeniería
Universidad Nacional Autónoma de México
Coordinación de Estructuras y Materiales
Apartado postal 70-472, Ciudad Universitaria
México, DF 04510
Tel.: 52-55-562 234 71; Fax: 52-55-562 234 68
e-mail: fpem@pumas.iingen.unam.mx

Resumen

Se presenta un modelo de elementos rígidos en el plano para la modelación de estructuras de mampostería. El presente modelo considera las estructuras de mampostería como una serie de elementos rígidos interconectados entre ellos. Únicamente los desplazamientos en el plano son considerados, mientras que el comportamiento fuera del plano se desprecia. Los elementos rígidos son cuadriláteros interconectados mediante puntos de conexión oportunamente colocados en los lados de interconexión. Las características mecánicas de estos puntos reproducen el comportamiento frágil de la mampostería. Estas características se obtienen mediante un proceso de identificación de parámetros, basado en la equivalencia de energía de deformación entre los elementos rígidos y el material. El objetivo principal en la formulación de este método es poder analizar dinámica o estáticamente cualquier tipo de estructura de mampostería, que presente un comportamiento en el plano, no importando la geometría o las características del material.

Palabras clave:

elementos rígidos, mampostería, comportamiento dinámico, comportamiento histerético, método de análisis.

RIGID ELEMENT MODEL FOR NUMERICAL ANALYSIS OF MASONRY STRUCTURES

Summary

The paper presents the formulation of a specific computational model for the in-plane structural analysis of masonry structures subjected to cyclic loading. In this field, there is the need of models that are simplified enough to allow computation of real buildings, but should also account for the peculiar behaviour of the masonry material subjected to cyclic loadings that cause heavy mechanical degradation. Rigid elements are adopted, and in particular the elements are plane quadrilaterals connected to each other by two normal springs and one shear spring at each side. The mechanical characteristics of these connections are defined with attention to the description of brittle behaviour and mechanical degradation. A simplified phenomenological description is proposed for the cyclic behaviour of the masonry material out-of the linear elastic field, with different hysteretic laws for the axial and shear connections between rigid elements.

Keywords:

rigid elements, masonry, dynamic behaviour, hysteretic behaviour, analysis method.

INTRODUCCIÓN

La respuesta sísmica de edificios históricos en general difiere sustancialmente de la respuesta sísmica de los edificios modernos. Por consecuencia, los análisis de vulnerabilidad requieren de un procedimiento específico para este tipo de estructuras. El método simplificado que se presenta aquí se fundamenta en dos consideraciones principales: 1) el fenómeno que debe ser modelado, a fin de estudiar el comportamiento global de un edificio sujeto a sismo, es el de la transmisión y transformación de la energía sísmica del suelo a la estructura¹; y 2) las cargas sísmicas son tan complejas que es necesario estimar el riesgo sísmico de este tipo de estructuras mediante un estudio paramétrico, en el cual las fuerzas sísmicas o acelerogramas se deben seleccionar a partir de un estudio estadístico, basado en el peligro sísmico de la zona en que se encuentra la estructura¹⁴.

La consecuencia general de estas hipótesis es la de dar preferencia a modelos discretos, con los que es posible estudiar la respuesta sísmica de grandes porciones de un edificio mediante la realización de un análisis dinámico paso a paso, así como, también debe ser lo suficientemente veloz como para ser utilizado en un estudio paramétrico. En este contexto el modelo numérico debe ser capaz de reproducir el comportamiento global histerético de la estructura, al menos mediante un método simplificado fenomenológico^{2,3,4}.

Algunos autores han desarrollado diversas metodologías de análisis, basadas en considerar las estructuras de mampostería como un ensamble de elementos rígidos^{2,4,9,15}, demostrando ser un método eficaz de análisis. Sin embargo, cada autor presenta una formulación numérica diferente, dependiendo del objetivo final de su trabajo. En este estudio se toman como base los trabajos desarrollados por Casolo^{2,5}. Por sencillez se define el comportamiento mecánico para un material isótropo, dejando para un trabajo posterior el comportamiento ortrótopo, además de que se desprecian los efectos microestructurales debido al tipo de aparejo de la mampostería^{5,6}.

FILOSOFÍA DE LOS ELEMENTOS RÍGIDOS

Este método considera a las estructuras de mampostería, que resisten fuerzas en su plano, como un ensamble de elementos rígidos. Estos elementos son cuadriláteros y tienen una cinemática de cuerpos rígidos con dos desplazamientos lineales u, v y una rotación ψ . Los elementos rígidos se conectan entre sí mediante tres puntos de conexión (resortes inelásticos). Estos puntos de conexión son dos axiales, separados una distancia $2b$ para tomar en cuenta un par de fuerzas, y el tercer punto es una conexión de cortante, colocado al centro del lado de conexión.

La mampostería es considerada como un material deformable, pero esta deformación se concentra en los puntos de conexión, mientras que el elemento en sí es indeformable (rígido). Los puntos de conexión se encuentran cinemáticamente desacoplados entre sí. Sin embargo, desde el punto de vista mecánico se encuentran acoplados entre ellos mediante las relaciones constitutivas del material. En otras palabras, los puntos de conexión representan las características mecánicas del material, pero al mismo tiempo representan la capacidad del modelo para tomar en cuenta la separación o deslizamiento entre elementos.

Un modelo de elementos rígidos puede ser considerado como un modelo semicontinuo. En un modelo continuo existe continuidad y compatibilidad entre los elementos, que comparten un mismo nodo, mientras que en un modelo discontinuo los elementos son capaces de separarse o deslizarse entre ellos. En el método de los elementos rígidos puede existir un movimiento relativo entre dos elementos (separación o deslizamiento); sin embargo, las conectividades iniciales del modelo no cambian durante el análisis y una continuidad relativa existe. De hecho, entre dos elementos adyacentes pueden presentarse separación, deslizamiento o sobreposición; numéricamente significan tensión, cortante y compresión en

los puntos de conexión. Se asume que cada elemento es independiente en su movimiento, ya que las estructuras de mampostería no pueden ser consideradas continuas, debido a que parte de su deformación se deriva de un movimiento relativo entre elementos; sin embargo, sigue existiendo una relación entre los esfuerzos y las deformaciones. Las conectividades iniciales no cambian durante el análisis para simplificar el tiempo de cómputo. La idea principal de este método es la de poder analizar en forma simplificada cualquier tipo de estructura de mampostería (no importando la geometría o las características del material), que presente un comportamiento en el plano. Motivo por el cual se asigna un comportamiento mecánico al material (monótono e hysterético) sobre una base fenomenológica.

La formulación de este método se basa principalmente en:

- a) pequeños desplazamientos y rotaciones,
- b) elementos cuadriláteros,
- c) dos elementos contiguos comparten todo el lado de conexión,
- d) las conectividades iniciales no cambian durante el análisis,
- e) las cargas estáticas son aplicadas en el centro de masas del elemento.

FORMULACIÓN^{2,5}

Se considera un dominio Ω (estructura de mampostería en el plano) descrito en términos de su plano medio $\Omega(x, y) \in \mathcal{R}^2$ y discretizado mediante una partición de m elementos rígidos cuadriláteros. Únicamente son permitidos desplazamientos en el plano entre cada par de elementos interconectados (un movimiento de traslación paralelo y uno perpendicular a lo largo del lado en común, así como una rotación). Se define un sistema local de referencia para cada uno de los elementos Ω^i , con el centro fijo en el centro de masas o^i y el eje ξ paralelo al eje global x .

$$\{o^i, \xi^i, \eta^i\} \quad i = 1, m \quad (1)$$

La configuración deformada del dominio Ω se describe en función de la variación de posiciones de los marcos de referencia locales. Las variables u_i, v_i, ψ_i definen los desplazamientos para cada uno de los marcos de referencia con respecto a su posición inicial.

Conociendo la coordenada local de un punto $(\xi, \eta) \in \Omega^i$, el desplazamiento $\Delta x, \Delta y$ en el plano $x - y$ se evalúa mediante (Figura 1a)

$$\begin{Bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\eta \\ 0 & 1 & \xi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \psi_i \end{Bmatrix} \quad (2)$$

Los desplazamientos de todos los marcos de referencia se ensamblan en un vector de $3m$ coordenadas lagrangianas, que describe la configuración deformada del sistema

$$\mathbf{u}^T = \{u_1, v_1, \psi_1, u_2, v_2, \psi_2, \dots, u_m, v_m, \psi_m\} \quad (3)$$

El comportamiento mecánico de los puntos de conexión se definen mediante las relaciones esfuerzo-deformación del material, por lo que es necesario conocer la deformación axial y cortante en cada uno de los puntos de conexión (lados en común o lados restringidos). De acuerdo con la Figura 1b, el punto indicado con la letra Q , en el centro del lado de conexión, es un punto de conexión de cortante, mientras que los puntos P y R , que se encuentran a una distancia igual a b del centro del lado, son puntos de conexión axiales. Se obtienen dos deformaciones axiales considerando la componente de desplazamientos entre los puntos P y R , perpendiculares al lado y dividiendo este valor entre la distancia $h = h_i + h_j$ (Figura 2). La deformación por cortante se obtiene de modo análogo, considerando la componente de desplazamiento paralelo al lado y dividiéndolo por su distancia correspondiente (Figura 2).

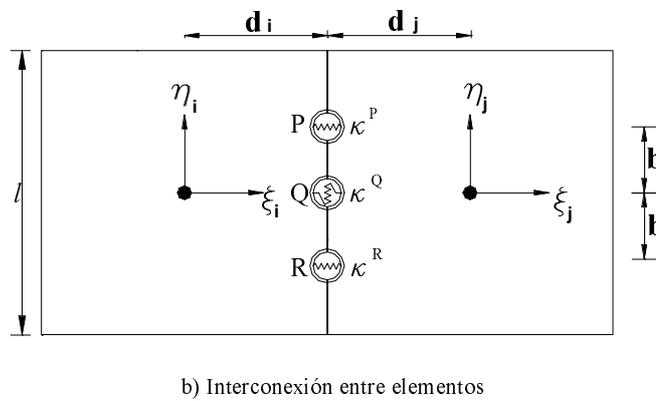
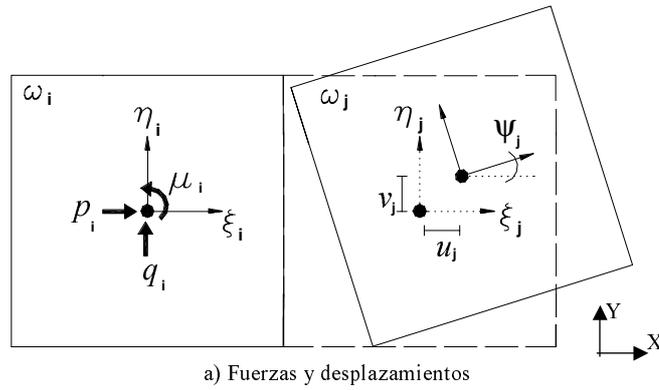


Figura 1. Esquema de un par de elementos rígidos

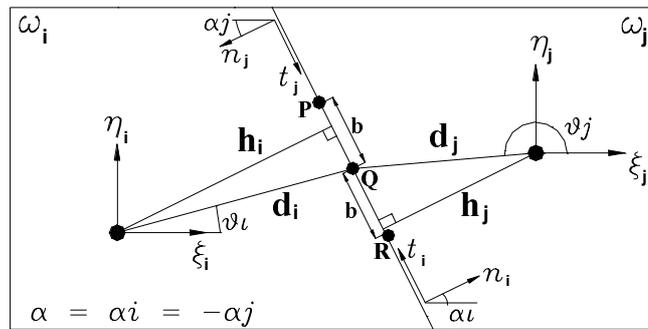


Figura 2. Interconexión entre elementos

De este modo, para cada lado de conexión k se tienen tres deformaciones

$$\varepsilon_k^P, \varepsilon_k^Q, \varepsilon_k^R \quad k = 1, \dots, r \tag{4}$$

donde r es el número total de lados de conexión. El vector de deformaciones generalizadas $\boldsymbol{\varepsilon}$ se ensambla para obtener todas las deformaciones del sistema discreto

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T = \{ \varepsilon_1^P, \varepsilon_1^Q, \varepsilon_1^R, \varepsilon_2^P, \varepsilon_2^Q, \varepsilon_2^R, \dots, \varepsilon_r^P, \varepsilon_r^Q, \varepsilon_r^R \} \tag{5}$$

Las coordenadas lagrangianas \mathbf{u} de dos elementos adyacentes (ω_i, ω_j) se relacionan con las deformaciones $\boldsymbol{\varepsilon}$ del lado de conexión $(\omega_i - \omega_j)$ mediante

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{u} \tag{6}$$

donde \mathbf{B} es la matriz deformación-desplazamiento para el lado $(\omega_i - \omega_j)$

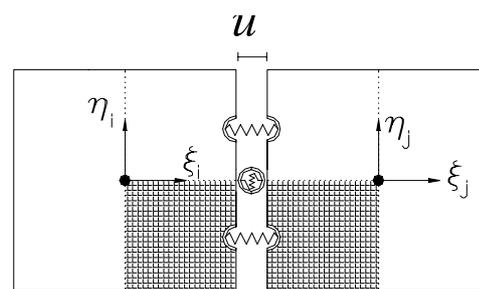
$$\mathbf{B} = -\frac{1}{h_i + h_j} \begin{bmatrix} \cos \alpha_i & \text{sen } \alpha_i & [\text{sen}(\alpha_i - \vartheta_i)d_i + b] & -\cos \alpha_j & -\text{sen } \alpha_j & -[\text{sen}(\alpha_j - \vartheta_j)d_j + b] \\ -\text{sen } \alpha_i & \cos \alpha_i & [\cos(\alpha_i - \vartheta_i)d_i] & \text{sen } \alpha_j & -\cos \alpha_j & -[\cos(\alpha_j - \vartheta_j)d_j] \\ \cos \alpha_i & \text{sen } \alpha_i & [\text{sen}(\alpha_i - \vartheta_i)d_i - b] & -\cos \alpha_j & -\text{sen } \alpha_j & -[\text{sen}(\alpha_j - \vartheta_j)d_j - b] \end{bmatrix} \tag{7}$$

donde α_i es el ángulo del lado de conexión del elemento i referido al eje ξ y ϑ es llamado ángulo de distorsión. Si α y ϑ son iguales, entonces el elemento es rectangular y las distancias h y d son también iguales (Figura 2).

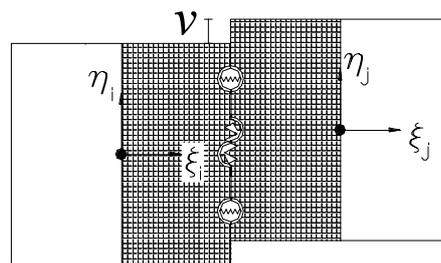
Del mismo modo es posible definir el vector de fuerzas \mathbf{p} aplicado en el centro de masas del elemento

$$\mathbf{p}^T = \{ p_1, q_1, \mu_1, p_2, q_2, \mu_2, \dots, p_m, q_m, \mu_m \} \tag{8}$$

donde p y q son fuerzas lineales en dirección x e y y μ es un par de fuerzas.



a) Axial



b) Cortante

Figura 3. Volúmenes tributarios: a) axial, b) cortante

Para cada uno de los puntos de conexión se define un volumen tributario de acuerdo con la Figura 3. Este volumen define la zona de influencia para cada uno de los puntos de

conexión. De este modo se ensambla la matriz diagonal de volúmenes tributarios \mathbf{V}

$$\mathbf{V} = \text{diag} [V_1^P, V_1^Q, V_1^R, V_2^P, V_2^Q, V_2^R, \dots, V_r^P, V_r^Q, V_r^R] \quad (9)$$

Por otra parte se asigna una rigidez generalizada a cada uno de los puntos de conexión y se ensamblan en la matriz diagonal \mathbf{D}

$$\mathbf{D} = \text{diag} [k_1^P, k_1^Q, k_1^R, k_2^P, k_2^Q, k_2^R, \dots, k_r^P, k_r^Q, k_r^R] \quad (10)$$

El vector $\boldsymbol{\sigma}$ define los esfuerzos medios en los volúmenes de pertinencia asociados a cada uno de los puntos de conexión

$$\boldsymbol{\sigma}^T = \{ \sigma_1^P, \sigma_1^Q, \sigma_1^R, \sigma_2^P, \sigma_2^Q, \sigma_2^R, \dots, \sigma_r^P, \sigma_r^Q, \sigma_r^R \} \quad (11)$$

Se define también la ley constitutiva para cada uno de los puntos de conexión que relaciona los esfuerzos generalizados con las deformaciones generalizadas asociados a cada uno de los volúmenes de pertinencia

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (12)$$

Ahora bien, aplicando el principio del trabajo virtual, se tiene que⁷

$$\begin{aligned} \bar{W}_E &= \bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{p} \\ \bar{W}_I &= \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \mathbf{V}\boldsymbol{\sigma} = \bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{B}^T \mathbf{VDBu} \end{aligned} \quad (13)$$

siendo \bar{W}_E y \bar{W}_I los trabajos virtuales externos e internos realizados por el sistema debidos a un desplazamiento virtual arbitrario $\bar{\mathbf{u}}$. Aplicando estos desplazamientos virtuales e igualando trabajos, se obtiene

$$\mathbf{F} = \mathbf{B}^T \mathbf{VDBu} = \mathbf{K}\mathbf{u} \quad (14)$$

donde \mathbf{K} es la matriz global de rigideces.

Para tomar en cuenta las fuerzas de inercia se definen también las matrices de masas \mathbf{M} y de amortiguamiento viscoso \mathbf{C} , la cual es proporcional a la matriz de masas

$$\mathbf{M} = \text{diag} [m^1, m^1, m_r^1, m^2, m^2, m_r^2, \dots, m^m, m^m, m_r^m] \quad (15)$$

$$\mathbf{C} = a_0 \mathbf{M} \quad (16)$$

donde m^i es la masa lineal del elemento i y m_r^i la masa rotacional del mismo elemento, definida como $m_r = mJ$, donde J es el momento polar de inercia del elemento.

PROPIEDADES ELÁSTICAS DE LOS PUNTOS DE CONEXIÓN

Se considera un elemento formado por un material isótropo Ω_{cc} . Para un estado de deformaciones en el plano, la matriz de elasticidad \mathbf{A} está dada por

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \end{bmatrix} \quad (17)$$

donde $A_{11} = A_{22} = \frac{E}{1-\nu^2}$, $A_{12} = A_{21} = \frac{\nu E}{1-\nu^2}$, $A_{33} = 2G = \frac{E}{1+\nu}$; E es el módulo de Young, ν el coeficiente de Poisson y G el módulo de rigidez cortante. Por otra parte, el vector de esfuerzos $\boldsymbol{\Sigma}$ y el de deformaciones \mathbf{E} son

$$\boldsymbol{\Sigma}^T = \{ \Sigma_{11} \quad \Sigma_{22} \quad \Sigma_{12} \} \quad (18)$$

$$\mathbf{E}^T = \{ E_{11} \quad E_{22} \quad E_{12} \} \quad (19)$$

La rigidez elástica de los puntos de conexión se obtiene igualando la densidad de energía de deformación de los elementos rígidos Π_c con la densidad de energía de deformación del material Π_m

$$\Pi_m = \frac{1}{2} \mathbf{E}^T \mathbf{A} \mathbf{E} \quad (20)$$

$$\Pi_c = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{u} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\epsilon} \quad (21)$$

En estas ecuaciones se conocen el vector de deformaciones \mathbf{E} , la matriz de elasticidad \mathbf{A} y el volumen V del elemento Ω_{cc} . Por lo que si se aplican desplazamientos lagrangianos en los elementos rígidos, para de obtener la misma densidad de energía de deformación de Ω_{cc} , entonces es posible obtener la rigidez elástica de los puntos de conexión. Cabe hacer notar que el presente modelo no toma en cuenta el efecto de Poisson. Para un material isótropo se necesitan dos pruebas básicas: una axial y otra cortante simétrico (Figura 4). De este modo se obtienen las rigideces axiales (22) y de cortante (23)

$$k^P = k^R = A_{11} \quad (22)$$

$$k^Q = A_{33} \quad (23)$$

Asimismo para considerar una variación de esfuerzos lineal cuando se presenta un par de fuerzas μ , los puntos de conexión se separan del centro del lado de conexión l una distancia $b = l/(2\sqrt{3})$.

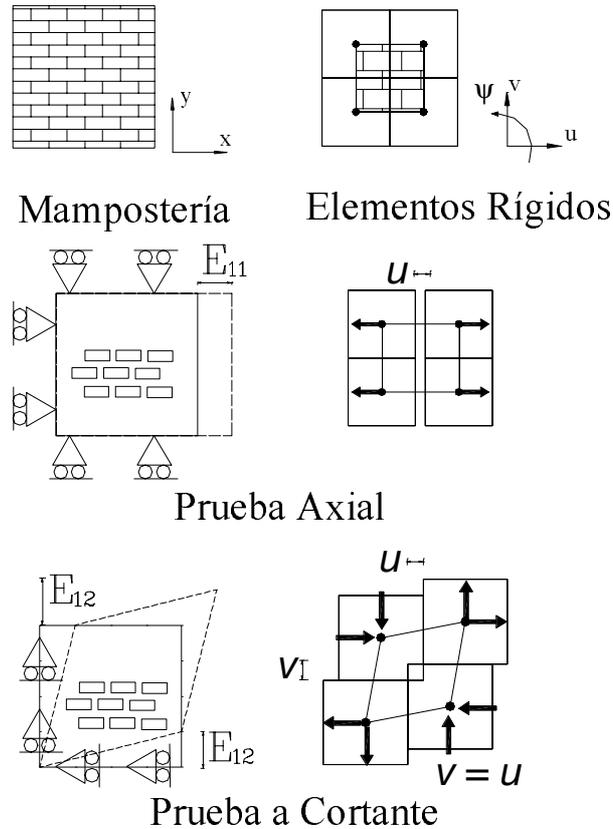


Figura 4. Pruebas básicas de identificación (material isótropo)

COMPORTAMIENTO MONÓTONO E HISTERÉTICO

Diferentes tipos de curvas se pueden utilizar para representar la relación esfuerzo - deformación de la mampostería (parabólica, multilínea, exponencial, etc.). En este caso se escogió una curva exponencial¹² para definir el comportamiento a compresión (24), mientras que se optó por una curva trilineal¹⁷ para la tensión y el cortante² (Figura 5). Para el caso de compresión axial solamente tres parámetros son necesarios para definir toda la curva: la rigidez inicial, la resistencia máxima y la deformación última

$$\frac{\sigma}{\sigma_c} = \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_c} \right) \exp \left(1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_c} \right) \quad (24)$$

donde σ_c y ε_c son la resistencia a compresión y la deformación, a la cual se obtiene la resistencia, respectivamente. La ventaja de este modelo es que para definir la curva completa esfuerzo-deformación únicamente se necesita la rigidez inicial del material E_0 y la resistencia a compresión. La deformación ε_c se obtiene mediante

$$\varepsilon_c = \left(\frac{\sigma_c}{E_0} \right) \exp(1) \quad (25)$$

Sustituyendo la ecuación (25) en la (24), la curva esfuerzo-deformación se puede describir del modo siguiente

$$\sigma = E_0 \varepsilon \exp\left(-\frac{\varepsilon}{\varepsilon_c}\right) \tag{26}$$

mientras que la rigidez tangente E_t se obtiene con

$$E_t = \left(\frac{\sigma_c}{\varepsilon_c}\right) \left(1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_c}\right) \exp\left(1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_c}\right) = E_0 \left(1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_c}\right) \exp\left(-\frac{\varepsilon}{\varepsilon_c}\right) \tag{27}$$

En el caso de la tensión son necesarios tres parámetros: la resistencia máxima, la resistencia residual y la constante $N(N \geq 1)$, que define la pendiente de ablandamiento por tensión. Para el cortante se considera un comportamiento simétrico, por lo que se deben definir cinco parámetros: la rigidez inicial G y la de ablandamiento G_r , la resistencia máxima τ y la residual τ_r y la deformación última. Estas curvas son usadas cuando el cortante se considera desacoplado de la carga axial. En algunos casos este desacoplamiento no representa el comportamiento real de la mampostería, por lo que se debe considerar un criterio de falla tipo Mohr-Coulomb¹³, en el cual el comportamiento a cortante de la mampostería es elastoplástico y axialmente dependiente

$$\tau = c - \sigma \tan(\varphi) \tag{28}$$

donde c es la cohesión, σ el esfuerzo axial y φ el ángulo de fricción interna. En este caso se deben definir cuatro parámetros: rigidez inicial, cohesión, ángulo de fricción interna y deformación última.

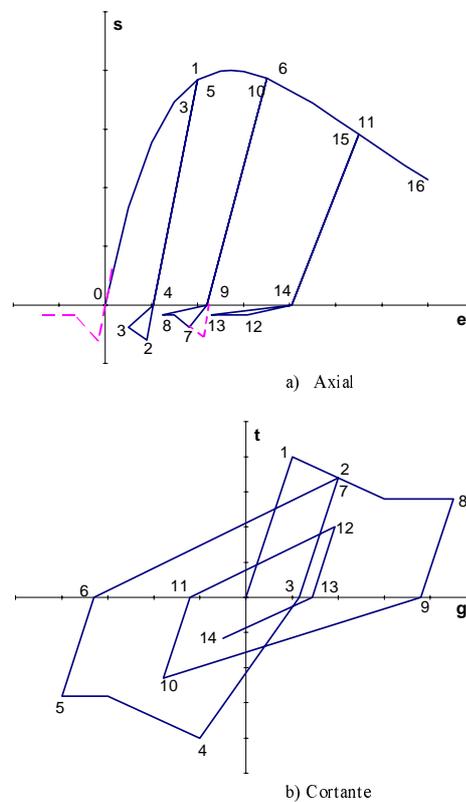


Figura 5. Curvas esfuerzo-deformación

El comportamiento cíclico de la mampostería se define mediante un modelo fenomenológico simplificado, basado en pruebas de laboratorio existentes en la literatura^{10,12,16}. Se deben definir elementos rígidos que tengan un tamaño similar al de los especímenes utilizados en las pruebas de laboratorio, para minimizar los problemas de efectos de escala.

La respuesta histerética del material es la mostrada en la Figura 5. El comportamiento axial de la mampostería considera que el esqueleto de la curva a compresión es exponencial (26) y que la rigidez de descarga E_r es

$$\begin{cases} E_r = E_0 & \text{si } \varepsilon \leq \varepsilon_c \\ E_r = E_0 \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_c}\right)^\alpha & \text{si } \varepsilon > \varepsilon_c \end{cases} \quad (29)$$

De este modo se considera que una vez que se ha alcanzado la máxima resistencia, hay degradación de la rigidez de descarga, la cual es proporcional a la máxima deformación plástica alcanzada durante la carga y depende del exponente α . Para el caso de tensión, una vez que se alcanza la resistencia de la mampostería, se presenta una pérdida de rigidez y de resistencia (apertura de la grieta). Cuando se descarga el elemento a tensión, se recupera totalmente la deformación por tensión, ya que se considera que la grieta, causada por tensión, se cierra una vez que se ha descargado el elemento.

Por otra parte, en el cortante se utiliza un modelo Takeda modificado, representado con una curva trilineal simétrica². Como en el caso del comportamiento axial, la degradación de la rigidez de descarga G_r depende principalmente de la máxima deformación plástica ocurrida durante la historia de carga y comienza después de haber alcanzado la máxima resistencia, así como también depende en este caso del exponente β .

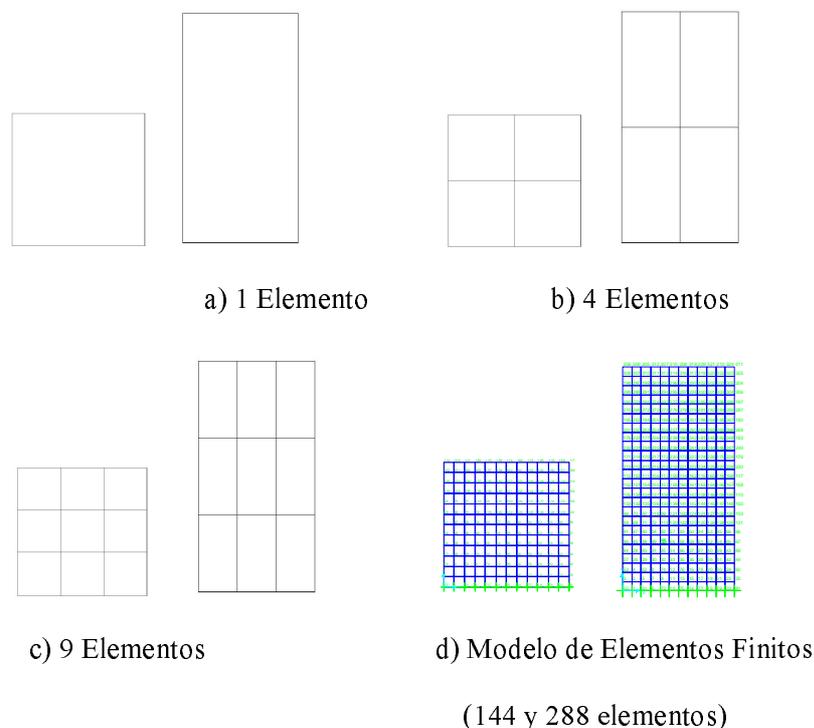


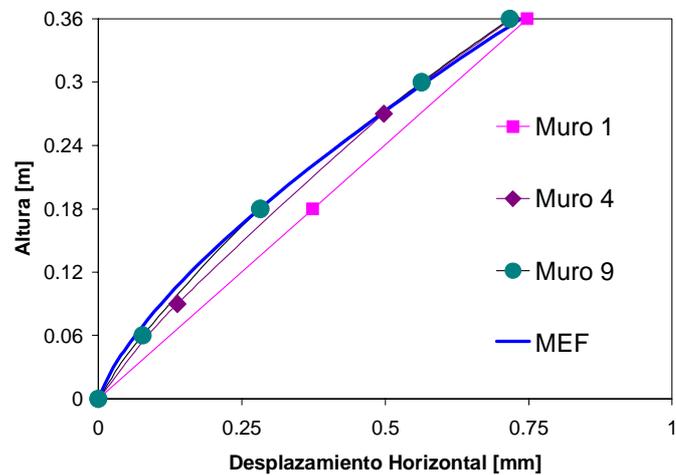
Figura 6. Muros elásticos

VALIDACIÓN DEL MODELO PROPUESTO

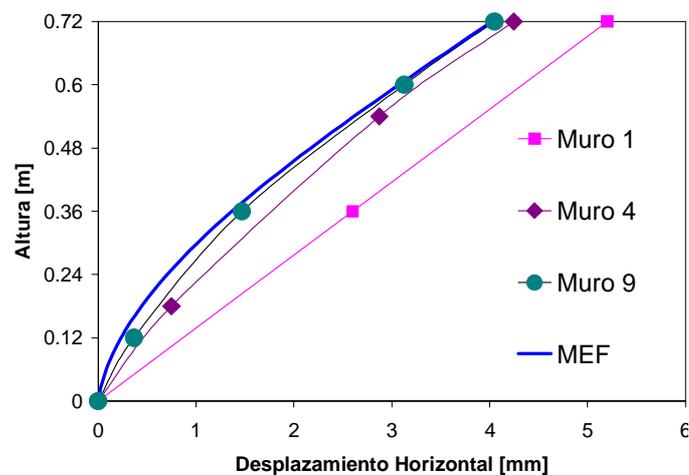
Respuesta elástica-lineal

Se tomaron para los ensayos dos muros de mampostería ($E = 942 \text{ MPa}$, $\nu = 0,2$, $m = 1750 \text{ kg/m}^3$) con relaciones de esbeltez iguales a 1 y 2, con la finalidad de observar la influencia de las deformaciones por cortante. Se propusieron tres discretizaciones diferentes para el modelo de elementos rígidos y se compararon los resultados con un modelo de elementos finitos de 144 y 288 elementos (Figura 6).

La Figura 7 presenta la deformada de los dos muros, cuando se aplica una fuerza horizontal en el extremo superior. Para ambos casos, cuando se tiene un solo elemento, se tienen los mayores errores, mientras que con cuatro elementos se obtienen resultados similares al de elementos finitos.



a) Muro Cuadrado



b) Muro Rectangular

Figura 7. Deformaciones de los muros elásticos

Por otro lado la Tabla I presenta los dos primeros periodos de vibración de los muros. Para ambas relaciones el primer modo corresponde a una flexión lateral, mientras que el segundo es vertical. Se observa una buena aproximación con mallas de cuatro y nueve elementos para ambos casos.

Estos resultados hacen ver que para tomar en consideración los efectos del cortante es necesario tener una discretización de al menos cuatro elementos (dos horizontales y dos verticales); una discretización menor permite tener en cuenta únicamente los efectos de la flexión.

Muro	Relación de esbeltez = 1				Relación de esbeltez = 2			
	Periodo 1 (s)	Error (%)	Periodo 2 (s)	Error (%)	Periodo 1 (s)	Error (%)	Periodo 2 (s)	Error (%)
MEF	0,004614	–	0,001958	–	0,01411	–	0,00392	–
1	0,005162	11,88	0,002137	9,14	0,01809	28,22	0,00427	9,00
4	0,004654	0,87	0,001976	0,92	0,01497	6,07	0,00395	0,74
9	0,004588	0,56	0,001948	0,51	0,01436	1,78	0,00389	0,69

Tabla I. Periodos de vibrar de los muros elásticos

ENSAYO DE CARGA MONÓTONA

Se realizó un modelo de elementos rígidos del arco, de la iglesia de San Ippolito Mártir en Atripalda, Italia. Los datos geométricos y mecánicos de dicho arco triunfal fueron tomados de las referencias 8 y 11 (Tabla II). Cabe hacer notar que se considera un comportamiento tipo Mohr–Coulomb.

γ (kN/m ³)	E (MPa)	G (MPa)	ν –
1,733	1100	518	0,071
σ_c (MPa)	σ_t (MPa)	c (MPa)	ϕ (°)
1,70	0,165	0,18	25

Tabla II. Arco triunfal. Propiedades mecánicas

La referencia 11 presenta el modelo de elementos finitos (998 elementos) de este arco triunfal y compara los resultados con un análisis al límite. Por otra parte, el modelo de elementos rígidos está formado por 72 elementos (216 grados de libertad). La Figura 8 presenta la curva fuerza-desplazamiento horizontal del arco, donde la fuerza está normalizada con respecto al peso de la estructura, la cual presenta una buena correlación entre los diversos métodos. El mecanismo de colapso se presenta en la Figura 9. Debido a que el modelo de los elementos rígidos es un modelo semicontinuo permite identificar en modo sencillo los puntos de posible agrietamiento.

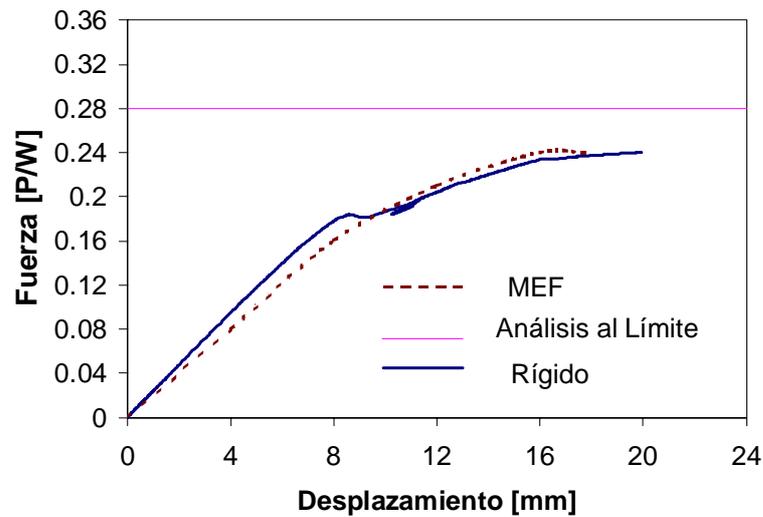


Figura 8. Curva fuerza-desplazamiento del arco triunfal de San Ippolisto Mártir

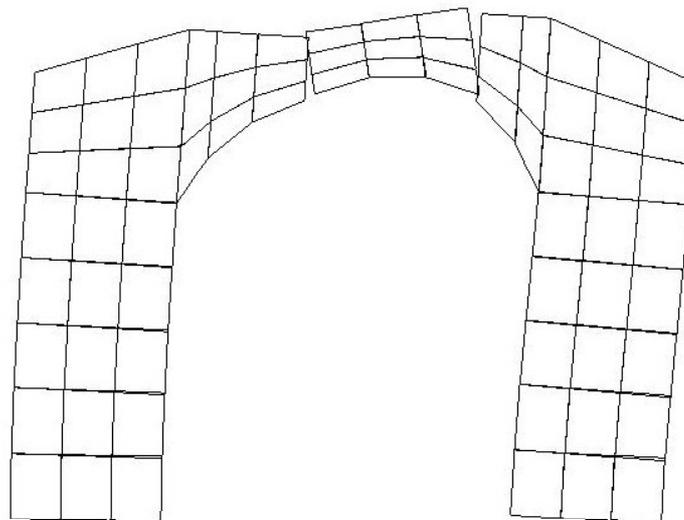
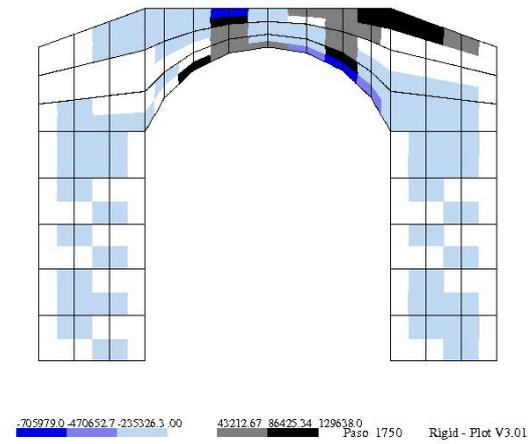
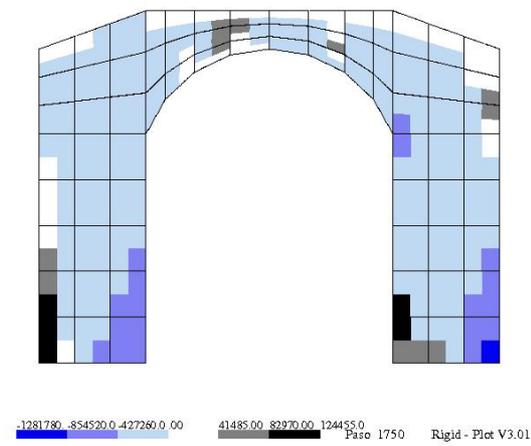


Figura 9. Mecanismos de colapso

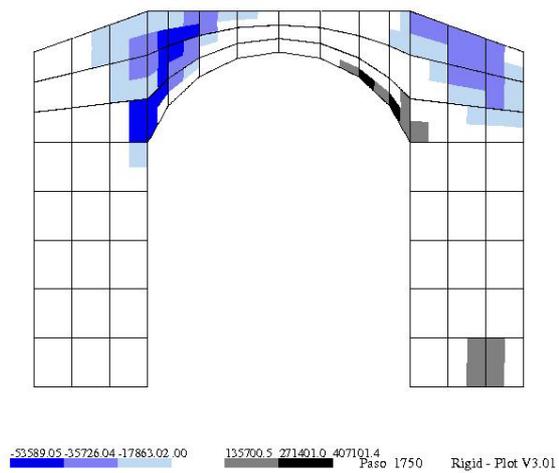
La Figura 10 presenta los esfuerzos axiales, tanto horizontales como verticales, para el instante de máxima deformación. Se observa un efecto de flexión en los muros laterales, así como también en el dintel del arco, debido a la carga horizontal. Se puede apreciar la redistribución de esfuerzos de tensión tanto en la base de los muros como en el dintel del arco. En particular, en el dintel se observa que los máximos esfuerzos de tensión se desplazan hacia los extremos, una vez que se ha abierto la grieta en esas zonas (Figura 9).



a) Esfuerzos Axiales Horizontales



b) Esfuerzos Axiales Verticales



c) Esfuerzos Cortantes

Figura 10. Esfuerzos en los elementos (en Pascales)

ENSAYO DE CARGA CÍCLICA

Tomazevic y Klemenc¹⁶ probaron en laboratorio diversos muros de mampostería con y sin confinamiento ante cargas cíclicas. En este estudio se utilizaron solamente las pruebas realizadas en muros sin confinamiento. Las características mecánicas de la mampostería se tomaron igual a lo que se indica en la referencia 16 (Tabla III). A los muros se les aplicó una compresión inicial constante de 0,28 MPa (Figura 11a); razón por la cual no se consideró un comportamiento Mohr–Coulomb. Asimismo se aplicó una carga horizontal en su parte superior. El modelo de elementos rígidos se realizó únicamente con ocho elementos (24 grados de libertad) (Figura 11b).

γ (kN/m ³)	E (MPa)	G (MPa)	G_r (MPa)	
1,750	942	185	-18	
σ_c (MPa)	σ_t (MPa)	σ_{tr} (MPa)	τ (MPa)	τ_r (MPa)
1,27	0,12	0,1	0,16	0,1

Tabla III. Muros de mampostería. Propiedades mecánicas

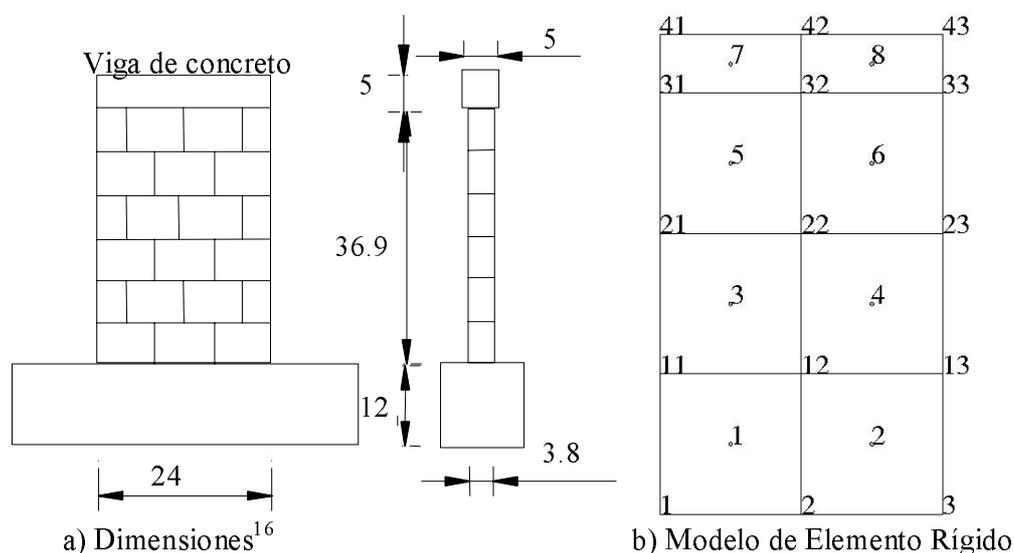


Figura 11. Muro probado ciclicamente

Se realizó una prueba monótona con el modelo de elementos rígidos, la cual se comparó con las envolventes de los resultados de las pruebas de laboratorio (líneas punteadas) y con la curva promedio de dichas envolventes (curva punteada gruesa) (Figura 12). La curva fuerza-desplazamiento presenta una buena correlación entre el modelo y las envolventes.

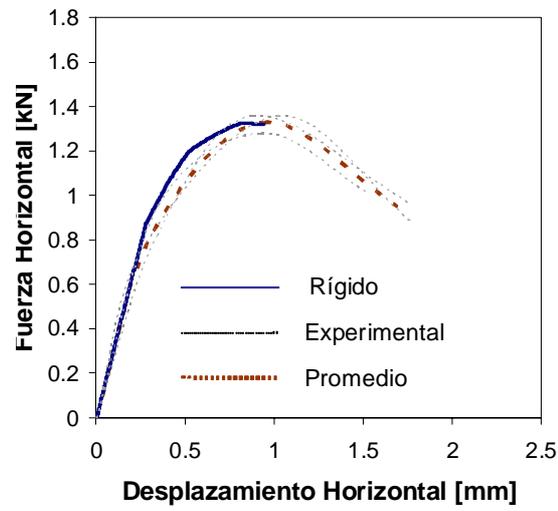
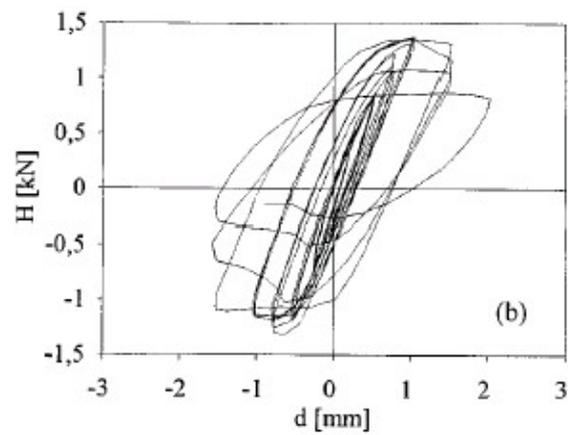
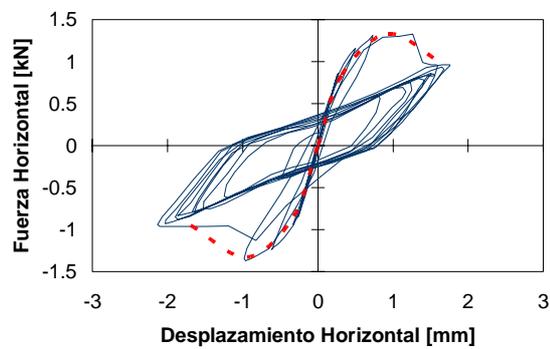


Figura 12. Curva fuerza-desplazamiento

a) Prueba Experimental¹⁶

b) Elementos Rígidos

Figura 13. Curva histerética

Se realizó también una prueba ante cargas cíclicas. La Figura 13 muestra la curva histerética (fuerza-desplazamiento) del modelo de elementos rígidos y se compara con la prueba experimental. Se observa que el modelo de elementos rígidos reproduce globalmente el comportamiento observado en las pruebas de laboratorio. Por otro lado se tiene una buena correlación entre el daño obtenido con el modelo de elementos rígidos (daño por cortante) y el observado en las pruebas de laboratorio (Figura 14), el cual es debido principalmente a cortante. El daño reportado en las pruebas de laboratorio son dos grietas inclinadas que cruzan el muro. El daño obtenido por los elementos rígidos muestra una concentración del daño por cortante al centro del elemento así como en los extremos.

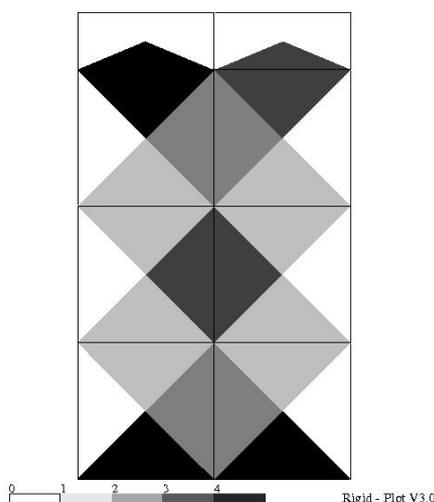


Figura 14. Daño por cortante

A pesar de esto existe una diferencia en los últimos ciclos de carga, cuando se ha acumulado el daño por cortante. Esto es debido, principalmente, a que el comportamiento histerético asignado a los puntos de conexión por cortante sigue una ley tipo Takeda modificada². La utilización de este tipo de ley permite describir en forma global el comportamiento a cortante de la mampostería, dando resultados muy parecidos a los experimentales en cuanto a los esfuerzos y deformaciones máximas. Permite también definir un ablandamiento o un endurecimiento por deformación, según sea el caso.

Para el comportamiento histerético este tipo de ley permite definir un daño en cada uno de los ciclos, modificando la pendiente de descarga. Sin embargo, este modelo no es aplicable a pérdidas de resistencia, después de que se ha alcanzado la resistencia residual τ_r . El ejemplo de este trabajo presenta una degradación de la resistencia en cada uno de los ciclos, haciéndolos cada vez más estrechos, por lo que, debido a las limitaciones de la ley utilizada para el cortante esta no representa correctamente los últimos ciclos de carga. Sin embargo, cabe recordar que el modelo propuesto es un modelo simplificado para modelar grandes estructuras de mampostería, en el que el objetivo principal es reproducir el comportamiento global de la mampostería. Es decir, conocer su resistencia, deformación última y fundamentalmente encontrar el patrón de daño que sufrirá dicha estructura.

CONCLUSIONES

Se presenta el método de los elementos rígidos para analizar estructuras de mampostería. Una ventaja que presenta este método en comparación con otros, que también utilizan una formulación de elementos rígidos, es que la formulación propuesta toma en cuenta una ley histerética degradante con la que se representa el comportamiento frágil de la mampostería.

Los ejemplos numéricos muestran que el modelo aquí presentado proporciona resultados acordes con otros métodos numéricos de análisis y con la evidencia experimental. Se puede utilizar tanto para un análisis elástico-lineal como para un análisis estático o dinámico no lineal. Estos ejemplos también muestran que los resultados numéricos son muy parecidos a lo del método de elementos finitos, pero a diferencia de éstos la discretización se realiza con menos elementos. Esto conlleva tener menos grados de libertad, lo que nos permite realizar análisis en menor tiempo, tanto computacional como de preparación de datos e interpretación de resultados, lo cual es importante cuando se realizan estudios paramétricos dinámicos.

Otra de las ventajas de la formulación de elementos rígidos propuesta en comparación con el método de los elementos finitos es la definición del criterio de falla de la mampostería. En los elementos finitos se necesita la definición del comportamiento constitutivo del material basado en la mecánica de medio continuo, en la que se tiene un comportamiento acoplado del tensor de esfuerzos y deformaciones. En los elementos rígidos la definición de las características del material es proporcionada mediante puntos de conexión desacoplados entre sí, lo que permite una definición sencilla de las características histeréticas de cada uno de los puntos de conexión. Desde el punto de vista mecánico el modelo del material propuesto reproduce en forma satisfactoria el comportamiento dinámico de la mampostería, mientras que desde el punto de vista computacional reduce el tiempo de análisis, lo que permite estudiar en forma no lineal y dinámica estructuras completas de mampostería.

REFERENCIAS

- 1 V. Bertero, "Innovative approaches to earthquake engineering", Cap. 1, "*Innovative Approaches to Earthquake Engineering*", Oliveto (Ed.), WIT Press, pp. 1–54, (2002).
- 2 G. Boffi y S. Casolo, "Non-linear dynamic analyses of masonry arches", Workshop on Seismic Performance of Monuments, "Monument-98", Lisboa, Portugal, pp. 99–108, (1998).
- 3 S. Casolo, "A three-dimensional model for vulnerability analysis of slender medieval masonry towers", *Journal of Earthquake Engineering*, Vol. 2, N° 4, pp. 487–512, (1998).
- 4 S. Casolo, "Modelling the out-of-plane seismic behaviour of masonry walls by rigid elements", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 29, N° 12, pp. 1797–1813, (2000).
- 5 S. Casolo, "Modelling in-plane micro-structure of masonry walls by rigid elements", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 41, pp. 3625–3641, (2004).
- 6 S. Casolo y F. Peña. "Modelling micro-structure aspects of masonry walls by a simplified approach", "*Structural studies, repairs and maintenance of heritage architecture VIII*", C.A. Brebbia (Ed.), WIT Press, pp. 337–346, (2003).

- 7 S. Casolo y F. Peña. "A specific rigid element approach for in-plane dynamic analyses of masonry structures", *III Congreso Internacional sobre Métodos Numéricos en Ingeniería y Ciencias Aplicadas*, Monterrey, México, (2004).
- 8 A. Giordano, E. Mele y A. de Luca, "Assessment of the seismic capacity of triumphal arches", *Historical Constructions*, Lourenço y Roca (Eds.), Guimaraes, pp. 983–992, (2001).
- 9 T. Kawai, "New discrete models and their application to seismic response analysis of structures", *Nuclear Engineering and Design*, Vol. **48**, pp. 207–229, (1978).
- 10 G. Magenes y G. Calvi, "In-plane seismic response of brick masonry walls", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. **26**, pp. 1091–1112, (1997).
- 11 E. Mele, D. Gatto y A. de Luca, "Structural analysis of basilica churches: a case study", *Historical Constructions*, Lourenço y Roca (Eds.), Guimaraes, pp. 729–738, (2001).
- 12 K. Naraine y S. Sinha, "Cyclic behavior of brick masonry under biaxial compression", *Journal of Structural Engineering*, Vol. **117**, N° 5, pp. 1336–1355, (1991).
- 13 F. Peña, "Rigid element model for dynamic analysis of in-plane masonry structures", Tesis doctoral, Politecnico di Milano, Italia, (2001).
- 14 V. Petrini y S. Casolo, "Vulnerability of historical and monumental buildings: significant ground motion parameters and evaluation of the seismic performance", *Innovative approaches to earthquake engineering*, Cap. 4, Oliveto (Ed.), WIT Press, pp. 203–228, (2002).
- 15 Y. Toi y S. Yoshida, "Numerical simulation of nonlinear behaviors of two-dimensional block structures", *Computers and Structures*, Vol. **41**, N° 4, pp. 593–603, (1991).
- 16 M. Tomazevic e I. Klemenc, "Seismic behaviour of confined masonry walls", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. **26**, pp. 1059–1071, (1997).
- 17 Y. Zhuge, D. Thambiratnam y J. Corderoy, "Nonlinear dynamic analysis of unreinforced masonry", *Journal of Structural Engineering*, Vol. **124**, N° 3, pp. 270–277, (1998).