

Plasticidad y fractura en estructuras aporticadas

J. Flórez López

Monografías de Ingeniería Sísmica

Editor A. H. Barbat

Plasticidad y fractura en estructuras aporticadas

J. Flórez López

Profesor invitado

Departamento de Mecánica Estructural y Construcciones Industriales
Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales
Universidad Politécnica de Madrid

Profesor Titular

Departamento de Estructuras, Facultad de Ingeniería
Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela

CENTRO INTERNACIONAL DE MÉTODOS NUMÉRICOS EN INGENIERÍA
Edificio C1, Campus Norte UPC
C/ Gran Capitán, s/n
08034 Barcelona, España.

MONOGRAFÍAS DE INGENIERÍA SÍSMICA
Editor A.H. Barbat

ISSN: 1134-3249

PLASTICIDAD Y FRACTURA EN ESTRUCTURAS APORTICADAS
Monografía CIMNE IS-35
© El autor

ISBN: 84-89925-46-1
Depósito Legal: B-26865-99

IMPRESO EN ESPAÑA - PRINTED IN SPAIN

INDICE

1. Introducción	1
2. Cinemática de pórticos planos	6
2.1 Representación del movimiento.	
2.2 Desplazamientos impuestos.	
2.3 Deformaciones generalizadas.	
2.4 Ecuaciones cinemáticas.	
2.5 Resumen	
3. Dinámica de pórticos planos	13
3.1 Esfuerzos generalizados.	
3.2 Fuerzas externas sobre los nudos.	
3.3 Fuerzas de inercia.	
3.4 Ecuaciones de equilibrio dinámico.	
3.5 Resumen	
4. Pórticos elásticos lineales y no lineales	18
4.1 Ley de comportamiento elástica lineal.	
4.2 Ley de comportamiento elástica no lineal.	
4.3 Análisis de pórticos elásticos lineales en el caso estático.	
4.4 Análisis de pórticos elásticos en el caso general: discretización en el tiempo	
4.5 Análisis de pórticos elásticos en el caso general: planteamiento del problema	
4.6 Análisis de pórticos elásticos en el caso general: resolución por el método de Newton	
4.7 Resumen	
5. Plasticidad uniaxial	27
5.1 Ley de estado para materiales elastoplásticos perfectos en el caso uniaxial.	
5.2. Ley de evolución y función de fluencia del modelo elastoplástico perfecto.	
5.3 Modelo elastoplástico en endurecimiento cinemático lineal.	
5.4 Modelo elastoplástico con endurecimiento cinemático no lineal.	
5.5 Resumen.	
6. Pórticos elastoplásticos	37
6.1 Proceso de plastificación en una viga simplemente apoyada.	
6.2 La rótula plástica.	
6.3 Ley de comportamiento elastoplástica perfecta para miembros de pórticos planos.	
6.4 Pórticos elastoplásticos con endurecimiento cinemático.	
6.5 Análisis de pórticos elastoplásticos.	
6.6 Resumen.	

7. Mecánica de la fractura frágil	47
7.1 Distribución de esfuerzos en los bordes de un agujero elíptico.	
7.2 El criterio de Griffith.	
7.3 Cálculo de la tasa de disipación de energía.	
7.4 La resistencia al agrietamiento.	
7.5 Propagación de fisuras por fatiga.	
7.6 Resumen	
8. Teoría del daño continuo	56
8.1 La variable de daño continuo	
8.2 Ley de estado en el caso uniaxial	
8.3 Ley de evolución del daño para materiales frágiles	
8.4 Leyes de evolución para materiales dúctiles	
8.5 Determinación experimental del daño.	
8.6 Daño unilateral	
8.7 Resumen	
9. Plasticidad y fractura en pórticos de acero	67
9.1 Daño en una rótula plástica	
9.2 Matriz de rigidez de un miembro elastoplástico dañado	
9.3 Función de fluencia de una rótula plástica con daño.	
9.4 Ley de evolución del daño en una rótula plástica.	
9.5 Ley de comportamiento para un elemento de acero.	
9.6 Resumen	
10. Plasticidad y fractura en pórticos de concreto armado	75
10.1 Criterio de Griffith en una rótula plástica.	
10.2 Resistencia al agrietamiento en un elemento estructural de concreto armado.	
10.3 Determinación indirecta de los parámetros característicos de la resistencia al agrietamiento.	
10.3 Función de fluencia de la rótula plástica.	
10.4 Modelos unilaterales	
10.5 Análisis estructural de estructuras aporticadas con daño	
10.6 Resumen	
11. Bibliografía	89
11.1 Bibliografía del capítulo 2	
11.2 Bibliografía del capítulo 3	
11.3 Bibliografía del capítulo 4	
11.4 Bibliografía del capítulo 5	
11.5 Bibliografía del capítulo 6	
11.6 Bibliografía del capítulo 7	
11.7 Bibliografía del capítulo 8	
11.8 Bibliografía del capítulo 9	
11.9 Bibliografía del capítulo 10	

1. Introducción.

La primera decisión que debe tomar un ingeniero cuando tiene que analizar una estructura es el modelo que empleará para describir su forma geométrica. Las posibilidades que ofrece la Ingeniería Estructural pueden ser agrupadas en cuatro categorías: la teoría de medios continuos sólidos, la teoría de placas y cáscaras, la teoría de vigas y arcos, y la teoría de póticos.

En el primer caso, la estructura es representada como un sólido tridimensional y los conceptos de esfuerzo y deformación son caracterizados por campos tensoriales que dependen de las tres coordenadas espaciales y del tiempo. El problema se plantea en términos de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales con respecto a estas cuatro variables. El análisis estructural se realiza empleando algún método numérico como por ejemplo el de los elementos finitos o el de los elementos de contorno. En la Ingeniería Civil, esta opción es empleada con cierta frecuencia para analizar estructuras que tienen formas geométricas relativamente simples tales como presas, túneles, macizos rocosos, etc. Esta no es, sin embargo, la opción más adecuada en numerosos casos de interés práctico. Considérese por ejemplo el edificio representado en la figura 1.1a. En la figura 1.1b se muestra un detalle de la malla por elementos finitos del edificio. Puede imaginarse fácilmente el enorme costo computacional que este análisis requiere. Si el problema es dinámico, geométricamente no lineal e inelástico, este costo es simplemente prohibitivo. El costo computacional del análisis tridimensional de estructuras tales como edificios, puentes, naves industriales, etc. no es su único inconveniente. Es probablemente más significativo el hecho de que la masa total de resultados obtenidos de esta manera es muy difícil de manejar y en su mayor parte superflua para propósitos prácticos.

La segunda opción es el uso de la teoría de placas y cáscaras. En este caso, el problema se plantea en términos de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales con respecto a dos variables espaciales y al tiempo. El costo computacional y la cantidad de resultados obtenidos disminuye significativamente con respecto a la teoría tridimensional

general. El número de aplicaciones prácticas realizadas con este modelo es probablemente muy superior al del caso anterior. Aun así, la teoría de placas se emplea muy raramente para analizar estructuras como el edificio mostrado en la figura 1.1, por las mismas razones expuestas anteriormente.

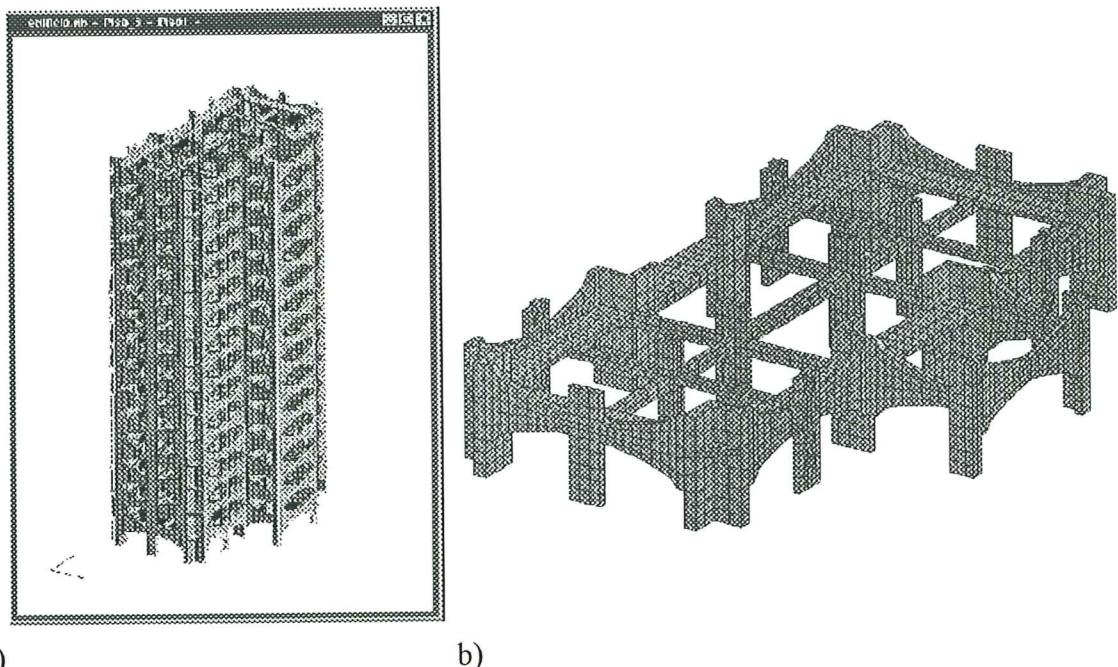


Figura 1.1 a) Edificio considerado como una estructura tridimensional. b) Detalle de la malla de elementos finitos.

La tercera posibilidad es la teoría de vigas. Esta está basada en la hipótesis de que la sección transversal de la viga se desplaza como un cuerpo rígido. El problema se plantea mediante ecuaciones diferenciales que dependen de una variable espacial y del tiempo. La teoría de vigas aun requiere de la utilización del método de los elementos finitos para su resolución numérica.

La última de las alternativas planteadas es la teoría de pórticos en la que desaparecen las derivadas espaciales y el problema consiste en resolver un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias en el tiempo únicamente. La teoría de pórticos y la teoría de vigas resuelta por elementos finitos coinciden en el caso elástico lineal. En el caso inelástico ambas teorías difieren significativamente. La teoría de pórticos inelásticos esta basada en el concepto de rótula plástica mientras que en la teoría de vigas se presentan zonas plásticas de longitudes no nulas. Estas zonas se determinan imponiendo siempre la hipótesis de movimiento de cuerpo rígido para las secciones transversales. Ambas teorías permiten el análisis simplificado de estructuras bastante complejas. Por ejemplo, en la figura 1.2 se muestra el resultado del análisis inelástico de un edificio sometido a solicitudes sísmicas planteado mediante la teoría de pórticos.

El número de aplicaciones prácticas utilizando la teoría de pórticos es muy superior al de la teoría de vigas. Los análisis inelásticos mediante la teoría de vigas requieren no sólo de una discretización del eje neutro en elementos finitos, sino también de la discretización de las secciones transversales en segmentos o fibras para una adecuada representación de las zonas inelásticas. El numero de elementos necesarios

para el análisis de una estructura aporticada mediante la teoría de vigas es muy elevado cuando se compara con los empleados al utilizar la teoría de pórticos. En este último caso se requiere casi siempre de un solo elemento por miembro del pórtico. La teoría de pórticos no carece de inconvenientes y su rango de aplicación es limitado. Es sin embargo la más simple de todas las opciones en la Ingeniería Estructural y esta sea posiblemente la razón de su éxito.

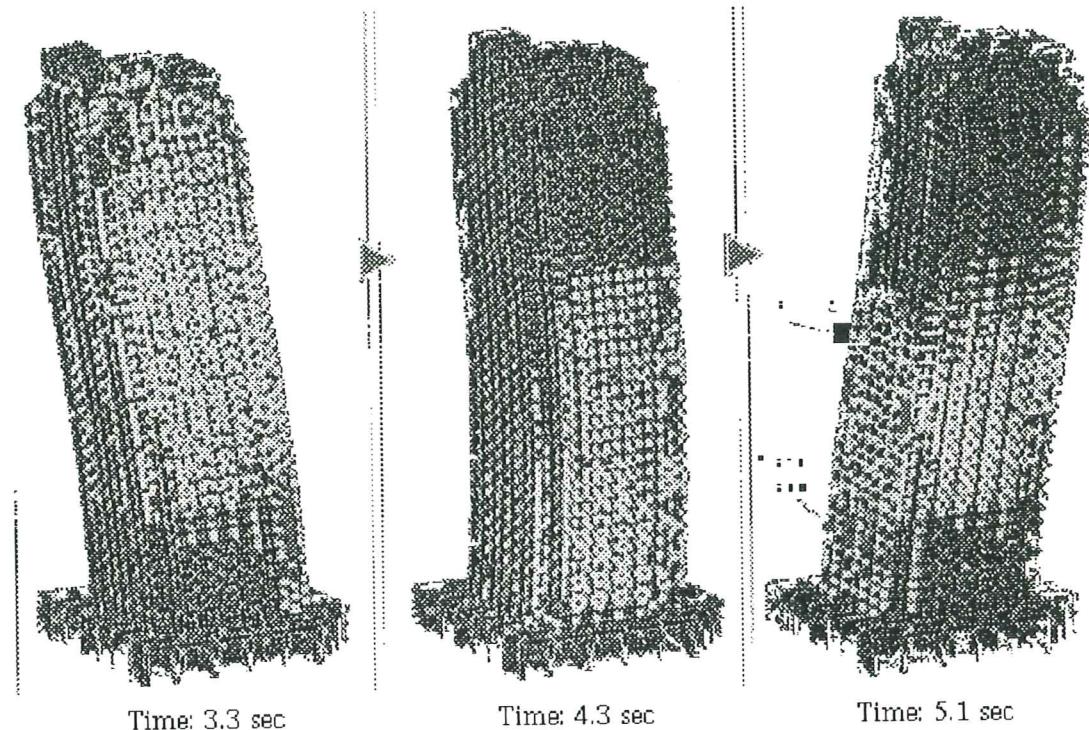


Figura 1.2 Resultados de un análisis estructural mediante la teoría de pórticos realizado con el programa Hyperdynamics. Fuente: Pagina Web de Takenaka.inc

En esta monografía se desea presentar una teoría general de pórticos planos, que incluye desde el modelo elástico lineal tradicional hasta una mecánica de la fractura para estructuras aporticadas. A diferencia de los textos tradicionales de la teoría de estructuras, se hace énfasis en los aspectos no lineales e inelásticos del problema, específicamente en el problema del daño y fractura en estructuras aporticadas. El enfoque adoptado en este texto difiere considerablemente de los métodos clásicos, desarrollados esencialmente en Universidades Estadounidenses (Universidad de California en Berkeley, Universidad de Illinois, Universidad de Stanford, Universidad del Estado de Nueva York en Buffalo y otras). Estos se basan en el concepto de índice de daño, para elementos de concreto armado, o en la regla de Miner, para elementos de acero.

El enfoque utilizado en esta monografía está basado en la mecánica de la fractura y en la teoría del daño continuo. Estas teorías fueron desarrolladas en el marco de la mecánica de medios continuos sólidos. Los trabajos de Griffith desarrollados en el Reino Unido y publicados en 1921 y en 1924 marcaron el comienzo de la mecánica de la fractura, aunque su desarrollo pleno se realizó en la segunda mitad del siglo XX. Fue

Irwin, en los Estados Unidos, quien retomó los conceptos de Griffith treinta años más tarde y formuló las bases de la mecánica de la fractura moderna. La teoría del daño continuo se inició en la antigua Unión Soviética con los trabajos de Kachanov y Rabotnov a finales de los cincuenta y durante la década de los sesenta. Durante los setenta esta teoría tuvo un desarrollo explosivo en Europa Occidental esencialmente. Son dignos de mención los trabajos de la escuela francesa, iniciada por Lemaitre en esa década. Hacia finales de los años ochenta y principios de los noventa aparecieron las primeras aplicaciones de la Teoría del daño continuo en combinación con la teoría de vigas y pensando en aplicaciones específicas de Ingeniería Civil. Deben mencionarse los trabajos desarrollados en el Laboratorio de Mecánica y Tecnología de París, en la Universidad Politécnica de Cataluña y en la Universidad de California en Berkeley. La adaptación de la mecánica de la fractura y del daño continuo a la teoría de pórticos se inició en la Universidad de Los Andes en Venezuela, a principio de los noventa.

La mecánica de la fractura para estructuras aporticadas es una rama de la teoría de estructuras en pleno desarrollo actualmente. Hay un pequeño número de grupos de investigación, además del mencionado anteriormente, participando activamente en su desarrollo, esencialmente en España (Universidad Politécnica de Madrid), en Brasil y en Italia. Por otra parte, esta es, hasta donde el autor conoce, la primera monografía dedicada a la mecánica de la fractura para pórticos.

Esta monografía está compuesta por nueve capítulos más esta introducción. En la primera parte, (capítulos 2, 3 y 4) se presentan los pórticos elásticos lineales y no lineales, estáticos y dinámicos. El enfoque utilizado también difiere del empleado en los libros tradicionales de la teoría de estructuras. En este texto, el análisis de pórticos elásticos se presenta siguiendo el esquema de la teoría de la elasticidad. En otras palabras, el estado de un pórtico se caracteriza en términos de deformaciones y esfuerzos generalizados, y las ecuaciones del problema se agrupan en ecuaciones cinemáticas, ecuaciones de equilibrio dinámico y leyes de comportamiento.

En la segunda parte (capítulos 5 y 6) se presenta la teoría de pórticos elastoplásticos. Por último (capítulos 7, 8, 9 y 10) se describe la mecánica de la fractura y la teoría del daño, primero en el marco de la mecánica de los medios continuos y después para pórticos planos.

En este texto se hace un énfasis especial en el aspecto del modelado estructural. El cálculo numérico es apenas esbozado sin entrar en detalles. Este desequilibrio es deliberado ya que los aspectos numéricos de la mecánica de la fractura para pórticos no difieren de las técnicas que se emplean comúnmente en la resolución de problema de elastoplásticidad por elementos finitos. Estos métodos han sido descritos extensivamente en los libros de teoría de la plasticidad y de elementos finitos. Por el contrario, el aspecto del modelado de estructuras aporticadas utilizando los conceptos de la mecánica de la fractura no aparece ni en los libros de estructuras, ni en los de mecánica de la fractura, ni en los textos de métodos numéricos en Ingeniería Estructural.

El autor desea manifestar su sincero agradecimiento al Profesor Enrique Alarcón y a los demás miembros del Departamento de Mecánica Estructural y Construcciones Industriales de la Escuela de Ingenieros Industriales de la Universidad Politécnica de Madrid por la hospitalidad y el apoyo recibidos durante el año sabático que el autor pasó durante el periodo 1998-1999 en dicho Departamento. Esta monografía ha sido escrita sobre la base de las notas del curso que el autor dictó durante ese periodo en el programa del Doctorado en Métodos de Cálculo en Ingeniería Sísmica de la UPM. El autor

también desea agradecer al Profesor Alex Barbat Editor de la serie de Monografías en Ingeniería Sísmica publicadas por el CIMNE de la Universidad Politécnica de Cataluña por haber sugerido la idea de esta monografía y posteriormente haber aceptado el manuscrito final. Finalmente, la estadía del autor en la UPM fue posible gracias a becas del Ministerio Español de Educación y Cultura y de la Universidad de Los Andes en Venezuela.

2. Cinemática de pórticos planos

En este capítulo se estudia el movimiento de los pórticos planos independientemente de las causas que lo producen. Este es el objetivo de la cinemática. Para describir la cinemática de un cuerpo deformable cualquiera, es necesario introducir dos conceptos diferentes: desplazamiento y deformación. El primero permite representar matemáticamente el movimiento de la estructura, el segundo su cambio de forma. La cinemática del sólido se describe por completo al deducir las relaciones existentes entre ambos conceptos.

2.1 Representación del movimiento.

Considérese una estructura aporticada plana compuesta por m miembros estructurales conectados entre sí por n nodos tal y como se indica en la figura 2.1. Se desea estudiar el movimiento de la estructura durante el intervalo de tiempo $[0, T]$. Para definir la posición de cada uno de los nudos del pórtico se introduce un par de ejes coordenados ortogonales X-Y. Este sistema coordenado permanece inmóvil durante el movimiento de la estructura. La configuración del pórtico en el instante cero se supone conocida y será denominada "configuración inicial". En otras palabras, se conocen las coordenadas que definen la posición inicial en el espacio de los n nudos de la estructura. Para cualquier instante otro instante, la configuración de la estructura no es en general conocida y se denominará "configuración deformada".

Se definen ahora las siguientes variables (en lo que sigue el símbolo $\{X\}$ indica una matriz columna y $\{X\}^t$ su traspuesta):

- a) Los desplazamientos generalizados de un nudo i : $\{u\}_i^t = (u_1, u_2, u_3)$, donde u_1, u_2 y u_3 indican el desplazamiento del nudo en la dirección X, en la dirección Y y la rotación del nudo con respecto a su posición en la configuración inicial (ver figura 2.1).
- b) La matriz de desplazamientos generalizados de un elemento b $\{q\}_b$ entre los nudos i y j , que está compuesta por los desplazamientos de ambos nudos: $\{q\}_b^t = (\{u\}_i^t, \{u\}_j^t) = (q_1, q_2, \dots, q_6)$. Esta variable caracteriza por lo tanto el movimiento de la barra.

c) La matriz de desplazamientos generalizados de la estructura $\{U\}$, que se compone de los desplazamientos de todos y cada uno de los nudos del pórtico: $\{U\}^t = (\{u\}_1^t, \{u\}_2^t, \dots, \{u\}_n^t) = (U_1, U_2, \dots, U_{3n})$. Esta matriz define el movimiento de toda la estructura. Se usará el término “grados de libertad” para referirse a las posiciones 1, 2, ..., 3n de la matriz de desplazamientos de la estructura.

Las tres variables definidas son equivalentes y representan un concepto similar a tres niveles diferentes: el nudo, el miembro y la estructura.

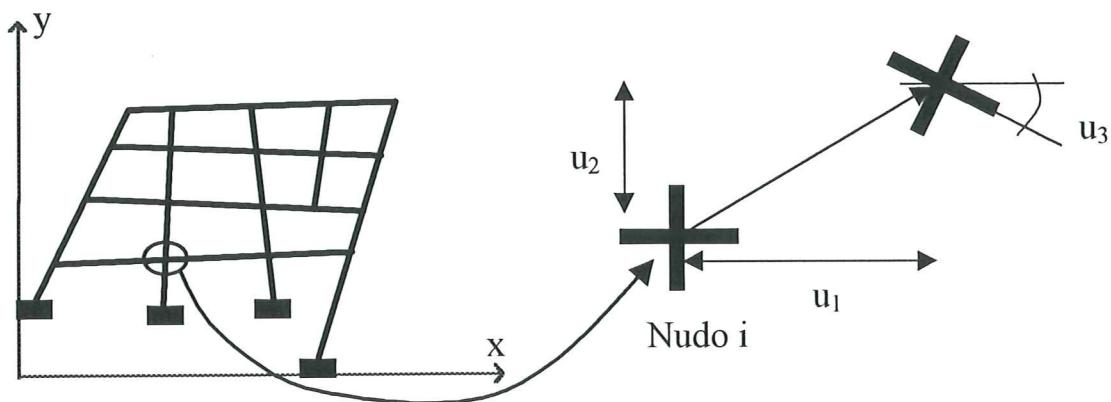


Figura 2.1 Representación de un pórtico y desplazamientos generalizados de un nudo "i" del mismo.

2.2 Desplazamientos impuestos.

A fin de asegurar la estabilidad del pórtico, algunos de sus desplazamientos deben ser restringidos. Esto significa que sus valores durante el intervalo de tiempo $[0, T]$ son conocidos e impuestos por el analista. El conjunto de grados de libertad restringidos de la estructura se incluyen en el conjunto N_u . Este conjunto será denominado conjunto de “apoyos” del pórtico. En otras palabras:

$$U_k = U_k^d(t) \text{ para } k \in N_u \quad (2.1)$$

Donde $U_k^d(t)$ son funciones conocidas del tiempo. U_k es por supuesto el k ésimo elemento de la matriz de desplazamientos del pórtico. En numerosos casos prácticos, las funciones $U_k^d(t)$ son nulas. A modo de ejemplo, en la figura 2.2 se muestra un pórtico plano de seis nudos. Esta estructura tiene por lo tanto dieciocho grados de libertad de los cuales cuatro han sido restringidos, tal y como se indica en la figura 2.1 empleando los símbolos convencionales de la Resistencia de Materiales. Teniendo en cuenta la numeración empleada, el conjunto N_u esta compuesto por los grados de libertad 1, 2, 10 y 11.

Alternativamente, pueden definirse las velocidades o aceleraciones en los apoyos. El conocimiento de alguna de estas variables más las condiciones iniciales en el instante $t = 0$ permiten también determinar la historia de desplazamientos de los apoyos mediante su integración en el tiempo. El uso de las aceleraciones en lugar de los desplazamientos en los apoyos es típico de los problemas de Ingeniería Sísmica puesto que son los primeros y no los desplazamientos los que son medidos durante los terremotos.

En los problemas estructurales denominados de “contacto” los desplazamientos impuestos no se definen mediante igualdades como en el caso descrito anteriormente. En

su lugar, se emplean inecuaciones en lugar de las ecuaciones (2.1). Este caso no será considerado en esta monografía.

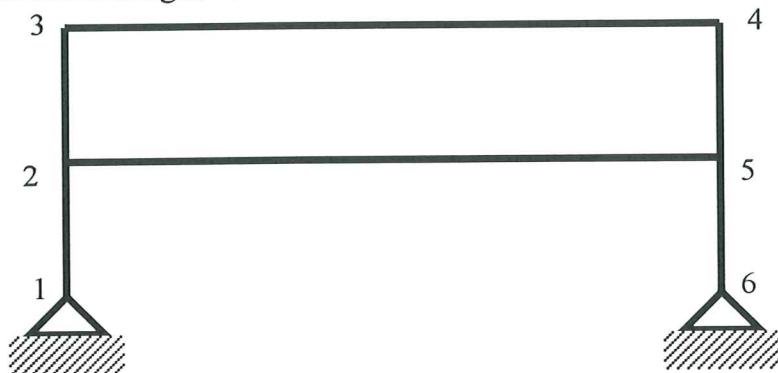


Figura 2.2 Ejemplo de pórtico plano

2.3 Deformaciones generalizadas.

Ninguna de las matrices de desplazamientos generalizados definidas anteriormente permite caracterizar el cambio de forma del miembro o de la estructura. Por ejemplo un movimiento de cuerpo rígido del miembro b puede corresponder a una matriz de desplazamientos $\{q\}_b$ no nula.

Para medir el cambio de forma se define una nueva variable: la matriz de deformaciones generalizadas del miembro b. Para un elemento entre los nudos i y j, esta variable se expresa como: $\{\Phi\}_b = (\phi_i, \phi_j, \delta)$. Donde ϕ_i y ϕ_j representan las rotaciones de la tangente al miembro en los extremos i y j con respecto a la cuerda i-j y δ es el alargamiento de la cuerda con respecto a la configuración inicial (ver figura 2.3).

Puede constatarse fácilmente que en el caso particular de un movimiento de cuerpo rígido de un miembro, la matriz de deformaciones generalizadas es nula y viceversa. Esta variable es similar en significado al tensor de deformaciones que se utiliza en la mecánica de los medios continuos. Al igual que en esta teoría, la medida de deformación utilizada no es la única y pueden introducirse otras variables equivalentes que representen el mismo concepto.

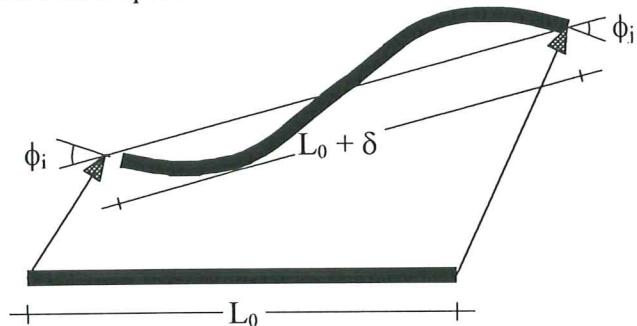


Figura 2.3 Deformaciones generalizadas del miembro entre los nudos i y j.

2.4 Ecuaciones cinemáticas.

Las ecuaciones cinemáticas relacionan las deformaciones con los desplazamientos generalizados. A fin de obtener estas expresiones, supóngase que un miembro de la estructura se somete a un incremento diferencial dq_1 del desplazamiento en la dirección

X del nudo i, mientras que las demás componentes de la matriz de desplazamientos generalizados del miembro permanecen nulos (ver figura 2.4).

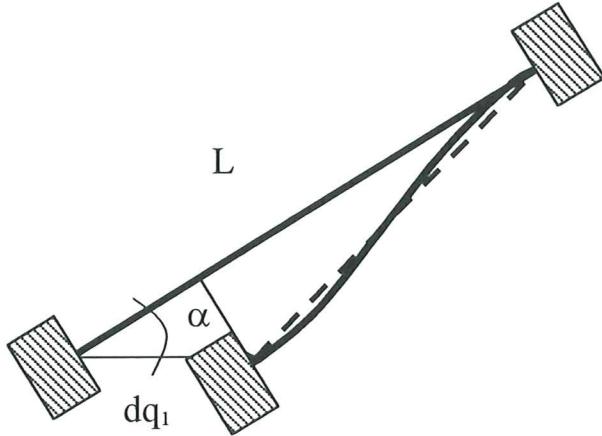


Figura 2.4 Deformaciones generalizadas en el miembro "i-j" producidas por un incremento infinitesimal dq_1 .

Este desplazamiento da lugar a incrementos en las deformaciones generalizadas de expresión:

$$d\phi_i = dq_1 \frac{\sin \alpha}{l}; \quad d\phi_j = dq_1 \frac{\sin \alpha}{l}; \quad d\delta = -dq_1 \cos \alpha \quad (2.2)$$

Donde l es la longitud de la cuerda i-j y α es el ángulo de la cuerda con respecto al eje X en la configuración (no necesariamente la inicial) alrededor de la cual se produce la perturbación. De la misma manera, un incremento diferencial dq_2 en la dirección Y del mismo nudo (ver figura 2.5a) da lugar a incrementos de las deformaciones generalizadas que se expresan de la manera siguiente:

$$d\phi_i = -dq_2 \frac{\cos \alpha}{l}; \quad d\phi_j = -dq_2 \frac{\cos \alpha}{l}; \quad d\delta = -dq_2 \sin \alpha \quad (2.3)$$

Por último, un incremento diferencial dq_3 de la rotación del nudo i (ver figura 2.5b) proporciona los siguientes incrementos de deformaciones generalizadas:

$$d\phi_i = dq_3; \quad d\phi_j = 0; \quad d\delta = 0 \quad (2.4)$$

De igual manera pueden obtenerse los incrementos de deformaciones que se producen al aplicar desplazamientos dq_4 , dq_5 o dq_6 en el nudo j. Al ser estas transformaciones infinitesimales es posible aplicar el principio de superposición. Por lo tanto, en el caso general en el que se producen desplazamientos en todos los grados de libertad del miembro simultáneamente, se obtiene:

$$\{d\Phi\} = [B_1(q)]\{dq\} \quad [B_1(q)] = \begin{bmatrix} \frac{\sin \alpha}{1} & -\frac{\cos \alpha}{1} & 1 & -\frac{\sin \alpha}{1} & \frac{\cos \alpha}{1} & 0 \\ \frac{\sin \alpha}{1} & -\frac{\cos \alpha}{1} & 0 & -\frac{\sin \alpha}{1} & \frac{\cos \alpha}{1} & 1 \\ -\cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

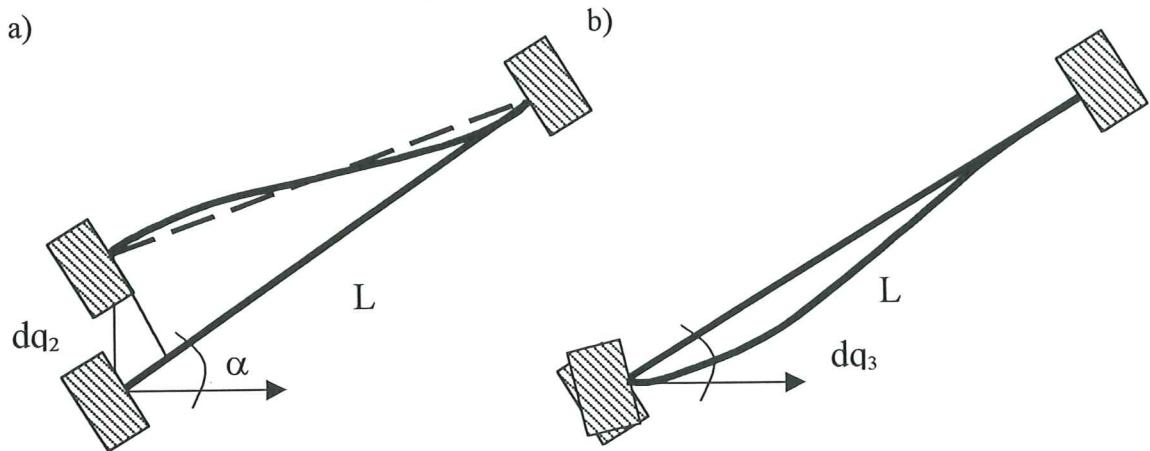


Figura 2.5 Deformaciones generalizadas en el miembro "i-j" producidas por incrementos infinitesimales dq_2 y dq_3 .

Donde $[B_l(q)]$ es denominada "matriz de transformación local". Puede constarse que en general $l = l(q)$ y $\alpha = \alpha(q)$ son funciones de los desplazamientos previos experimentados por el miembro, lo que justifica expresar la matriz de transformación como una función de los desplazamientos. Se ha supuesto, sin embargo, que las longitudes $l(q)$ no son significativamente diferentes de la longitud inicial l_0 .

De manera equivalente, también pueden relacionarse las deformaciones en una barra b con los desplazamientos de todos los nudos de la estructura. Esto se logra al introducir una matriz de transformación global $[B(q)]_b$ de la manera siguiente:

$$\{d\Phi\}_b = [B(q)]_b\{dU\} \quad (2.6)$$

$$[B(q)]_b = \begin{bmatrix} 0 \dots \frac{\sin \alpha}{1} & -\frac{\cos \alpha}{1} & 1 & \dots & -\frac{\sin \alpha}{1} & \frac{\cos \alpha}{1} & 0 \dots \\ 0 \dots \frac{\sin \alpha}{1} & -\frac{\cos \alpha}{1} & 0 & \dots & -\frac{\sin \alpha}{1} & \frac{\cos \alpha}{1} & 1 \dots \\ 0 \dots -\cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & \dots & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \dots \\ 1, \dots, 3i-2, & 3i-1, & 3i, \dots, 3j-2, & 3j-1, & 3j, \dots \end{bmatrix}$$

Puede observarse que la matriz de transformación global se obtiene al introducir columnas adicionales en la matriz de transformación del elemento. Esas columnas sólo contienen ceros y se incluyen en los lugares que no corresponden a los grados de libertad

del elemento. En otras palabras las únicas columnas de la matriz de transformación no nulas son las columnas 3i-2, 3i-1, 3i, 3j-2, 3j-1 y 3j.

Cuando el miembro experimenta una transformación desde la configuración inicial hasta una configuración deformada caracterizada por los desplazamientos generalizados $\{q\}$, pasa por un número infinito de configuraciones intermedias. Las ecuaciones cinemáticas se obtiene mediante la integración desde la configuración inicial hasta la configuración deformada final de (2.5) o de (2.6):

$$\{\Phi\} = \int_{\{0\}}^{\{q\}} [B_l(z)] \{dz\} \quad (2.7)$$

Esta ecuación cinemática es en general no lineal. Sin embargo, puede obtenerse una expresión lineal si se acepta la hipótesis de “pequeños desplazamientos”. Esta consiste en admitir que las modificaciones de la matriz de transformación del elemento durante su movimiento son despreciables. En ese caso la matriz de transformación permanecerá constante:

$$[B(U)] \approx [B^0] \quad (2.8)$$

Donde $[B^0]$ es la matriz de transformación en la configuración inicial. En este caso la integración de la ecuación cinemática (2.7) da:

$$\{\Phi\} = [B_l^0] \{q\} \quad \text{o} \quad \{\Phi\}_b = [B_b^0] \{U\} \quad (2.9)$$

Que es por supuesto la expresión convencional de la teoría de pórticos lineales.

2.5 Formulación alternativa de las ecuaciones cinemáticas.

Las ecuaciones cinemáticas en el caso general (grandes desplazamientos) pueden obtenerse alternativamente considerando directamente la transformación desde la configuración inicial hasta una configuración deformada tal y como se indica en la figura 2.6.

Según la definición de las deformaciones generalizadas indicada en la sección precedente, la relación entre las deformaciones y los desplazamientos se obtiene mediante consideraciones puramente geométricas:

$$\Phi_i = q_3 - (\alpha_0 - \alpha(q)); \quad \Phi_j = q_6 - (\alpha_0 - \alpha(q)); \quad \delta = l(q) - l_0 \quad (2.10)$$

$$\text{Donde } \alpha(q) = \arctan \left(\frac{\Delta Y_o + q_5 - q_2}{\Delta X_o + q_4 - q_1} \right); \quad l(q) = \sqrt{(\Delta Y_o + q_5 - q_2)^2 + (\Delta X_o + q_4 - q_1)^2}$$

Las relaciones (2.10) y (2.7) son por supuesto equivalentes.

2.5 Resumen

El movimiento de un pórtico plano se representa por medio de la matriz de desplazamientos de la estructura $\{U\}$. Esta está compuesta por $3n$ componentes, siendo n el numero de nudos del pórtico. La deformación o cambio de forma del pórtico se representa mediante las m matrices de deformación $\{\Phi\}$, siendo m el numero de

miembros del pórtico. Cada matriz posee 3 componentes lo que da un total de $3m$ variables. Para determinar el estado de la estructura es necesario conocer las $3n + 3m$ variables que determinan el movimiento y la deformación del pórtico. De ellas sólo los desplazamientos de los apoyos son datos que el analista debe imponer. El resto, deben ser determinados mediante el análisis de la estructura.

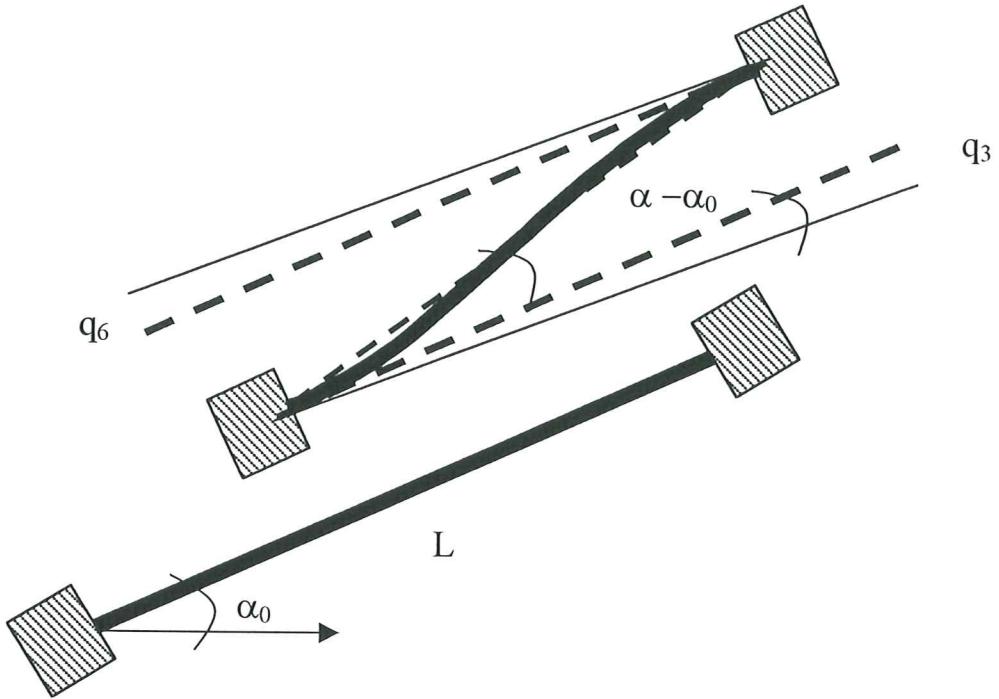


Figura 2.6. Desplazamientos y deformaciones en un miembro de un pórtico plano

Las ecuaciones que relacionan desplazamientos y deformaciones son las ecuaciones cinemáticas cuya expresión general es la relación (2.7). En el caso particular de pequeños desplazamientos, la ecuación cinemática puede aproximarse mediante las relaciones (2.9). En el caso general, pueden también usarse las expresiones (2.10) que corresponden a la integración analítica de (2.7). De cualquier manera, sólo se dispone de $3m$ ecuaciones escalares, puesto que sólo hay un conjunto independiente de ecuaciones cinemáticas por cada elemento del pórtico. Es por lo tanto evidente que las ecuaciones cinemáticas no son suficientes para determinar simultáneamente desplazamientos y deformaciones del pórtico, salvo en el caso excepcional en el que todos los grados de libertad de la estructura estén restringidos.

3. Dinámica de pórticos planos

Este capítulo está dedicado a la dinámica de pórticos planos. En otras palabras, se estudia la caracterización de las fuerzas externas y de las variables que definen la manera como estas se reparten entre los diferentes elementos constitutivos de la estructura. Para ello es necesario introducir el concepto de “Esfuerzo generalizado” que es el tema de la primera sección del capítulo. A continuación, se presenta también la noción de “fuerzas de inercia” en pórticos planos. La dinámica de la estructura se define por completo al establecer las relaciones entre estos tres conceptos: fuerzas externas, esfuerzos generalizados y fuerzas de inercia. La vía escogida para ello es la del principio de los trabajos virtuales que es la que se emplea en la mecánica de los medios continuos.

3.1 Esfuerzos generalizados.

Cualquier sólido o estructura cumple un principio de validez general denominado “principio de los trabajos virtuales” (véase por ejemplo los textos de teoría de elasticidad y elementos finitos que se mencionan en la bibliografía). Este principio, aplicado al caso particular de pórticos planos” establece lo siguiente:

Considérese un pórtico plano compuesto por n nudos y m miembros. Si el pórtico es sometido unos desplazamientos infinitesimales virtuales $\{U^*\}$, el trabajo virtual de las fuerzas externas debe ser igual al trabajo virtual de las fuerzas internas más el trabajo virtual de las fuerzas de inercia:

$$T_i^* + T_a^* = T_e^* \quad \forall \{U^*\} \quad (3.1)$$

Cuando la ecuación (3.1) se verifica, se dice que la estructura está en equilibrio dinámico.

El trabajo virtual interno se define en términos generales como el producto de los esfuerzos por las deformaciones virtuales. Sea $\{M\}_b$ el esfuerzo generalizado de la barra b . El trabajo virtual interno de la estructura es por lo tanto:

$$T_i^* = \sum_{b=1}^m \{\Phi^*\}_b^t \{M\}_b \quad (3.2)$$

Teniendo en cuenta la elección hecha para representar las deformaciones en el pórtico, los esfuerzos generalizados están definidos por: $\{M\}^t = (m_i, m_j, n)$. Donde m_i y m_j corresponden a los momentos flectores en los extremos del miembro y n a la fuerza axial (ver figura 3.1)

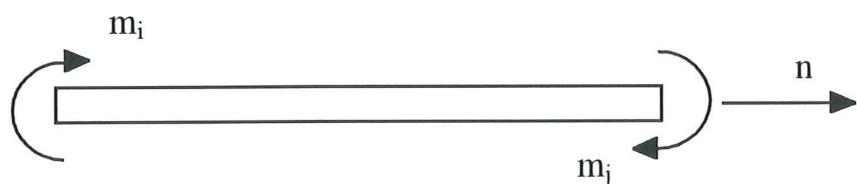


Figura 3.1 Esfuerzos generalizados en un miembro de un pórtico plano.

Se dice en este caso que los esfuerzos generalizados están conjugados con las deformaciones generalizadas mediante la relación (3.2).

3.2 Fuerzas externas sobre los nudos.

Por definición, el trabajo virtual de las fuerzas externas es el producto de los desplazamientos virtuales por las fuerzas externas de la estructura. Puesto que el movimiento virtual en pórticos planos se caracteriza por medio de la matriz de desplazamientos $\{U^*\}$, las fuerzas externas se definirán por medio de la matriz $\{P\}$ donde:

$$\{P\}^t = (P_1, P_2, P_3, \dots, \dots, P_{3n-2}, P_{3n-1}, P_{3n})$$

fuerzas sobre el nudol fuerzas sobre el nudo n

(3.3)

Los términos $P_1, P_4, \dots, P_{3n-2}$ representan fuerzas en la dirección del eje X aplicadas en los nudos 1, 2, ..., n respectivamente. Los términos $P_2, P_5, \dots, P_{3n-1}$ corresponden a fuerzas en la dirección de Y aplicadas en los nudos 1, 2, ..., n respectivamente, mientras que P_3, P_6, \dots, P_{3n} simbolizan momentos sobre los mismos nudos. El trabajo virtual de las fuerzas externas es por lo tanto:

$$T_a^* = \{U^*\}^t \{P\} \quad (3.4)$$

Las fuerzas externas que corresponden al conjunto N_u de grados de libertad restringidos de la estructura son llamadas “reacciones” de los apoyos. Estas reacciones son a priori desconocidas y forman parte de las incógnitas del problema. Se introduce a continuación el conjunto de nudos no restringidos N_p que contiene todos los grados de libertad no incluidos en N_u . Por ejemplo, en el caso particular considerado en la sección 2.2, el conjunto N_p esta compuesto por los grados de libertad 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 12, 13, 14, 15, 16, 17 y 18.

Se admitirá en lo que sigue que las fuerzas externas que corresponden a los grados de libertad contenidos en N_p son datos impuestos por el analista:

$$P_l = P_l^d(t) \quad \text{para } l \in N_\sigma \quad (3.5)$$

Donde $P_l^d(t)$ son funciones del tiempo conocidas durante el intervalo en el que se desea calcular la estructura y P_l es el l ésimo elemento de la matriz de fuerzas externas.

3.3 Fuerzas de inercia.

Las fuerzas de inercia en un miembro de un pórtico se representan por medio de la matriz $\{I_l\}$, donde:

$$\{I\}^t = (I_1, \dots, I_6) = ([m]\{\ddot{q}\})^t \quad (3.6)$$

El término $[m]$ corresponde a la llamada "matriz de masa" del miembro referida a los desplazamientos del elemento y $\{\ddot{q}\} = \left\{ \frac{d^2q}{dt^2} \right\}$ es la matriz de aceleraciones generalizadas del mismo. En este texto se considerarán las matrices de masa de los miembros como un dato del problema. Una descripción de las técnicas empleadas para la obtención de estas matrices no está dentro de los objetivos de esta monografía. Sólo se citará como ejemplo la expresión de la matriz de masa denominada "consistente" para el caso de miembros rectos de sección constante:

$$[m] = \frac{m}{420} \begin{bmatrix} 140c^2 + 156s^2 & & & & & \\ -16cs & 156c^2 + 140s^2 & & & & \text{simetrica} \\ 22sl_0 & -22cl_0 & 4l_0^2 & & & \\ 70c^2 + 54s^2 & 16cs & 13sl_0 & 140c^2 + 156s^2 & & \\ 16cs & 54c^2 + 70s^2 & -13cl_0 & -16cs & 156c^2 + 140s^2 & \\ -13sl_0 & 13cl_0 & -3l_0^2 & -22sl_0 & 22cl_0 & 4l_0^2 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Donde m es la masa total del miembro, $c = \cos \alpha$, $s = \sin \alpha$ y l_0 su longitud inicial. Otras expresiones para la matriz de masas son también posibles. Para detalles adicionales, se aconseja consultar los textos de dinámica estructural y de elementos finitos que se indican en la bibliografía o algún otro texto similar.

Alternativamente, pueden emplearse la matriz de fuerzas de inercia $\{I_g\}_b$ y de masas $[m_g]_b$ de la barra b referida a los desplazamientos del pórtico. En ese caso, las fuerzas de inercia son:

$$\{I_g\}_b^t = (I_1, \dots, I_{3n}) = ([m_g]\{\ddot{U}\})^t \quad (3.8)$$

Donde $\{\ddot{q}\} = \left\{ \frac{d^2q}{dt^2} \right\}$ es la matriz de aceleraciones del pórtico. Puede constatarse que, a

diferencia de $\{I_l\}$, la nueva matriz de fuerzas de inercia tiene las mismas dimensiones de la matriz de desplazamientos o de fuerzas externas de la estructura. La matriz de masas del miembro referida a los desplazamientos de la estructura se construye añadiendo filas y columnas adicionales a la matriz de masas (3.7). Estas filas y columnas adicionales sólo contienen ceros y se colocan en los lugares que no corresponden a los grados de libertad del elemento. Para un elemento entre los nudos i y j , las columnas y las filas no nulas de esta matriz son las que se encuentran en las posiciones $3i-2, 3i-1, 3i, 3j-2, 3j-1$ y $3j$. En las posiciones $(3i-2, 3i-2)$ se coloca el elemento $(1,1)$ de la matriz de masa (3.7), en la posición $(3i-2, 3i-1)$ el elemento $(1,2)$ y así sucesivamente hasta la posición $(3j, 3j)$ en la que estará el elemento $(6,6)$.

Puede observarse que $\{I_g\}$ puede también construirse a partir de $\{I_l\}$ añadiendo ceros en las posiciones que no corresponden a los grados de libertad del miembro.

La matriz $\{I\}$ de fuerzas de inercia del pórtico se construye sumando las fuerzas de inercia de todos miembros:

$$\{I\} = \sum_{b=1}^m \{I_g\}_b = \sum_{b=1}^m [m_g]_b \{\ddot{U}\} = [m] \{\ddot{U}\} \quad (3.9)$$

Donde $[m] = \sum_{b=1}^m [m_g]_b$ es denominada matriz de masas del pórtico. Puede constatarse que en el caso general la matriz de masas no es constante y depende de los desplazamientos del pórtico $[m] = [m(U)]$. En el caso particular de pequeños desplazamientos, la matriz de masas puede ser calculada en la configuración inicial y permanece aproximadamente constante durante el movimiento del pórtico.

El trabajo virtual de las fuerzas de inercia bajo el movimiento virtual definido por $\{U^*\}$ se calcula por lo tanto, de la manera siguiente:

$$T_a^* = \{U^*\}^t \{I\} \quad (3.10)$$

Para ciertos tipos de solicitudes, denominadas solicitudes “estáticas”, las aceleraciones de los nudos son despreciables. En ese caso las fuerzas de inercia y su trabajo virtual son nulos. Cuando, por el contrario, las fuerzas de inercia no son despreciables, se dice que el problema es “dinámico”.

3.4 Ecuaciones de equilibrio dinámico.

Substituyendo las expresiones (3.2), (3.4) y (3.10) en la ecuación de trabajo virtual (3.1) se tiene:

$$\sum_{b=1}^m \{\Phi^*\}_b^t \{M\}_b + \{U^*\}^t \{I\} = \{U^*\}^t \{P\} \quad \forall \{U^*\} \quad (3.11)$$

Donde $\{\Phi^*\}$ son las deformaciones producidas por los desplazamientos infinitesimales virtuales $\{U^*\}$. Empleando las ecuaciones cinemáticas puede escribirse:

$$\{\mathbf{U}^*\}^t \sum_{b=1}^m [\mathbf{B}]_b^t \{\mathbf{M}\}_b + \{\mathbf{U}^*\}^t \{\mathbf{I}\} = \{\mathbf{U}^*\}^t \{\mathbf{P}\} \quad \forall \{\mathbf{U}^*\} \quad (3.12)$$

Teniendo en cuenta que la ecuación (3.12) debe cumplirse para cualquier desplazamiento virtual, se obtiene la siguiente ecuación de equilibrio dinámico:

$$\sum_{b=1}^m [\mathbf{B}]_b^t \{\mathbf{M}\}_b + [m] \{\ddot{\mathbf{U}}\} = \{\mathbf{P}\} \quad (3.13)$$

Puede constatarse que en el caso general, los términos $[\mathbf{B}]_b$ y $[m]$ en (3.13) dependen de los desplazamientos generalizados $\{\mathbf{U}\}$. En el caso particular de pequeños desplazamientos, todas esas matrices son constantes.

3.5 Resumen

El conocimiento de las matrices $\{\mathbf{M}\}$ de esfuerzos generalizados de los miembros del pórtico permite caracterizar la manera como las fuerzas externas y de inercia se reparten entre los diferentes elementos constitutivos de la estructura. Estas matrices contribuyen con $3m$ incógnitas adicionales al problema de estructuras. Deben también incluirse en la lista de incógnitas las reacciones de los apoyos. Estas últimas compensan los datos aportados por los desplazamientos impuestos en los apoyos. En consecuencia, la suma de las incógnitas generadas por la cinemática y la dinámica da un gran total de $6m+3n$ (deformaciones + esfuerzos + desplazamientos nodales – desplazamientos impuestos en los apoyos + reacciones de los apoyos). La dinámica de pórticos planos aporta sólo una ecuación matricial, la ecuación (3.13). Esta se traduce en $3n$ ecuaciones diferenciales ordinarias escalares. Sumando las ecuaciones cinemáticas se tiene un gran total de $3n + 3m$ ecuaciones escalares. Es por lo tanto evidente que el problema de estructuras no puede aun ser resuelto al haber un déficit de $3m$ ecuaciones escalares.

Es también útil hacer el inventario de los datos exigidos al analista. Estos son: las coordenadas de los nudos, la tabla de conexión que define los miembros del pórtico, la masa de los elementos, los apoyos de la estructura y sus desplazamientos impuestos y por último las fuerzas externas correspondientes a los grados de libertad no restringidos.

4. Pórticos elásticos lineales y no lineales

En la parte final del capítulo precedente se indicó que las ecuaciones de la cinemática y la dinámica no son suficientes para el análisis de la estructura. Este déficit no debe extrañar puesto que en ninguna de las ecuaciones precedentes se ha tomado en cuenta el material del que está hecho el pórtico. Para la definición completa del problema debe incluirse en el sistema una nueva ecuación matricial por cada miembro del pórtico. Esta ecuación es llamada en esta monografía "ley de comportamiento del miembro", y relaciona los esfuerzos generalizados con las deformaciones generalizadas. Esta ecuación adicional caracterizará al material del pórtico. Así, se tiene que para dos pórticos de similares geometrías pero diferentes materiales (acero y concreto armado por ejemplo), las ecuaciones de compatibilidad y las de equilibrio son absolutamente idénticas y sólo las leyes de comportamiento diferencian ambos casos.

Este capítulo está dedicado a la descripción de la ley de comportamiento más simple posible: la que caracteriza a los pórticos elásticos. Se describirán, sin embargo, tanto los modelos lineales como los no lineales. Para finalizar, y puesto que las ecuaciones se completarán al añadir las leyes de comportamiento, se describirán algoritmos para la resolución de pórticos elásticos lineales y no lineales.

4.1 Ley de comportamiento elástica lineal.

Considérese un miembro de un pórtico plano de sección constante tal y como se indica el figura 4.1. Para el análisis de este miembro se utilizará un sistema de ejes coordenados locales x-y. El eje x local se escoge para que coincida con la cuerda i-j. Durante el desplazamiento del pórtico, el eje x acompaña en su movimiento a la cuerda y el eje y permanece siempre perpendicular a esta. El origen de los ejes x-y también se moverá durante el desplazamiento y coincidirá siempre con el nudo i. El análisis se

realizará empleando la teoría de vigas convencional (teoría de Euler-Bernoulli), es decir, la teoría de vigas de la Resistencia de Materiales.

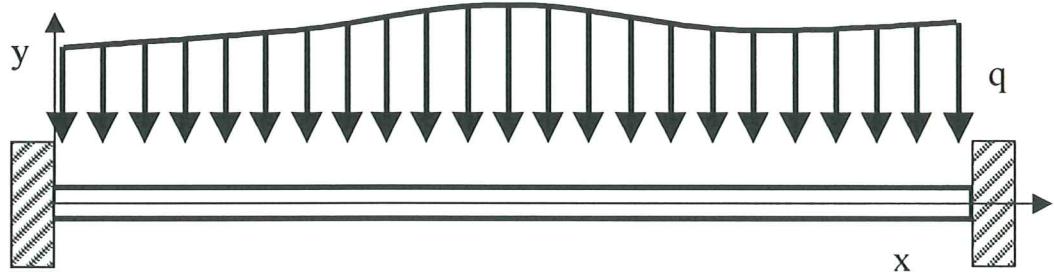


Figura 4.1 Miembro de un pórtico plano analizado según la teoría de vigas de Euler-Bernoulli.

En la Resistencia de Materiales, la relación existente entre la flecha w , las fuerzas externas distribuidas q , el desplazamiento axial u y la fuerza axial n se expresa de la manera siguiente:

$$EI \frac{d^4 w(x)}{dx^4} = q(x) \quad AE \frac{du(x)}{dx} = n \quad (4.1)$$

Donde E es el módulo de elasticidad del material del miembro, I el momento de inercia de la sección transversal de la barra y A su área. La solución general de las ecuaciones (4.1a) está constituida por un polinomio de tercer grado más una solución particular que depende de la carga distribuida aplicada sobre el miembro. Para la ecuación diferencial (4.1b), y teniendo en cuenta que la fuerza axial sobre el miembro se supone constante, la solución general es un polinomio de primer grado:

$$EIw(x) = \int \int \int q(x) dx + C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4 \quad AEu(x) = nx + C_5 \quad (4.2)$$

Supóngase por ahora que la carga distribuida q es nula. Al producirse deformaciones $\{\Phi\}$ en el miembro debido al movimiento de la estructura, se tienen las siguientes condiciones de borde:

$$\begin{aligned} w(0) &= 0; & w(l) &= 0; & -\phi_i &= \left(\frac{dw}{dx} \right)_{x=0}; & -\phi_j &= \left(\frac{dw}{dx} \right)_{x=l} \\ m_i &= EI \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)_{x=0}; & -m_j &= EI \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)_{x=l} \\ u(0) &= 0; & u(l) &= \delta; \end{aligned} \quad (4.3)$$

Las condiciones de flecha nula en los extremos se justifican porque se admite que el eje x acompaña a la cuerda en su movimiento. La condición de desplazamiento axial nulo para x igual a cero se debe al hecho de suponer que el origen de coordenadas acompaña al nudo i en su movimiento. Las constantes de integración C_1 , C_2 , C_3 y C_4 pueden ser

expresadas en función de las deformaciones generalizadas ϕ_i y ϕ_j por medio de las ecuaciones de la primera línea de (4.2). Sustituyendo estas en la segunda línea de (4.2) se obtiene la relación entre las deformaciones generalizadas ϕ_i y ϕ_j y los esfuerzos generalizados m_i y m_j . Procediendo de la misma manera con la tercera línea de las ecuaciones (4.2) se obtiene la relación entre n y δ . Agrupando estas relaciones matricialmente se puede escribir:

$$\{M\} = [S]\{\Phi\}; \quad [S] = \begin{bmatrix} 4EI & 2EI & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2EI & 4EI & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & AE \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Donde $[S]$ es llamada matriz de rigidez del miembro.

En caso de que las cargas distribuidas sobre el miembro no sean nulas, es necesario añadir a la expresión anterior un término adicional que proviene del primer término de la solución (4.2):

$$\{M\} = [S]\{\Phi\} + \{M^0\} \quad (4.5)$$

Los esfuerzos generalizados “iniciales” $\{M^0\}$ dependen del tipo de fuerzas existentes sobre el miembro. Es, sin embargo, muy fácil preparar un “catalogo” que permita determinar $\{M^0\}$ dado el tipo y la intensidad de la fuerza.

Para la obtención de la ley de comportamiento (4.5) se han supuesto de manera implícita todas las hipótesis de la Resistencia de Materiales convencional. En particular se han supuesto despreciables las flechas debidas a las fuerzas cortantes. Es, sin embargo, fácil generalizar estas ecuaciones. Por ejemplo pueden sustituirse las ecuaciones diferenciales (4.1), que caracterizan a la teoría de vigas de Euler-Bernoulli, por las ecuaciones de la teoría de vigas de Timoshenko. Se obtiene ahora una expresión idéntica a (4.5) en la que sólo cambia la expresión de la matriz de rigidez. Este análisis permitiría presentar una teoría de pórticos elásticos que incluiría las deformaciones por cortante.

4.2 Ley de comportamiento elástica no lineal.

Otra de las hipótesis restrictivas de modelo elástico lineal es que desprecia el efecto de la fuerza axial en la distribución de momentos flectores y no considera la posibilidad de pandeo del miembro. Es, sin embargo, evidente que para fuerzas axiales importantes (por ejemplo para columnas) esta hipótesis no es aceptable. Es necesario en algunos casos tomar en cuenta el acoplamiento fuerza axial-efecto de flexión. Este efecto puede fácilmente ser incluido en la ley de comportamiento elástica ya que el procedimiento indicado en la sección anterior sigue siendo válido.

Considérese de nuevo el miembro de la figura 4.1. La ecuación que permite el cálculo de flecha incluyendo el acoplamiento entre fuerzas axiales y momentos flectores es, según la Resistencia de Materiales:

$$EI \frac{d^4 w(x)}{dx^4} + n \frac{d^2 w(x)}{dx^2} = q(x) \quad (4.6)$$

que es una ecuación diferencial lineal para n constante. La solución general de esta ecuación diferencial es:

$$w(x) = \begin{cases} C_1 \sin kx + C_2 \cos kx + C_3 x + C_4 + w_p(x) & \text{si } n < 0 \\ C_1 \operatorname{senh} kx + C_2 \cosh kx + C_3 x + C_4 + w_p(x) & \text{si } n > 0 \end{cases} \quad (4.7)$$

Donde $k^2 = \frac{|n|}{EI}$ y $w_p(x)$ es una solución particular que depende de las fuerzas aplicadas sobre el miembro.

Supóngase como en la sección precedente que las fuerzas distribuidas son nulas. Tomando entonces en cuenta las condiciones (4.3), y procediendo de manera similar a la descrita en la sección precedente, se obtiene la matriz de rigidez local de un miembro incluyendo las flechas por fuerza axial:

$$\begin{aligned} \{M\} &= [S(\delta)]\{\Phi\}; & [S] &= \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{21} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{33} \end{bmatrix} \\ S_{11} = S_{22} &= \begin{cases} \left(\frac{EI}{1}\right) \frac{kl(\operatorname{sen} kl - kl \cos kl)}{2 - 2 \cos kl - kl \operatorname{sen} kl} & \text{si } n < 0 \\ \frac{4EI}{1} & \text{si } n = 0 \\ \left(\frac{EI}{1}\right) \frac{kl(kl \cosh kl - \operatorname{senh} kl)}{2 - 2 \cos kl - kl \operatorname{sen} kl} & \text{si } n > 0 \end{cases} \quad (4.7) \\ S_{12} = S_{21} = cS_1 & \quad c = \begin{cases} \frac{kl - \operatorname{sen} kl}{\operatorname{sen} kl - kl \cos kl} & \text{si } n < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } n = 0 \\ \frac{\operatorname{senh} kl - kl}{kl \cosh kl - \operatorname{senh} kl} & \text{si } n > 0 \end{cases} \quad S_{33} = \frac{AE}{l} \end{aligned}$$

Puede observarse que la matriz de rigidez depende ahora de la fuerza axial n , o del alargamiento δ de la cuerda (recuérdese que $n = \delta AE/l$).

En caso de fuerzas aplicadas sobre el miembro, es necesario añadir a la ecuación (4.7) el término de esfuerzos generalizados iniciales como en el caso del modelo elástico lineal.

4.3 Análisis de pórticos elásticos lineales en el caso estático.

El problema elástico puede ahora ser definido de la siguiente manera.

Incógnitas:

- Elementos de la matriz de desplazamientos $\{U\}$ correspondientes a los grados de libertad no restringidos, es decir, los incluidos en el conjunto N_u
- Reacciones, o lo que es lo mismo, elementos de la matriz de fuerzas externas $\{P\}$ correspondientes a los grados de libertad restringidos incluidos en el conjunto N_σ
- Deformaciones generalizadas de los m miembros de la estructura.
- Esfuerzos generalizados de los m miembros de la estructura.

Ecuaciones:

- Ecuaciones cinemáticas
- Ecuaciones de equilibrio
- Leyes de comportamiento

Datos:

- Geometría de la estructura (numero de nudos y miembros, sus coordenadas, tabla de conexión de los miembros, apoyos)
- Fuerzas externas en los grados de libertad no restringidos (elementos de la matriz $\{P\}$ correspondientes a los grados de libertad del conjunto N_σ).
- Desplazamientos impuestos en los apoyos (elementos de la matriz $\{U\}$ correspondientes a los grados de libertad del conjunto N_u)
- Propiedades de los miembros (E , I , A)

En esta sección se considerará únicamente el caso lineal estático. Combinando las ecuaciones cinemáticas lineales (2.9), la ecuación de equilibrio (3.13) en el caso estático y la ley de comportamiento en el caso elástico lineal (4.5), se obtiene la siguiente ecuación matricial:

$$\left(\sum_{b=1}^m ([B^\circ]^t [S^\circ] [B^\circ])_b \right) \{U\} = (\{P\} - \sum_{b=1}^m ([B^\circ]^t \{M^\circ\})_b) \quad (4.8)$$

En los textos de elementos finitos, la matriz columna: $\{P\} - \sum_{b=1}^m ([B^\circ]^t \{M^\circ\})_b$ es llamada "matriz de fuerzas nodales" y la matriz cuadrada $\sum_{b=1}^m ([B^\circ]^t [S^\circ] [B^\circ])_b$ "matriz de rigidez de la estructura". Puede observarse que la matriz de rigidez de la estructura es la suma de m matrices de la forma $[B^\circ]^t [S^\circ] [B^\circ]$. Esta matriz es denominada "matriz de rigidez del elemento". El proceso de sumar las matrices de rigidez de cada elemento para obtener la matriz de rigidez global es llamado "ensamblaje de la matriz de rigidez". Puede también observarse que la matriz de fuerzas nodales esta compuesta por la matriz de fuerzas externas sobre los nudos $\{P\}$ menos la contribución de las fuerzas distribuidas sobre los elementos: $\sum_{b=1}^m ([B^\circ]^t \{M^\circ\})_b$. Esta última también es el resultado de la suma de los términos correspondientes a cada elemento. El proceso de construcción de la matriz de fuerzas nodales también es conocido como su "ensamblaje".

El problema elástico lineal estático se completa con los desplazamientos impuestos en los apoyos (2.1). El sistema de ecuaciones lineales obtenido de esta manera puede ser resuelto por cualquiera de los métodos tradicionales para determinar los desplazamientos nodales desconocidos y las reacciones en los apoyos. La descripción de estos métodos no está entre los objetivos de esta monografía y se sugiere consultar cualquier texto de elementos finitos, por ejemplo los que se incluyen en la bibliografía.

A partir de estos, pueden calcularse los esfuerzos y las deformaciones generalizadas empleando de nuevo la ecuación cinemática y la ley de comportamiento de cada miembro.

4.4 Análisis de pórticos elásticos en el caso general: discretización en el tiempo

En el caso general, el problema planteado se reduce a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales en el tiempo. Combinando esta vez las ecuaciones de equilibrio dinámico (3.13) con las leyes de comportamiento (4.7) se obtiene:

$$\sum_{b=1}^m ([B(U)]^t [S(U)]\{\Phi\})_b + \sum_{b=1}^m ([B(U)]^t \{M_0\})_b + [m]\{\ddot{U}\} = \{P\} \quad (4.9)$$

En la expresión (4.9), la matriz de transformación $[B]$ induce una dependencia con respecto a los desplazamientos puesto que en el caso no lineal, esta matriz debe ser calculada en la configuración deformada. La matriz de rigidez $[S]$ depende de la fuerza axial en el caso no lineal. La fuerza axial puede ser calculada a partir del alargamiento de la cuerda y de ahí que la matriz de rigidez haya también sido definida como una función de los desplazamientos.

Para resolver el problema se describirán los métodos denominados “paso a paso”. Estos consisten en lo siguiente.

El intervalo de tiempo $[0, T]$, durante el cual se quiere analizar el comportamiento de la estructura, es substituido por un conjunto discreto de instantes $(0, t_1, t_2, \dots, t_r, \dots, T)$. Esto significa que las incógnitas del problema no serán calculadas durante toda la historia sino únicamente en los instantes escogidos t_r . El cálculo se hará de forma secuencial, es decir, antes de proceder al análisis de la estructura en el instante t_r debe haberse realizado previamente el cálculo en el instante t_{r-1} . Al concluir este cálculo se dice que se ha realizado “un paso de tiempo”

Con el fin de eliminar las derivadas con respecto al tiempo del problema, se debe emplear algún algoritmo de integración numérica (método de Wilson, Newmark, etc.). Estos consisten en emplear fórmulas aproximadas que expresan las aceleraciones al final de cada paso como funciones de cantidades definidas al principio del paso y de los desplazamientos al final del paso:

$$\{\ddot{U}\}_{t=t_r} \cong \{\ddot{U}(U_{t=t_r}, \dot{U}_{t=t_{r-1}}, \ddot{U}_{t=t_{r-1}}, U_{t=t_{r-1}})\} \quad (4.10)$$

Donde t_r es el instante correspondiente al final del paso y t_{r-1} representa el principio del paso. La forma específica de las aproximaciones escogidas caracterizan los distintos algoritmos de integración. Por ejemplo, en el método de Newmark, las velocidades y aceleraciones se expresan de la manera siguiente:

$$\begin{aligned}\{\ddot{U}_{t=t_r}\} &= \frac{1}{\beta \Delta t^2} (\{U_{t=t_r}\} - \{U_{t=t_r-1}\}) - \frac{1}{\beta \Delta t} \{\dot{U}_{t=t_r-1}\} - \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right) \{\dot{U}_{t=t_r-1}\} \\ \{\dot{U}_{t=t_r}\} &= \{\dot{U}_{t=t_r-1}\} + \Delta t (1 - \vartheta) \{\ddot{U}_{t=t_r-1}\} + \vartheta \Delta t \{\ddot{U}_{t=t_r}\}\end{aligned}\quad (4.11)$$

Donde α y ϑ son parámetros de integración escogidos por el analista para obtener exactitud y estabilidad en la integración numérica (para detalles adicionales consultar algún texto de dinámica estructural).

El uso de algoritmos de integración permite expresar las fuerzas de inercia en un instante t_r como una función de los desplazamientos en ese instante. Recuérdese que todas las cantidades correspondientes a los instantes precedentes son conocidas en los procedimientos paso a paso.

4.5 Análisis de pórticos elásticos en el caso general: planteamiento del problema

Al sustituir las ecuaciones cinemáticas (2.10) y el algoritmo de integración (4.10) en (4.9), el problema a resolver se transforma en un sistema de ecuaciones no lineales de la forma:

$$\{L(U)\} = \{Q(U)\} + \{I(U)\} + F\{U\} = 0 \quad U_k = U_k^d(t_r) \text{ para } k \in N_u \quad (4.12)$$

Donde $\{U\}$ es la matriz de desplazamientos nodales en el instante t_r , $\{Q\}$ es la matriz de fuerzas internas, $\{I\}$ la matriz de fuerzas de inercia y $\{F\}$ la matriz de fuerzas externas. Las expresiones que definen cada uno de estos términos son:

$$\begin{aligned}\{Q(U)\} &= \sum_{b=1}^m ([B(U)]^t [S(U)] \{\Phi(U)\})_b \\ \{I(U)\} &= \sum_{b=1}^m [m_g]_b \{\ddot{U}(U)\} \\ \{F(U)\} &= \sum_{b=1}^m ([B(U)]^t \{M^o\})_b - \{P\}\end{aligned}\quad (4.13)$$

Donde las deformaciones generalizadas han sido expresadas como funciones de los desplazamientos. Las fuerzas de inercia dependen ahora de los desplazamientos, puesto que los algoritmos de integración permiten calcular las aceleraciones a partir de los desplazamientos al final del paso. Por último, la matriz de fuerzas externas también depende de los desplazamientos en el caso no lineal más general. Ello es debido a la intervención de la matriz de transferencia $[B]$ en el cálculo de la matriz de fuerzas nodales.

En las aplicaciones prácticas, no es frecuente ver análisis con todos los términos no lineales posibles. En ciertos casos, la contribución de unos y otros es muy diferente y algunas de las ecuaciones mencionadas pueden ser substituidas por sus equivalentes lineales. Esta es una decisión que le corresponde al analista y que debe ser tomada en función de la aplicación concreta que se desea realizar.

4.6 Análisis de pórticos elásticos en el caso general: resolución por el método de Newton

El problema definido en (4.12) puede ser resuelto por cualquier método numérico apropiado, en la mayoría de los casos el método de Newton. Este consiste en substituir un problema no lineal por una sucesión de problemas lineales. El principio es el siguiente: La aproximación lineal de las funciones $\{L(U)\}$ alrededor de un estado de desplazamientos $\{U_0\}$ es:

$$\{L(U)\} \approx \{L(U_0)\} + \left[\frac{\partial L}{\partial U} \right]_{\{U\}=\{U_0\}} \{U - U_0\} \quad (4.14)$$

Supóngase conocido $\{U_0\}$ (puede usarse por ejemplo los desplazamientos al final del paso anterior). Una primera aproximación a la matriz de desplazamientos $\{U\}$ puede obtenerse igualando (4.14) a cero y resolviendo la ecuación así obtenida. Esta ecuación es lineal por lo que puede emplearse cualquier de los métodos utilizados en el caso elástico lineal y estático. El error correspondiente a la primera aproximación puede determinarse calculando $\{L(U)\}$ de manera exacta empleando las ecuaciones (4.11-4.12) y evaluando que tan lejos del cero están los valores obtenidos. Si esta primera aproximación es juzgada insatisfactoria, puede calcularse una segunda aproximación empleando de nuevo (4.13), desarrollada esta vez alrededor de la primera aproximación. Este proceso puede ser repetido tantas veces como sea necesario hasta obtener valores satisfactorios para $\{U\}$.

Para obtener las nuevas aproximaciones de los desplazamientos, se calcula primero el término $\{L(U_0)\}$ usando las ecuaciones (4.12-4.13). Este cálculo consiste en una aplicación directa de las formulas indicadas puesto que los desplazamientos $\{U_0\}$ son conocidos. A continuación se calcula el término $\left[\frac{\partial L}{\partial U} \right]_{\{U\}=\{U_0\}}$ denominado jacobiano del

sistema de ecuaciones o matriz tangente. El jacobiano puede ser calculado de manera exacta si se realizan las derivadas indicadas, o de manera aproximada empleando cualquier método numérico, por ejemplo el método de las diferencias finitas.

4.7 Resumen

La última de las ecuaciones necesarias para el análisis de la estructura es la ley de comportamiento. En este capítulo se proponen dos clases de modelos elásticos: el modelo lineal definido por la ecuación (4.5) y el modelo no lineal que incluye el efecto de la fuerza axial definido por la ecuación (4.7). El problema se resume en la tabla 4.1.

Cuando se escogen las versiones lineales de todas las ecuaciones del problema y sólo se considera el caso estático, se obtiene el planteamiento tradicional de la teoría de estructuras. El problema puede resolverse en tres pasos. Primero, cálculo de la matriz de rigidez de la estructura. Segundo, cálculo de la matriz de fuerzas nodales. Tercero, resolución del problema lineal formado por la ecuación: Rigidez x desplazamiento = fuerza y los desplazamientos impuestos en los apoyos.

En el caso más general posible, se plantea un sistema de ecuaciones no lineales. Para ello es necesario emplear un procedimiento paso a paso y discretizar las aceleraciones nodales usando algún algoritmo de integración numérica. Este sistema de ecuaciones puede ser resuelto por el método de Newton.

datos	incógnitas	ecuaciones
<ul style="list-style-type: none"> • Geometría y apoyos • Fuerzas externas • Desplazamientos impuestos • Propiedades del miembro 	<ul style="list-style-type: none"> • Desplazamientos • Deformaciones generalizadas • Esfuerzos generalizados • Reacciones 	<ul style="list-style-type: none"> • Ecuaciones cinemáticas (relaciones entre desplazamientos y deformaciones) • Ecuaciones de equilibrio dinámico. (relaciones entre esfuerzos y fuerzas externas) • Ley de comportamiento (relaciones entre esfuerzos y deformaciones)

Tabla 4.1 Resumen del problema estructural en un pórtico elástico.

5. Elastoplasticidad uniaxial

En el capítulo 4 se describió el análisis de pórticos elásticos. Las leyes de comportamiento del capítulo precedente imponen una relación biunívoca entre los esfuerzos y las deformaciones generalizadas. En otras palabras, para cada matriz de deformaciones generalizadas existe una sola matriz de esfuerzos generalizados, y viceversa, relacionada con la anterior mediante la ley de comportamiento. Es ello lo que define precisamente al modelo elástico.

El modelo elástico no toma en cuenta la posibilidad de aparición de deformaciones generalizadas permanentes (es decir, deformaciones remanentes bajo cargas nulas) que son consecuencia de la solicitud exterior sobre la estructura. Puede constatarse, usando las ecuaciones de los pórticos elásticos, que si las fuerzas externas son iguales a cero, sólo pueden existir deformaciones nulas.

Sin embargo, la evidencia experimental, e incluso la experiencia cotidiana, muestran que estas deformaciones pueden ser muy importantes si se somete cualquier estructura a sobrecargas que exceden un cierto límite (imagínese un alambre que se dobla con la mano hasta deformarlo permanentemente). Sobrepasado este límite no puede representarse correctamente el comportamiento estructural sin tomar en cuenta estos efectos y por lo tanto los modelos elásticos, lineales o no, no deben ser utilizados.

Las leyes de comportamiento que si toman en cuenta este efecto son denominadas modelos plásticos o elastoplásticos y son el objeto de este y el próximo capítulo. En este capítulo se estudiarán los modelos de comportamiento en el caso uniaxial. En otras palabras las relaciones existentes entre el esfuerzo de Cauchy y la deformación unitaria en el caso de aparición de deformaciones permanentes. Se trata por lo tanto de generalizar la ley de Hooke a la plasticidad. Sólo se considerarán dos modelos: el modelo elastoplástico perfecto y el modelo elastoplástico con endurecimiento cinemático.

En el capítulo 6, se utilizarán los conceptos desarrollados en este capítulo para el análisis de pórticos planos elastoplásticos.

5.1 Ley de estado para materiales elastoplásticos en el caso uniaxial.

En la figura 5.1 se muestran las curvas esfuerzo normal-deformación unitaria de dos ensayos de tracción simple realizados en una probeta de acero y en otra de aluminio. Convencionalmente se describe el comportamiento observado experimentalmente dividiendo la gráfica en cuatro partes:

- La denominada "zona elástica inicial" durante la cual se observa una relación aproximadamente lineal entre esfuerzo y deformación y en la que no aparecen deformaciones permanentes (deformaciones inferiores a aproximadamente 0.25×10^{-2} en la gráfica 5.1b). En el caso de solicitudes que se mantienen dentro de la zona elástica se obtiene, al descargar la probeta, un esfuerzo nulo para una deformación cero. Se dice en este caso que el comportamiento es "reversible".
- La segunda parte de la gráfica es denominada "zona de fluencia plástica" y en ella se observa un aumento de la deformación unitaria bajo esfuerzo constante (deformaciones entre aproximadamente 0.1 y 2×10^{-2} en la gráfica 5.1a). Este último es llamado "esfuerzo de fluencia". En la zona de fluencia plástica empieza a observarse la aparición de deformaciones permanentes. En otras palabras: de producirse una descarga, los incrementos de esfuerzos y deformaciones vuelven a ser proporcionales pero esta descarga se realiza según una recta paralela a la primera recta elástica. Al llegar a esfuerzo normal nulo queda una deformación permanente no nula denominada "deformación unitaria plástica".

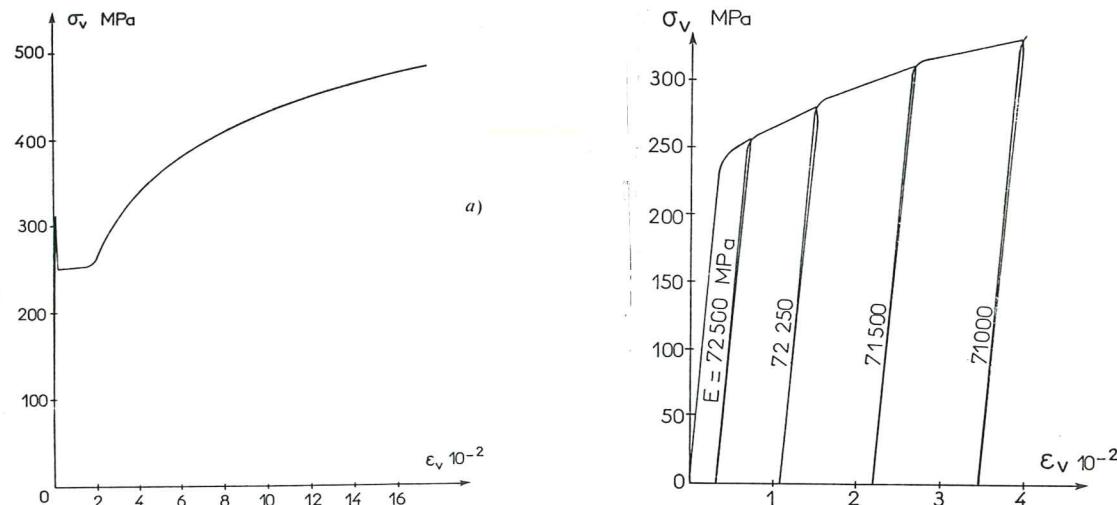


Figura 5.1 Ensayos de tracción simple en probetas de acero (a) y de aluminio (b) de acuerdo a Lemaitre y Chaboche.

- La tercera parte de la gráfica corresponde a la "zona de endurecimiento por deformación". La cual se caracteriza por un aumento del "límite elástico", es decir, el valor que debe tomar el esfuerzo normal para producir deformaciones plásticas adicionales (deformaciones superiores a 2×10^{-2} en la gráfica 5.1a y superiores a 0.25×10^{-2} en la gráfica 5.1b).
- La última zona de la gráfica es denominada "zona de ablandamiento por deformación" y se caracteriza por una disminución del límite elástico debido al deterioro del material.

En esta zona se producen incrementos de las deformaciones totales y plásticas a pesar de reducirse el esfuerzo normal ejercido sobre la probeta en ensayos a desplazamiento impuesto (no indicada en las gráficas de la figura 5.1). Finalmente se produce la rotura de la probeta.

No todos los materiales producen el mismo tipo de curvas en los ensayos de tracción simple. En muchos de ellos no se presentan algunas de las zonas anteriormente mencionadas. Por ejemplo es frecuente observar metales que no presentan la zona de fluencia plástica. En materiales como el concreto no existen zonas elásticas bien definidas o corresponden a valores de esfuerzos de fluencia muy pequeños, etc.

El primero, y más elemental, de los modelos de comportamiento plásticos es el llamado "modelo elastoplástico perfecto". Este se caracteriza por una curva idealizada esfuerzo normal-deformación unitaria tal y como se muestra en la figura 5.2.

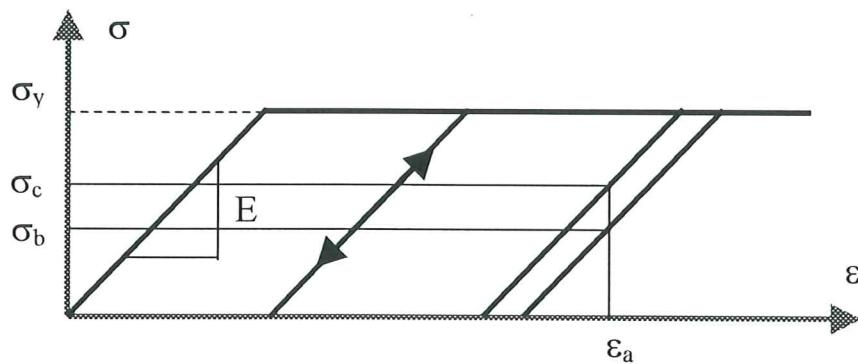


Figura 5.2 Curva esfuerzo-deformación del modelo elastoplástico perfecto

En ella no existen las zonas de endurecimiento o ablandamiento. En este modelo solo se representan dos zonas:

- La zona elástica caracterizada por $|\sigma| < \sigma_y$ o $|d\sigma| < 0$ donde σ es el esfuerzo normal y σ_y el esfuerzo de fluencia. Este último es una constante que depende del material. El símbolo $d\sigma$ significa incremento diferencial de σ . En esta zona no se producen deformaciones unitarias plásticas adicionales aunque pueden existir deformaciones plásticas previas a la entrada en la zona plástica.
- La zona plástica caracterizada por $\sigma = \sigma_y$ y $d\sigma = 0$ en la cual se produce un incremento indeterminado de las deformaciones plásticas. Puede finalmente observarse que $\sigma > \sigma_y$ es, en este modelo, imposible.

La principal dificultad para la representación matemática del modelo elastoplástico perfecto consiste en que a cada valor del esfuerzo unitario ε pueden corresponderle una infinidad de esfuerzos normales, tal y como se observa en la figura 5.2 (ε_a puede estar asociada a σ_b o σ_c según sea el valor de la deformación plástica). Es por ello que, a diferencia de los modelos elásticos, no puede expresarse al esfuerzo como una función de la deformación únicamente.

Se procede entonces a la introducción de "variables internas" que pueden ser definidas inicialmente como las variables adicionales que deben ser incluidas en la ley de Hooke para poder definir únicamente al esfuerzo normal. En otras palabras, dadas la deformación unitaria y las variables internas debe poder obtenerse un sólo valor para el esfuerzo. La expresión que permite este cálculo es denominada "ley de estado".

En el modelo elastoplástico perfecto sólo es necesaria la introducción de una variable interna adicional: "la deformación plástica". En efecto puede constatarse en la figura 5.2 que a cada conjunto de valores de la deformación unitaria ε y de la deformación unitaria plástica ε_p corresponde un sólo del esfuerzo definido por la expresión:

$$\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon_p) \quad (5.1)$$

Donde E es el módulo de elasticidad del material. La ecuación (5.1) es por lo tanto la ley de estado en el modelo elastoplástico perfecto.

5.2. Ley de evolución y función de fluencia del modelo elastoplástico perfecto.

Una ley de comportamiento es el conjunto de expresiones que permiten calcular los esfuerzos conocida la historia de deformaciones. La ley de estado (5.1) no puede ser considerada como una ley de comportamiento puesto que la deformación plástica no es conocida a priori y depende también de la historia de la deformación unitaria total. Es necesario por lo tanto introducir una relación adicional que permita calcular la nueva incógnita incluida en la ley de estado. Esta relación adicional se llamará "ley de evolución de la deformación plástica".

En los modelos plásticos, las leyes de evolución se expresan mediante el concepto de "función de fluencia". En el caso del modelo elastoplástico perfecto esta función es:

$$f(\sigma) = |\sigma| - \sigma_y \leq 0 \quad (5.2)$$

El objetivo de la función de fluencia es el de definir el dominio elástico. En otras palabras, el conjunto de valores del esfuerzo para los cuales el comportamiento es elástico. Puede constatarse que la función de fluencia $f(\sigma)$ sólo puede ser negativa o nula (recuérdese que en el modelo elastoplástico perfecto $\sigma > \sigma_y$ es imposible). El dominio elástico es por definición el conjunto de valores de σ tales que f es negativa.

La ley de evolución de la deformación plástica se define ahora de la manera siguiente:

$$\begin{cases} d\varepsilon_p = 0 & \text{si } f(\sigma) < 0 \quad \text{o} \quad df(\sigma) < 0 \\ d\varepsilon_p \neq 0 & \text{si } f(\sigma) = 0 \quad \text{y} \quad df(\sigma) = 0 \end{cases} \quad (5.3)$$

La ley de evolución es por lo tanto una ecuación diferencial formada por dos expresiones: $d\varepsilon_p = 0$ (deformación plástica constante) en el caso de comportamiento elástico y $df = 0$ (esfuerzo normal constante) en el caso de comportamiento elastoplástico. Las condiciones $f < 0$ o $df < 0$ caracterizan el comportamiento elástico. En el primer caso se tiene que el esfuerzo es menor que el esfuerzo de fluencia. En el segundo caso se representa una descarga elástica independientemente del valor del esfuerzo. Las condiciones $f = 0$ y $df = 0$ caracterizan el comportamiento elastoplástico. Es decir, para que se produzcan incrementos de las deformaciones plásticas es necesario que el esfuerzo sea igual al esfuerzo de fluencia ($f = 0$) y que no se comience un proceso de descarga elástica ($df = 0$).

El conjunto formado por la ley de estado (5.1) y la ley de evolución (5.3) representan la ley de comportamiento uniaxial del modelo lastoplástico perfecto y producen la gráfica de la figura 5.2. Para confirmarlo supóngase la historia de deformación indicada en la figura 5.3a. Para obtener la historia de esfuerzos asociada a esta por la ley de comportamiento es necesario proceder paso a paso como en el análisis dinámico de los pórticos no lineales descrito en el capítulo precedente.

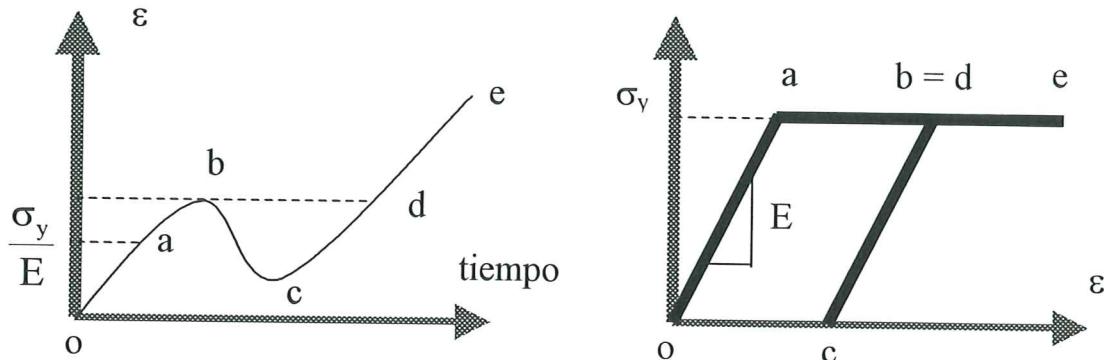


Figura 5.3 Sollicitación en deformación y respuesta en esfuerzo según el modelo elastoplástico perfecto

Durante el intervalo o-a indicado en la figura 5.3 el comportamiento es elástico ($f < 0$), por lo tanto la deformación plástica permanece constante ($d\varepsilon_p = 0$) e igual a cero. El esfuerzo puede ser entonces calculado gracias a la ley de estado. Gráficamente la respuesta se representa mediante una recta de pendiente "E" (ver figura 5.3b). El punto "a" (que corresponde a $\varepsilon = \frac{\sigma_y}{E}$) es el inicio del comportamiento elastoplástico ($f = 0$).

Durante la fase elastoplástica (intervalo a-b) el esfuerzo permanece constante ($d\sigma = 0$) e igual a σ_y . La ley de estado permite entonces calcular la deformación plástica cuya expresión viene dada por: $\varepsilon_p = \varepsilon - \frac{\sigma_y}{E}$. Gráficamente la respuesta se representa mediante

la recta horizontal $\sigma = \sigma_y$ tal y como se indica en la figura 5.3b. El intervalo b-c corresponde a una descarga elástica ($f < 0$), por lo tanto la deformación plástica permanece constante e igual a la deformación plástica correspondiente al instante "b". El esfuerzo puede ser de nuevo calculado mediante la ley de estado y la respuesta se representa mediante una recta de pendiente "E" (ver figura 5.3b). Durante el segundo proceso de carga c-e el comportamiento es elástico mientras que la función de fluencia es negativa y el punto de coordenadas (ε, σ) que representa al comportamiento recorre la misma recta de la descarga elástica anterior pero en sentido contrario. Al llegar al punto "d" ($f = 0$) comienza de nuevo el comportamiento elastoplástico con un esfuerzo constante e igual al esfuerzo de fluencia.

5.3 Modelo elastoplástico en endurecimiento cinemático lineal.

En la figura 5.4 se muestra el comportamiento que, según el modelo elastoplástico perfecto, se produciría durante un ensayo cíclico. Tal y como puede observarse, la fase plástica comienza siempre para valores absolutos del esfuerzo iguales al esfuerzo de fluencia.

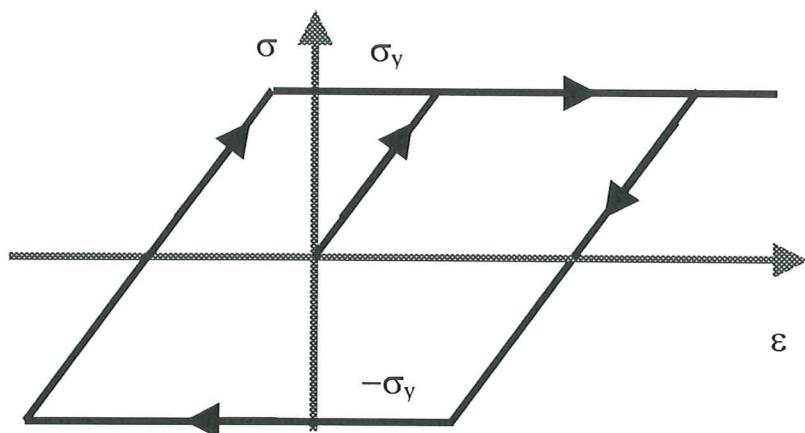


Figura 5.4 Comportamiento cíclico según el modelo elastoplástico perfecto.

En la figura 5.5 se muestra el comportamiento observado en el laboratorio para una probeta de acero. Se pueden constatar dos diferencias fundamentales entre el ensayo y el modelo. La primera es el aumento del esfuerzo durante la fase plástica. Este el proceso de endurecimiento descrito en la sección precedente. La segunda es la disminución del límite elástico aparente al pasar de plastificar en tracción a plastificar en compresión y viceversa. En otras palabras después de plastificar en tracción se comienza la plastificación en compresión con un esfuerzo inferior al esfuerzo de fluencia observado en la primera plastificación. Este es el denominado efecto Baushinger. El objetivo de esta sección es el de modificar el modelo elastoplástico perfecto para que represente el efecto Baushinger.

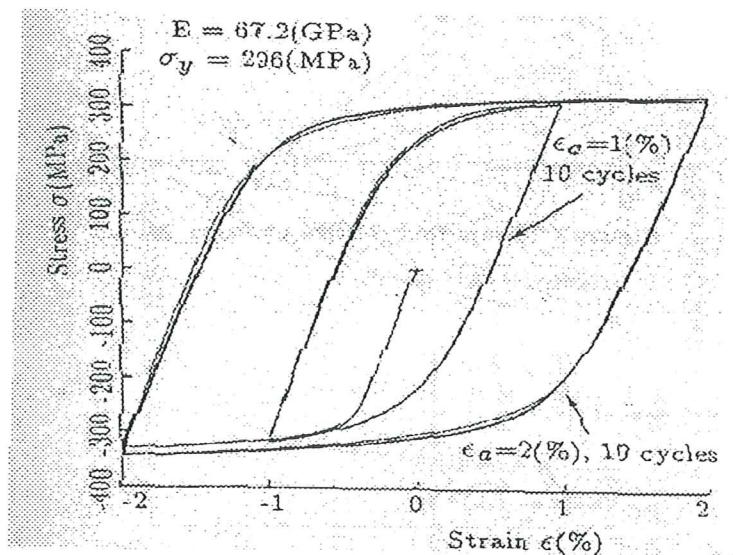


Figura 5.5. Efecto Baushinger en una probeta de aluminio según Sugiura, Watanabe, Lee y Chang

Una posible interpretación del efecto Baushinger es que se trata de la consecuencia del desplazamiento del dominio elástico al producirse la plastificación del material (ver figura 5.6).

En ese caso sólo es necesario modelar este desplazamiento para representar el efecto Baushinger. Teniendo en cuenta que el dominio elástico es definido exclusivamente por la función de fluencia, se conservarán las leyes de estado y de evolución del modelo elastoplástico perfecto:

$$\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon_p) \quad \begin{cases} d\varepsilon_p = 0 & \text{si } f < 0 \text{ o } df < 0 \\ d\varepsilon_p \neq 0 & \text{si } f = 0 \text{ y } df = 0 \end{cases} \quad (5.4)$$

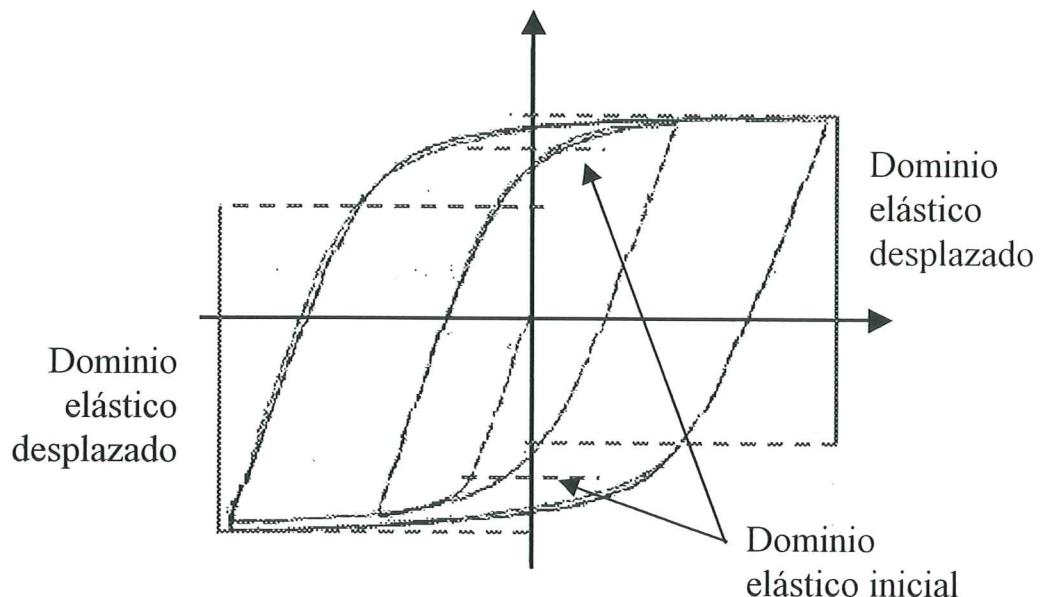


Figura 5.6. Efecto Baushinger por desplazamiento del dominio elástico.

La función de fluencia del nuevo modelo tiene ahora la siguiente expresión:

$$f = f(\sigma, \varepsilon_p) = |\sigma - c\varepsilon_p| - \sigma_y \leq 0 \quad (5.5)$$

Puede observarse que la nueva función difiere de la función de fluencia del modelo elastoplástico perfecto únicamente porque contiene el término $c\varepsilon_p$. Donde c representa una constante que es una propiedad del material.

Para esfuerzos positivos, la plastificación en el nuevo modelo comienza cuando el esfuerzo toma el valor $c\varepsilon_p + \sigma_y$ (f es igual a cero en ese caso), mientras que para esfuerzos negativos la plasticidad ocurre cuando el esfuerzo es igual a $c\varepsilon_p - \sigma_y$. El dominio elástico es por lo tanto el conjunto de valores del esfuerzo en el intervalo $(c\varepsilon_p + \sigma_y, c\varepsilon_p - \sigma_y)$. Cuando la deformación plástica es nula, el dominio elástico de ambos modelos coincide. Puede constatarse que, en el caso general, el centro del dominio elástico ya no es el punto $\sigma = 0$ sino que esta dado por la cantidad $c\varepsilon_p$. La rama plástica, definida por la ecuación $f = 0$ en ambos modelos, ya no es una recta horizontal sino una recta inclinada cuya pendiente depende de la constante c . En la figura 5.7 se representa el comportamiento uniaxial descrito por el nuevo modelo.

Tal y como puede observarse en la figura 5.7, el modelo elastoplástico con endurecimiento lineal permite representar el efecto Baushinger. Puede también observarse que, la relación esfuerzo-deformación para deformaciones monotónicas positivas esta representada por dos líneas rectas diferentes. La primera, de pendiente E, corresponde al comportamiento elástico. La segunda de pendiente $cE/(c+E)$ representa la fase de plastificación. Se dice entonces que el modelo genera una envolvente “bilineal”.

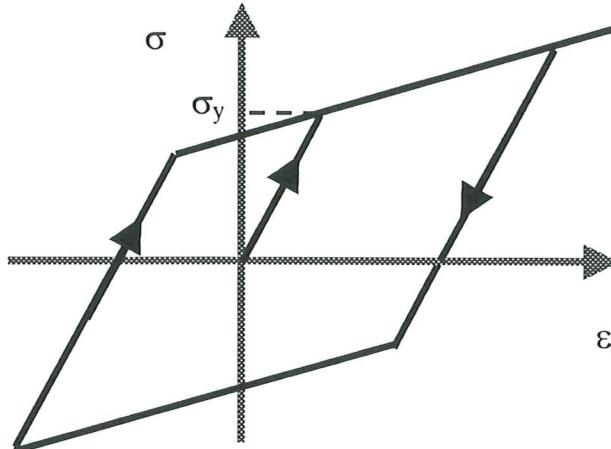


Figura 5.7 Comportamiento uniaxial según el modelo elastoplástico con endurecimiento cinemático.

5.4 Modelo elastoplástico con endurecimiento cinemático no lineal.

El modelo descrito en la sección precedente presenta, sin embargo, un inconveniente con respecto al modelo elastoplástico perfecto: no limita los esfuerzos admisibles del material. Así, el esfuerzo en el material puede aumentar indefinidamente si la constante c es estrictamente positiva. El objetivo de esta sección es el de presentar un modelo que permita representar el efecto Baushinger imponiendo al mismo tiempo un límite máximo al esfuerzo que puede ser aplicado al material.

Al igual que en el caso anterior se conservarán las mismas leyes de estado y de evolución (5.4) y sólo se modificará la función de fluencia. Se introduce ahora la variable X que mide la posición del centro del dominio elástico. La función de fluencia del modelo con endurecimiento cinemático se puede escribir de manera general como:

$$f = f(\sigma, X) = |\sigma - X| - \sigma_y \leq 0 \quad (5.6)$$

En el modelo lineal, la variable X se escogió proporcional a la deformación plástica. Ello permite un desplazamiento ilimitado de la posición del centro y por lo tanto un crecimiento ilimitado del esfuerzo máximo que admite el modelo. Para corregir este defecto del modelo con endurecimiento lineal, se escogerá la variación de X de tal manera que se imponga un límite superior (una asintota) para deformaciones plásticas positivas y un límite inferior para deformaciones plásticas negativas. Una expresión que cumple con las condiciones mencionadas es:

$$dX = \alpha([\sigma_u - \sigma_y]d\epsilon_p - Xdp) \quad X = 0 \text{ para } p = 0 \quad (5.7)$$

donde σ_u es el límite máximo impuesto al esfuerzo, α es otra constante del material y p es la deformación plástica acumulada que se define mediante la expresión:

$$dp = |d\epsilon_p| \quad (5.8)$$

La definición anterior implica que la variable p funciona como un “cuentakilómetros” plástico. En otras palabras independientemente del signo (o la dirección) de los incrementos de la deformación plástica, estos siempre se acumulan en valor absoluto en la variable p .

Puede ahora demostrarse que efectivamente las ecuaciones (5.7, 5.8) imponen un límite superior y un límite inferior a la evolución de la variable X . Supóngase una solicitudación monotónica que genere incrementos plásticos siempre positivos. En ese caso, dp y $d\epsilon_p$ son iguales y del mismo signo. La ecuación diferencial (5.7) se transforma entonces en:

$$dX = \alpha(\sigma_u - \sigma_y - X)d\epsilon_p \quad (5.9)$$

cuya solución es:

$$X = (\sigma_u - \sigma_y)(1 - e^{-\alpha\epsilon_p}) \quad (5.10)$$

Puede constatarse que X vale cero para deformación plástica nula y que tiende asintoticamente a $(\sigma_u - \sigma_y)$ cuando la deformación plástica tiende a infinito. Teniendo en cuenta que la rama elástica siempre está caracterizada por $f = 0$ puede concluirse que el esfuerzo tiende asintoticamente a σ_u tal y como se observa en la figura 5.8

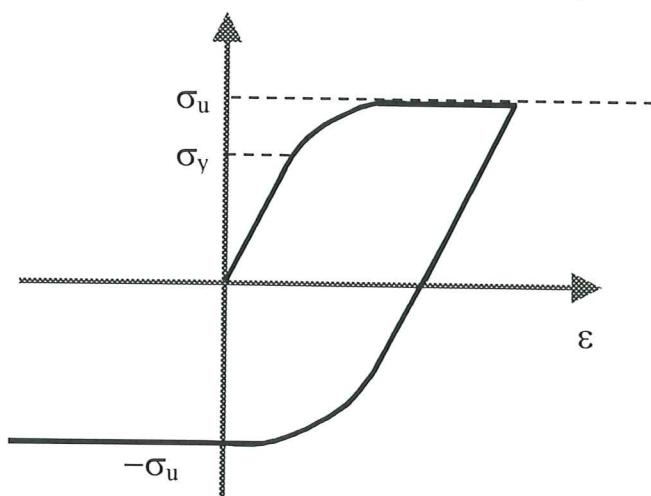


Figura 5.8. Comportamiento uniaxial según el modelo elastoplástico con endurecimiento no lineal.

Considérese ahora una solicitudación monotónica que genere siempre incrementos plásticos negativos. Los incrementos de p y de ϵ_p tienen ahora signos opuestos ($dp = -d\epsilon_p$), lo que conduce a la siguiente ecuación diferencial:

$$dX = \alpha(\sigma_u - \sigma_y + X)d\varepsilon_p \quad (5.11)$$

cuya solución es:

$$X = -(\sigma_u - \sigma_y)(1 - e^{\alpha\varepsilon_p}) \quad (5.12)$$

Como puede observarse en la figura 5.8 el límite inferior para el esfuerzo es ahora $-\sigma_u$.

5.5 Resumen.

En este capítulo se han descrito tres leyes de comportamiento que generalizan la ley de Hooke: el modelo elastoplástico perfecto, el modelo elastoplástico con endurecimiento lineal y el modelo con endurecimiento no lineal. Todos estas leyes de comportamiento se describen a partir de tres elementos: la ley de estado, la función de fluencia y la ley de evolución de las deformaciones plásticas. Todos los modelos considerados comparten la misma ley de estado (ecuación (5.1)) y la misma ley de evolución de las deformaciones plásticas (ecuación (5.3)). Sólo la función de fluencia caracteriza cada modelo. El modelo elastoplástico perfecto (función de fluencia (5.2)) permite la representación de las deformaciones permanentes y la existencia de un límite máximo en esfuerzo del material. Este modelo no permite, sin embargo, la caracterización del efecto Baushinger. El modelo con endurecimiento cinemático lineal incluye este efecto, pero por el contrario no limita el esfuerzo máximo del material. El modelo con endurecimiento cinemático no lineal (expresiones (5.6-5.8)) generaliza los modelos anteriores y permite la representación de todos los fenómenos antes mencionados.

6. Porticos elastoplásticos

En la introducción al capítulo anterior se subrayó la importancia de disponer de modelos que permitan la reproducción de deformaciones permanentes. Este capítulo se ocupa de la extensión de la plasticidad al caso de los pórticos planos.

Las ecuaciones cinemáticas y dinámicas descritas en los capítulos dos y tres no resultan alteradas al incluir los efectos plásticos en el comportamiento del pórtico. Sólo se modifica la ley de comportamiento. Las nuevas leyes de comportamiento se basarán en los modelos descritos en el capítulo precedente y en el concepto de rótula plástica. Esta idea, fundamental para el desarrollo de todos los modelos inelásticos presentados en la monografía, será descrita en detalle. Este concepto puede ser empleado en los casos en los que los efectos plásticos están localizados en zonas pequeñas con respecto al tamaño de la estructura.

Este capítulo no pretende ser un estudio exhaustivo del análisis plástico de pórticos planos. En particular no se mencionan los modelos multicapas que han recibido mucha atención en la literatura reciente, ni todos los modelos histeréticos de importancia en las aplicaciones de ingeniería sísmica. Se introducen, sin embargo, los conceptos fundamentales que permitirán al lector interpretar rápidamente modelos más sofisticados.

6.1 Proceso de plastificación en una viga simplemente apoyada.

Considérese a modo de ejemplo una viga simplemente apoyada y sometida a una carga concentrada en el centro tal y como se indica en la figura 6.1. La barra tiene una sección simétrica con respecto a su eje neutro constante. El material de la viga obedece a la ley de comportamiento elastoplástica perfecta definida en la sección 5.2.

Cuando la fuerza P aumenta, los esfuerzos normales y las deformaciones unitarias pasan en la sección transversal más solicitada, (la que se encuentra en la mitad de la viga) por los estados indicados en la figura 6.2.

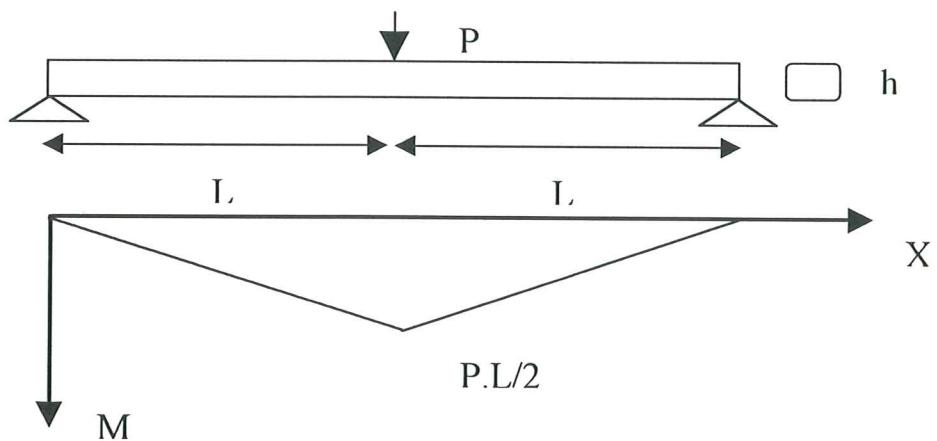


Figura 6.1 viga simplemente apoyada sometida a una carga concentrada en el centro

En la figura 6.2a se muestra la distribución de esfuerzos que corresponde al valor del momento flector m_e que produce un esfuerzo máximo de tracción y compresión igual al esfuerzo de fluencia. Si la solicitación es monotónica creciente, esta sería la última distribución elástica de esfuerzos en esta sección. La figura 6.2b muestra la distribución de esfuerzos para un valor del momento superior a m_e . En esa figura se observa una zona de la sección transversal en la cual el esfuerzo normal es igual al esfuerzo de fluencia. Esta zona se denomina "zona plástica". Al aumentar el momento flector, aumenta el tamaño de la zona plástica hasta llegar a la distribución de esfuerzos de la figura 6.2c. En esta, se ha producido la plastificación total de la sección y se ha alcanzado la resistencia máxima a la flexión: $m = m_y$. Este último valor se denomina "momento de fluencia" de la sección. Durante este proceso se produce una curva momento-curvatura de como la indicada en la figura 6.3

a)

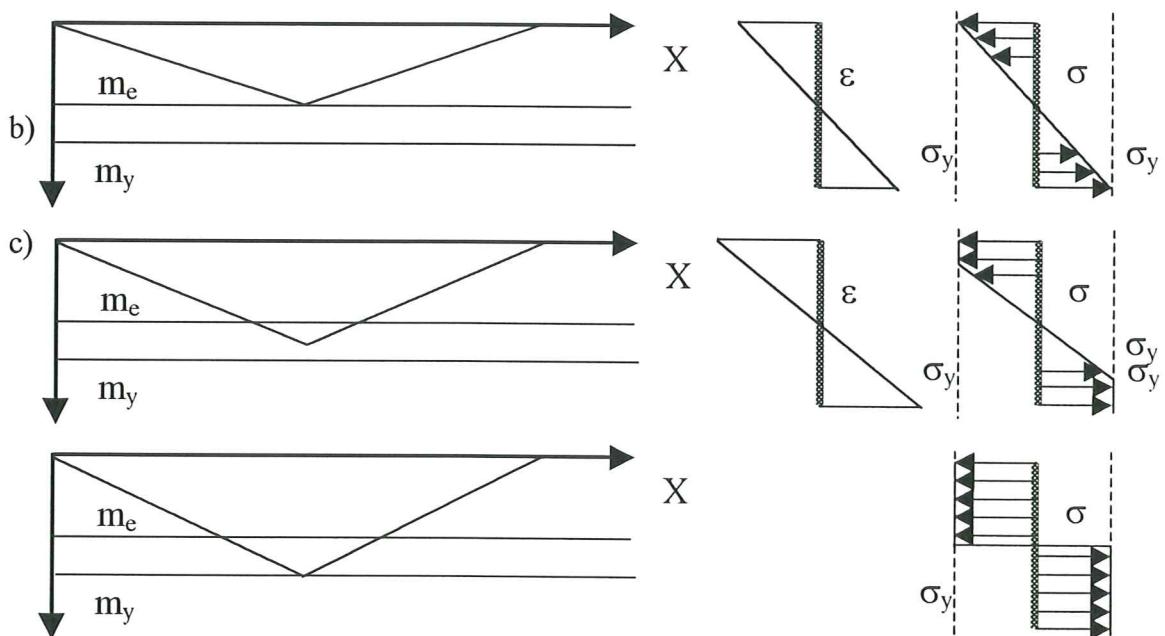


Figura 6.2 Evolución de esfuerzos y deformaciones en la sección central de la viga a) $m = m_e$. b) $m_e < m < m_y$ c) $m = m_y$

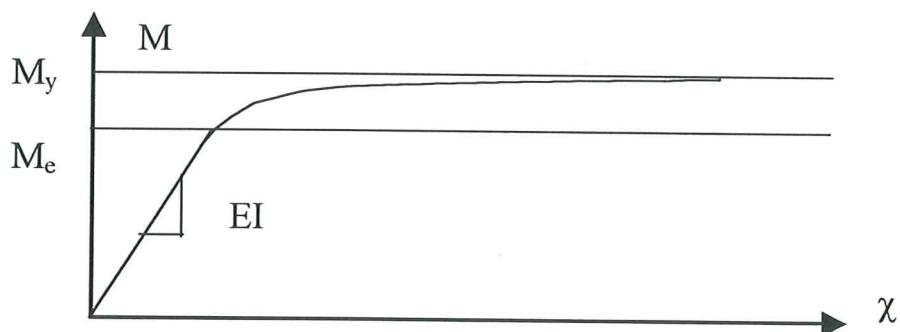


Figura 6.3 Relación momento-curvatura en la sección central de la viga.

Para valores inferiores a m_e existe una relación lineal entre el momento y la curvatura de pendiente EI (modulo de elasticidad multiplicado por el momento de inercia). A partir de este valor se produce una disminución gradual de la tangente a la curva cuya pendiente tiende asintóticamente a cero cuando la curvatura tiende a infinito. Cuando esto ocurre, el momento tiende a m_y . Esta disminución de la pendiente es consecuencia de la propagación de la zona plástica en la sección transversal.

De manera simultánea al aumento de la zona plástica en la sección transversal, se presenta un proceso de plastificación a lo largo de la viga tal y como se indica en la figura 6.4.

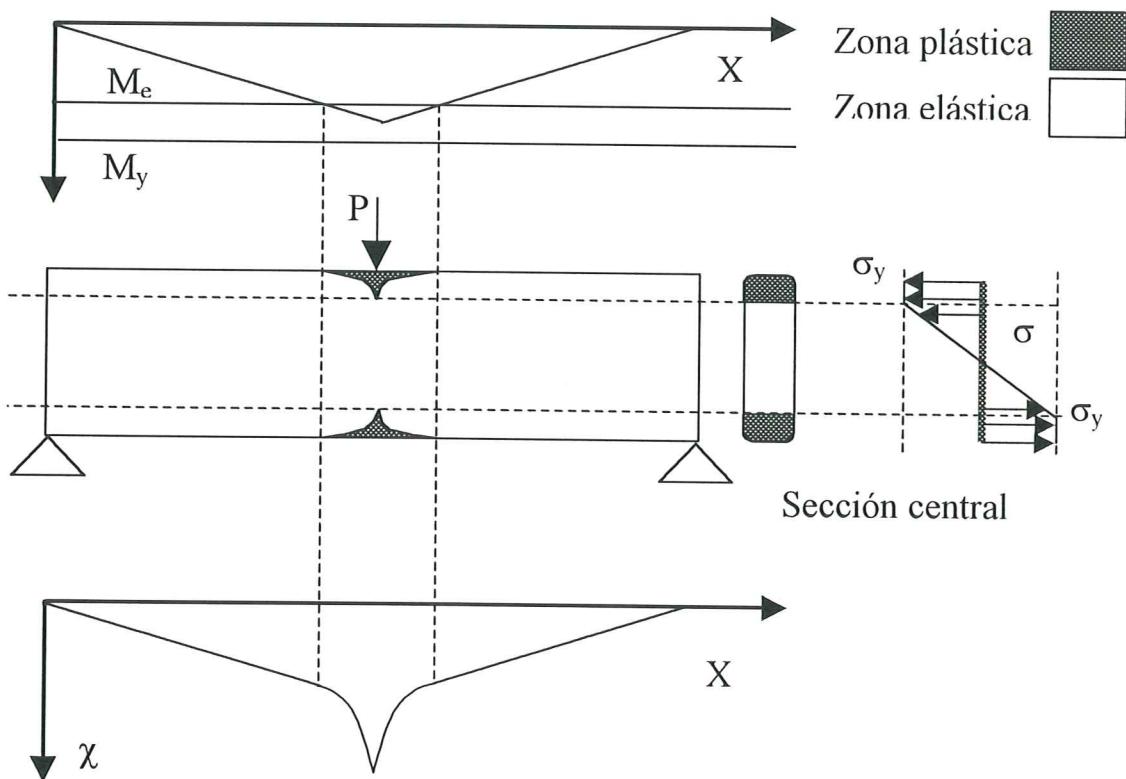


Figura 6.4 Distribución de momentos, zona plástica y curvaturas a lo largo de la viga.

Cuando el momento en la sección central tiende al momento de fluencia, la curvatura aumenta considerablemente en la sección central (de hecho tiende a infinito)

mientras que se mantiene proporcional al momento flector en la zona sin deformaciones plásticas. La zona de deformaciones importantes se mantiene en muchos casos muy localizada.

En el caso general, este tipo de análisis cuantitativo no siempre es posible y es necesario recurrir a métodos numéricos (método de los elementos finitos por ejemplo). El análisis numérico de estructuras elastoplásticas, tal y como se muestra en este ejemplo, requiere de la discretización del miembro en las dos direcciones de los ejes coordenados. Ello con el objeto de poder reproducir numéricamente la progresión de la zona plástica a lo largo del eje neutro y en la sección transversal del miembro. Así, aunque la teoría de vigas elásticas es unidimensional, la teoría de vigas elastoplásticas no lo es. Es evidente que este grado de detalle en el análisis es, con frecuencia, innecesario en las aplicaciones prácticas y casi siempre muy costoso en términos computacionales.

6.2. La rótula plástica.

El objeto de esta sección es el describir un procedimiento simplificado para el análisis de estructuras elastoplásticas que no requiera la discretización bidimensional de la estructura.

La primera idea posible, que no es en definitiva la que se empleará, consiste en aproximar la relación momento curvatura de la figura 6.5 por medio de dos rectas: una recta de pendiente EI hasta que el momento alcance el valor de M_y y a continuación una recta horizontal (véase la figura 6.6). Esto equivale a suponer que cuando $m < M_y$ la sección se comporta elásticamente y para $m = M_y$, la sección está totalmente plastificada. Es evidente que en este tipo de aproximación, sólo sería necesaria la discretización de la viga a lo largo del eje neutro.

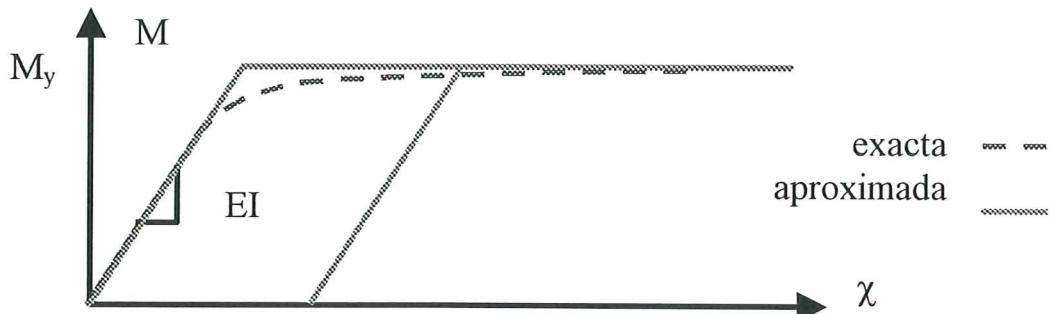


Figura 6.6 Relación momento curvatura aproximada.

En el caso particular de la viga simplemente apoyada, la zona plástica, la distribución aproximada de curvaturas y la gráfica de momentos se muestran en la figura 6.7

Puede observarse que en el ejemplo considerado, sólo una sección soporta el momento máximo M_y . La distribución de momentos coincide con la de la teoría exacta puesto que el problema es isostático. En la distribución de curvaturas se produce una discontinuidad en la sección central ya que según el modelo aproximado, para $m = M_y$, el valor de la curvatura es arbitrario.

El modelo aproximado sería válido, y considerablemente más simple que la teoría exacta, si no existiesen diferencias significativas entre uno y otro en el cálculo de las rotaciones y las flechas. En la teoría de vigas, la rotación relativa entre dos secciones corresponde al área bajo el diagrama de distribución de curvaturas a lo largo del eje x.

Tal y como puede constatarse, en la teoría exacta (figura 6.4) se produce un aumento acusado de la rotación relativa en las zonas plásticas. De hecho, la rotación relativa aumenta indeterminadamente cuando el momento en la sección central se acerca a m_y y la curvatura tiende a infinito. La flecha se calcula midiendo el área bajo el diagrama de rotaciones, lo que implica que el mismo fenómeno se presenta también para esta variable. Por el contrario, en el diagrama aproximado no ocurre nada de esto puesto que la curvatura aumenta en una sola sección de la viga. El área bajo la gráfica de curvaturas de la figura 6.7 es la misma independientemente del valor que tome la curvatura en el centro de la viga. El modelo aproximado no puede, por lo tanto, representar la naturaleza física del fenómeno de plastificación en lo que a desplazamientos y rotaciones se refiere.

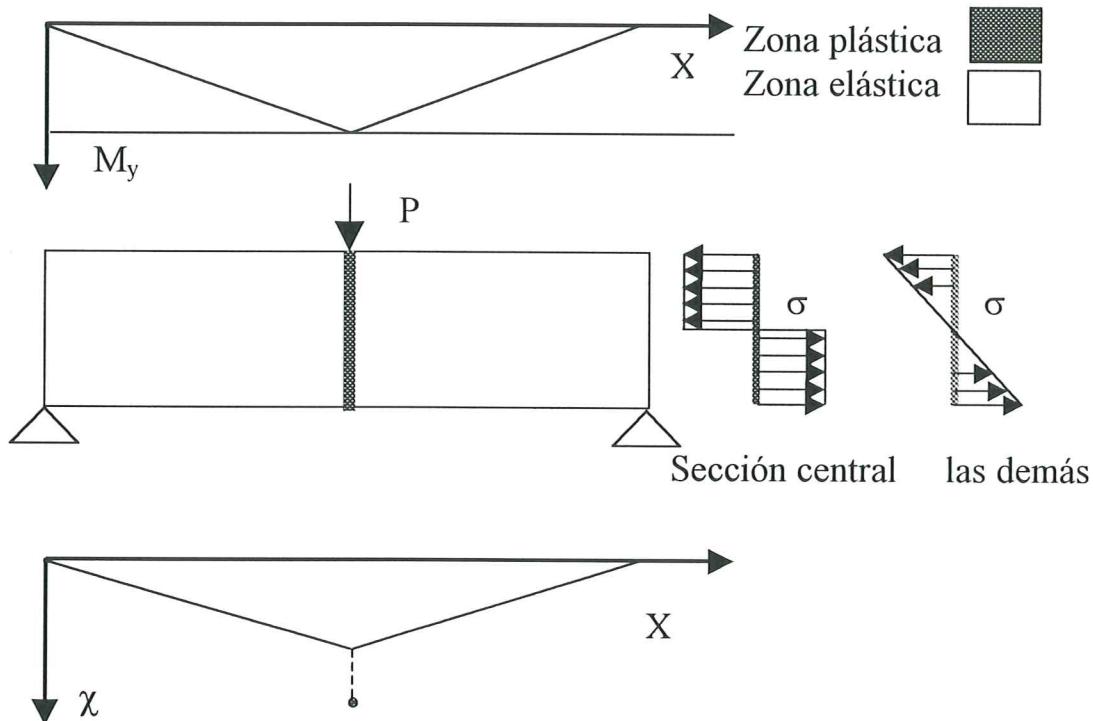


Figura 6.7 Zona plástica y distribución de momentos y curvaturas aproximada.

Es ahora evidente que en esta sección central es necesario concentrar la rotación plástica afín de obtener un modelo simplificado que represente todos los fenómenos observados con la teoría elástica. En otras palabras, se colocará en la sección de máximo momento, un resorte a flexión que experimentará rotaciones permanentes únicamente cuando el momento alcance el valor de m_y . Este resorte es denominado “rótula plástica”.

El comportamiento de la rótula plástica no puede ser descrito en función del momento y la curvatura sino en función de momento y rotación. Esta ley de comportamiento se expresa empleando de nuevo una función de fluencia como en los modelos uniaxiales descritos en el capítulo precedente. En el caso de una rótula plástica perfecta la función de fluencia es:

$$f(m) = |m| - m_y \quad (5.13)$$

La rotación de una rótula plástica se denomina “rotación plástica” y se calcula mediante la siguiente ley de evolución:

$$\begin{cases} d\theta^p = 0 & \text{si } f < 0 \text{ o } df < 0 \\ d\theta^p \neq 0 & \text{si } f = 0 \text{ y } df = 0 \end{cases} \quad (5.14)$$

Donde θ^p es la rotación plástica de la rótula. La ley de evolución de una rótula plástica perfecta genera el diagrama momento-rotación indicado en la figura 6.8 y la rotación plástica de la rótula tiene la interpretación indicada en la figura 6.9

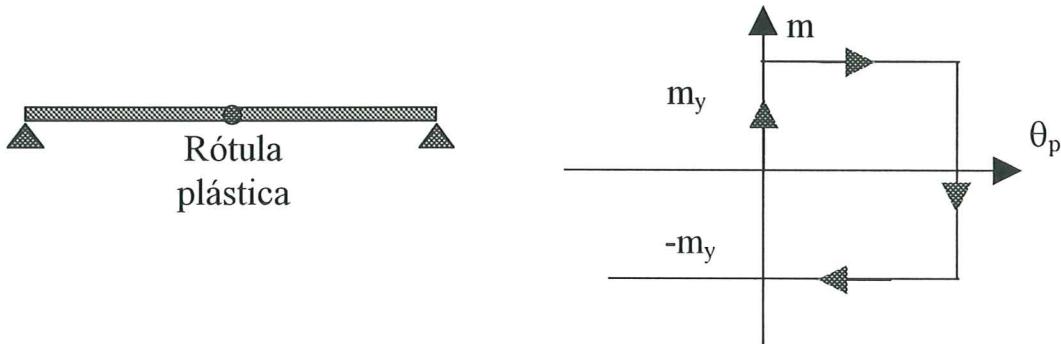


Figura 6.8. Relación momento rotación en una rótula plástica perfecta.

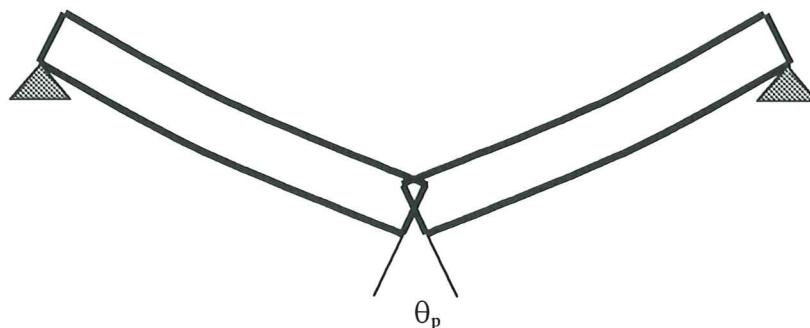


Figura 6.9. Interpretación de la rotación plástica.

Tal y como se observa en la figura 6.8, si el momento sobre la rótula es inferior al momento de fluencia, su rotación es nula. En otras palabras, el comportamiento del conjunto es puramente elástico y no hay diferencias con la teoría de la resistencia de materiales. La existencia de la rótula limita la capacidad del conjunto para soportar la fuerza concentrada P , puesto que la rótula comienza a rotar indefinidamente al alcanzarse el valor del momento de fluencia en la sección central de la viga. Sólo en estructuras hiperestáticas sería posible un aumento de la fuerza.

El modelo perfectamente plástico no es el único que puede ser empleado para describir el comportamiento de una rótula plástica. Es perfectamente posible postular la existencia de una rótula plástica con endurecimiento cinemático lineal o no añadiendo el término correspondiente en la función de fluencia de la rótula.

6.3. Ley de comportamiento elastoplástica perfecta para miembros de pórticos planos.

Tal y como se explico en el capítulo 4, la ley de comportamiento de un miembro de un pórtico plano relaciona los esfuerzos generalizados $\{M\}$ con la historia de las deformaciones generalizadas $\{\Phi\}$.

Para obtener este modelo se adoptará la hipótesis denominada “de plasticidad concentrada” que consiste en suponer que un miembro de un pórtico plano esta compuesto por una viga-columna elástica (lineal o no) y dos rótulas (*i* y *j*) plásticas en los extremos.

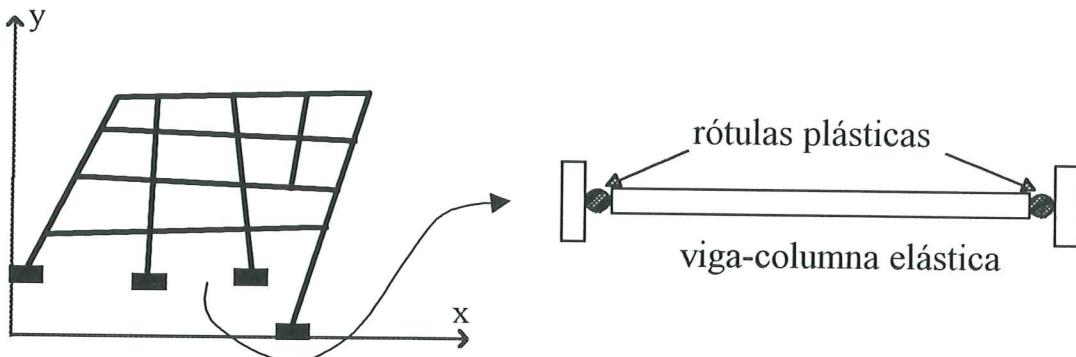


Figura 6.10 Modelo de plasticidad concentrada de un miembro de un pórtico plano.

Se introduce ahora una nueva variable interna: la matriz de deformaciones generalizadas plásticas: $\{\Phi^P\} = (\phi_i^P, \phi_j^P, 0)$ que contiene las rotaciones plástica de la rótula "i" y de la rótula "j" (ambas medidas con respecto a la cuerda deformada).

Las deformaciones generalizadas totales del miembro $\{\Phi\}$ pueden descomponerse en deformaciones de la viga-columna elástica $\{\Phi^{vc}\}$ y deformaciones de las rótulas plásticas $\{\Phi^P\}$:

$$\{\Phi\} = \{\Phi^{vc}\} + \{\Phi^P\} \quad (5.15)$$

Las deformaciones de la viga columna se relacionan con los esfuerzos generalizados mediante las leyes de comportamiento descritas en el capítulo 4 puesto que su comportamiento es elástico por definición. Sustituyendo estas ecuaciones en la expresión (5.15) se obtiene la ley de estado de un miembro elastoplástico:

$$\{M\} = [S]\{\Phi - \Phi^P\} + \{M_0\} \quad (5.16)$$

Donde $[S]$ es la matriz de rigidez de la viga-columna elástica tal y como fue definida en el capítulo precedente y $\{M_0\}$ los esfuerzos generalizados iniciales. La matriz de rigidez puede ser constante o depender del alargamiento de la cuerda dependiendo de si se considera o no el acoplamiento entre la fuerza axial y los efectos de flexión.

Las leyes de evolución de las deformaciones generalizadas plásticas se obtiene mediante dos funciones de fluencia, una para cada rótula plástica, como las descritas en la sección anterior. Por ejemplo si se consideran rótulas plásticas perfectas, se tiene:

$$f_i(m_i) = |m_i| - m_y \quad f_j(m_j) = |m_j| - m_y \quad (5.17)$$

Donde f_i es la función de fluencia de la rótula i y f_j la de la rótula j . La ley de evolución de las deformaciones plásticas generalizadas del miembro es ahora la siguiente:

$$\begin{cases} d\phi_i = 0 & \text{si } f_i < 0 \text{ o } df_i < 0 \\ d\phi_i \neq 0 & \text{si } f_i = 0 \text{ y } df_i = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} d\phi_j = 0 & \text{si } f_j < 0 \text{ o } df_j < 0 \\ d\phi_j > 0 & \text{si } f_j = 0 \text{ y } df_j = 0 \end{cases} \quad (5.18)$$

La ley de estado (5.16) y la ley de evolución (5.18) constituyen la ley de comportamiento generalizada del modelo elastoplástico perfecto en el sentido dado al término en el capítulo 4. En otras palabras, este modelo más las ecuaciones cinemáticas y de equilibrio introducidas en los capítulos 2 y 3 definen perfectamente el comportamiento de la estructura.

Puede constatarse la evidente similitud entre la ley de comportamiento de un miembro de un pórtico plano y el modelo elastoplástico perfecto en el caso uniaxial descrito en las secciones 5.1 y 5.2.

6.4 Pórticos elastoplásticos con endurecimiento cinemático.

Tal y como se mencionó en la sección 6.2, el comportamiento de la rótula no tiene por que ser perfectamente plástico. Es posible introducir términos de endurecimiento cinemático en las rótulas. El nuevo modelo para miembros de pórticos planos esta compuesto por la ley de estado (5.16) y la ley de evolución de las rotaciones plásticas (5.18). Sólo cambia la expresión de las funciones de fluencia que ahora se escriben de la siguiente manera:

$$f_i(m_i, x_i) = |m_i - x_i| - m_y \quad f_j(m_j, x_j) = |m_j - x_j| - m_y \quad (5.19)$$

Puede observarse que la única modificación es la introducción de la variable x . Tal y como se describió en el capítulo 5, la variable x corresponde a la posición del centro del dominio elástico en el espacio de momentos flectores. Se deben ahora añadir las leyes de evolución de la variable x . Si el endurecimiento es lineal, la expresión de x es:

$$x = c\phi^p \quad (5.20)$$

El comportamiento de la rótula descrito por este modelo se muestra en la figura 6.11.

Si el endurecimiento es no lineal, la ley de evolución correspondiente es:

$$dx = \alpha([m_u - m_e]d\phi^p - x|d\phi^p|) \quad (5.21)$$

Este modelo permite la introducción del momento m_e que corresponde a la primera plastificación de la sección y el momento m_u que corresponde al momento último resistente de la sección. El comportamiento de la rótula se muestra en la figura 6.12

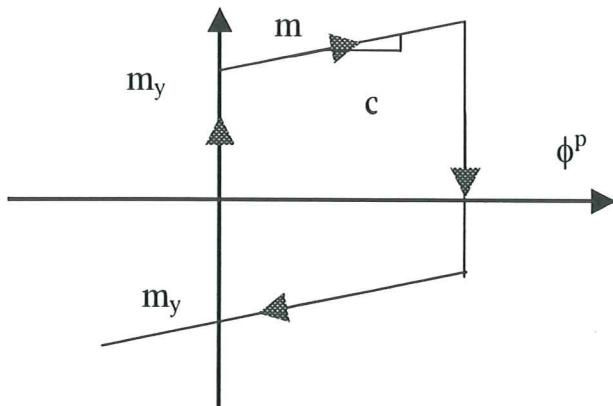


Figura 6.11 Comportamiento de una rótula plástica con endurecimiento cinemático lineal.

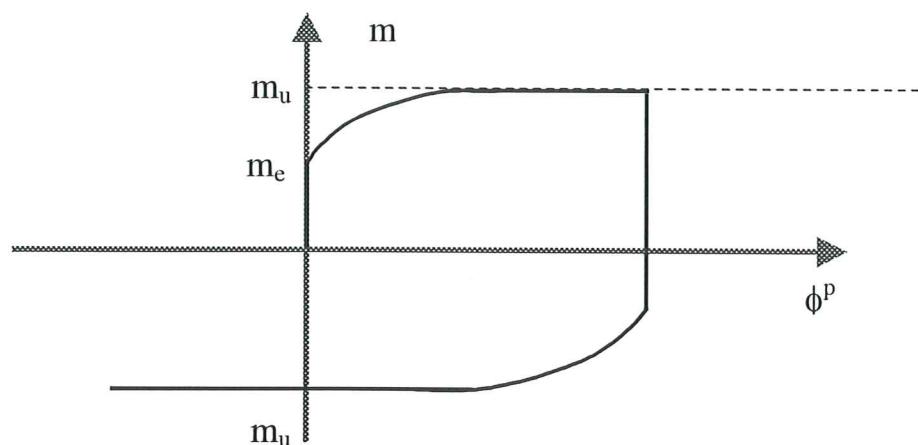


Figura 6.12 Comportamiento de una rótula plástica con endurecimiento cinemático no lineal.

De esta manera el proceso de plastificación gradual de la sección puede ser modelado inclusive usando el concepto de rótula plástica. El parámetro α también depende de la forma de la sección y puede calcularse para que el comportamiento del conjunto viga-columna elástica y rótulas reproduzcan la gráfica momento-rotación de una viga elastoplástica perfecta con zona plástica finita como la descrita en la sección 6.1.

6.5 Análisis de pórticos elastoplásticos.

Si el problema planteado es geométricamente lineal y estático y las rótulas plásticas son perfectas, el análisis estructural puede ser transformado en una serie de problemas elásticos con articulaciones internas. Cada uno de los problemas elásticos corresponde a un incremento de carga y las rótulas plásticas que aparecen en la estructura son representadas por medio de articulaciones internas. Esto es posible ya que durante un incremento de carga, el incremento de momento recibido por la rótula plástica es nulo, de ahí que sea posible la sustitución. Este es el procedimiento descrito en todos los libros de introducción a la plasticidad.

Cuando se introduce alguno de los términos no lineales o dinámicos en el problema o cuando las rótulas presentan endurecimiento, este procedimiento ya no es aplicable. Por el contrario, el procedimiento descrito en el capítulo 4 sigue siendo válido. El problema elastoplástico, dinámico y geométricamente no lineal también puede reducirse a la resolución de una ecuación del tipo $\{L(U)\} = 0$ en cada uno de los pasos de cálculo. Sólo puede apreciarse una diferencia con respecto al caso elástico. En los pórticos elásticos el cálculo de los esfuerzos generalizados se realiza mediante la aplicación directa de la ley de estado. En los pórticos elastoplásticos ello no es posible ya que las deformaciones plásticas también dependen de los momentos. Es, por lo tanto necesario resolver un sistema de ecuaciones compuesto por la ley de estado, las leyes de evolución de las rotaciones plásticas y las funciones de fluencia. El método usualmente empleado para resolver este sistema de ecuaciones se llama algoritmo predictor-corrector y no será descrito en esta monografía. El método puede ser consultado en el artículo de Cipollina et al. indicado en la bibliografía.

6.6 Resumen.

El análisis de estructuras elastoplásticas se basa en el concepto de rótula plástica. Esta puede ser considerada como un resorte a flexión, rígido durante el comportamiento elástico de una estructura y luego plástico perfecto o con endurecimiento. El uso de la hipótesis de plasticidad concentrada permite formular la ley de comportamiento de un miembro de un pórtico plástico. El modelo resultante tiene la misma estructura general del caso unidimensional: ley de estado (ecuación (5.16)), leyes de evolución de las rotaciones plásticas (ecuaciones (5.18)) y funciones de fluencia (ecuaciones (5.17) si las rótulas son perfectamente plásticas, ecuaciones (5.19) si presentan endurecimiento). El análisis de un pórtico elastoplástico puede ser planteado de manera similar a la utilizada en el caso de estructuras elásticas.

7. Mecánica de la fractura frágil

En los capítulos precedentes sólo se han considerado dos comportamientos posibles para el material: el elástico y el elastoplástico. El primer modelo no establece límites a los esfuerzos admisibles en la estructura. En el segundo se admite que la resistencia del material es constante y no varía durante la vida útil de la estructura. Es evidente que estas hipótesis no son aceptables en numerosos casos prácticos. La aplicación de solicitudes, repetidas o no, produce una degradación progresiva de las propiedades mecánicas de la estructura y del material, lo que trae como consecuencia una perdida gradual de su resistencia. El objetivo de este capítulo y del que viene es el de presentar los conceptos fundamentales de las dos teorías que describen este proceso: la mecánica de la fractura y la teoría del daño continuo respectivamente.

En la mecánica de la fractura frágil se sigue suponiendo que el material es elástico, pero se admite la existencia de fisuras macroscópicas que pueden propagarse. La propagación de la fisura conduce a la disminución de la resistencia y de la rigidez de la estructura y eventualmente a su colapso. Este proceso se ilustra en las gráficas en la figura 7.1.

Según Broek, la mecánica de la fractura debería poder responder a las siguientes preguntas:

- a) ¿Cuál es la resistencia de la estructura en función de la longitud de la fisura?
- b) ¿Cuál es la longitud de fisura admisible en una estructura bajo las cargas normales de servicio? En otras palabras ¿Cuál es la longitud crítica?
- c) ¿Cuánto tiempo debe pasar para que el tamaño de la fisura aumente desde una longitud inicial hasta la longitud crítica?
- d) ¿Cuál es el tamaño máximo admisible que pueden tener inicialmente las fisuras y defectos iniciales de la estructura, teniendo en cuenta la vida útil esperada?
- e) ¿Con qué frecuencia es necesario realizar inspecciones periódicas en la estructura?

Puede observarse que la mecánica de la fractura es de especial utilidad en problemas de Ingeniería Mecánica y Aeronáutica. En el capítulo 9 de esta monografía se mostrará

que sus conceptos son también útiles para el análisis de estructuras aporticadas bajo solicitudes extraordinarias.

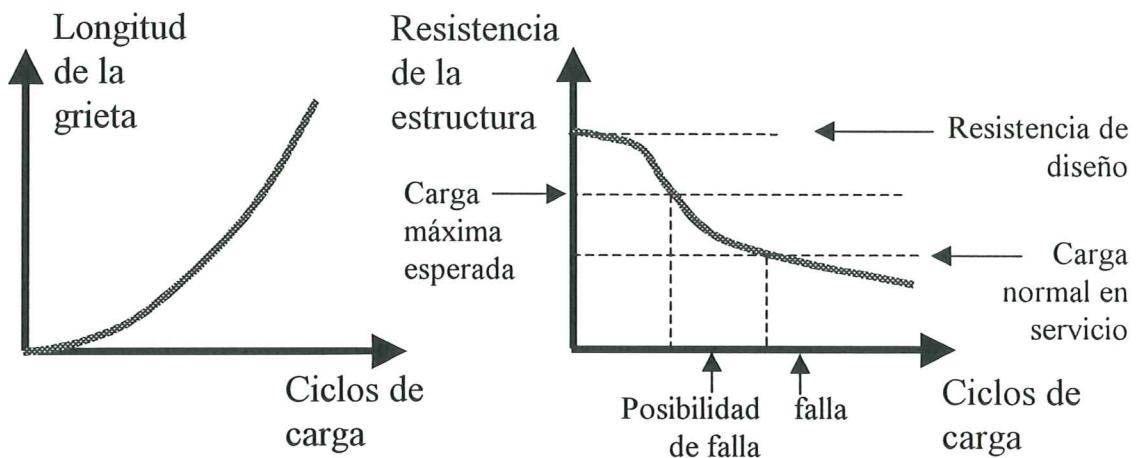


Figura 7.1. Propagación de una fisura en una estructura y degradación de su resistencia según Broek.

7.1 Distribución de esfuerzos en los bordes de un agujero elíptico.

La clave para responder a todas las preguntas planteadas en la introducción está en determinar las condiciones de propagación de la fisura. Este es el objetivo de esta y la próxima sección.

Considérese una placa infinita con un agujero elíptico, de espesor unitario y hecha de un material elástico isótropo. La placa está sometida a esfuerzos de tracción S constantes en la dirección del eje x_2 lejos del agujero tal y como se muestra en la figura 7.2.

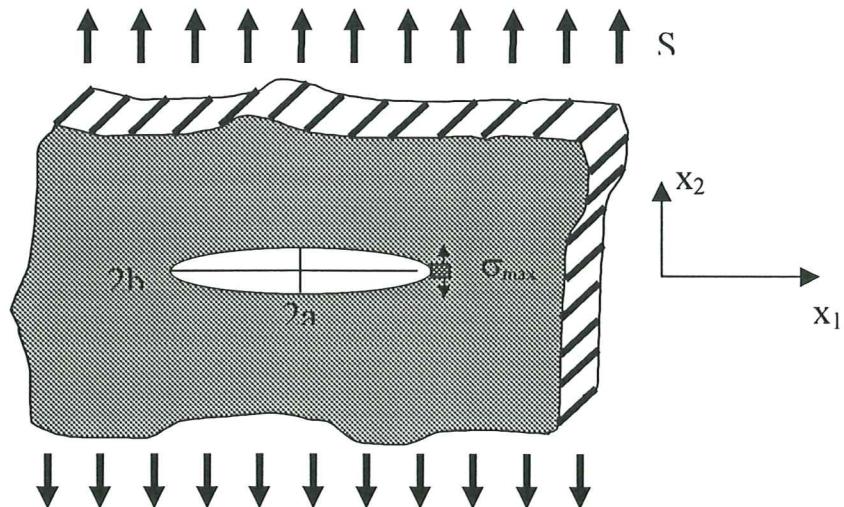


Figura 7.2. Placa con agujero elíptico sometida a tracción uniforme en el infinito.

La distribución de esfuerzos en la placa puede ser calculada empleando el método de la función de Airy y se observa que los esfuerzos máximos ocurren en el borde del

agujero, en la dirección del eje x_2 , y toman un valor de $\sigma_{\max} = S \left(1 - 2 \frac{a}{b}\right)$. El caso de una placa con un agujero circular se obtiene haciendo el eje menor b igual al eje mayor a . Puede observarse entonces que el esfuerzo tres veces mayor al aplicado en el infinito.

Una placa fisurada puede ser representada haciendo tender el eje menor b hacia cero. Se obtiene entonces, que el esfuerzo elástico en la punta de la fisura tiende a infinito independientemente de la longitud de la fisura (el valor de a) o del esfuerzo aplicado (la tracción S). Es, por lo tanto, evidente que ningún criterio de esfuerzos (Tresca, Von Mises, Rankine, etc.), puede ser usado para predecir la propagación de una fisura.

Inicialmente la pregunta planteada era: ¿Cuándo se propaga una fisura?. Sin embargo, el resultado anterior hace que la pregunta a responder sea: si los esfuerzos elásticos en la punta de la fisura son infinitos ¿Por qué hay fisuras que no se propagan?. La respuesta a esta última pregunta puede hallarse haciendo un análisis de la evolución de la energía durante la propagación de la fisura.

7.2 El criterio de Griffith.

Según Griffith, la energía total en la placa fisurada puede expresarse de la siguiente manera:

$$E = W - T_{ex} + W_s \quad (7.1)$$

Donde W es la energía de deformación elástica, T_{ex} es el trabajo de las fuerzas externas y W_s corresponde a una energía superficial asociada a la aparición de nuevas superficies durante la propagación de la fisura. Para el caso particular considerado, la energía de deformación es igual a:

$$W = W_0 - \frac{\pi S^2 a^2}{E} \quad (7.2)$$

Donde W_0 es la energía elástica de la placa cuando no hay fisura y E el modulo de elasticidad del material.

Según la hipótesis de Griffith, el término W_s es proporcional a la longitud de la fisura y tiene por expresión:

$$W_s = 4 \gamma a \quad (7.3)$$

Donde γ es la densidad de energía por unidad de superficie. Supóngase ahora que la placa está sometida a desplazamientos impuestos constantes en el infinito, de tal manera que las reacciones a esos desplazamientos sean iguales a la tracción S . La expresión (7.2) sigue siendo válida en ese caso y, además, el trabajo de las fuerzas externas es nulo. Se tiene por lo tanto:

$$E = -\frac{\pi S^2 a^2}{E} + 4 \gamma a + W_0 \quad (7.4)$$

La energía total de la placa puede representarse mediante una parábola cóncava tal y como se muestra en la figura 7.3

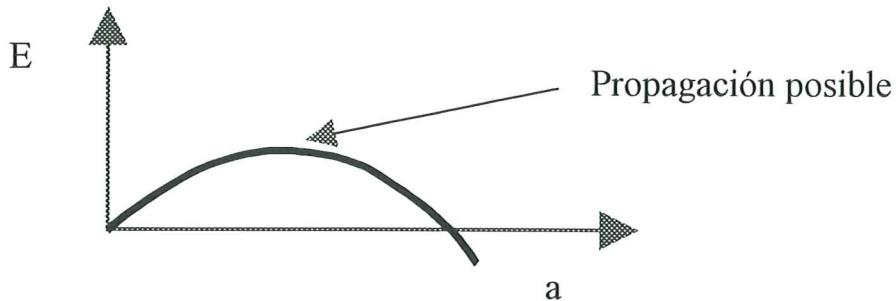


Figura 7.3 Energía total en función de la longitud de la fisura.

Esta figura muestra porqué hay fisuras que no se propagan. Supóngase que la longitud de la fisura en la placa tiene un valor inferior al que corresponde al máximo de la curva. Para propagar la fisura, en otras palabras, para desplazar la longitud a hacia la derecha en el gráfico de la figura 7.3, es necesario aumentar la energía total en la placa. Sin embargo, la placa esta sometida a desplazamientos impuestos constantes. Esto significa que no se le esta suministrando energía mecánica adicional. La propagación de la fisura es por lo tanto imposible, independientemente del nivel de esfuerzos en la punta de la fisura, puesto que la energía necesaria para ello no esta disponible.

Supóngase ahora que la longitud de la fisura tiene un valor igual o superior al correspondiente al máximo de la gráfica. La propagación de la fisura ocurre en este caso con una disminución en la energía total de la placa. Este remanente de energía se transforma en energía cinética y el proceso de propagación de la fisura es ahora físicamente posible. Este es el criterio de Griffith que se escribe como: $dE/da = 0$.

En el caso general el criterio de Griffith puede expresarse de la manera siguiente:

$$G = R \quad (7.5)$$

donde:

$$G = -\frac{d}{da}(W - T_{ext}); \quad R = \frac{dW_s}{da} \quad (7.6)$$

La variable G es denominada “tasa de disipación de energía” o “fuerza conductora de la grieta”. Puede observarse que G depende de la geometría, de las propiedades de la estructura y de sus solicitudes. En otras palabras G es el resultado de un análisis estructural. El término R es llamado “resistencia al agrietamiento” y se admite que es una propiedad del material, de la misma manera que el modulo de elasticidad E o el esfuerzo de fluencia σ_y lo son.

En la próxima sección se describirán algunos procedimientos para el cálculo de la tasa de disipación de energía y en la que le sigue, se describirá la determinación de la resistencia al agrietamiento.

7.3 Cálculo de la tasa de disipación de energía.

A partir de la ecuación (7.4), se puede obtener la tasa de disipación de energía. Esta expresión es sólo valida para el caso particular considerado (placa infinita,

solicitudes en una sola dirección, esfuerzos constante lejos de la fisura, etc.). En el caso general, no se dispone de soluciones analíticas que permitan calcular la tasa de disipación de energía de manera exacta y deben emplearse métodos numéricos. En esta sección se describe uno de ellos.

Considérese una estructura sometida a una sola fuerza externa impuesta P . La energía de deformación elástica y el trabajo de las fuerzas externas tienen por expresión:

$$W = \frac{1}{2} F(a) P^2 \quad T_{\text{ext}} = P u(a) \quad (7.7)$$

Donde $F = F(a)$ es la flexibilidad de la estructura ante la fuerza P y $u = u(a)$ es el desplazamiento en el punto de aplicación de la fuerza. Puede observarse que la flexibilidad de la estructura depende de la longitud de la fisura. Más precisamente, cuanto mayor es la fisura, más flexible es la estructura. La fuerza P ha sido impuesta y por lo tanto no depende de la longitud de la fisura a . El desplazamiento u , por el contrario si depende de la longitud de la fisura ya que la relación entre fuerza y desplazamiento establece que:

$$u(a) = F(a).P \quad (7.8)$$

Por consiguiente, la tasa de disipación de energía es, según (7.6):

$$G = -\frac{d}{da} \left(\frac{1}{2} F(a) P^2 - F(a) P^2 \right) = \frac{1}{2} \frac{dF}{da} P^2 \quad (7.9)$$

Supóngase ahora que en lugar de imponer la fuerza P se impone el desplazamiento u . En este caso u es independiente de la longitud de la fisura y es ahora la reacción $P = P(u)$ quien depende de u . Es, por lo tanto, más cómodo expresar la energía de deformación en función de la rigidez $S = S(u) = F^{-1}$ en lugar de la flexibilidad F :

$$W = \frac{1}{2} S(u) u^2 \quad (7.10)$$

El trabajo de las fuerzas externas impuestas es nulo en este caso, por lo que la tasa de disipación de energía es igual a:

$$G = -\frac{d}{du} \left(\frac{1}{2} S(u) u^2 \right) = -\frac{1}{2} \frac{dS}{du} u^2 \quad (7.11)$$

En realidad, los resultados (7.11) y (7.9) son totalmente equivalentes, tal y como se demuestra a continuación: la flexibilidad F es el inverso de la rigidez S , por consiguiente:

$$\frac{dS}{da} = \frac{d}{da} \left(\frac{1}{F(a)} \right) = -\frac{1}{F^2} \frac{dF}{da} \quad (7.12)$$

Sustituyendo (7.12) en (7.11) y remplazando u/F por P se tiene:

$$G = -\frac{1}{2} \frac{dS}{da} u^2 = \frac{1}{2F^2} \frac{dF}{da} u^2 = \frac{1}{2} \frac{dF}{da} P^2 \quad (7.13)$$

que coincide con (7.9). De idéntica manera se puede demostrar que (7.9) también conduce a (7.11). Se tiene, por lo tanto, que en ambos casos: fuerzas impuestas o desplazamientos impuestos, la tasa de disipación de energía puede ser calculada mediante (7.9) o (7.11) indistintamente.

Este procedimiento puede ser generalizado al caso de una estructura sometida a más de una fuerza externa, siempre y cuando todas ellas sean proporcionales a un solo parámetro de carga.

El problema de calcular la tasa de disipación de energía se ha transformado ahora en el de determinar la variación de la rigidez o flexibilidad de la estructura al incrementar la longitud de la fisura. El número de casos particulares en los que las derivadas de la rigidez o la flexibilidad pueden ser calculadas analíticamente es extremadamente pequeño. No obstante, este problema puede ser resuelto numéricamente aproximando la derivada de F por medio de:

$$\frac{dF}{da} \approx \frac{F(a + \Delta a) - F(a)}{\Delta a} \quad (7.14)$$

donde Δa representa un incremento en la longitud de la fisura suficientemente pequeño. Los términos $F(a)$ y $F(a + \Delta a)$ se calculan mediante la relación $F = u/P$, donde el desplazamiento u se determina numéricamente mediante el método de elementos finitos o elementos de contorno. Por ejemplo si se impone una fuerza unitaria (véase la figura 7.4), la tasa de disipación de energía sería aproximadamente igual a: $G \approx (u(a + \Delta a) - u(a))/2\Delta a$.

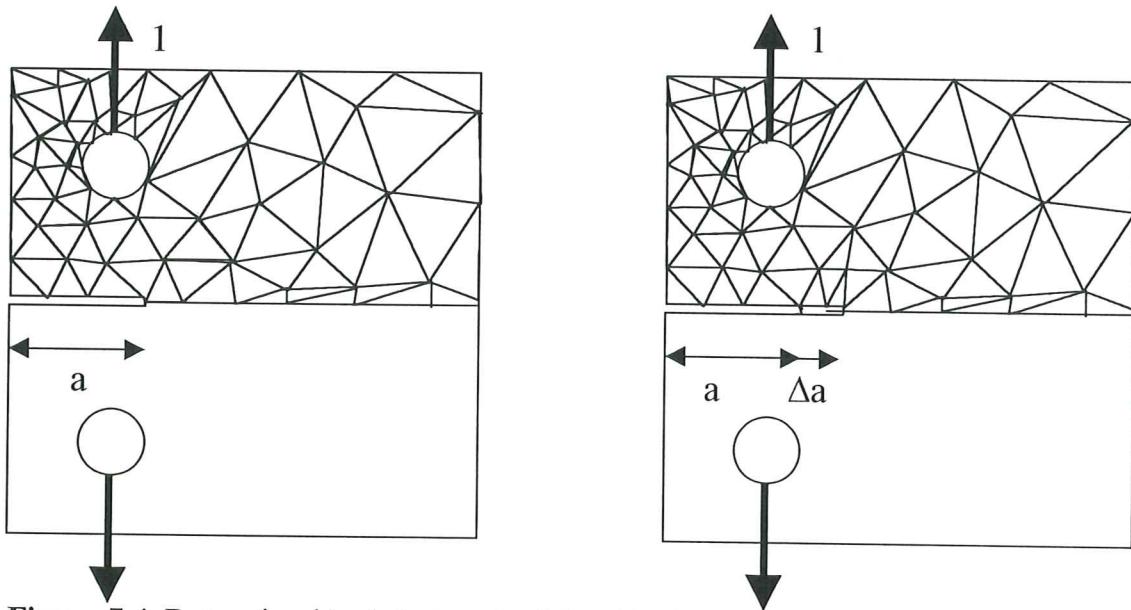


Figura 7.4. Determinación de la tasa de disipación de energía por elementos finitos

Si se conoce de antemano la dirección de propagación de la fisura, es claro que este cálculo puede ser realizado sin dificultad alguna. Sin embargo, no siempre se sabe en qué dirección va a propagarse la fisura. Es evidente que dependiendo de la dirección de propagación, la tasa de disipación de energía toma diferentes valores.

Uno de los criterios posibles para predecir la dirección de bifurcación de la fisura, consiste en suponer que esta tomará la dirección en la que la tasa de disipación de energía sea máxima. Este análisis puede ser realizado numéricamente calculando la tasa de disipación de energía con fisuras que han sido extendidas en direcciones diferentes (en la figura 7.4 se supuso que la dirección de propagación es de cero grados con respecto al eje de la fisura).

Hay otros métodos para el cálculo de la tasa de disipación de energía y de la dirección de propagación. Estos están basados en el concepto de “factor de intensidad de esfuerzos” y no serán descritos en esta monografía.

7.4 La resistencia al agrietamiento.

Inicialmente Griffith supuso que el término W_s incluido en la ecuación de energía (7.1) correspondía a una energía ganada por la estructura al aumentar su superficie externa debido a la propagación de la fisura. Esta energía se interpretaría como una energía superficial similar a la asociada a la tensión superficial en la mecánica de fluidos. Los resultados experimentales muestran, sin embargo, que sólo la fractura en materiales extremadamente frágiles (el vidrio por ejemplo) puede ser explicados de esta manera.

El término W_s puede también ser interpretado como una energía disipada durante el proceso de propagación de la fisura. Esta energía es consumida durante el proceso de microagrietamiento o de plastificación intensa en una zona alrededor de la punta de la fisura (véase la figura 7.5). Esta zona se genera debido a la concentración de esfuerzos en la punta de la fisura. Cada vez que la fisura se propaga una nueva zona de microagrietamiento o deformaciones plásticas debe crearse y de ahí que sea necesario que la tasa de disipación de energía sea lo suficiente grande para suplir la energía necesaria, según la ecuación (7.5).

Es importante señalar que la zona de microfisuración debe ser pequeña con respecto al tamaño de la estructura, de lo contrario la hipótesis de comportamiento elástico del material no es valida y las ecuaciones anteriores deben ser revisadas. La presentación de teorías de fractura más generales no entra en los objetivos de esta monografía.

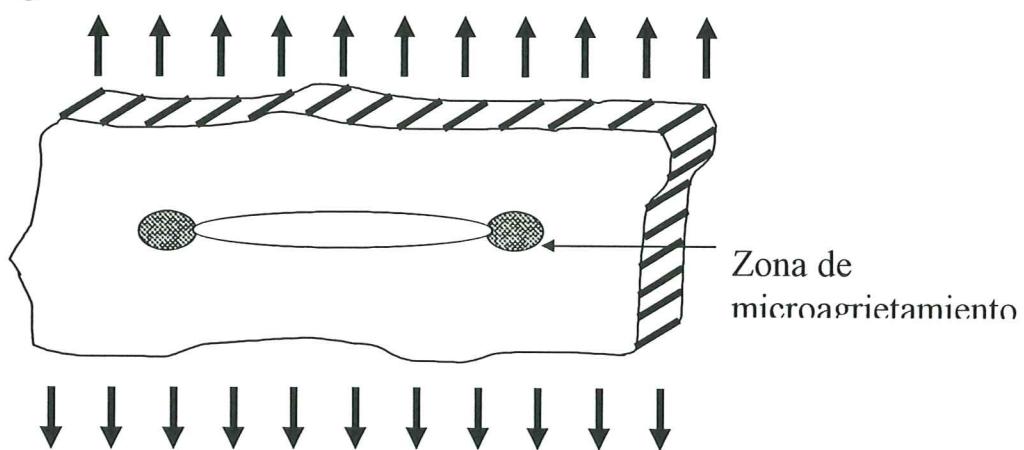


Figura 7.5. Zona de microfisuración alrededor de la punta de la fisura.

Tal y como se mencionó anteriormente, se admite que la resistencia al agrietamiento R es una propiedad del material que debe ser determinada experimentalmente. La expresión de la tasa de disipación de energía ha podido ser determinada numéricamente para las probetas que se presentan en la figura 7.6. Por ejemplo, en el caso de la viga simplemente apoyada se tiene:

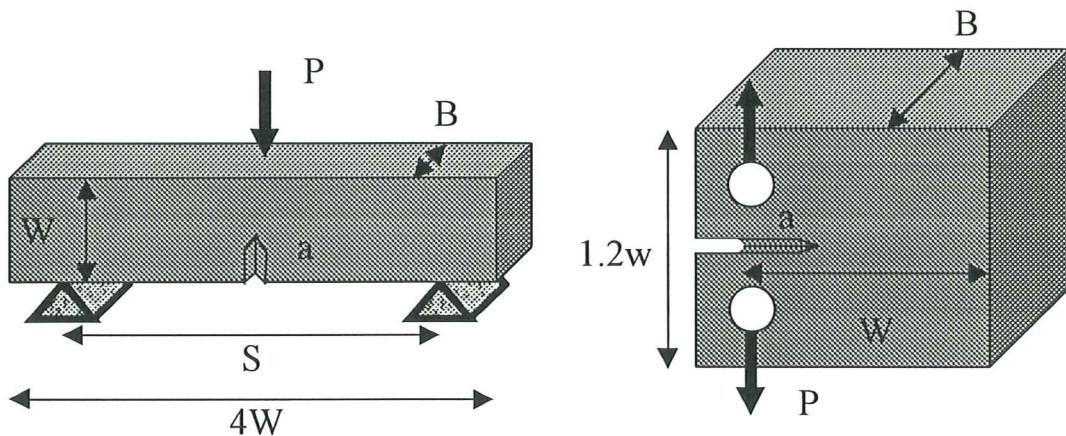


Figura 7.6 Probetas para la determinación experimental de R .

$$G = \frac{K^2}{E} \quad (7.15)$$

$$K = \frac{PS}{BW^{3/2}} \left[2.9 \left(\frac{a}{W} \right)^{1/2} - 4.6 \left(\frac{a}{W} \right)^{3/2} + 21.8 \left(\frac{a}{W} \right)^{5/2} - 37.6 \left(\frac{a}{W} \right)^{7/2} + 38.7 \left(\frac{a}{W} \right)^{9/2} \right]$$

Tal y como puede constatarse, la tasa de disipación de energía es proporcional al cuadrado de la fuerza aplicada P . El valor de la resistencia al agrietamiento se obtiene aumentando progresivamente la fuerza hasta hacer propagar la fisura. En ese momento, el criterio de Griffith debe cumplirse por primera vez y la tasa de disipación de energía debe ser igual a la resistencia al agrietamiento. R puede entonces ser calculada mediante la aplicación directa de las ecuaciones (7.15).

Los resultados experimentales confirman que la resistencia al agrietamiento puede ser considerada como una propiedad del material. No obstante, se ha encontrado que en numerosos casos R no es constante sino que depende del incremento en la longitud de la fisura. En otras palabras, al alcanzarse la resistencia al agrietamiento se produce una propagación estable de la fisura que avanza una cierta distancia y se detiene. Para continuar la propagación es necesario aumentar la fuerza y del valor de la tasa de disipación de energía. Se produce de nuevo un incremento estable en la longitud de la fisura y así sucesivamente. Midiendo estos valores es posible determinar la curva $R = R(\Delta a)$. Detalles adicionales sobre la determinación experimental de la curva de resistencia al agrietamiento, la determinación analítica o numérica de la tasa de disipación de energía o la mecánica no lineal de la fractura pueden ser consultados en los textos de mecánica de la fractura que se citan en la bibliografía.

7.5 Propagación de fisuras por fatiga.

El criterio de Griffith permite responder a las preguntas a y b indicadas en la introducción a este capítulo, pero no a las tres preguntas restantes. En esta sección se describirán muy brevemente los modelos que permiten reproducir el crecimiento de fisuras por fatiga. La idea fundamental es, que cualquiera que sea la causa de la propagación, la ley que la describe debe ser enunciada en función de la tasa de disipación de energía. Una de las maneras posibles de describir la propagación de fisuras por fatiga es suponer que la ley que la caracteriza tiene la forma siguiente:

$$\frac{da}{dN} = f(\Delta G) \quad (7.16)$$

donde da/dN indica el incremento de la longitud por cada ciclo de carga y ΔG es la diferencia entre los valores máximos y mínimos de la tasa de disipación de energía en cada ciclo. La más simple de las expresiones de f corresponde a la denominada “ley de Paris” que se escribe de la manera siguiente:

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta G)^n \quad (7.17)$$

donde C y n son propiedades del material que se determinan experimentalmente.

Otra alternativa, empleada en particular para describir la fatiga de bajo ciclaje, es la de conservar el criterio de Griffith incluyendo un término que representa los ciclos de carga en la función de resistencia al agrietamiento.

7.6 Resumen

En la mecánica de la fractura frágil se admite la existencia de fisuras que se pueden propagar inclusive en medios elásticos. La propagación de la fisura se describe mediante el criterio de Griffith (ecuaciones (7.5-7.6)) que indica que esta será posible si la tasa de disipación de energía se hace igual a la resistencia al agrietamiento

La tasa de disipación de energía es el resultado de un análisis estructural, casi siempre numérico. Una de las maneras posibles consiste en determinar la relación entre la rigidez o la flexibilidad global de la estructura y la longitud de la fisura. La tasa de disipación de energía se puede calcular entonces mediante la ecuación (7.14).

La resistencia al agrietamiento es una propiedad del material que se obtiene experimentalmente. Sin embargo, esta propiedad no se representa mediante una constante sino que se expresa en el caso general como una función del incremento de la fisura.

El criterio de Griffith no permite la representación de la propagación de fisuras por fatiga. Esta propagación también puede ser descrita empleando el concepto de tasa de disipación de energía como en el caso de la ley de Paris (ecuación 7.17).

8. Teoría del daño continuo

En el capítulo anterior se indicó que con la propagación de una fisura, se genera una zona de alta densidad de microdefectos y/o deformaciones plásticas. Sin embargo, en la mecánica de la fractura frágil se supone que el comportamiento del material puede ser descrito empleando leyes de comportamiento elásticas.

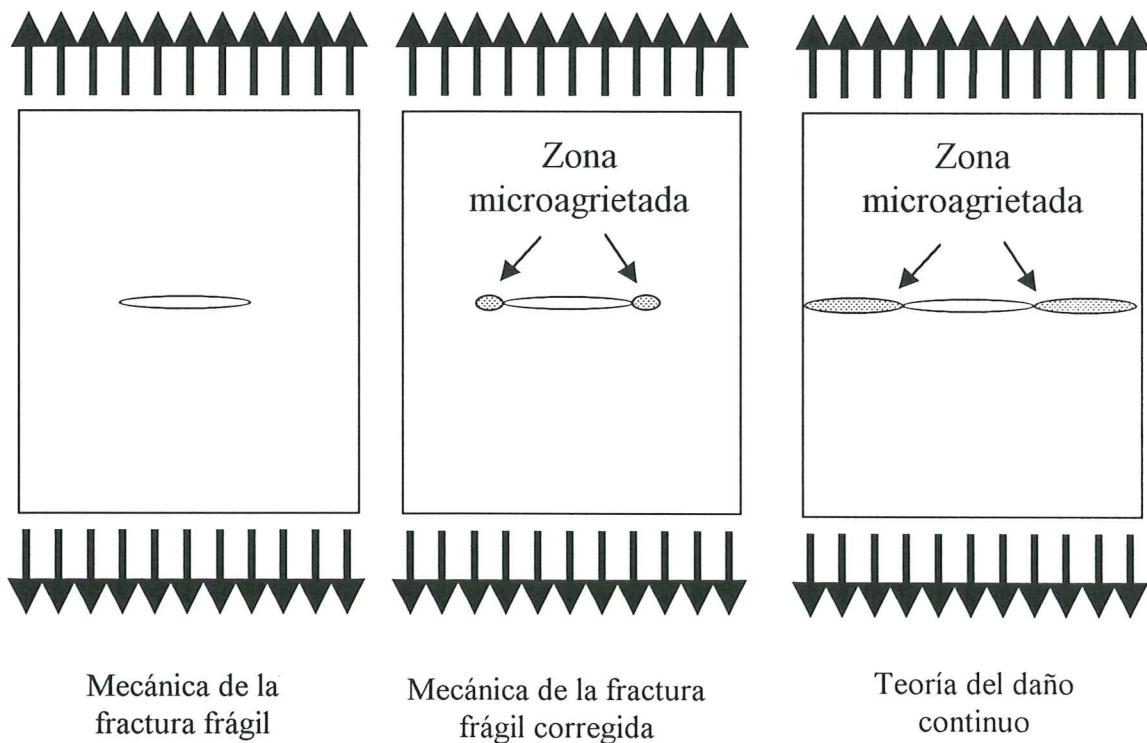


Figura 8.1. Validez de la mecánica de la fractura frágil.

Se deduce de lo anterior que para que los conceptos introducidos en el capítulo precedente sean válidos, es necesario que la zona de microagrietamiento sea muy pequeña con respecto al tamaño de la estructura. Si la zona inelástica es pequeña, aunque no despreciable, las nociones de la mecánica de la fractura frágil siguen siendo aplicables con una pequeña modificación. Esta consiste esencialmente en sustituir la longitud de la fisura real a por una longitud ficticia equivalente a * mayor que la real. Estos procedimientos son conocidos como “corrección de Irwin” o de “Dugdale” en honor a sus proponentes y no serán descritos en esta monografía. Si por el contrario, la zona de microdefectos es significativamente grande (ver figura 8.1), la mecánica de la fractura frágil deja de ser valida y se hace necesario modelar el comportamiento del material durante la creación de la zona microagrietada. Este es el objetivo de la teoría del daño continuo que se presenta en este capítulo.

8.1 La variable de daño continuo

Con el objeto de caracterizar la densidad de microdefectos en el material, se introducirá una nueva variable interna, denominada daño, que se define a continuación: Sea A el área de la cara de un elemento de volumen representativo del material. Esta cara está orientada según la normal \vec{n} . Sea A_d el área de microdefectos en la misma cara (véase la figura 8.2). El daño de esa cara ω_n en el elemento de volumen representativo es:

$$\omega_n = \frac{A_d}{A} \quad (8.1)$$

Puede constatarse que ω_n puede tomar valores en el intervalo $[0,1]$. El valor de cero corresponde a un elemento de volumen que no tiene microdefectos según la normal \vec{n} . El valor de uno representa un elemento de volumen partido en dos pedazos según el plano de normal \vec{n} . En términos generales, el campo $\omega_n(\vec{x})$ representa la densidad relativa de microdefectos en planos perpendiculares al vector normal \vec{n} .

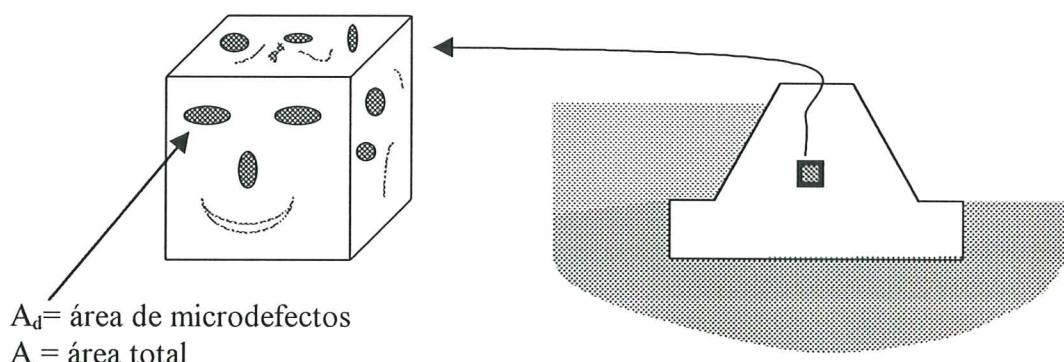


Figura 8.2. Daño en un medio continuo.

La hipótesis de daño isótropo simplifica considerablemente la teoría del daño continuo. Esta consiste en suponer que el daño es aproximadamente constante en todas las direcciones \vec{n} posibles:

$$\omega_n \cong \omega \quad \forall \vec{n} \quad (8.2)$$

El daño en un elemento de volumen representativo del material puede entonces ser representado mediante la variable escalar ω . De esta manera, se tiene que las zonas deterioradas indicadas en la figura 8.1 pueden ser caracterizadas como el conjunto de puntos en donde la variable de daño continuo es diferente de cero. Ello sugiere un enfoque alternativo al problema de propagación de fisuras. Una fisura podría definirse como el conjunto de puntos en los cuales el daño toma el valor de uno. De esta manera no sería necesario emplear los conceptos de la mecánica de la fractura al nivel macroscópico para predecir la propagación de la fisura. También pueden seguir usándose estos conceptos y utilizar la teoría del daño continuo únicamente para modelar el comportamiento del material en la zona microagrietada, o para predecir la iniciación de fisuras en partes de la estructura donde estas no existen previamente.

8.2 Ley de estado y ley de evolución de la deformación plástica.

La densidad de microdefectos tiene una influencia importante en el comportamiento elástico o elastoplástico del material. La introducción de la variable daño en la ley de estado de un material elastoplástico, descrita en la sección 5.1 del capítulo 5, se realiza mediante el uso de dos conceptos: El esfuerzo efectivo y la hipótesis de equivalencia en deformación. Estos conceptos se describen a continuación.

Considérese una barra microagrietada tal y como se muestra en la figura 8.3. El esfuerzo de Cauchy en la barra es igual a la relación entre la fuerza aplicada y el área resistente: $\sigma = P/A$. El esfuerzo efectivo se define como la fuerza aplicada sobre el área resistente efectiva: $\bar{\sigma} = P/(A - A_d)$. Obsérvese que el área efectiva se define como el área total A menos el área de microdefectos A_d . Una expresión que relaciona el esfuerzo efectivo con el esfuerzo de Cauchy y la variable de daño puede ser obtenida tomando en cuenta la definición de esta última (ecuación (8.1)):

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{1 - \omega} \quad (8.3)$$

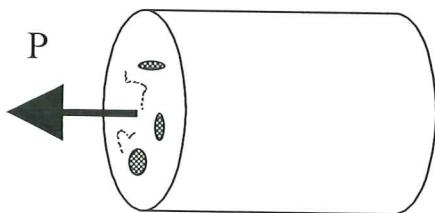


Figura 8.3. Esfuerzo efectivo

La hipótesis de equivalencia en deformaciones establece que el comportamiento de un material dañado puede ser expresado mediante las mismas ecuaciones que corresponden al material intacto, si se sustituye el esfuerzo de Cauchy por el esfuerzo efectivo. Así, la ley de estado de material elastoplástico dañado puede ser obtenida a partir de la expresión (5.1):

$$\bar{\sigma} = E(\varepsilon - \varepsilon_p); \quad \text{o lo que es lo mismo } \sigma = (1-\omega)E(\varepsilon - \varepsilon_p) \quad (8.4)$$

La función de fluencia de un material dañado también puede obtenerse siguiendo el mismo procedimiento. Por ejemplo si se considera un material que inicialmente es perfectamente plástico, se tiene:

$$f(\sigma, \omega) = |\bar{\sigma}| - \sigma_y = \left| \frac{\sigma}{1-\omega} \right| - \sigma_y \leq 0 \quad (8.5)$$

Las funciones de fluencia de los modelos con endurecimiento cinemático lineal o no se derivan de manera similar.

La ley de evolución de las deformaciones plásticas permanece inalterada con respecto a la propuesta en el capítulo 5, puesto que en ella el esfuerzo sólo interviene a través de la función de fluencia:

$$\begin{cases} d\varepsilon_p = 0 & \text{si } f(\sigma, \omega) < 0 \\ d\varepsilon_p \neq 0 & \text{si } f(\sigma, \omega) = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{o} & df(\sigma, \omega) < 0 \\ \text{y} & df(\sigma, \omega) = 0 \end{matrix} \quad (8.6)$$

8.3 Ley de evolución del daño para materiales frágiles

Es evidente que es necesaria la introducción de una ley de evolución adicional puesto que se ha introducido una nueva variable interna en la ley de estado. Esta ecuación adicional define por completo la ley de comportamiento uniaxial de un material dañado. En esta sección se considerará únicamente el caso de materiales frágiles en los cuales las deformaciones plásticas son nulas o despreciables ($\varepsilon_p = 0$). La ley de comportamiento propuesta en este caso puede ser utilizada para describir el comportamiento de materiales como el hormigón o la roca. En la siguiente sección se considerará el caso de los metales y otros materiales dúctiles.

La ley de evolución del daño de un material frágil puede ser obtenida suponiendo que el criterio de Griffith, propuesto en el capítulo precedente, también puede ser aplicado al caso de las microfisuras caracterizadas por la variable de daño continuo. La densidad de energía de deformación w puede ser obtenida a partir de la ley de estado (8.4):

$$w(\varepsilon, \omega) = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon = \frac{1}{2} (1-\omega) E \varepsilon^2 \quad (8.7)$$

La tasa de disipación de energía en un elemento de volumen puede definirse ahora como:

$$G = -\frac{\partial w}{\partial \omega} = \frac{1}{2} E \varepsilon^2 \quad (8.8)$$

Donde la ecuación (8.8) ha sido obtenida por analogía con la expresión (7.11) del capítulo anterior. Puede observarse que en (8.8), se ha sustituido la energía de deformación W por la densidad de energía de deformación w y la longitud de la fisura a

por la variable de daño continuo ω . El criterio de Griffith al nivel del elemento de volumen se expresa ahora como:

$$\begin{cases} d\omega = 0 & \text{si } G < R(\omega) \quad \text{o} \quad dG < dR \\ d\omega > 0 & \text{si } G = R(\omega) \quad \text{y} \quad dG = dR \end{cases} \quad (8.9)$$

La ley de evolución (8.9) indica que no habrá evolución del daño si la tasa de disipación de energía G es inferior a la resistencia al agrietamiento del material R , o si se está iniciando una descarga elástica caracterizada por $dG < dR$. Por el contrario, habrá crecimiento de las microfisuras si la tasa de disipación de energía es igual a la resistencia al agrietamiento y no se está iniciando una descarga elástica. Se admite que $G > R$ es imposible.

La función de resistencia al agrietamiento (o más precisamente al microagrietamiento) debe obtenerse a partir del comportamiento observado del material. Por ejemplo, el comportamiento del hormigón en compresión se representa con frecuencia utilizando una envolvente parabólica de segundo grado (Véase la figura 8.4). Esta clase de modelo correspondería a una función R definida por: $R = a\omega^2$.

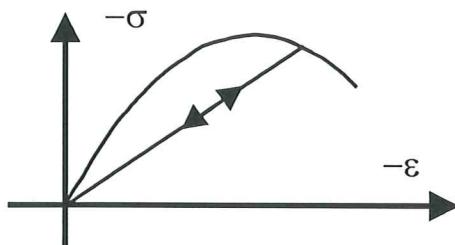


Figura 8.4. Envolvente parabólica en un modelo de daño frágil.

8.4 Ley de evolución del daño para materiales dúctiles.

En la introducción a este capítulo se indicó que el Criterio de Griffith no es apropiado para el caso de la fractura con deformaciones plásticas importantes. Así que tampoco podría justificarse el uso de esta ley para describir la evolución de microdefectos en un elemento de volumen de un material dúctil. En esta sección se describirá una ley de daño dúctil, la ley de Lemaitre, que supone que el daño en materiales elastoplásticos depende de la deformación plástica acumulada. La justificación física de este modelo es la siguiente:

Un material metálico puede ser representado como un conjunto de átomos dispuestos en arreglos regulares tal y como se muestra en la figura 8.5a. En esta malla de átomos se presentan con frecuencia defectos denominados dislocaciones. Estos defectos se manifiestan como la ausencia de alguno de los átomos en una de las celdas de la malla. La presencia de esfuerzos sobre la malla puede provocar el desplazamiento de las dislocaciones tal y como se muestra en las figuras 8.5b y c. Durante este proceso no se produce desplazamientos en los átomos sino del defecto, que se transmite de una celda a otra. Durante el desplazamiento de las dislocaciones, se producen modificaciones irreversibles en la estructura de la materia. Macroscópicamente, estas transformaciones se manifiestan como deformaciones permanentes que no desaparecen inclusive si deja de actuar sobre el material las fuerzas que las produjeron. Estas deformaciones son las

deformaciones plásticas. Al alcanzarse un cierto valor crítico en el movimiento de las dislocaciones, estas comienzan a acumularse generando microcavidades como la indicada en la figura 8.5d. Ahora bien, en la sección 8.1 se definió el daño como la densidad de microdefectos en el material. En otras palabras la acumulación de dislocaciones es la causa principal del daño en los materiales dúctiles. En el modelo de Lemaitre, esta relación se define de la manera siguiente:

$$\omega = h(p) \quad dp = |d\epsilon_p| \quad (8.10)$$

Donde $h = h(p)$ es una función que debe ser identificada experimentalmente y p es la deformación plástica acumulada que fue definida en el capítulo 5.

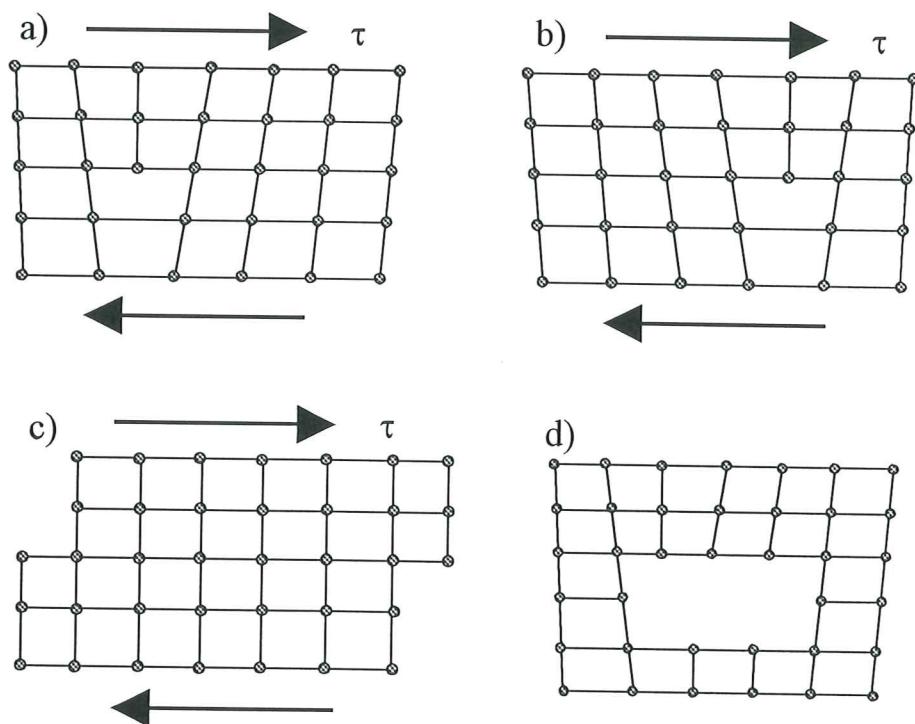


Figura 8.5. Daño por acumulación de dislocaciones

Puede observarse que el modelo de Lemaitre supone que la deformación plástica acumulada caracteriza la acumulación de dislocaciones. La función h , al igual que la función de resistencia al agrietamiento R de los materiales frágiles, debe ser identificada a partir de resultados experimentales.

8.5 Determinación experimental del daño.

Los modelos de daño descritos en las secciones 8.3 y 8.4 se definen totalmente al identificar las funciones R (materiales frágiles) y h (materiales dúctiles). Para proceder a la identificación de esas funciones, es necesario disponer de algún procedimiento experimental de medida de la variable de daño continuo ω . En la práctica, esta medida nunca se realiza de manera directa, midiendo la densidad de microdefectos, sino que se

emplean procedimientos indirectos. Uno de los más simples y utilizados es el denominado “método del modulo de elasticidad efectivo”:

Considérese de nuevo la ley de estado (8.4). Esta ecuación puede reescribirse de la siguiente manera:

$$\sigma = (1-\omega)E(\epsilon - \epsilon_p) = \bar{E}(\epsilon - \epsilon_p) \quad (8.11)$$

donde $\bar{E} = (1-\omega)E$ es llamado el modulo de elasticidad efectivo del material. En el procedimiento mencionado, se mide directamente el modulo de elasticidad efectivo y a partir de esta medida se calcula el daño por medio de la fórmula:

$$\omega = 1 - \frac{\bar{E}}{E} \quad (8.12)$$

Para la medida del modulo de elasticidad efectivo se toma una probeta como la indicada en la figura 8.6 y se somete, en un ensayo de tracción simple, a una serie de cargas y descargas como se indica en esta figura. Al final de cada una de las descargas puede medirse el modulo de elasticidad efectivo. El primer modulo de elasticidad medido es con frecuencia utilizado como medida de E . En otras palabras, se supone que en la primera descarga elástica no se ha producido daño todavía.

A partir de un ensayo como el descrito, es posible construir la gráfica daño contra deformación plástica tal y como se indica en la figura 8.6.

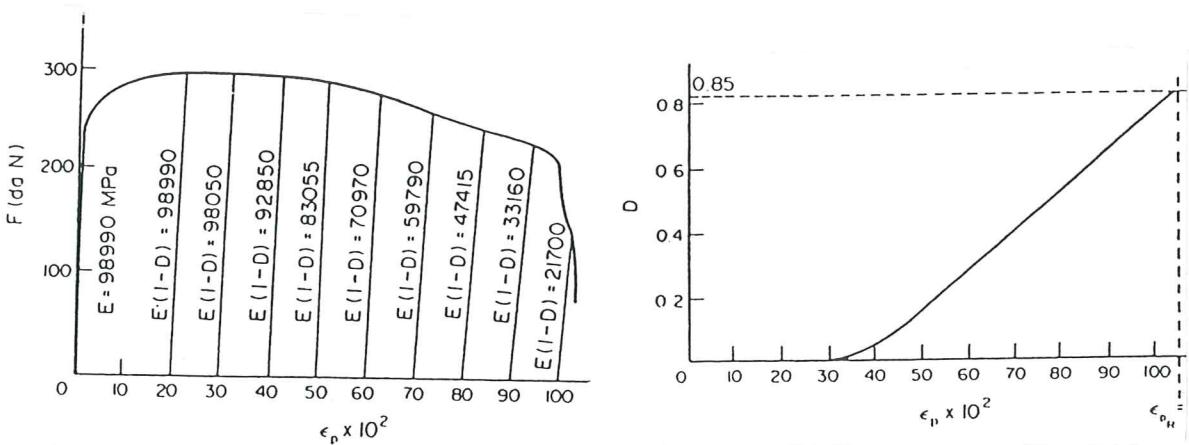


Figura 8.6. a) Variación del esfuerzo en función de la deformación plástica en una probeta de cobre según Lemaitre y Dufailly. b) Daño en función de la deformación plástica.

La gráfica de la figura 8.6 sugiere la siguiente ley de evolución del daño para materiales dúctiles:

$$\omega = m \langle p - p_{cr} \rangle \quad (8.13)$$

donde m es la pendiente de la recta en la gráfica ω contra p , p_{cr} es el valor crítico de la deformación plástica acumulada a partir del cual comienza a generarse daño y los símbolo $\langle x \rangle$ corresponde a la parte positiva de x ($\langle x \rangle = x$ si $x > 0$, $\langle x \rangle = 0$ en caso contrario).

8.6 Daño unilateral

En los modelos de daño descritos en las secciones precedentes, el daño en compresión y el daño en tracción se acumulan en una misma variable. Así, la perdida de rigidez o de resistencia ocasionadas en, por ejemplo, tracción afecta de la misma manera en tracción y en compresión. Sin embargo, se ha observado experimentalmente que, al menos en materiales frágiles, esto no es así. Es probable que ello sea consecuencia del fenómeno de cierre de fisuras.

Tal y como se ilustra en la figura 8.7, la orientación de las fisuras de tracción y de compresión no es en general la misma. Las fisuras creadas en alguno de los casos, por ejemplo las de tracción, tienden a cerrarse al cambiar el signo del esfuerzo. Se admite que el daño asociado a las microgrietas de tracción o de compresión no tienen influencia en el comportamiento del material mientras éstas estén cerradas.

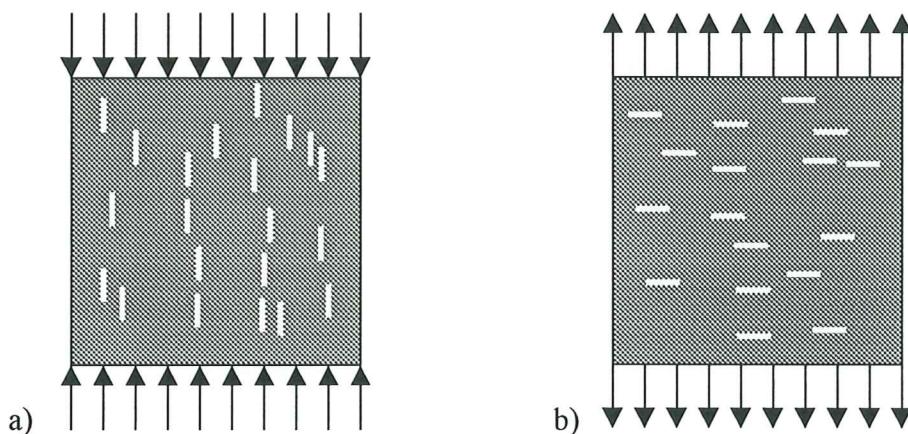


Figura 8.7. Representación de: a) daño en compresión b) daño en tracción

Para modelar matemáticamente este efecto, se introducirán dos variables de daño denominadas ω^+ y ω^- . La primera representa al daño en tracción y la última, al daño en compresión. Cuando se usan ambas variables para caracterizar el deterioro del material se dice que el daño es “unilateral”. El esfuerzo efectivo en el material para el caso de daño unilateral puede definirse de la manera siguiente:

$$\bar{\sigma} = \begin{cases} \frac{\sigma}{1 - \omega^+} & \text{si } \sigma > 0 \\ 0 & \text{si } \sigma = 0 \\ \frac{\sigma}{1 - \omega^-} & \text{si } \sigma < 0 \end{cases} \quad (8.14)$$

El uso de la hipótesis de equivalencia en deformación con la nueva definición del esfuerzo efectivo permite obtener la ley de estado en el caso de daño unilateral:

$$\varepsilon - \varepsilon_p = \frac{\bar{\sigma}}{E} = \frac{\langle \sigma \rangle}{(1-\omega^+)E} - \frac{\langle -\sigma \rangle}{(1-\omega^-)E} \quad (8.15)$$

Donde $\langle x \rangle$ representa de nuevo a la parte positiva de x . Puede constatarse que la única diferencia entre la ley de estado (8.4) y la expresión (8.15) es que en esta última, el modulo de elasticidad efectivo depende de ω^+ o de ω^- según el signo del esfuerzo.

Para hallar las tasas de disipación de energía asociadas a las dos variables de daño, es preferible utilizar la energía de deformación complementaria W^* que, en este caso coincide con la energía de deformación pero se expresa en función del esfuerzo y el daño. Para daño frágil con ε_p igual a cero, la expresión de la energía complementaria es.

$$W^*(\sigma, \omega^+, \omega^-) = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon = \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma \langle \sigma \rangle}{(1-\omega^+)E} - \frac{\sigma \langle -\sigma \rangle}{(1-\omega^-)E} \right) \quad (8.16)$$

Las dos tasas de disipación de energía obtenidas a partir de (8.16) son:

$$G^+ = \frac{\partial W^*}{\partial \omega^+} = \frac{1}{2} \frac{\sigma \langle \sigma \rangle}{(1-\omega^+)^2 E} \quad G^- = \frac{\partial W^*}{\partial \omega^-} = -\frac{1}{2} \frac{\sigma \langle -\sigma \rangle}{(1-\omega^-)^2 E} \quad (8.17)$$

La evolución del daño unilateral puede describirse utilizando el criterio de Griffith dos veces, una para cada variable de daño, y empleando dos funciones de resistencia al agrietamiento diferentes. De esta manera puede obtenerse la envolvente parabólica en el caso del comportamiento en compresión y una envolvente bilineal para representar el comportamiento en tracción tal y como se muestra en la figura 8.8. La envolvente bilineal puede obtenerse usando, por ejemplo, la función de resistencia al agrietamiento $R = A/(B-C\omega)^2$. Donde A , B y C son constantes que dependen de la pendiente de la segunda rama de la curva en tracción, del modulo de elasticidad E y de la resistencia en tracción del material

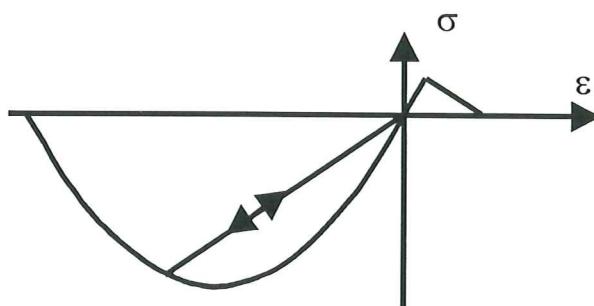


Figura 8.8. Comportamiento del hormigón empleando un modelo de daño unilateral.

El comportamiento elastoplástico de un material unilateral puede describirse a partir de una función de fluencia obtenida con la hipótesis de equivalencia en deformaciones y la definición de esfuerzo efectivo (8.14).

8.7 Resumen

El objetivo de la teoría del daño continuo es el modelado del proceso de degradación mecánica del material y del comportamiento resultante. La idea fundamental es la introducción de una variable (o dos en el caso de daño unilateral) que toma valores entre cero y uno y que mide la densidad relativa de microdefectos en el material.

El modelo esta compuesto por la ley de estado (8.4) u (8.15), la ley de evolución de las deformaciones plásticas y la ley de evolución del daño. En el caso de materiales frágiles, se suponen despreciables las deformaciones plásticas y las leyes de evolución del daño se obtiene a partir del criterio de Griffith. Para materiales dúctiles, la ley de evolución de las deformaciones plásticas se obtiene a partir de la hipótesis de equivalencia en deformaciones (ecuaciones (8.5-8.6) para daño no unilateral) y la ley de evolución del daño es la ley de Lemaitre (ecuación 8.13).

9. Plasticidad y fractura en pórticos de acero

Estructuras de todo tipo son sometidas a sobrecargas extraordinarias con cierta frecuencia. Las causas de ello son los sismos, oleajes, impactos, asentamientos imprevistos de los apoyos, etc. Evaluar o predecir los daños causados por estas sobrecargas es un tema muy importante en la Ingeniería Estructural. De ahí que se hayan incluido los dos capítulos anteriores en esta monografía.

Sin embargo, no es a priori evidente de que manera se pueden aplicar los conceptos de la mecánica de la fractura o de la teoría del daño continuo al análisis de estructuras tales como edificios o puentes, que es el tema fundamental de este trabajo. La opción inmediata consiste en representar la estructura como un sólido tridimensional (véase la figura 1.1, por ejemplo) y realizar un cálculo del campo de daño en toda la estructura, o determinar la evolución de cada una de las macrofisuras de la obra.

Tal y como se mencionó en la introducción a esta monografía, este tipo de análisis nunca es realizado en la práctica. Una de las razones es el descomunal costo computacional que este cálculo requeriría. Esta no es, sin embargo, la razón principal. La verdadera causa es que la mayor parte de la gigantesca masa de resultados que se obtendrían de esta manera, es superflua para propósitos prácticos. El o la ingeniero necesita medidas del daño en la estructura mucho más globales. Así la mayor parte de los resultados tan costosamente obtenidos no serían nunca utilizados por el o la ingeniero, y se haría necesario el uso de postprocesadores que transformen los resultados del primer análisis en indicadores globales.

Una alternativa a esta opción inmediata es la formulación del problema en función de las medidas globales de daño directamente. En este capítulo se describe una de las alternativas posibles: una teoría que combina el concepto de rótula plástica, introducido en el capítulo 6 de esta monografía, con los métodos de la teoría del daño continuo. En

este capítulo sólo se consideran estructuras aporticadas de acero. En el capítulo siguiente se analizarán los pórticos de concreto armado.

9.1 Daño en una rótula plástica.

Considérese de nuevo un miembro de un pórtico plano como el descrito en la sección 6.3 del capítulo 6. Se postula ahora la existencia de un conjunto de parámetros de daño $\{D\}^t = (d_i, d_j, d_a)$, donde d_i es una medida del daño por flexión en la rótula i , d_j representa el daño por flexión en la rótula j y d_a corresponde al daño debido a las fuerzas axiales. Estos parámetros toman valores entre cero y uno como la variable de daño continuo. Si se trata de un miembro de concreto armado, las variables de daño miden la densidad del agrietamiento en los extremos del elemento, tal y como se indica en la figura 9.1. Para elementos de acero, los parámetros de daño caracterizan también otros efectos degradantes tales como el pandeo local de los elementos. A diferencia de la variable de daño continuo, el daño en una rótula plástica está relacionado con grietas macroscópicas en el material.

Las deformaciones generalizadas totales del miembro pueden ahora descomponerse en tres partes: las deformaciones de la viga-columna elástica, las deformaciones plásticas de las rótulas y un término adicional debido al daño en el elemento:

$$\{\Phi\} = \{\Phi^{vc}\} + \{\Phi^p\} + \{\Phi^d\} = [F^o]\{M\} + \{\Phi^p\} + \{\Phi^d\} \quad (9.1)$$

Puede observarse que la única diferencia con respecto a la ecuación (5.15) del capítulo 5, es la presencia de las rotaciones adicionales $\{\Phi^d\}$. Las deformaciones de la viga-columna elástica pueden expresarse en función de los esfuerzos generalizados a través de la matriz de flexibilidad elástica $[F^o]$. Cuando no hay agrietamiento o pandeo local en el miembro, el término adicional es nulo y se obtiene la teoría de pórticos plásticos del capítulo 5. En la próxima sección se obtendrá una expresión general para las rotaciones $\{\Phi^d\}$ en función del daño en las rótulas plásticas

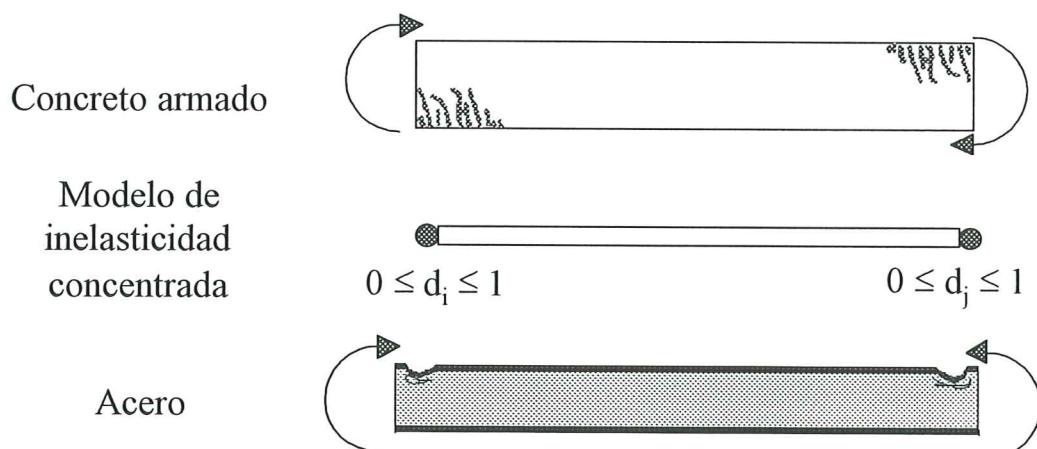


Figura 9.1. Representación del estado de daño de un miembro de un pórtico plano mediante parámetros de daño.

9.2 Matriz de rigidez de un miembro elastoplástico dañado

Considérese un miembro de un pórtico plano sometido exclusivamente a fuerzas axiales. La teoría del daño continuo permite determinar la relación entre la fuerza axial y el alargamiento del miembro. A partir de la ley de estado (8.4) se obtiene:

$$\delta - \delta^p = \frac{F_{33}^0}{1-\omega} n \quad F_{33}^0 = \frac{L}{AE} \quad (9.2)$$

Donde ω es de nuevo la variable de daño continuo, δ y δ^p corresponden al alargamiento y al alargamiento plástico de la cuerda, n es la fuerza axial, F_{33}^0 es el elemento en la tercera fila y tercera columna de la matriz de flexibilidad elástica del miembro, L es la longitud de la cuerda, A su área y E el modulo de elasticidad.

Por otra parte, si empleamos el modelo de inelasticidad concentrada definido por la expresión (9.1), la relación entre fuerza axial y alargamiento de la cuerda es:

$$\delta = \delta^{vc} + \delta^p + \delta^d = F_{33}^0 n + \delta^p + \delta^d \quad (9.3)$$

Donde δ^{vc} corresponde al alargamiento de la viga-columna elástica y δ^d es el alargamiento adicional debido al daño y que se supone concentrado en las rótulas.

Comparando (9.3) con (9.4) es posible obtener una definición del término adicional δ^d :

$$\delta^d = \frac{\omega F_{33}^0}{1-\omega} n \quad (9.4)$$

Empleando la expresión (9.4) se obtiene un modelo de inelasticidad concentrada que es equivalente a la teoría del daño continuo en el caso particular considerado. Puede observarse que cuando el daño es igual a cero, no hay deformaciones adicionales. En el otro caso extremo, cuando el daño es igual a 1, se tiene una rótula con flexibilidad infinita (o rigidez nula). En otras palabras, rótula y viga-columna elástica pueden suponerse desconectadas y el conjunto no tiene capacidad alguna para trasmitir fuerzas axiales.

En el caso general cuando los efectos de flexión y axial están presentes simultáneamente, el problema es demasiado complejo como para admitir resultados analíticos similares. Por lo tanto se postulará que las deformaciones generalizadas debidas al daño se expresan de la manera siguiente:

$$\{\Phi^d\} = [C(D)]\{M\}; \quad [C(D)] = \begin{bmatrix} \frac{d_i F_{11}^0}{1-d_i} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d_j F_{22}^0}{1-d_j} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d_a F_{33}^0}{1-d_a} \end{bmatrix} \quad (9.5)$$

Puede constatarse que, para el caso particular de un miembro sometido a solicitudes axial únicamente, la expresión (9.5) coincide con (9.4) haciendo d_a igual a ω . En el caso general, la variable de daño continuo no corresponde a ninguno de los parámetros de daño en las rótulas. Los ceros fuera de la diagonal de la matriz $[C(D)]$ implican que se está suponiendo que el momento sobre alguna de las rótulas sólo induce rotaciones adicionales por daño en esa misma rótula.

Sustituyendo (9.5) en (9.1) se obtiene la ley de estado de un miembro elastoplástico dañado:

$$\{\Phi - \Phi^P\} = [F(D)]\{M\}; \text{ o alternativamente } \{M\} = [S(D)]\{\Phi - \Phi^P\}; \quad (9.6)$$

Donde $[F(D)] = [C(D)] + [F^0]$ es la matriz de flexibilidad del miembro dañado y $[S(D)] = [F(D)]^{-1}$ es su matriz de rigidez. Puede observarse que $[C(D)]$ puede ser considerada como la flexibilidad adicional debido al agrietamiento en el miembro. La expresión de la matriz de rigidez, para un miembro de sección transversal constante en el que los efectos geométricamente no lineales son despreciables, es:

$$[S(D)] = k \begin{bmatrix} 12(1-d_i) & 6(1-d_i)(1-d_j) & 0 \\ 6(1-d_j)(1-d_i) & 12(1-d_j) & 0 \\ 0 & 0 & EA(1-d_a) \\ \hline & & kL \end{bmatrix}; \quad k = \frac{1}{4 - (1-d_i)(1-d_j)} \frac{EI}{L} \quad (9.7)$$

Donde I es el momento de inercia de la sección. Puede constatarse que es también posible formular la matriz de rigidez de un elemento dañado incluyendo los efectos geométricamente no lineales. Bastaría para ello usar la expresión de la matriz de flexibilidad elástica no lineal, en vez de la lineal, en la ecuación (9.1).

9.3 Función de fluencia de una rótula plástica con daño.

Un concepto equivalente al del esfuerzo efectivo descrito en el capítulo anterior (sección 8.2) puede ser introducido en el análisis de rótulas plásticas con daño. Se trata del momento efectivo sobre la rótula i que se define, por analogía con la expresión (8.3), de la manera siguiente:

$$\bar{m}_i = \frac{m_i}{1 - d_i} \quad (9.8)$$

Supónganse despreciables todos los efectos inelásticos axiales: alargamientos permanentes y daño axial. La función de fluencia de una rótula inelástica puede ahora ser obtenida a partir de cualquiera de las expresiones empleadas en el capítulo 6, junto con la hipótesis de equivalencia en deformaciones. Por ejemplo, en el caso de una rótula plástica con endurecimiento cinemático no lineal, la función de fluencia obtenida de esta manera es:

$$f_i(m_i, x_i, d_i) = \left| \frac{m_i}{1-d_i} - x_i \right| - m_e \quad (9.9)$$

Donde x_i es de nuevo el término de endurecimiento cinemático y m_e es el momento de primera plastificación de la sección. Las leyes de evolución de x_i y de la rotación plástica son idénticas a las introducidas en el capítulo 6:

$$\begin{cases} d\phi_i = 0 & \text{si } f_i < 0 \text{ o } df_i < 0 \\ d\phi_i \neq 0 & \text{si } f_i = 0 \text{ y } df_i = 0 \end{cases}$$

$$dx_i = \alpha([m_u - m_e]d\phi_i^p - x_i dp_i) \quad dp_i = |d\phi_i^p| \quad (9.10)$$

Donde p_i es la rotación plástica acumulada, m_u corresponde al momento último de la sección y α es un parámetro que depende igualmente de la sección transversal del miembro.

9.4 Ley de evolución del daño en una rótula plástica.

Siendo el acero un metal, es conveniente expresar el daño en la rótula como una función de la rotación plástica acumulada, de manera similar a como se hace en la ley de daño dúctil de la teoría del daño continuo (véase la sección 8.4):

$$d_i = h(p_i) \quad (9.11)$$

Donde la función h debe ser identificada experimentalmente. Para ello hace falta de nuevo determinar un procedimiento para la medida experimental del daño en una rótula plástica.

El método de la variación del modulo de elasticidad, descrito en el capítulo precedente (véase la sección 8.5), puede también ser adaptado al caso de una estructura aporticada:

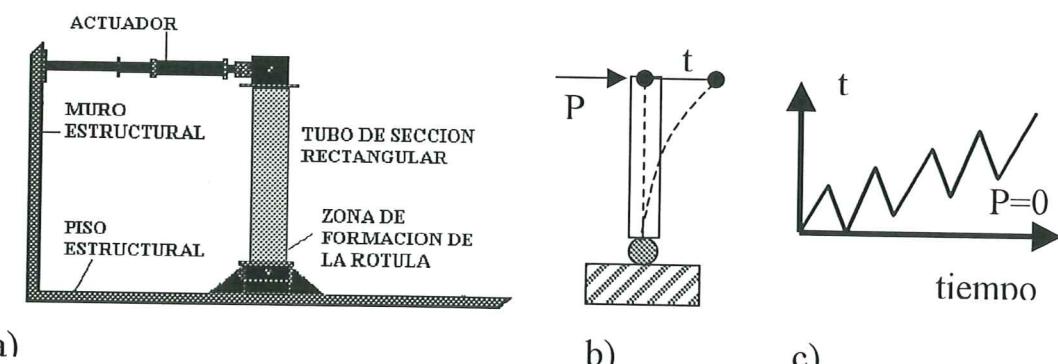


Figura 9.2 a) Viga en voladizo para la identificación de la ley de evolución del daño. b) modelo de plasticidad concentrada del ensayo. c) Solitación

Considérese una probeta como la indicada en la figura 9.2a. Puede observarse que este espécimen representa una viga en voladizo. La probeta está sometida a una

fuerza en el tope de la columna que se controla en desplazamientos. La solicitud sigue la serie de cargas y descargas que se indican en la figura 9.2c.

Los resultados de un ensayo de estas características se muestran en la figura 9.3. En esa figura se encuentra el gráfico fuerza contra desplazamiento obtenido durante el ensayo.

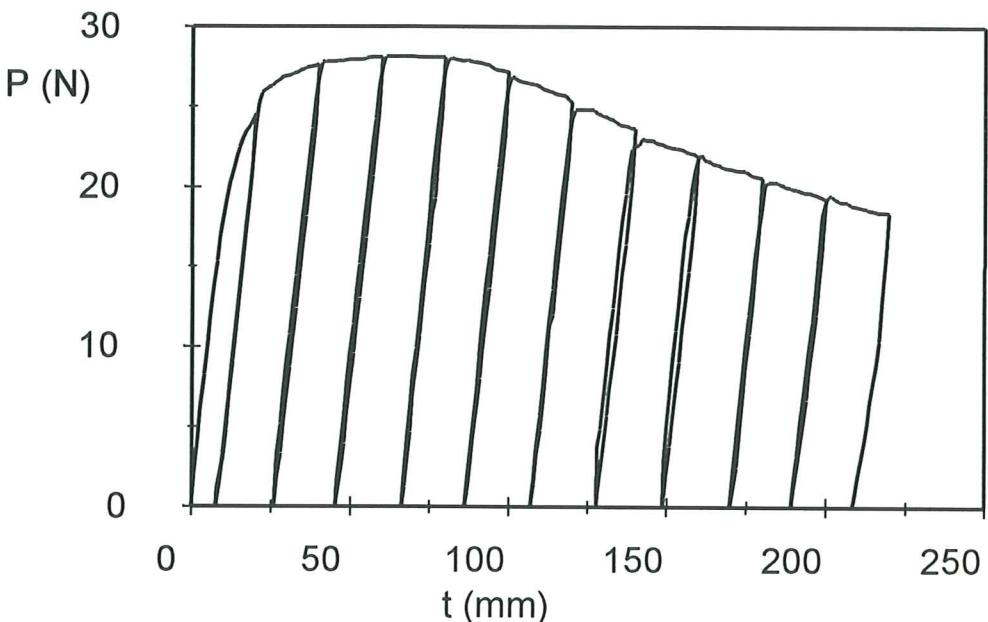


Figura 9.3 Fuerza en función del desplazamiento en el ensayo de identificación.

El modelo de plasticidad concentrada del ensayo se muestra en la figura 9.2b. En este modelo se cumplen las siguientes condiciones:

$$m_j = 0; d_j = 0; \phi_j^p = 0; m_i = PL; d_i = d; \phi_i = \frac{t}{L}; \phi_i^p = \frac{t_p}{L} \quad (9.12)$$

Donde i es el extremo empotrado, j es el extremo libre, L es la longitud de la viga, P es la fuerza aplicada, t es la flecha en el extremo libre de la viga y t_p la flecha permanente en el mismo sitio. En otras palabras, t_p es la flecha remanente bajo carga nula.

Puede constatarse que por ser nulo el momento en el extremo j del elemento, se suponen nulos el daño y la rotación plástica de la rótula asociada. Es decir, para efectos prácticos no hay rótula en ese extremo. El momento en la rótula i es la fuerza P multiplicada por la longitud. La deformación ϕ_j es, según la ecuación cinemática (2.9) (pequeños desplazamientos), la flecha en el extremo libre dividida entre la longitud de la cuerda. La rotación plástica de la rótula se relaciona con la flecha permanente de la misma manera.

Introduciendo las condiciones (9.12) en la ley de estado (9.6) se obtiene la siguiente relación entre la fuerza y la flecha:

$$P = Z(d)(t - t_p) \quad \text{donde } Z(d) = (1 - d)Z_0; \quad Z_0 = \frac{3EI}{L^3} \quad (9.13)$$

El término Z puede ser interpretado como la pendiente durante la descarga elástica en el gráfico fuerza contra flecha. La constante Z_0 corresponde a la pendiente elástica inicial que debería existir antes de producirse daño en la rótula.

La segunda de las relaciones (9.13) sugiere un procedimiento experimental para medir el daño en la rótula que es conceptualmente similar al método de la variación del modulo elástico usado en la teoría del daño continuo (véase la sección 8.5 del capítulo precedente). Despejando el daño en función de las pendientes de descarga se obtiene:

$$d = 1 - \frac{Z}{Z_0} \quad (9.14)$$

Los valores de Z pueden medirse directamente de la gráfica de la figura 9.3, y los valores del daño en cada descarga elástica pueden calcularse usando (9.14). Para el caso de la solicitud considerada, y suponiendo que no hay rotaciones plásticas adicionales durante el proceso de carga y recarga elástica, la rotación plástica y la rotación plástica acumulada coinciden. En la figura 9.4 se muestra la gráfica de daño en función de la flecha plástica.

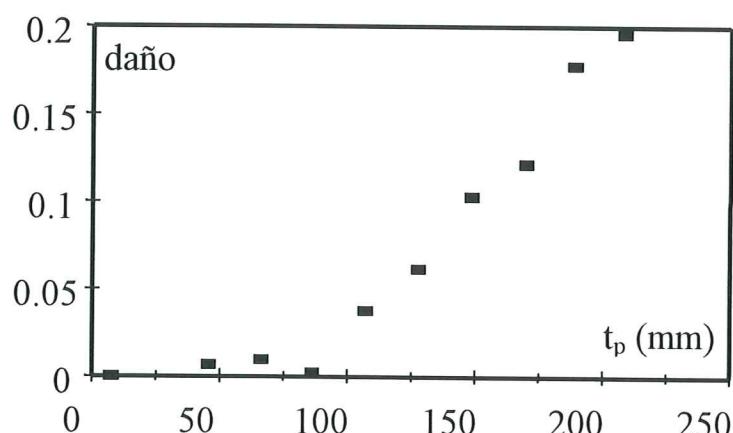


Figura 9.4 Daño en una rótula plástica en función de la flecha plástica.

Esta gráfica muestra que la ley de Lemaitre también puede ser utilizada para describir la evolución del daño en una rótula plástica de un pórtico metálico:

$$d_i = m \langle p_i - p_{cr} \rangle \quad (9.15)$$

Donde m y p_{cr} son constantes que dependen de la geometría del miembro y las propiedades del material. Puede constatarse que (9.15) y (8.13) (Ley de Lemaitre en la teoría del daño continuo) son similares y sólo la interpretación física de los términos en cada ecuación cambian: p_i en (9.15) es la rotación plástica acumulada en la rótula i , p en (8.13) es la deformación unitaria (es decir, alargamiento dividido por la longitud inicial) plástica acumulada, p_{cr} en (9.15) es por lo tanto una rotación crítica mientras que en (8.13) es una deformación unitaria crítica. Por último, m corresponde en ambos casos a la pendiente de la recta que representa la evolución del daño.

9.5 Ley de comportamiento para un elemento de acero.

La ley de comportamiento de un elemento estructural de acero en un pórtico plano esta compuesta por la ley de estado (9.6), la función de fluencia (9.9) para las rótulas i y j y las leyes de evolución (9.10) y (9.15), también para ambas rótulas. Esta ley de comportamiento más las ecuaciones cinemáticas y de equilibrio definidas en los capítulos 2 y 3 definen el comportamiento de un pórtico de acero.

En la figura 9.5 se muestra una comparación entre los resultados experimentales y la simulación numérica en una viga en voladizo solicitaciones histeréticas. En la simulación, los parámetros del modelo (EI , m_e , m_u , α y m) fueron escogidos para obtener la mejor representación de los resultados experimentales.

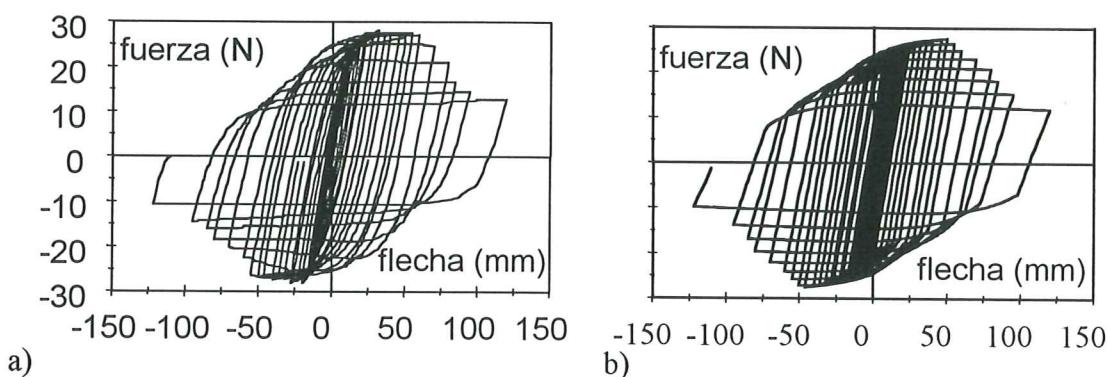


Figura 9.5 Fuerza en función del desplazamiento en un ensayo histerético. a) Resultados experimentales b) Simulación numérica

9.6 Resumen

En este capítulo se describe un modelo de comportamiento para estructuras aporticadas de acero que incorpora conceptos de la teoría del daño continuo. La ley de comportamiento esta compuesta por la ley de estado (9.6), la función de fluencia (9.9) para las rótulas i y j y las leyes de evolución (9.10) y (9.15), también para ambas rótulas. El modelo incorpora una medida del daño en las rótulas. Para poder utilizar esta ley de comportamiento, el analista debe determinar las siguientes constantes: EI , m_e , m_u , α y m .

10. Plasticidad y fractura en pórticos de concreto armado

El número de estructuras construidas en hormigón armado es probablemente muy superior al de las estructuras en acero. El objeto de este capítulo es el de describir una teoría semejante a la presentada en el capítulo precedente para pórticos de concreto armado.

Buena parte de los conceptos introducidos en el capítulo anterior son válidos para el hormigón armado. El esquema de inelasticidad sigue siendo adecuado. En la expresión de la matriz de rigidez de un miembro dañado no se hace énfasis en ningún material en particular. Los conceptos de momento efectivo y de equivalencia en deformaciones también pueden ser utilizados en ambos casos.

Hay, sin embargo, algunas diferencias fundamentales. En el acero, plasticidad y daño ocurren en el mismo material (el acero, el único existente) y el segundo fenómeno es la consecuencia de la acumulación del primero. En el concreto armado la plasticidad está relacionada físicamente con la fluencia del refuerzo mientras que el daño se manifiesta como agrietamiento del hormigón. Tan sólo en etapas muy avanzadas de daño, después de que el concreto haya sufrido un proceso de fisuración extremadamente intenso, empieza a ocurrir daño en el refuerzo. Por el contrario, el proceso de agrietamiento del hormigón ocurre mucho antes de comenzar la plastificación del acero.

En los modelos que serán presentados en este capítulo, la variable de daño en la rótula se utilizará para representar exclusivamente el grado de agrietamiento del concreto. Es por ello que no puede emplearse una ley de daño dúctil para describir el proceso de daño en la rótula y es necesario recurrir a los conceptos de la mecánica de la fractura frágil. Esta es la base de los modelos de daño para estructuras aporticadas de concreto armado que serán presentados en las siguientes secciones.

10.1 Criterio de Griffith en una rótula plástica.

Considérese de nuevo un miembro de pórtico plano como el mostrado en la figura 9.2. La energía de deformación complementaria del miembro dañado puede obtenerse a partir de la ley de estado (9.6) presentada en el capítulo precedente:

$$W^* = \frac{1}{2} \{M\}^t \{\Phi - \Phi^p\} = \frac{1}{2} \{M\}^t ([F^0] + [C(D)]) \{M\} \quad (10.1)$$

Supóngase que el daño asociado a las fuerzas axiales es despreciable ($d_a \approx 0$). La tasa de disipación de energía de una rótula plástica puede ser definida ahora a partir de la expresión (10.1) y por analogía con las expresiones (8.17) y (7.9):

$$\{G\}^t = (G_i, G_j) = \left(\frac{\partial W^*}{\partial d_i}, \frac{\partial W^*}{\partial d_j} \right) = \left(\frac{m_i^2 F_{11}^0}{2(1-d_i)}, \frac{m_j^2 F_{22}^0}{2(1-d_j)} \right) \quad (10.2)$$

Donde G_i y G_j representan las tasas de disipación de energía de las rótulas i y j respectivamente. El criterio de Griffith para la rótula plástica i se escribe:

$$\begin{cases} dd_i = 0 & \text{si } G_i < R_i \quad \text{o} \quad dG_i < dR_i \\ dd_i > 0 & \text{si } G_i = R_i \quad \text{y} \quad dG_i = dR_i \end{cases} \quad (10.3)$$

Donde dd_i representa el incremento de daño en la rótula y R_i es su función de resistencia al agrietamiento.

10.2 Resistencia al agrietamiento en un elemento estructural de concreto armado.

En la mecánica de la fractura frágil y en la teoría del daño continuo se admite que la resistencia al agrietamiento es una función que depende del incremento en la longitud de la fisura, en el primer caso, o de la variable de daño continuo, en el segundo. Estas funciones se obtienen a partir de resultados experimentales.

En esta sección se describirá como el método de la variación de la rigidez elástica, descrito en el capítulo precedente (sección 9.4) puede ser usado para determinar R en el caso particular de un elemento estructural de concreto armado.

Considérese una probeta como la indicada en la figura 10.1. Puede observarse que este espécimen representa una unión entre una viga y una columna. La probeta está simplemente apoyada y sometida a una fuerza en el tope de la columna. La fuerza se controla en desplazamientos y la solicitud sigue la serie de cargas y descargas descrita en la sección 9.4 del capítulo precedente.

Los resultados de un ensayo de estas características se muestran en la figura 10.2. En esa figura se encuentra el gráfico fuerza contra desplazamiento obtenido durante el ensayo.

El modelo de plasticidad concentrada del ensayo se muestra en la figura 10.1. Puede constatarse que se está suponiendo un comportamiento simétrico de la estructura, lo que permite el análisis en uno de los elementos exclusivamente. Esta hipótesis se ajusta razonablemente bien a lo observado en laboratorio, hasta que se alcanza el máximo de la curva fuerza contra desplazamiento de la figura 10.2. A partir de ese momento, se

observa una localización del daño y la plasticidad en una sola de las rótulas de la estructura y un comportamiento no simétrico.

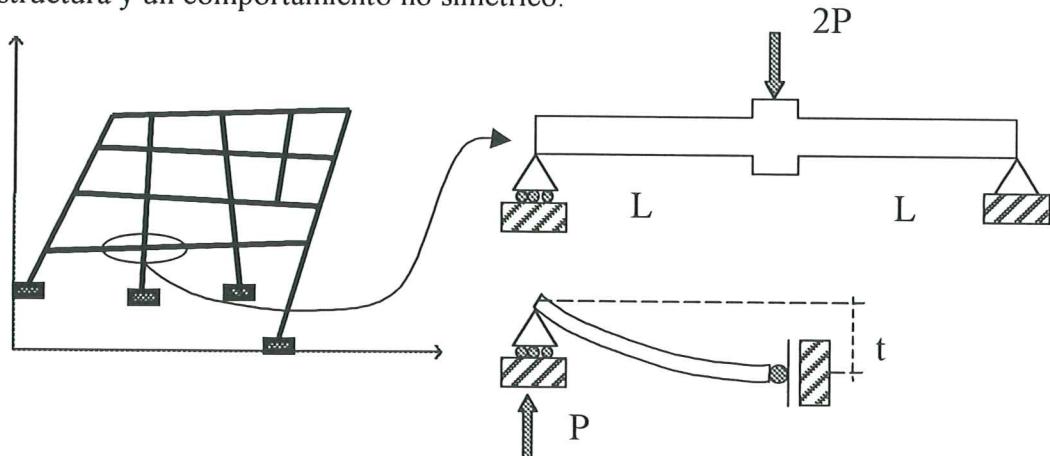


Figura 10.1 Junta viga-columna para la identificación de la resistencia al agrietamiento.

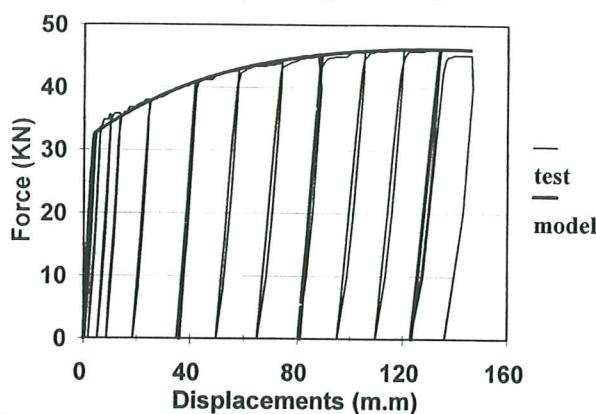


Figura 10.2 Fuerza en función del desplazamiento en el ensayo de identificación.

En la representación del ensayo mostrada en la figura 10.1, se cumplen las siguientes condiciones:

$$m_i = 0; d_i = 0; \phi_i^p = 0; m_j = PL; d_j = d; \phi_j = \frac{t}{L}; \phi_j^p = \frac{t_p}{L} \quad (10.5)$$

Donde P es la reacción en el apoyo (que es igual a la mitad de la fuerza sobre la columna), t es la flecha en el centro y t_p la flecha permanente, en otras palabras, la flecha remanente bajo carga nula.

Introduciendo las condiciones (10.5) en la ley de estado (9.6) se obtiene la misma relación entre la fuerza y la flecha que la indicada en la sección 9.4 del capítulo precedente:

$$P = Z(d)(t - t_p) \quad \text{donde } Z(d) = (1 - d)Z_0; \quad Z_0 = \frac{3EI}{L^3} \quad (10.6)$$

El término Z puede ser de nuevo interpretado como la pendiente durante la descarga elástica en el gráfico reacción contra flecha. La constante Z_0 corresponde a la pendiente elástica inicial que debería existir antes de producirse el agrietamiento del concreto. El daño en la rótula puede medirse de nuevo empleando la misma ecuación de la sección 9.4:

$$d = 1 - \frac{Z}{Z_0} \quad (10.7)$$

Los valores de Z pueden medirse directamente de la gráfica de la figura 10.2. Con estos valores de daño, el momento flector en el momento de iniciar la descarga y la expresión (10.3), es posible calcular la tasa de disipación de energía asociada al daño. La curva de daño en función de la tasa de disipación de energía se muestra en la figura 10.3.

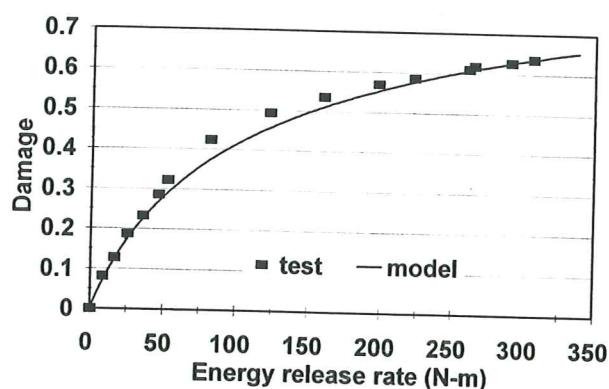


Figura 10.3 Daño en función de la tasa de disipación de energía.

A partir de este gráfico es posible proponer una expresión para la función de resistencia al agrietamiento en una rótula plástica:

$$R_i = G_{cri} + q_i \frac{\ln(1 - d_i)}{1 - d_i} \quad (10.8)$$

Donde G_{cri} y q_i son parámetros que dependen de las propiedades del material del miembro, su geometría y la fuerza axial.

10.3 Determinación indirecta de los parámetros característicos de la resistencia al agrietamiento.

A diferencia de los perfiles metálicos usados en construcción, que tiene dimensiones y formas establecidas, las secciones transversales de elementos estructurales de concreto armado pueden variar ilimitadamente en medidas y disposiciones del refuerzo. Es por ello que no puede aceptarse la determinación experimental de los dos parámetros, G_{cr} y q , que caracterizan la resistencia al agrietamiento en la rótula. Debe entonces proponerse un método sistemático para el cálculo de estos valores.

En esta sección se describe un procedimiento que permite determinar estos parámetros en función del momento de agrietamiento m_{cr} y del momento último m_u de la sección transversal del elemento. Estas dos propiedades pueden ser calculadas por el Ingeniero Civil de manera rutinaria empleando los métodos clásicos de la teoría del concreto armado.

Puede constatarse que el criterio de Griffith establece una relación entre el momento flector y el daño en una rótula plástica que se cumple durante el proceso de agrietamiento del concreto. Teniendo en cuenta las expresiones (10.3) y (10.8) esta relación se escribe de la manera siguiente:

$$\frac{m^2 L}{6EI} = (1-d)^2 G_{cr} + q(1-d) \ln(1-d) \quad (10.9)$$

Considérese una solicitudación monotónica creciente en un elemento estructural de concreto armado. Mientras el momento sobre la sección más solicitada sea inferior a m_{cr} , no se produce agrietamiento en el hormigón, lo que permite afirmar que la tasa de disipación de energía es inferior a la resistencia al agrietamiento del elemento. En el instante en el que se inicia la fisuración del concreto, el momento sobre la sección igual al momento de agrietamiento ($m = m_{cr}$), la ecuación (10.9) comienza a verificarse por primera vez ($G = R$), y se forma una rótula inelástica en la sección considerada. Puede afirmarse que el valor de daño en la rótula es, hasta ese instante, nulo ($d = 0$) puesto que la solicitudación es monotónica. Por lo tanto, se tiene según (10.9):

$$G_{cr} = \frac{m_{cr}^2 L}{6EI} \quad (10.10)$$

Esta expresión permite calcular el coeficiente G_{cr} en función del momento de agrietamiento de la sección y la rigidez o flexibilidad del elemento. Puede observarse que G_{cr} depende de la fuerza axial sobre el elemento puesto que el momento de agrietamiento también es función de ella.

Supóngase ahora que se sigue aumentando el momento flector hasta alcanzar el momento último resistente m_u . Aplicando de nuevo (10.9) para ese caso, se tiene:

$$\frac{m_u^2 L}{6EI} = (1-d_u)^2 G_{cr} + q(1-d_u) \ln(1-d_u) \quad (10.11)$$

Donde d_u es el daño en la rótula que corresponde al momento máximo que puede soportar la rótula. Es importante señalar que d_u no es igual a 1 puesto que cuando d tiende a 1, el momento en (10.9) tiende a cero y no a m_u . Adicionalmente se tiene que para $m = m_u$, la función de m^2 en función del daño, definida por (10.9), debe pasar por un máximo:

$$2G_{cr}(1-d_u) + q \log(1-d_u) + q = 0 \quad (10.12)$$

La resolución del sistema de ecuaciones formado por (10.11) y (10.12) permite el cálculo de q y de d_u . Puede observarse que el coeficiente q también depende de la fuerza axial sobre el elemento.

10.3 Función de fluencia de la rótula plástica.

La función de fluencia de una rótula plástica se obtendrá, al igual que para el caso de estructuras de acero, mediante la hipótesis de equivalencia en deformaciones. Pero a diferencia de ese caso, se partirá de una función de fluencia con endurecimiento cinemático lineal:

$$f(m, \phi^p, d) = \left| \frac{m}{1-d} - c\phi^p \right| - m_y \quad (10.13)$$

Donde c y m_y son de nuevo coeficientes que dependen de las propiedades del miembro y de la fuerza axial. Los términos m , d y ϕ^p representan, por supuesto, el momento, el daño y la rotación plástica de la rótula.

El empleo de endurecimiento cinemático lineal en vez del no lineal, se justifica al suponer que la saturación de la plasticidad en un elemento de concreto armado ocurrirá para valores de daño muy elevados y cercanos a uno. Muy probablemente antes de la saturación plástica del refuerzo se producen fenómenos no tomados en cuenta en el modelo tales como el pandeo del refuerzo longitudinal. En el modelo con endurecimiento cinemático no lineal, el momento máximo que puede ser soportado por la rótula se impone en la ley de evolución de la variable x . En el modelo descrito en este capítulo, este límite se impone mediante el criterio de Griffith, tal y como se explicó en la sección precedente.

Es importante señalar que, ahora, la constante m_y no representa el momento de fluencia plástica de la sección ya que cuando esto ocurre el daño en la rótula no es igual a cero. Es, sin embargo, posible determinar m_y a partir de ese dato:

Considérese de nuevo una solicitudación monotónica sobre un elemento estructural de concreto armado. Sea m_p el valor del momento que corresponde a la primera fluencia del refuerzo longitudinal del miembro. Según (10.9) se tiene:

$$\frac{m_p^2 L}{6EI} = (1 - d_p)^2 G_{cr} + q(1 - d_p) \ln(1 - d_p) \quad (10.14)$$

Donde d_p es daño en la rótula que corresponde al momento plástico m_p . La ecuación (10.14) permite el cálculo de d_p . Cuando el momento sobre la rótula es igual a m_p se admite que la función de fluencia se hace cero por primera vez. En ese instante comienza la plastificación de la rótula pero su rotación plástica es todavía nula. Según (10.13) se tiene en este caso:

$$m_y = \frac{m_p}{1 - d_p} \quad (10.15)$$

Obviamente, m_y depende de la fuerza axial a través del momento plástico m_p .

El último coeficiente del modelo, la constante c , puede ser calculado si se conoce la rotación plástica ϕ_u^p que corresponde al momento último: igualando la función de fluencia a cero para $m = m_u$ se tiene:

$$\frac{m_u}{1 - d_u} - c\phi_u^p - m_y = 0 \quad (10.16)$$

Esta última expresión permite el cálculo de c .

Se tienen ahora todos los elementos para formular una ley de comportamiento para estructuras aporticadas de hormigón armado. Este modelo estaría compuesto por la ley de estado (9.6), la ley de evolución del daño (10.3, 10.4, 10-8) para las rótulas i y j y la ley de evolución de las deformaciones plásticas (5.18) con la función de fluencia (10.13). En las figuras 10.2 y 10.3 se muestra una comparación entre un ensayo y este modelo.

10.4 Modelos unilaterales

Cuando las solicitudes sobre el pórtico son histeréticas, se produce un fenómeno de cierre y apertura de fisuras que es similar al descrito en la sección 8.6. Las fisuras creadas por un momento positivo tienden a cerrarse cuando el momento cambia de signo tal y como se esquematiza en la figura 10.4.

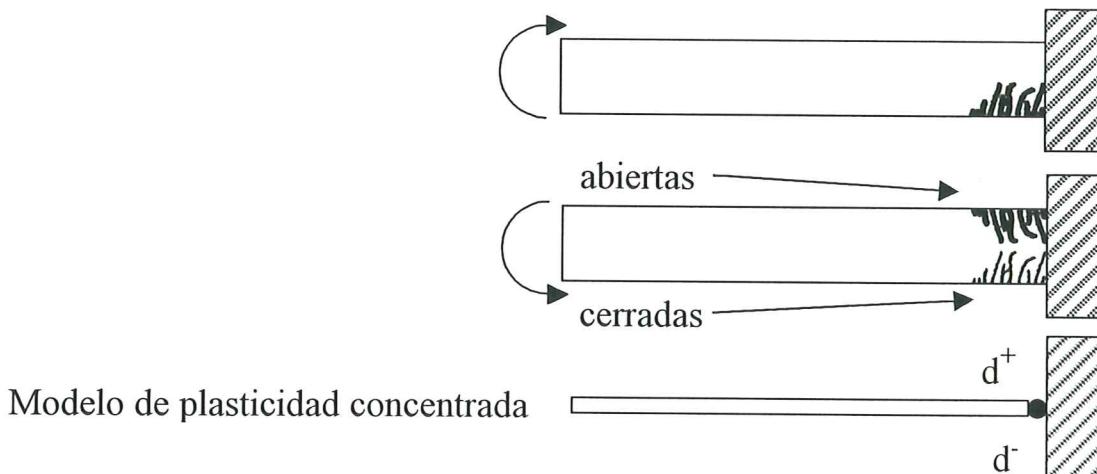


Figura 10.4 Cierre y apertura de fisuras durante una solicitud histerética.

Con el objeto de modelar de manera simplificada este fenómeno, se utilizará un formalismo similar al de los modelos unilaterales de la teoría del daño continuo. Considérese un miembro de un pórtico plano como el mostrado en la figura 10.4. Se introducirán ahora dos variables de daño $\{\mathbf{D}^+\} = (d_i^+, d_j^+)$ y $\{\mathbf{D}^-\} = (d_i^-, d_j^-)$, donde los superíndices + y - indican el daño (agrietamiento) debido a momentos positivos y negativos respectivamente. A estas matrices se las llamará daño positivo y daño negativo. La ley de estado (9.6) puede ser generalizada de manera similar a como se hace en la teoría del daño continuo (véase la ecuación (8.15)) obteniéndose:

$$\{\Phi - \Phi^p\} = [F(D^+)]\langle M \rangle - [F(D^-)]\langle -M \rangle \quad (10.17)$$

Donde el símbolo $\langle M \rangle$ representa la parte positiva de la matriz de esfuerzos generalizados. Las matrices $[F(D^+)]$ y $[F(D^-)]$ tienen la misma forma general que en (9.6) aunque dependen del daño positivo y negativo respectivamente. Puede observarse que en (10.17) la matriz de flexibilidad del elemento del daño positivo o negativo según el signo del momento aplicado.

En el caso considerado hacen falta dos leyes de evolución del daño puesto que se están utilizando dos variables de daño. Estas leyes corresponden de nuevo al criterio de Griffith en el que se emplean ahora dos tasas de disipación de energía para cada rótula:

$$G_i^+ = \frac{F_{11}^0 \langle m_i \rangle^2}{2(1-d_i^+)^2}; \quad G_i^- = \frac{F_{11}^0 \langle -m_i \rangle^2}{2(1-d_i^-)^2} \quad (10.18)$$

Puede observarse que si el momento es negativo, la tasa de disipación de energía G^+ es nula y viceversa. Las funciones de resistencia al agrietamiento tienen también la forma general (10.8) pero dependen del daño positivo o negativo según se este determinando un daño u otro. Así, el criterio de Griffith generalizado para la rótula i se escribe:

$$G_i^+ = R^+(d_i^+); \quad G_i^- = R^-(d_i^-) \quad (10.19)$$

Las funciones R^+ y R^- representan la resistencia al agrietamiento ante momentos positivos y negativos respectivamente. Las funciones R^+ y R^- tienen la misma forma general indicada en (10.8). Los coeficientes que caracterizan la resistencia al agrietamiento también se calculan según el procedimiento establecido en la sección 10.3. Sin embargo, los valores de las resistencias al agrietamiento no tienen porque ser iguales. Por ejemplo, las secciones transversales asimétricas tienen diferentes momentos de agrietamiento o momentos últimos, lo que implica que los coeficientes q^+ , G_{cr}^+ y q^- , G_{cr}^- son diferentes. En el caso de secciones simétricas, se usan los mismos valores de G_{cr} y q para las dos funciones de resistencia.

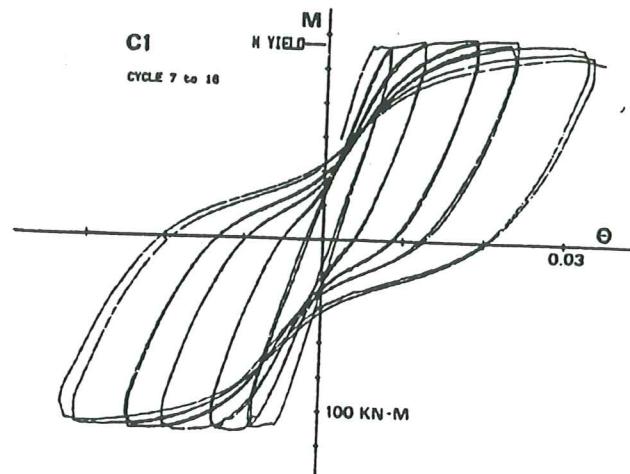
La función de fluencia de la rótula i para el caso unilateral puede escribirse como se indica a continuación:

$$f_i = \max \left(\frac{m_i}{1-d_i^+} - c^+ \phi_i^p - m_y^+; -\frac{m_i}{1-d_i^-} + c^- \phi_i^p - m_y^- \right) \quad (10.20)$$

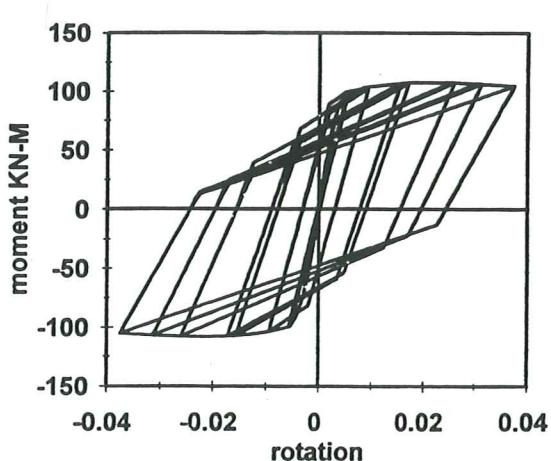
Puede observarse que el valor absoluto de la expresión (10.13), ha sido sustituido por la evaluación del máximo de dos expresiones. En el caso particular en el que los términos con superíndices + son iguales a los de superíndices -, ambas expresiones (10.20) y (10.13) coinciden. La ley de evolución de las deformaciones plásticas permanece inalterada con respecto a la de los modelos anteriores.

En las figuras 10.5, 10.6 y 10.7 pueden verse la comparación entre ensayo y modelo unilateral en tres casos diferentes: sección simétrica y fuerza axial constante

(figura 10.5), sección simétrica y fuerza axial variable (figura 10.6) y sección asimétrica y fuerza axial nula (figura 10.7).



a)



b)

Figura 10.5 a)Ensayo histerético con sección simétrica y fuerza axial constante según Abrams b) Simulación numérica

10.5 Análisis estructural de estructuras aporticadas con daño

La introducción de una variable de daño adicional (en el caso de pórticos de acero) o dos nuevas variables internas (pórticos de concreto armado) no altera la estructura general del problema estructural. Después de una discretización en el tiempo el problema puede traducirse en la resolución de una serie de sistemas de ecuaciones no lineales de la forma $\{L(U)\}=0$. En este sentido el problema es similar al de los pórticos elásticos no lineales o los pórticos elastoplásticos.

Como resultado del análisis, se obtiene no sólo la respuesta estructural de la estructura, sino también un mapa de daños en la misma. En la figura 10.8 se muestra un pórtico que fue ensayado en la Universidad de Illinois y sometido al registro de

aceleraciones del terremoto de El Centro. La figura 10.9 muestra los desplazamientos relativos del último piso del pórtico medidos en laboratorio y los obtenidos en la simulación numérica realizada con el modelo de daño unilateral descrito en este capítulo. La figura 10.10 muestra el mapa de daños en las rótulas inelásticas al final del evento. Sólo el máximo de los daños positivos o negativos se indican en la figura. En la figura 10.11 se muestra la variación de la fuerza axial en dos elementos del primer piso: una viga y una columna. En el caso de la viga la fuerza axial es aproximadamente constante e igual a cero, mientras que en la columna se observan variaciones importantes de la fuerza axial durante el sismo. Por último en la figura 10.12 se muestran las gráficas momento-rotación para una rótula plástica en la viga y otra en la columna cuyas fuerzas axiales fueron indicadas en la figura 10.11. Puede observarse que en el caso de la viga, el comportamiento es aproximadamente simétrico al contrario de lo que ocurre en la columna. Ambas secciones transversales, la de la viga y la de la columna son, sin embargo, simétricas. La diferencia entre ambos comportamientos se debe exclusivamente a la variación de la fuerza axial sobre la columna.

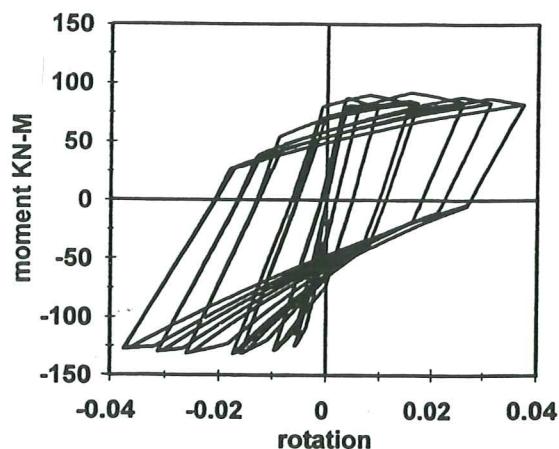
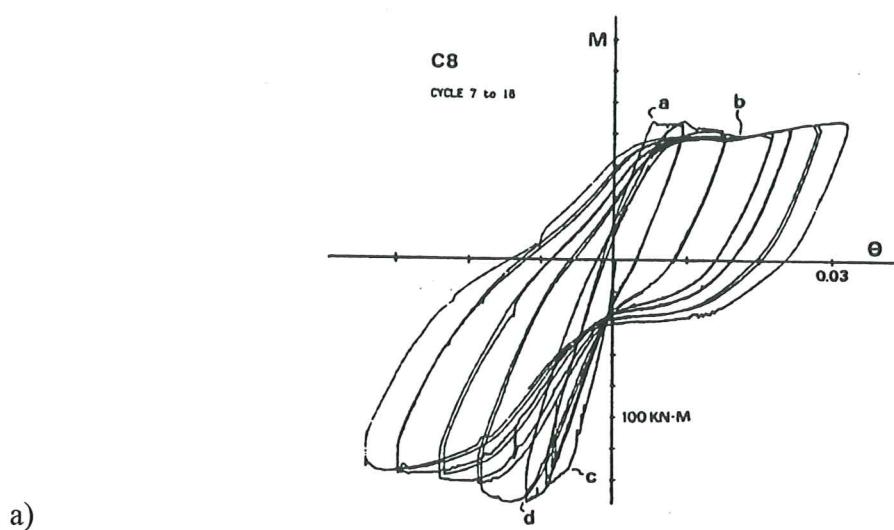
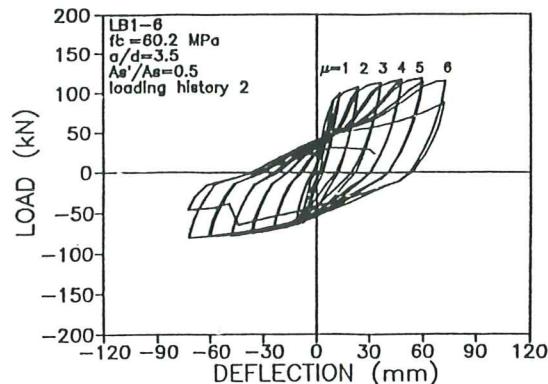
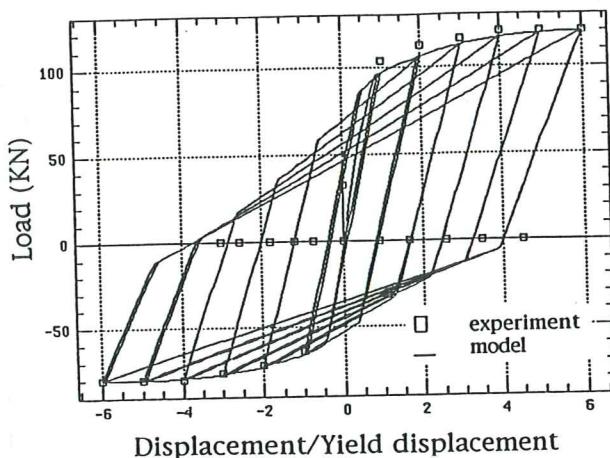


Figura 10.6 a) Ensayo histerético con sección simétrica y fuerza axial variable según Abrams. b) Simulación numérica



a)



b)

Figura 10.7. a) Ensayo histéretico con sección asimétrica y fuerza axial nula. b) Simulación numérica

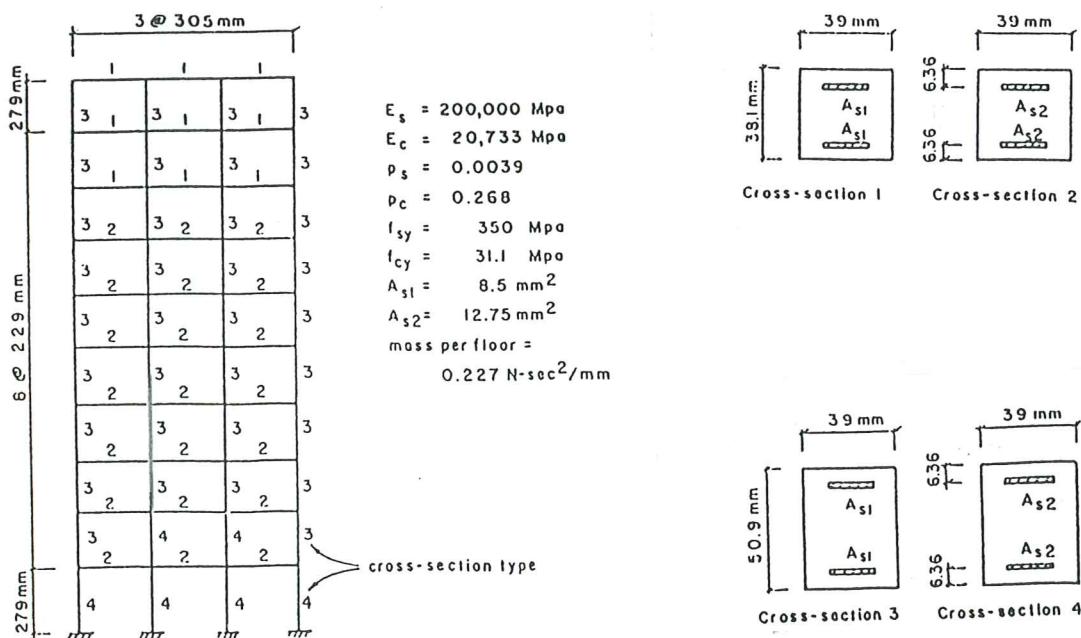
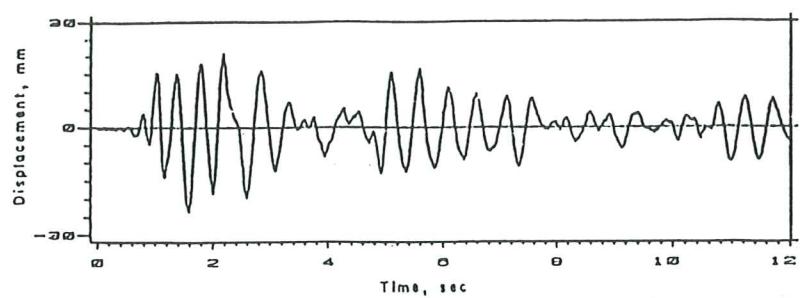
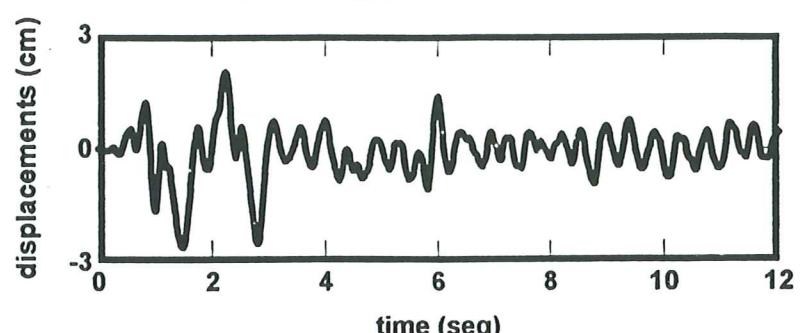


Figura 10.8. Pórtico ensayado en la Universidad de Illinois



a)



b)

Figura 10.9 Desplazamientos laterales en lo alto del pórtico. a) Resultados experimentales b) Simulación numérica.

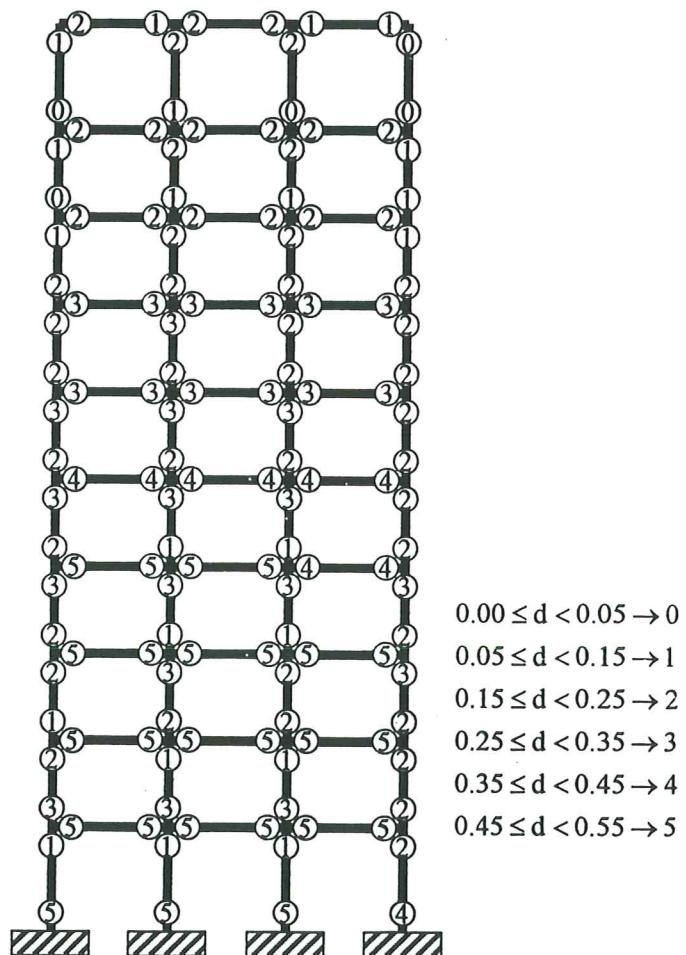


Figura 10.10 Mapa de daños al final del evento

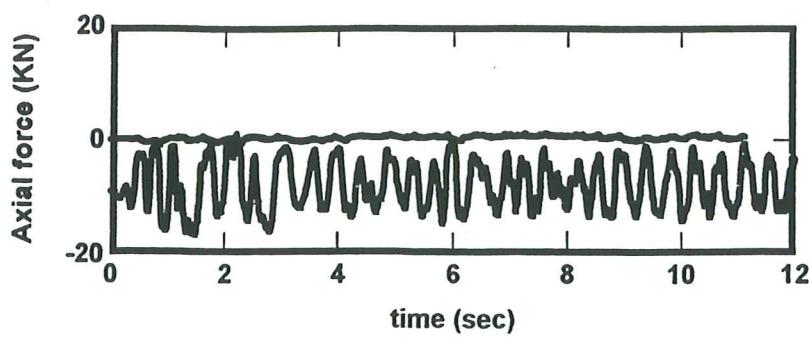


Figura 10.11 Historia de fuerzas axiales en una viga y una columna.

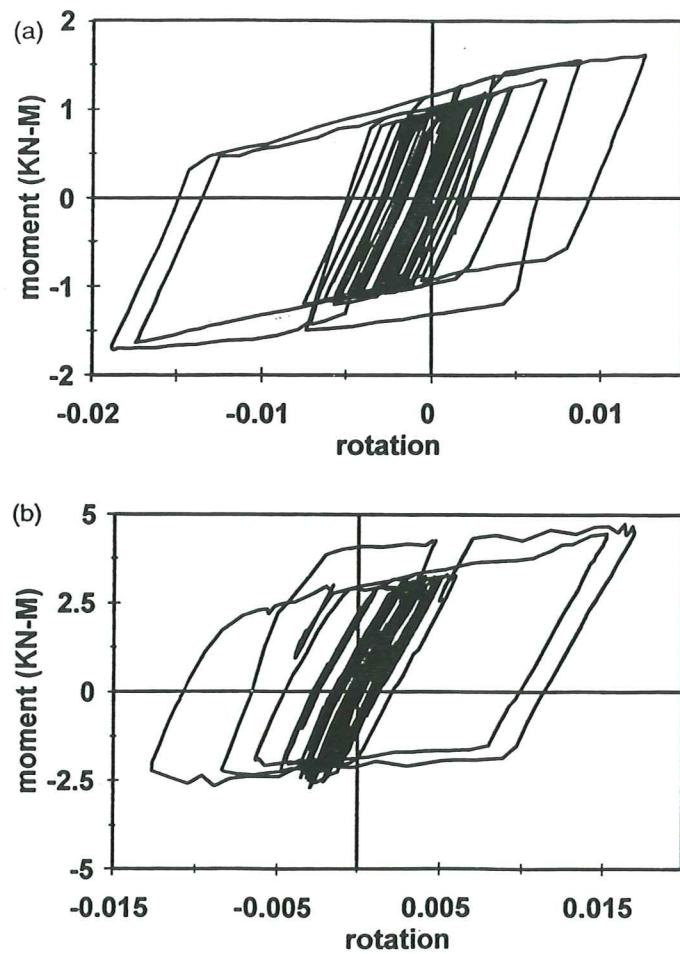


Figura 10.12 Curvas momento-rotación a) Rótula en una viga del primer piso b) Rótula en una columna del primer piso.

10.6 Resumen

En este capítulo se presenta un modelo de daño concentrado en rótulas para pórticos de concreto armado. El modelo esta compuesto por la ley de estado (10.17), las leyes de evolución del daño (10.18, 10.19, 10.8) y la ley de evolución de las

deformaciones plásticas (5.18) con la función de fluencia (10.20) para las rótulas i y j. Este modelo representa pórticos con rigidez variable y rotaciones plásticas, secciones asimétricas y fuerzas axiales variables. Para calcular los parámetros del modelo debe resolverse un sistema de ecuaciones compuesto por las expresiones (10.10-10.12, 10.14-10.16) para momentos positivos y negativos y para las rótulas i y j. El análisis numérico de pórticos de concreto armado no difiere del de los pórticos elastoplásticos.

11. Bibliografía

11.1 Bibliografía del capítulo 2.

H.G. Powell, Theory for nonlinear elastic structures. *J. Struc. Div. ASCE* 95 (ST12), 2687-2701 (1969).

A. Cipollina, A. López-Inojosa y J. Flórez-López, A simplified damage mechanics approach to nonlinear analysis of frames. *Computers & Structures* 54, 6, 1113-1126 (1995).

11.2 Bibliografía del capítulo 3.

H.G. Powell, Theory for nonlinear elastic structures. *J. Struc. Div. ASCE* 95 (ST12), 2687-2701 (1969).

J. Argyris y H.-P. Mlejnek, *Dynamics of Structures* North-Holland (1991)

E. Oñate, *Cálculo de estructuras por el método de los elementos finitos* CIMNE (1992)

A. Cipollina, A. López Inojosa y J. Flórez López, A simplified damage mechanics approach to nonlinear analysis of frames. *Computers & Structures* 54, 6, 1113-1126 (1995).

M. Doblaré Castellano y L. Gracia Villa, *Fundamentos de la elasticidad lineal* Editorial Síntesis (1998).

11.3 Bibliografía del capítulo 4.

H.G. Powell, Theory for nonlinear elastic structures. *J. Struc. Div. ASCE* 95 (ST12), 2687-2701 (1969).

A. Feodosiev, *Resistencia de Materiales*, Editorial Mir (1978).

E. Alarcón, Alvarez, R. Alvarez Cabal y M.S. Gómez Lera, *Cálculo matricial de estructuras*, Editorial Reverté (1990).

A. Cipollina, A. López Inojosa y J. Flórez López, A simplified damage mechanics approach to nonlinear analysis of frames. *Computers & Structures* 54, 6, 1113-1126 (1995).

11.4 Bibliografía del capítulo 5.

- J. Lemaitre y J.L. Chaboche, *Mécanique des matériaux solides*. Dunod (1985).
K. Sugiura, E. Watanabe, G.C. Lee y K.C. Chang, Instability of Steel short column under cyclic loadings en: *Stability and ductility of steel structures under cyclic loadings* y. Fukumoto y G. Lee editores, CRC Press (1992)

11.5 Bibliografía del capítulo 6.

- Y. Lescouarc'h *Calcul en plasticité des structures* Eyrolles (1977).
B. Halphen y J. Salençon *Elasto-Plasticité* Presses ENPC (1987).
A. Cipollina, A. López Inojosa y J. Flórez López, A simplified damage mechanics approach to nonlinear analysis of frames. *Computers & Structures* 54, 6, 1113-1126 (1995).

11.6 Bibliografía del capítulo 7.

- J. Lemaitre y J.L. Chaboche, *Mécanique des matériaux solides*. Dunod (1985).
D. Broek, *Elementary engineering fracture mechanics*. Martinus Nijhoff Publishers (1986)

11.7 Bibliografía del capítulo 8.

- J. Lemaitre y J.L. Chaboche, *Mécanique des matériaux solides*. Dunod (1985).

11.8 Bibliografía del capítulo 9.

- J. Flórez López, Frame analysis and continuum damage mechanics. *Eur. J. Mech., A/Solids* 17, 2, 269-283 (1998)
P. Inglessis, G. Gómez, G. Quintero y J. Flórez-López, Modelos simplificados de daño para el análisis de estructuras de acero. *Rev. Int. Met. Num. Ing.* 14, 3, 279-292 (1998).

11.9 Bibliografía del capítulo 10.

- J. Flórez López, Simplified model of unilateral damage for RC frames. *J. Struct. Eng. ASCE* 121, 12, (1995)
A. Cipollina y J. Flórez López, Modelos simplificados de daño en pórticos de concreto armado, *Rev. Int. Met. Num. Ing.* 11, 1, 3-22 (1995)
M.E. Perdomo, A. Ramírez y J. Flórez López, Simulation of damage in RC frames with variable axial forces *Earthquake Engng. Struct. Dyn.* 27 (1999)

CENTRO INTERNACIONAL DE METODOS NUMERICOS EN INGENIERIA
Lista de monografías publicadas en la Serie de Ingeniería Sísmica

Las monografías pueden adquirirse dirigiéndose al Departamento de Publicaciones del Centro Internacional de Métodos Numericos en Ingeniería, Edificio C1, Campus Norte UPC, c/ Gran Capitán s/n, 08034 Barcelona, teléfono: 93-401.60.37, Fax: 93-401-65-17.

- IS-1 *Qualitative Reasoning for Earthquake Resistant Buildings*, Luís M. Bozzo, 149 pp., ISBN 84-87867-36-7, 1993.
- IS-2 *Control predictivo en sistemas de protección sísmica de estructuras*, R. Andrade Cascante, J. Rodellar, F. López Almasa, 143 pp., ISBN 84-87867-37-5, 1993.
- IS-3 *Simulación numérica del comportamiento no lineal de presas de hormigón ante acciones sísmicas*, M. Galindo, J. Oliver, M. Cervera, 255 pp., ISBN 84-87867-38-3, 1994.
- IS-4 *Simulación del daño sísmico en edificios de hormigón armado*, A. Hangau, A.H. Barbat, S. Oller, E. Oñate, 96 pp., ISBN 84-87867-40-5, 1994.
- IS-5 *Edificios con aislamiento de base no lineal*, N. Molinares, A.H. Barbat, 96 pp., ISBN: 84-87867-41-3, 1994.
- IS-6 *Vulnerabilidad sísmica de edificios*, C. Caicedo, A.H. Barbat, J.A. Canas, R. Aguiar 100 pp., ISBN 84-87867-43-X, 1994.
- IS-7 *Análisis de terremotos históricos por sus efectos*, J. R. Arango Gonzalez, 119 pp., ISBN 84-87867-44-8, 1994.
- IS-8 *Control activo no lineal de edificios con aislamiento de base*, A.H. Barbat, N. Molinares, J. Rodellar, 124 pp., ISBN 84-87867-46-4, 1994.
- IS-9 *Análise estocástica da resposta sísmica nao-linear de estructuras*, A.M. F. Cunha, 199 pp., ISBN: 84-87867-47-2, 1994
- IS-10 *Definición de la acción sísmica*, A.H. Barbat, L. Orosco, J.E. Hurtado, M. Galindo, 122 pp., ISBN: 84-87867-448-0, 1994
- IS-11 *Sismología y peligrosidad sísmica*, J.A. Canas Torres, C. Pujades Beneit, E. Banda Tarradellas, 87 pp., ISBN: 84-87867-49-9, 1994

- IS-12 *Riesgo, peligrosidad y vulnerabilidad sísmica de edificios de mampostería*, F. Yépez, A.H. Barbat, J.A. Canas, 104 pp., ISBN: 84-87867-50-2, 1995
- IS-13 *Estudios de ingeniería sismológica y sísmica*, J.A. Canas, ISBN: 84-87867-57-X, 13 pp., 1995
- IS-14 *Simulación de escenarios de daño para estudios de riesgo sísmico*, F. Yépez, A.H. Barbat y J.A. Canas, ISBN: 84-87867-58-8, 103 pp., 1995
- IS-15 *Diseño sismorresistente de edificios de hormigón armado*, L. Bozzo, A.H. Barbat, ISBN: 84-87867-59-6, 185 pp., 1995
- IS-16 *Modelo tridimensional de atenuación anelástica de las ondas sísmicas en la Península Ibérica*, J.O. Caselles, J. A. Canas, Ll. G. Pujades, R.B. Herrmann, ISBN: 84-87867-60-X, 119 pp., 1995
- IS-17 *Índices de daño sísmico en edificios de hormigón armado*, R. Aguiar ISBN: 84-87867-43-X, 99 pp., 1996
- IS-18 *Experimental study of a reduced scale model seismically base isolated with Rubber-Layer Roller Bearings (RLRB)*, D. Foti, J.M. Kelly ISBN: 84-87867-82-0, 112 pp., 1996
- IS-19 *Modelos de evaluación del comportamiento sísmico no lineal de estructuras de hormigón armado*, F. Yépez Moya ISBN: 84-87867-80-4., 96pp., 1996
- IS-20 *Evaluación probabilista de la vulnerabilidad y riesgo sísmico de estructuras de hormigón armado por medio de simulación*, F. Yépez Moya, A.H. Barbat, J.A. Canas, ISBN: 84-87867-81-2, 1996
- IS-21 *Modelización de la peligrosidad sísmica. Aplicación a Cataluña*, J.A. Canas, J.J. Egoscue, J. Miquel Canet y A.H. Barbat, ISBN: 84-87867-83-9, 101pp., 1996
- IS-22 *Evaluación del daño sísmico global en edificios porticados de hormigón armado*, R. Aguiar, A.H. Barbat and J. Canas, ISBN: 84-87867-96-0, 173pp., 1997
- IS-23 *Daño sísmico global en edificios con muros de cortante*, R. Aguiar, ISBN: 84-89925-00-3, 101 pp., 1997
- IS-24 *Conceptos de cálculo de estructuras en las normativas de diseño sismorresistente*, A.H. Barbat y S. Oller, ISBN: 84-89925-10-0, 107pp., 1997
- IS-25 *Stochastic dynamics of hysteretic structures*, J.E. Hurtado, ISBN: 84-89925-09-7, 205pp., 1998

- IS-26 *Análisis de los acelerogramas de la serie de Adra (Almería). Diciembre 1993 a Enero 1994*, R. Blázquez, A. Suárez, E. Carreño y A.J. Martín, ISBN: 84-89925-11-9, 91pp., 1998
- IS-27 *Respuesta de puentes frente a acciones sísmicas*, E. Maldonado, J.A. Canas, J.R. Casas, L.G. Pujades, ISBN: 84-89925-23-2, 107pp., 1998
- IS-28 Estudio de parámetros en la vulnerabilidad sísmica de puentes, E. Maldonado, J.A. Canas y J.R. Casas, ISBN: 84-89925-16-X, 97pp., 1998
- IS-29 *Metodologias para o cálculo sísmico não-linear de barragens de betão*, R. Faria ISBN: 84-89925-25-9, 113pp., 1998
- IS-30 *Acciones para el diseño sísmico de estructuras*, R. Aguiar, ISBN: 84-89925-27-5, 122pp., 1998
- IS-31 *Avaliação do comportamento sísmico de barragens de betão*, R. Faria, ISBN: 84-89925-28-3, 88pp., 1998
- IS-32 *Vulnerabilidad sísmica de hospitales. Fundamentos para ingenieros y arquitectos*, O.D. Cardona, ISBN:84-89925-33-X, 165pp., 1999
- IS-33 *Modelación estocástica de la acción sísmica*, J. E. Hurtado, ISBN:84-8925-34-8, 93pp., 1999
- IS-34 *Earthquake simulator testing of a steel model seismically protected with friction energy dissipators*, D. Foti and J. Canas, ISBN: 84-89925-40-2, 110pp., 1999

Los autores interesados en publicar monografías en esta serie deben contactar con el editor para concretar las normas de preparación del texto.

