Vol. 17, 3, 317–333 (2001)

Revista Internacional de
Métodos Numéricos para
Cálculo y Diseño en Ingeniería

Análise linear elástica por elementos finitos 3D de um corpo com fenda

Fernando V. Antunes, Nuno Rilo e José M. Ferreira
Departamento de Engenhâria Mecânica
Universidade de Coimbra, Pólo II, 3030 Coimbra, Portugal
Tel.: 351-239-790 700, Fax: 351-239-790 701
e-mail: fernando.ventura@mail.dem.uc.pt
e-mail: mnuno@cygnus.ci.uc.pt
e-mail: martins.ferreira@mail.dem.uc.pt

Carlos M. Branco
Departamento de Engenhâria Mecânica
Instituto Superior Técnico
Av. Rovisco Pais, Lisboa 1096 Codex, Portugal
Tel.: 351-218-417 476 , Fax: 351-218 474 045
e-mail: cmbranco@dem.ist.utl.pt

Sumário

Neste trabalho estuda-se o desempenho de vários elementos finitos tridimensionais na análise de corpos fissurados com comportamento linear elástico. São avaliados três tipos de elementos na frente de fenda: pentaédricos, pentaédricos singulares e colapsados. Conclui-se que se devem utilizar elementos isoparamétricos singulares na modelação da frente de fenda. Além disso, estes elementos são fáceis de obter a partir de elementos isoparamétricos comuns. Relativamente à dimensão radial dos elementos singulares, deve definir-se uma malha não uniforme ao longo da frente de fenda. Junto a pontos de canto devem considerar-se elementos mais pequenos ($\frac{L_{1,s}}{a} = 2-5$ %, em que a é o comprimento de fenda), porque aí a singularidade é diferente da singularidade simulada pelos elementos isoparamétricos singulares. As dificultades de simulação junto da superfície, e consequentemente a importância de $L_{1,s}$, dependem da forma da fenda. Os elementos singulares interiores devem ter maiores dimensãoes raidais ($\frac{L_{1,i}}{a} \approx 10-12,5$ %).

Palabras clave:

Método dos Elementos Finitos, corpo com fenda, elementos singulares e tamanho optimo

FEM ANALYSIS OF A CRACKED BODY WITH LINEAR ELASTIC BEHAVIOUR

Summary

A study of the performance of several 3D finite elements in the analysis of linear elastic cracked bodies is presented. Three types of quadratic isoparametric elements are evaluated in modeling crack fronts: regular pentahedral elements with 15 nodes, singular pentahedral elements with 15 nodes, and collapsed hexahedral elements with 20 nodes. Singular isoparametric elements are suitable for crack front modeling and must be used. These elements are easy to define in common general finite element programs. A non-uniform grid must be defined along the front crack. Near corner points smaller elements must be considered ($\frac{L_{1,s}}{a} = 2-5$ % were a is the crack length and $L_{1,s}$ is the radial dimension of near surface elements) because the singularity there is different from $r^{-0.5}$. The difficulties of simulation near the surface, and consequently the importance of $L_{1,s}$, depend on crack shape. The interior singular elements must be larger ($\frac{L_{1,i}}{a} \approx 10-12,5$ %).

 ISSN: 0213–1315 Recibido: Diciembre 1999

Keywords:

Finite element method, cracked body, singular elements and optimum size.

INTRODUÇÃO

O campo de tensões na extremidade de uma fenda contida num corpo com comportamento linear elástico, tem a seguinte forma geral

$$\sigma_{ij} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) \tag{1}$$

onde σ_{ij} são as componentes da tensão, (r, θ) são as coordenadas polares com origem na ponta da fenda e K é o factor de intensidade de tensão. Em cada ponto da frente da fenda, r é igual a zero, pelo que a tensão é infinita. Assim, a frente da fenda é uma linha singular, sendo a ordem da singularidade $r^{-0,5}$. A equação 1 considera apenas o primeiro termo da série completa das tensões na vizinhança da extremidade da fenda. Para uma fenda em condições de deformação plana, solicitada em modo I, esta série tem a forma

$$\sigma_{ij} \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{(-1)}(\theta) + a_0 + a_1 r^{\frac{1}{2}} f_{ij}^{(1)}(\theta) + \ldots \tag{2}$$

De acordo com esta expressão, podem distinguir-se duas zonas na vizinhança da extremidade de uma fenda: uma região singular junto da ponta da fenda, dominada pelo termo em K, e uma zona mais afastada onde dominam os termos não singulares.

Considera-se que a singularidade $r^{-0,5}$ seja válida ao longo de uma frente de fenda com uma forma arbitrária, desde que não existam pontos isolados. Um ponto P' da frente de fenda é um ponto isolado se ocorrer pelo menos uma das seguintes situações:[1] a frente de fenda é aguçada no ponto P'; ocorram descontinuidades no material em P'; actuem tracções singulares de ordem $r^{-0,5}$ na superfície da fenda junto a P'. Na intercepção da frente de fenda com uma superfície livre há uma descontinuidade pelo que o campo singular de tensões dado pela equação (1) não é válido. Muitos investigadores têm estudado este caso de intercepção de uma fenda com a superfície livre, porém as soluções para a singularidade e para o campo de tensões são ainda controversas. Há duas tendências: alguns autores[2,3,4] sugerem que nos pontos de canto existe uma singularidade de tensões $r^{-0,5}$, enquanto outros[5,6] indicam que apesar de existir uma singularidade esta é diferente de $r^{-0,5}$. Para estes últimos a ordem de singularidade λ depende do coeficiente de Poisson do material ν e do ângulo de intersecção da fenda com a superfície livre β. O aumento de β e o decréscimo de ν produzem um aumento de λ. Para uma frente de fenda normal à superfície livre ($\beta = 90°$), solicitada em modo I de carregamento, verifica-se uma redução da ordem de singularidade junto à superfície livre (isto é, $\lambda < 0,5$).

A aplicação do método dos elementos finitos (MEF) à análise de fendas em corpos linear elásticos solicitados estaticamente, é dificultada por estas singularidades de tensões existentes na frente de fenda. De facto, as funções de forma são polinómios definidos sobre elementos de comprimento finito não podendo assim as tensões atingir valores infinitos. Deste modo, o campo de deslocamentos assumido pelo MEF nos elementos ligados à frente de fenda nunca se ajusta à distribuição real dos deslocamentos, e assim são obtidos deslocamentos nodais afectados por erros. Isto afecta principalmente a região vizinha da frente de fenda, mas as restantes regiões são também afectadas. Longe da frente de fenda é conveniente ter uma malha mais larga para reduzir o número de graus de liberdade da análise.

Para simular adequadamente o campo de tensões singular foram criados elementos especiais, ditos singulares, que incluem a singularidade $r^{-0,5}$ na sua formulação. A introdução da singularidade das tensões lineares elásticas na análise por elementos finitos pode ser feita usando na frente de fenda elementos analíticos ou elementos isoparamétricos modificados.

Os elementos analíticos são baseados nas expressões analíticas da mecânica da fractura linear elástica, tendo sido desenvolvidos em diversas universidades. Contudo, a sua ligação aos elementos isoparamétricos viola as condições de equilíbrio nos nós e introduz problemas de continuidade, de modo que são necessários elementos de transição. Além disso, estes elementos não estão normalmente disponíveis ou a informação acerca deles não é suficiente.[7]

Uma alternativa mais simples é o uso de elementos isoparamétricos singulares. Estes são obtidos dos elementos isoparamétricos alterando a posição dos nós intermédios vizinhos da frente de fenda. A ligação aos elementos normais não é problema e assim não há necessidade de definir elementos de transição. De facto, pode dizer-se que o corpo fissurado é modelado com o mesmo tipo de elementos em todo o seu domínio. Estes elementos satisfazem ainda as condições de convergência. Uma vez que os elementos isoparamétricos estão disponíveis em todos os programas comerciais de elementos finitos, estes elementos singulares podem ser facilmente utilizados.

Diferentes tipos de elementos isoparamétricos singulares podem ser utilizados na frente de fenda:

- elementos singulares com nodos a 1/4 da aresta;[8,9,10,11]
- elementos singulares de ordem elevada;[12]
- elementos colapsados com nodos a 1/4 da aresta;[13,7,14]
- elementos duplamente colapsados com nodos a 1/4 da aresta;[7]
- elementos singulares triangulares ou prismáticos.[15,11]

Entre os elementos singulares da frente de fenda e os elementos normais podem definir-se elementos de transição.[16,10] Todos estes elementos podem ter uma ordem radial diferente da transversal.[17,18,19] Há outros tipos de elementos singulares isoparamétricos em que não apenas a posição dos nós é alterada, mas também as funções de forma.[20,21] Porém, estes elementos não estão tão disponíveis como aqueles em que apenas a posição dos nós é modificada.

O tamanho óptimo dos elementos singulares é aquele que permite uma modelação adequada dos campos singulares e não singulares de tensões. Para cada configuração de fenda existe um tamanho óptimo dos elementos singulares, contudo, a definição desse tamanho óptimo é dificultada pela variação das zonas singulares com a configuração das fendas. Além disso, esta zona é variável à volta da extremidade da fenda e ao longo da frente de fenda. Os seus limites também não podem ser definidos claramente, porque há uma transição da região dominada pelo termo singular para uma região em que dominam os termos não singulares, e não uma mudança brusca. Assim, não existe um tamanho óptimo universal e é difícil encontrar linhas gerais para uso adequado dos elementos singulares para todos os corpos fissurados. Tirando proveito da propriedade de convergência dos elementos isoparamétricos, pode variar-se o tamanho dos elementos singulares de modo a realizar um estudo de convergência. Deve porém ter-se em atenção que um estudo de convergência nem sempre dá o valor óptimo, porque este nem sempre é um ponto de viragem dos resultados.

Na vizinhança dos pontos de canto (pontos em que a frente de fenda intersecta as superfícies livres), a ordem de singularidade é em geral diferente de 0,5, que é a singularidade simulada por quase todos os elementos singulares. Assim, os elementos singulares não são adequados para serem usados aí e os resultados de elementos finitos devem ser tratados com precaução.

O objectivo deste trabalho é avaliar o desempenho de diversos elementos finitos 3D na análise de corpos fendidos com comportamento linear elástico. Os aspectos estudados são o tipo e a dimensão radial dos elementos da frente de fenda. Foram considerados três tipos de elementos: pentaédricos, pentaédricos singulares e hexaédricos colapsados.

A GEOMETRIA DA FENDA DE CANTO

A Figura 1 apresenta a geometria do corpo 3D fissurado que é aqui estudado. Trata-se de um provete de secção quadrada, que é utilizado para obter as propriedades de fadiga dos materiais. Esta geometria é normalmente designada por provete CC ("Corner Crack"). A fenda é plana e existe na secção média do provete. No estudo numérico foi considerada uma carga estática de 60 kN, que solicita a fenda em modo I (modo de abertura) ao longo de toda a sua frente. As condições de fronteira são indicadas na Figura 1 e procuram reproduzir as condições impostas pelas amarras rígidas da máquina de ensaios. O material foi considerado contínuo, homogéneo, isotrópico e com um comportamento linear elástico. As propriedades elásticas consideradas foram $E = 1,7 \times 10^{11}$ Pa (módulo de Young) e $\nu = 0,3$ (coeficiente de Poisson).

Com o objectivo de facilitar a análise pelo MEF do provete CC apresentado na Figura 1, foram consideradas várias simplificações. A Figura 2 apresenta uma vista tridimensional do modelo físico considerado.

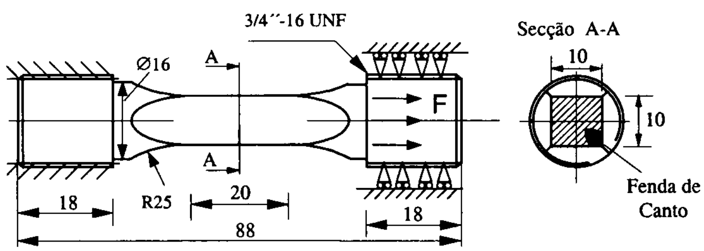

Figura 1. Provete CC (*corner crack*) com fenda de canto

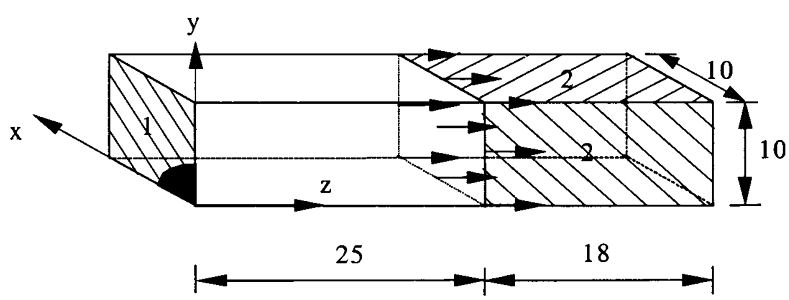

Figura 2. Geometria da fenda de canto (superficie 1: restrição ao movimento na direção z; superficies 2: restrições aos movimentos nas direções x e y)

OS ELEMENTOS FINITOS E AS MALHAS USADAS

Foi usado o programa genérico de elementos finitos MODULEF desenvolvido no INRIA desde 1987.[22] Neste estudo partiu-se dos elementos quadráticos isoparamétricos HEXA 3Q2C (hexaédro de 20 nós) e PENT 3R2C (pentaédro de 15 nós) que integram a biblioteca de elementos lineares elásticos deste programa. A partir destes elementos foram obtidos dois elementos singulares: o elemento de 20 nós colapsado (CSE) e o elemento pentaédrico singular (PSE) por alterações da posição de alguns nós como se indica na Figura 3. Foi sempre usada uma integração de Gauss completa ($3 \times 3 \times 3 = 27$ pontos de integração para os elementos de 20 nós e 21 pontos de integração para os elementos de 15 nós).

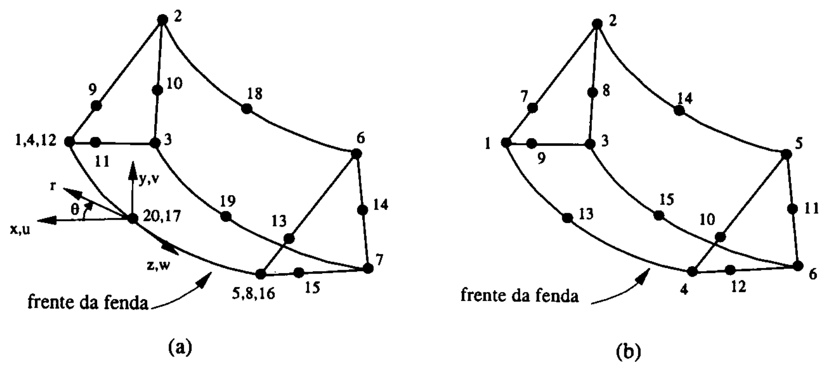

Figura 3. Elementos isoparamétricos singulares: (a) elemento de 20 nós colapsado (CSE); (b) elemento pentaédrico singular (PSE)

A Figura 4 mostra uma malha tıpica de elementos finitos considerada para uma fenda de canto de forma circular com 5 mm de raio. Ela compreende três partes principais, uma malha em teia de aranha à volta da frente da fenda (Figuras 5 e 6), uma malha de transição e uma malha regular longe da frente de fenda. Esta malha foi alterada para diferentes formas e dimensões de fenda mantendo no entanto o mesmo padrão.

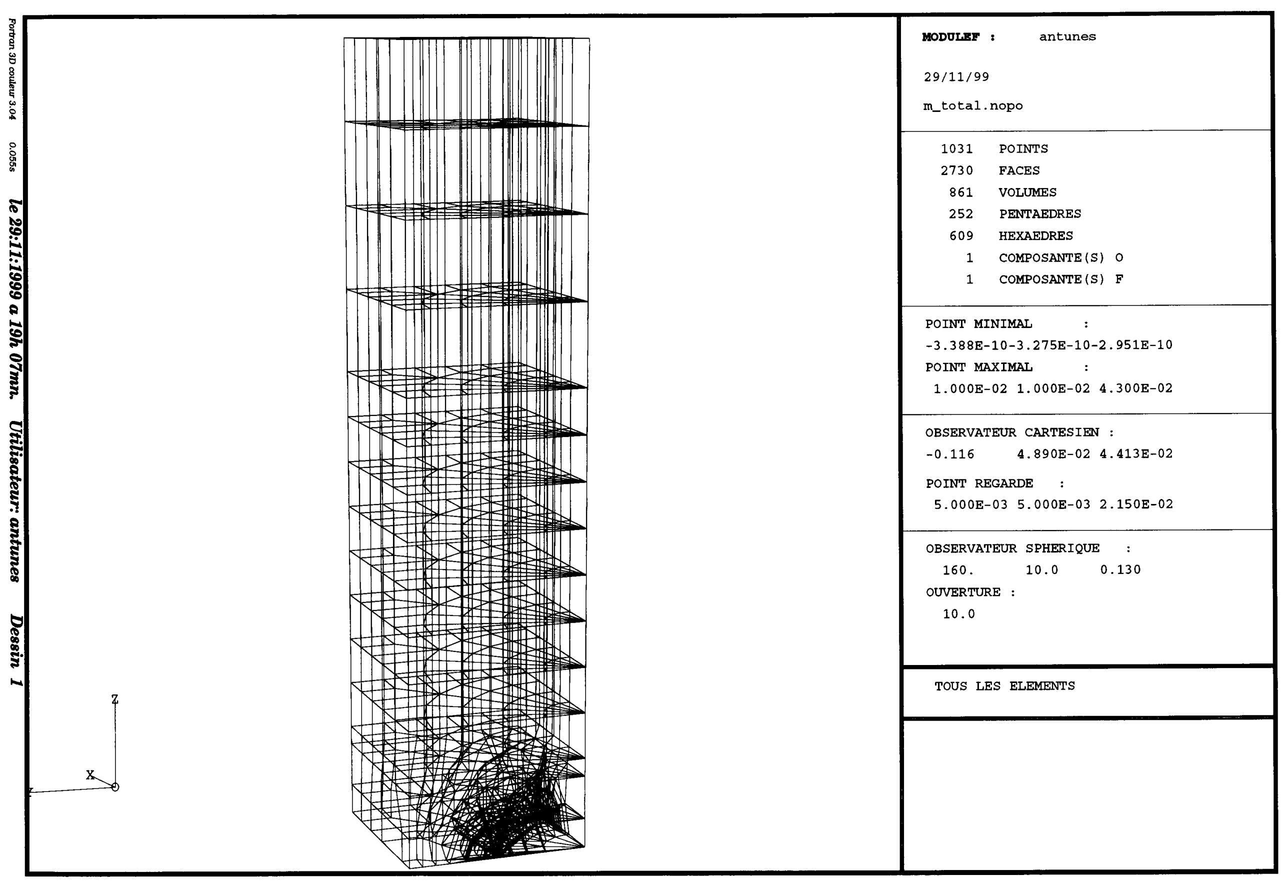

Figura 4. Malha de elementos finitos 3D típica

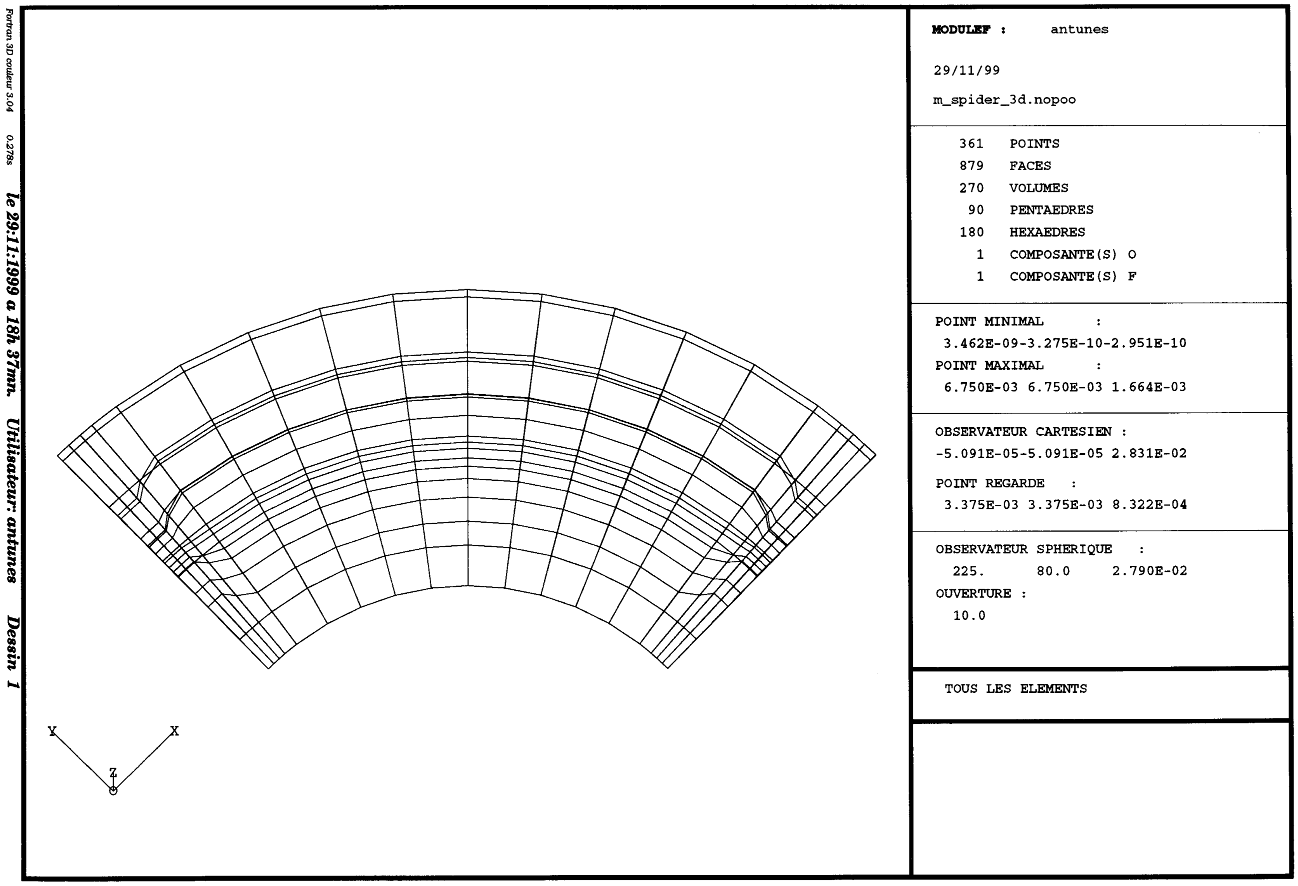

Figura 5. Plano da malha de elementos finitos 3D em teia de aranha, em volta de uma fenda circular, com refinamento junto aos cantos

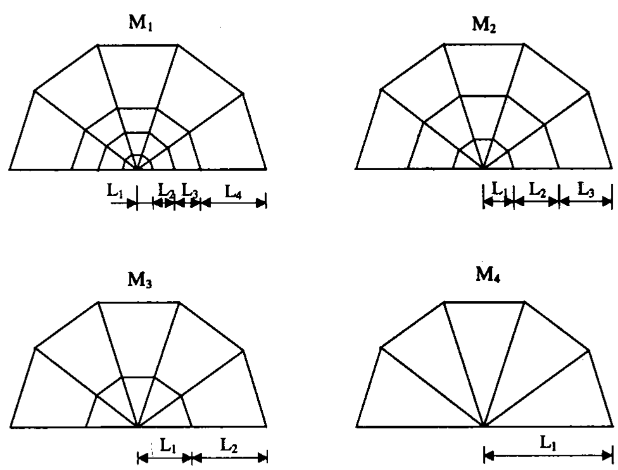

Figura 6. Malhas tipo teia de aranha usadas à volta de cada elemento da frente de fenda

Na definição da zona de malha em teia de aranha, foi tido um cuidado especial porque os erros provêm principalmente da dificuldade de simulação da singularidade existente na frente da fenda. A distribuição de elementos é mais refinada junto às superfícies para ter em conta os efeitos de bordo.

PRECISÃO DOS RESULTADOS DO MEF

A precisão do MEF está relacionada com a capacidade de representar o campo de deslocamentos real, de modo que depende dos seguintes parâmetros: o tipo de elementos e a ordem de integração das matrizes elementares, a malha de elementos finitos (sendo particularmente importante a distribuição dos elementos ao longo e à volta da frente de fenda). A precisão depende também do tamanho da palavra com que o computador funciona, que influência o erro de arredondamento. Alguns destes parâmetros foram definidos à partida. Os parâmetros ainda não definidos, que são estudados a seguir, são o tipo dos elementos da extremidade da fenda e a sua dimensão radial.

O parâmetro, ou variável dependente, usado no estudo da precisão foi, em geral, o trabalho das forças exteriores. As distribuições reais dos deslocamentos, tensões e deformações num corpo fissurado são em geral desconhecidas, de modo que não é possível obter o erro de uma análise por elementos finitos. A estimativa da precisão faz-se usando experimentação computacional, em que o problema é resolvido várias vezes com diferentes malhas, sucessivamente mais refinadas. O refinamento da malha reduz os erros do MEF e assim os resultados são convergentes para a solução exacta, que seria obtida com um número infinito de graus de liberdade. O objectivo do estudo de convergência não é geralmente obter essa solução exacta, mas apenas estimar a precisão de uma solução existente. A variação dos resultados com a variação dos graus de liberdade é usada como uma medida de precisão, porque com a aproximação à solução exacta essa variação reduz-se.

Influência do tipo de elementos da frente da fenda

O tipo de elemento utilizado na frente de fenda é um aspecto fundamental para a correcta simulação da singularidade de tensões pelo MEF. Os elementos de extremidade de fenda aqui estudados são:

- elementos pentaédricos (PE) com 15 nós;[8,9]
- elementos pentaédricos singulares (PSE) com 15 nós;[15,11]
- elementos hexaédricos singulares colapsados (CSE) com 20 nós.[13,7,14]

Para estudar a influência dos elementos da extremidade da fenda, foram consideradas quatro malhas em teia de aranha numa fenda circular com 5 mm de raio. Estas malhas são apresentadas na Figura 6, enquanto as respectivas dimensões radiais são apresentadas na Tabela I. A frente de fenda foi dividida em 18 elementos com um refinamento junto aos cantos como se mostra na Figura 7.

Designação	$\frac{L_1}{a}$ (%)	$\frac{L_2}{a}$ (%)	$\frac{L_3}{a}$ (%)	$\frac{L_4}{a}$ (%)	Nós	Elementos
M_1	5	7,6	9,05	21,7	4098	894
M_2	10	15	18	–	3667	804
M_3	15	22,8	–	–	3553	714
M_4	37,8	–	–	–	2805	624

Tabla I. Dimensões dos elementos vizinhos da frente de fenda (a é o comprimento de fenda)

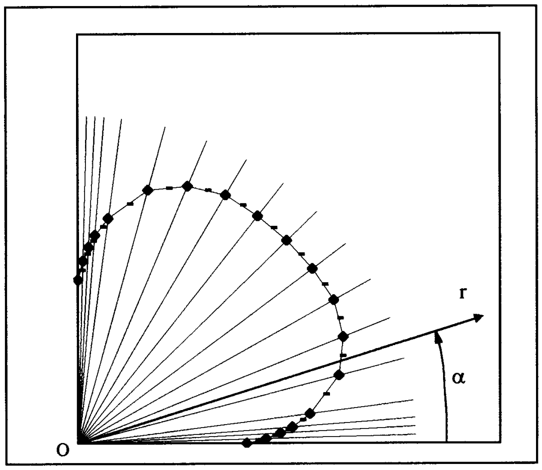

Figura 7. Distribuição dos elementos ao longo da frente de fenda

A Figura 8 apresenta os deslocamentos obtidos para o ponto B situado na superfície da fenda, com coordenadas $\alpha = 45°$ e $r = 1,5$ mm. Quando são usados elementos pentaédricos (não singulares) na frente da fenda, o refinamento da malha produz uma convergência para um valor com um erro desprezável. Observa-se um aumento dos deslocamentos nodais com o refinamento da malha, que é explicado pela redução da rigidez do corpo. Este resultado era esperado uma vez que é conhecido que os erros dos elementos finitos produzem um aumento da rigidez dos corpos.

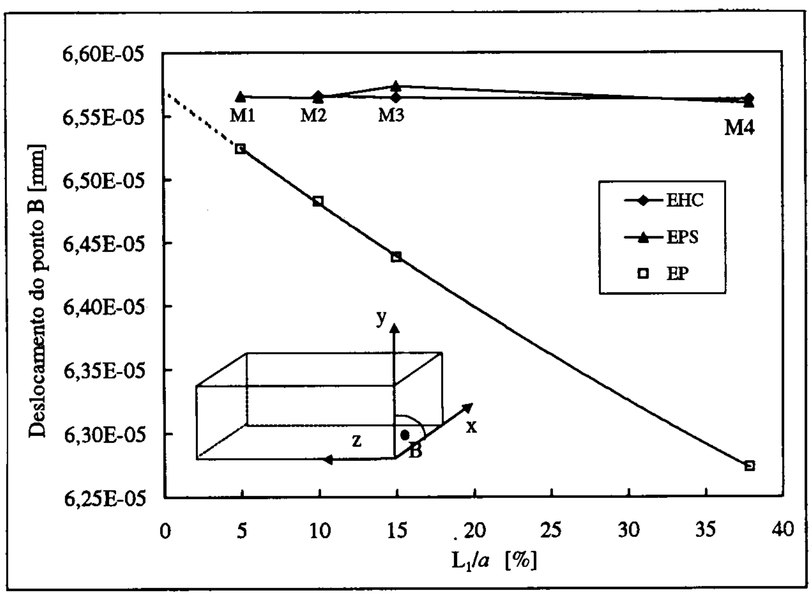

Figura 8. Deslocamento z de um ponto B da superficie da fenda ($x = y = 1,06$ mm; $z = 0$), para diferentes elementos de frente de fenda

Na Figura 8 pode ver-se que, para cada uma das malhas, a substituição de elementos isoparamétricos por elementos singulares melhora significativamente os resultados. A diferença reduz-se com o refinamento da malha, porque com pequenos elementos regulares na frente da fenda os resultados são mais correctos, de modo que a melhoria conseguida com elementos singulares é menor. Comparando diferentes malhas, pode ver-se que a malha M4 ($\frac{L_1}{a} = 38$ %) com elementos singulares, dá melhores resultados do que a malha M1 ($\frac{L_1}{a} = 5$ %) com elementos isoparamétricos (não singulares) na frente de fenda. Este bom desempenho dos elementos singulares era esperado porque estes simulam a singularidade $r^{-0,5}$ existente junto à frente da fenda. Junto à superfície há também uma singularidade do tipo $r^{-\lambda}$, contudo $\lambda < 0,5$ para uma fenda em quarto de círculo. Os elementos singulares assumem também aí a singularidade $r^{-0,5}$, pelo que é introduzido um erro nos resultados do MEF.

Os resultados para elementos hexaédricos colapsados e pentaédricos singulares são semelhantes, sendo ligeiramente melhores para os primeiros. Contudo, os elementos colapsados exigem que os nós da extremidade da fenda sejam coincidentes para uma correcta simulação da singularidade $r^{-0,5}$, são muito sensíveis à posição dos nós intermédios opostos à frente de fenda e têm mais nós. Uma vez que a diferença entre os elementos colapsados e os pentaédricos singulares não é importante, estes são os mais adequados para usar na frente da fenda, de entre os aqui estudados.

Influência do tamanho dos elementos vizinhos da frente da fenda

A questão agora é: que dimensão radial deve ser considerada para os elementos próximos da frente da fenda para ter a melhor simulação da singularidade? Podem ocorrer três situações, que são ilustradas na Figura 9:

a) os elementos da extremidade da fenda estão dentro da região singular;
b) os elementos da extremidade da fenda e a região singular têm dimensões idênticas;
c) os elementos da extremidade da fenda são maiores do que a região singular.

Se $L_1 < r_s$, onde L_1 é a dimensão radial dos elementos singulares e r_s é a dimensão radial da região singular, parte da região singular é simulada por elementos não singulares, o que introduz erros. Se $L_1 > r_s$, os elementos singulares podem ter dificuldades na simulação da região não singular. Espera-se pois que o tamanho óptimo dos elementos singulares seja idêntico ao tamanho da região singular. Deve ter-se em atenção que a extensão da região singular varia ao longo e à volta da frente de fenda, como se indica na Figura 9, pelo que o tamanho óptimo é sempre um valor de compromisso. Além disso, não há uma mudança brusca para uma região não singular, mas sim uma transição de uma zona dominada pela singularidade para uma zona onde dominam os termos não singulares.

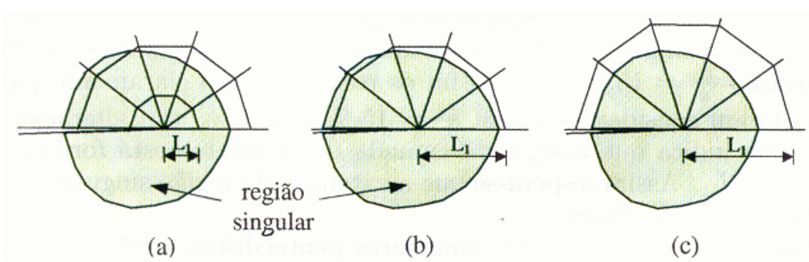

Figura 9. Relação entre a dimensão radial dos elementos da ponta da fenda L_1 e a região singular r_s: (a) $L_1 < R_s$; (b) $L_1 \approx r_s$; (c) $L_1 > r_s$

Para estudar a influência da dimensão dos elementos da frente da fenda, foram consideradas quatro fendas, que são representadas na Figura 10. Três delas (4, 2, 1) são fendas em quarto de círculo com comprimentos de 1, 3 e 5 mm, enquanto a outra (3) é uma fenda com um efeito de túnel pronunciado junto à superfície. Estas fendas foram consideradas para estudar a influência do comprimento e forma da fenda na precisão da análise pelo MEF. Para estudar a influência da dimensão radial dos elementos próximos da superfície, foi considerada uma região superficial estendendo-se por cerca de 7,5° a partir de cada ponto de canto, como se indica na Figura 10.

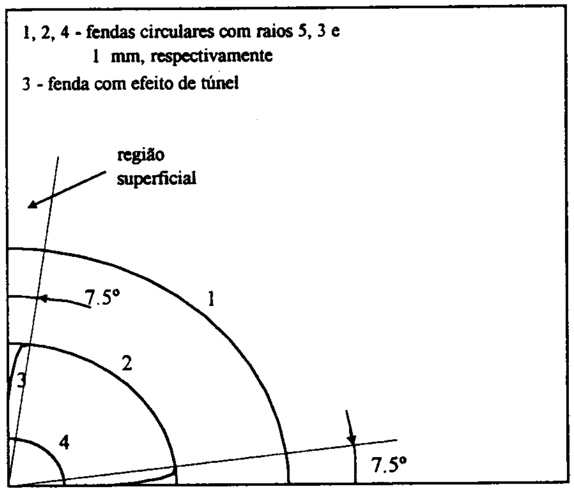

Figura 10. Fendas para estudar a precisão da análise pelos elementos fintios 3D

Influência de L_1 e L_2 para uma fenda circular com 5 mm de raio

A Figura 11 apresenta o trabalho das forças externas (W_E) obtido para uma fenda circular com 5 mm de raio (fenda 1 da Figura 10), considerando diferentes dimensões radiais para os elementos da frente de fenda L_1. Uma vez que o objectivo era estudar a influência de L_1, L_2 foi mantida constante ($\frac{L_2}{a} = 15,22$ %, onde a é a dimensão da fenda). L_3 também foi variado, decrescendo com o aumento de L_1, sendo $\frac{(L_1+L_2+L_3)}{a}$ constante e igual a 43,3 %. Pode ver-se que, quando são usados elementos pentaédricos (PE) na frente de fenda, a redução de L_1 melhora significativamente os resultados porque a simulação da singularidade é melhor. Para valores de $\frac{L_1}{a}$ menores do que 5 %, a variação de W_E com L_1 reduz-se. Isto indica que, embora exista uma melhor simulação da singularidade pelos elementos da frente de fenda, a segunda camada de elementos também simula os campos singulares mas com menor precisão. Assim, a região singular é tal que $\frac{r_s}{a} \geq 5$ %, onde r_s é a sua dimensão radial. No limite $L_1 = 0$, a singularidade é simulada apenas pela segunda camada de elementos, que tem dimensão $\frac{L_2}{a} = 15,22$ %, e assim os resultados são claramente piores. Diferentes valores de L_2 foram considerados para $\frac{L_1}{a} = 15$ % e 37,8 %, sem alteração significativa de resultados, o que indica que a segunda camada de elementos está fora da região singular para este valor de L_1. Assim, espera-se que a extensão da região singular seja menor do que 15 % do comprimento da fenda.

Quando são utilizados elementos singulares pentaédricos (PSE) na frente da fenda, a variação de W_E com L_1 apresenta um valor máximo para $\frac{L_1}{a} \approx 10$ %, que é a dimensão óptima dos elementos singulares. Esta é também uma indicação da dimensão média da região singular ao longo e à volta da frente de fenda. Para $\frac{L_1}{a} < 10$ %, W_E aumenta com L_1 porque os elementos singulares estão dentro da região singular, e assim parte desta é simulada por elementos não singulares. Neste caso, a dimensão da segunda camada de elementos torna-se importante. Para $\frac{L_1}{a} > 10$ %, W_E reduz-se com o incremento de L_1, porque os elementos singulares estão a simular regiões não singulares. Neste caso, espera-se que a dimensão de L_2 seja menos importante. Na Figura 11 são apresentados três valores de W_E para L_2 diferente de 15,22 %, obtidos para ($\frac{L_1}{a}$, $\frac{L_2}{a}$)= (5, 10), (6, 10) e (15, 22,8) %. Estes resultados confirmam que a dimensão radial da segunda camada de L_2 é mais importante para $\frac{L_1}{a} < 10$ %.

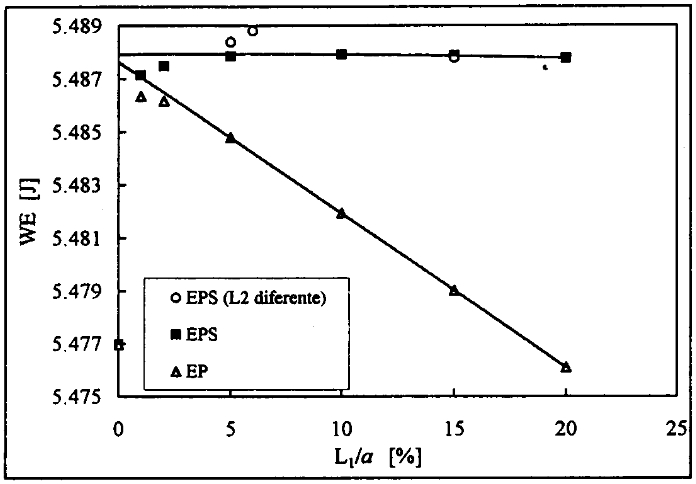

Figura 11. Influência da dimensão radial dos elementos da frente de fenda $\frac{L_2}{a} = 15,22$ % para uma fenda em quarto de círculo com 5 mm

A influência de L_2 pode estudar-se melhor na Figura 12. Para $\frac{L_1}{a} = 1$ %, os elementos singulares ficam dentro da zona singular, e assim parte desta é simulada por elementos da segunda camada. O tamanho óptimo de $\frac{L_2}{a}$ é aproximadamente 8 %, o que confirma que a extensão da zona singular é aproximadamente 10 %. Para $\frac{L_2}{a} < 8$ %, a segunda camada de elementos fica também na zona singular, assim parte desta é simulada pela terceira camada de elementos que tem dificuldades para o fazer. Por outro lado, para $\frac{L_2}{a} > 8$ %, a segunda camada de elementos tem dificuldade na simulação da zona singular. Para $\frac{L_1}{a}$=10 %, que é a dimensão aproximada da região singular, pode ver-se na Figura 12 que o tamanho óptimo de $\frac{L_2}{a}$ é aproximadamente 10 %, o que tem a ver com a simulação adequada do campo não singular. Pode também confirmar-se que a influência de L_2 sobre W_E é muito mais importante para $\frac{L_1}{a}$=1 % do que para 10 %, como já foi visto.

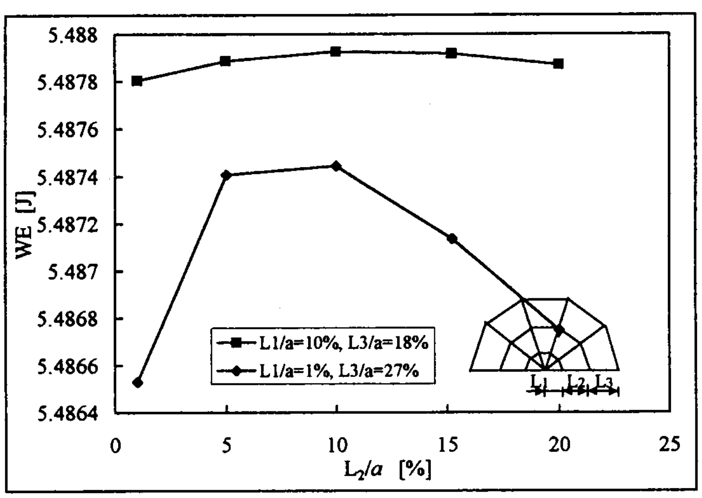

Figura 12. Influência da dimensão radial da segunda camada de elementos

Influência de L_1, $L_{1,i}$ e $L_{1,s}$ para uma fenda com efeito de túnel

Para fendas com formas não circulares, espera-se que o desempenho do MEF seja diferente. De facto, a forma da fenda influencia a singularidade existente perto dos pontos de canto e os elementos singulares usados apenas simulam a singularidade $r^{-0,5}$. A Figura 13 apresenta a influência de L_1 sobre W_E para a fenda número 3 da Figura 10, que tem um efeito de túnel pronunciado perto da superfície (L_1 é o tamanho radial dos elementos singulares para uma distribuição uniforme de elementos ao longo da frente de fenda). A Figura 13 apresenta também resultados para uma distribuição não uniforme de elementos singulares ao longo da frente de fenda. Neste caso, foram consideradas duas regiões superficiais e uma região interior, como se indica na Figura 10, sendo $L_{1,i}$ o tamanho radial dos elementos singulares interiores e $L_{1,s}$ o tamanho radial dos elementos singulares próximos da superfície. O valor de $L_{1,s}$ foi mantido constante enquanto $L_{1,i}$ foi variado. O tamanho óptimo de L_1 para uma distribuição uniforme dos elementos singulares da extremidade da fenda é menor ou igual a 5 %, enquanto o tamanho óptimo dos elementos interiores é aproximadamente 10 %. A variação de W_E com L_1 é muito mais importante do que com $L_{1,i}$, o que indica que a influência de L_1 está relacionada com dificuldades de simulação junto às superfícies. De facto, a diferença entre as duas curvas apresentadas na Figura 13 é devida apenas à dimensão dos elementos próximos da superfície, que tem o valor constante $\frac{L_{1,s}}{a} = 5$ % no estudo da influência de $L_{1,i}$.

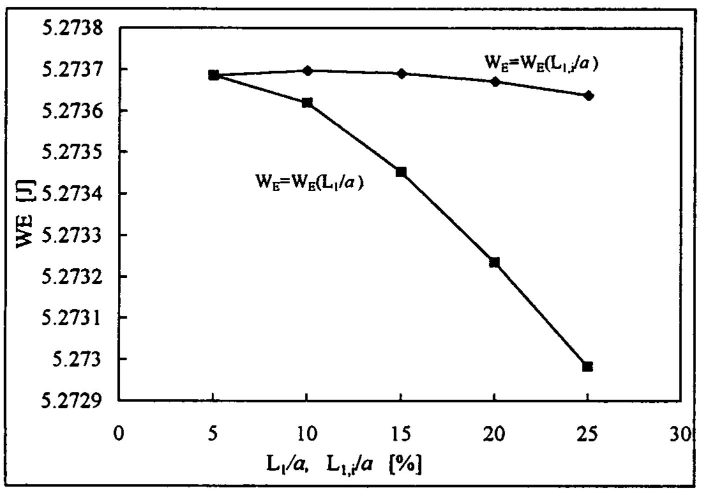

Figura 13. Influência da dimensão radial dos elementos da ponta da fenda numa fenda com efeito de túnel (fenda 3 da Figura 10)

O efeito de refinamento da malha perto da superfície pode estudar-se melhor na Figura 14, na qual $L_{1,s}$ varia enquanto $L_{1,i}$ é mantido constante. Observa-se uma melhoria clara com a redução do tamanho radial dos elementos próximos da frente de fenda $L_{1,s}$, sendo o valor óptimo $\frac{L_{1,s}}{a} \approx 2,5$ %. A dimensão radial dos elementos singulares deve ser pequena junto à superfície, porque estes não simulam adequadamente a singularidade aí existente. Esperam-se ainda dificuldades de simulação na direcção longitudinal à frente de fenda. De facto, junto à superfície a singularidade varia rapidamente de $r^{-\lambda}$ até $r^{-0,5}$, enquanto os elementos usados conseguem apenas ajustar uma variação quadrática de deslocamentos ao longo da frente de fenda.

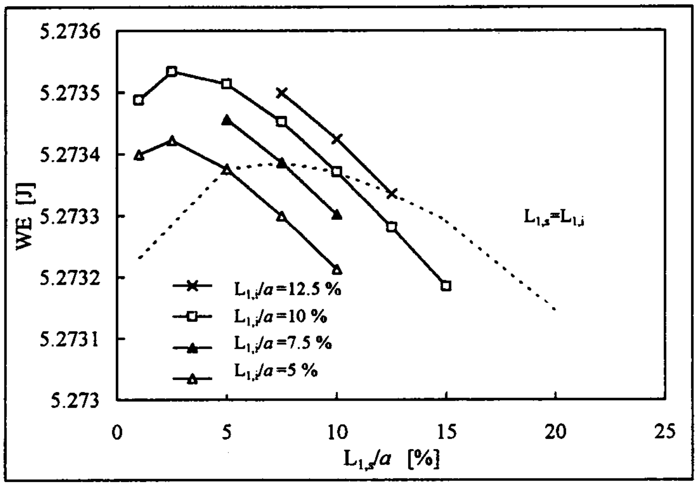

Figura 14. Influência do refinamento da malha junto à superficie ($\frac{L_2}{a} = 5$ %).

Influência do comprimento e forma da fenda

A Tabela II apresenta os tamanhos óptimos dos elementos de frente de fenda para as quatro fendas apresentadas na Figura 10. A influência do comprimento de fenda pode ser estudada comparando os resultados obtidos para as fendas em quarto de círculo. Pode ver-se que o tamanho óptimo dos elementos interiores é independente do tamanho de fenda $\frac{L_{1,i}}{a} = 10$ a $12,5$ %. Os elementos da superfície devem ser mais pequenos porque a singularidade é diferente de $r^{-0,5}$ junto à superfície. Porém, para fendas em quarto de círculo a importância de $L_{1,s}$ é pequena quando comparada com a importância de $L_{1,i}$. Nykännen[24] analisou uma fenda superficial (tridimensional) sujeita a modo I de carregamento, tendo verificado que o valor óptimo de $\frac{L_1}{a}$ variava de 12,5 a 27,5 % (onde L_1 é a dimensão dos elementos singulares ao longo da frente de fenda).

A influência da forma de fenda pode ser estudada comparando as fendas 2 e 3, que têm tamanhos semelhantes mas formas diferentes. O tamanho óptimo dos elementos singulares interiores é o mesmo, o que era esperado uma vez que o efeito de túnel está localizado próximo da superfície. Contudo, o tamanho óptimo de $L_{1,s}$ reduz-se com o efeito de túnel, o que está relacionado com a variação da singularidade próximo da superfície e com as dificuldades de simulação experimentadas pelos elementos singulares. O efeito de $L_{1,s}$ torna-se dominante sobre a influência de $L_{1,i}$ (embora a extensão da região superficial considerada seja menor), sendo o principal responsável pela influência de L_1 quando é considerada uma distribuição uniforme de elementos ao longo da frente de fenda. Isto explica a redução de $L_{1_{op}}$, valor óptimo de L_1, com o efeito de túnel. Assim, dependendo da forma da fenda, $L_{1,s}$ pode ser muito importante na precisão do MEF. A fenda não circular analisada é apenas um exemplo de fendas com o efeito de túnel. Para fendas com formas diferentes espera-se um desempenho diferente do MEF, uma vez que a singularidade superficial varia com a forma da fenda.

Influência do tamanho radial da malha em teia de aranha

Os resultados apresentados na Tabela II foram obtidos fixando o tamanho radial total da malha em teia de aranha, isto é, $L_1 + L_2 + L_3$. O crescimento de L_1 foi compensado pelo decréscimo de L_3 , sendo L_2 constante. Se L_3 também for mantido constante, o incremento de L_1 aumenta o tamanho radial total da malha em teia de aranha. Esta situação pode ser estudada na Figura 15, que apresenta resultados para uma fenda circular com 3 mm de raio (fenda 2 da Figura 10). Pode ver-se que a influência de L_1 é muito mais importante quando o tamanho radial total da malha em teia de aranha é afectado. Isto indica que este tamanho influencia a precisão da análise pelo MEF.

Fenda	$\frac{L_{1_{op}}}{a}$	$\frac{L_{1,i_{op}}}{a}$	$\frac{L_{1,s_{op}}}{a}$
Fenda em quarto de círculo de 5 mm (fenda 1)	10 %	–	–
Fenda em quarto de círculo de 3 mm (fenda 2)	10 a 12,5 %	10 a 12,5 %	5 %
Fenda com efeito de túnel (fenda 3)	≤ 5 %	10 %	2,5 %
Fenda em quarto de círculo de 1 mm (fenda 4)	10 a 12,5 %	10 a 12,5 %	5 %

Tabla II. Tamanhos radiais óptimos dos elementos da frente de fenda

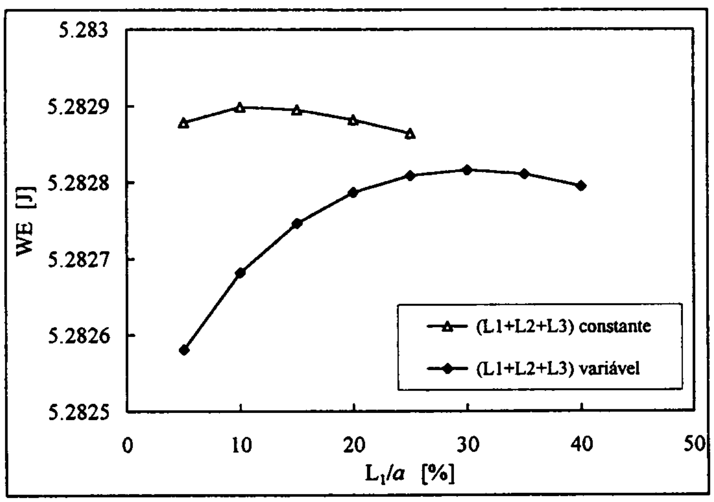

Figura 15. Influência do tamanho radial da malha em teia de aranha para uma fenda em quarto de círculo com 3 mm de raio

A Tabela III apresenta os tamanhos óptimos dos elementos de frente de fenda, obtidos quando a variação de L_1 altera o tamanho da malha em teia de aranha, e assim o tamanho dos elementos finitos na malha de transição. Uma comparação com a Tabela II mostra que os valores óptimos são claramente maiores, especialmente para fendas com um pequeno comprimento, o que indica que a malha de transição tem dificuldades na simulação dos campos de tensões. O incremento do tamanho da malha em teia de aranha melhora a precisão porque reduz o tamanho dos elementos finitos na região de transição. Assim, os valores indicados na Tabela III são valores óptimos falsos para a dimensão radial dos elementos de frente de fenda, porque não estão relacionados com a simulação adequada dos campos singulares. Os valores variam significativamente com o comprimento de fenda, porque as dificuldades de simulação na malha de transição também variam. A fenda $r = 1$ mm é a mais afectada porque tem elementos finitos maiores na malha de transição. Para $r = 3$ mm, a dificuldade de simulação fora da malha em teia de aranha ainda existe, como se pode ver na Figura 15, mas é menos importante do que para $r = 1$ mm. Estes resultados sugerem que a malha de transição deveria ter sido refinada.

Fenda	$\frac{L_{1_{op}}}{a}$	$\frac{L_{1,i_{op}}}{a}$	$\frac{L_{1,s_{op}}}{a}$
Fenda em quarto de círculo de 5 mm (fenda 1)	10 %	–	–
Fenda em quarto de círculo de 3 mm (fenda 2)	30 %	30 %	5 %
Fenda com efeito de túnel (fenda 3)	7,5 %	22,5 %	2,5 %
Fenda em quarto de círculo de 1 mm (fenda 4)	> 40 %	> 35 %	5 %

Tabla III. Tamanhos radiais óptimos de elementos de frente de fenda, para tamanho variável da malha em teia de aranha

A análise anterior é essencialmente qualitativa. Em termos quantitativos, são obtidas pequenas variações de W_E para uma larga gama de dimensões dos elementos finitos, o que indica uma boa precisão. Por exemplo, para a fenda com efeito de túnel (fenda 3 na Figura 10), a variação máxima obtida com elementos de frente de fenda variando de 1 a 25 % do comprimento de fenda, é de apenas 0,014 %. Esta boa precisão é explicada pela localização remota, em relação à frente de fenda, dos nós envolvidos no cálculo de W_E. Espera-se que a precisão do MEF diminua com a aproximação à frente de fenda.

CONCLUSÕES

Os elementos isoparamétricos singulares revelaram-se adequados para serem usados na frente da fenda. De facto, estes elementos simulam a singularidade $r^{-0,5}$, que é a singularidade observada em pontos interiores da frente de fenda. O elemento pentaédrico singular com 15 nós dá bons resultados e é recomendável. O uso de elementos singulares isoparamétricos é muito interessante, uma vez que o efeito pretendido é conseguido pela simples mudança da posição de nós em elementos normais, sem necessidade de introduzir elementos especiais de ponta da fenda.

No provete CC estudado, foram identificadas três zonas críticas onde o MEF tem dificuldades de simulação dos campos:

- próximo de pontos interiores da frente de fenda, onde a singularidade é $r^{-0,5}$;
- próximo da superfície, porque a singularidade é em geral diferente de $r^{-0,5}$ e assim os elementos singulares não são adequados;
- na malha de transição, porque nas fendas com um comprimento pequeno os elementos finitos são muito grandes.

A malha óptima é aquela que dá a melhor resposta a estas dificuldades. Esta malha óptima depende da forma da fenda, porque esta influencia a singularidade junto aos pontos do canto. Depende também do comprimento da fenda, porque este influencia a dimensão dos elementos na malha de transição. Para fendas em quarto de círculo com $r = 1$ mm, a influência da malha de transição é dominante em relação à influência do tamanho dos elementos da frente de fenda. Uma vez que a malha óptima é dependente da forma e do comprimento de fenda, não se consegue definir uma malha óptima universal. Contudo, podem-se definir vários aspectos da malha. Assim, deve ser utilizada uma malha não uniforme ao longo da frente de fenda, com elementos mais pequenos próximo da superfície $\frac{L_{1,s}}{a} = 2$ a 5 %, porque aí a singularidade é em geral diferente da singularidade simulada pelos elementos singulares. As dificuldades de simulação próximo da superfície, e consequentemente a importância de $L_{1,s}$, dependem da forma da fenda, aumentando com o efeito de túnel. Os elementos singulares interiores devem ser maiores ($\frac{L_{1,i}}{a} \approx 10$ a $12,5$ %). Para fendas com comprimento pequeno ($r \leq 3$ mm), a malha em teia de aranha deve ser larga, para reduzir a dimensão dos elementos na região de transição.

Foram obtidos valores bastante exactos de W_E para uma larga gama da dimensão radial dos elementos singulares. Esta boa precisão é explicada pela posição remota dos nós envolvidos no cálculo de W_E relativamente à frente de fenda, onde o desempenho do MEF é mais fraco.

NOMENCLATURA

a	profundidade de fenda
CC	fenda de canto (provete)
CSE	elemento singular colapsado
E	módulo de Young
MEF	método dos elementos finitos
K	factor de intensidade de tensão
L_1, L_2, L_3	dimensões radiais dos elementos singulares
$L_{1,i}$, $L_{2,i}$, $L_{3,i}$	dimensões radiais dos elementos interiores
$L_{1,s}$, $L_{2,s}$, $L_{3,s}$	dimensões radiais dos elementos próximos da superfície
PE	elemento pentaédrico
PSE	elemento pentaédrico Singular
r_s	dimensão radial da região singular
W	largura da secção transversal quadrada do provete CC
W_E	trabalho das forças externas
α	posição angular ao longo da frente de fenda
β	angulo de intercepção fenda/superfície
λ	ordem de singularidade de tensões junto às superfícies livres
σ	tensão remota
ν	coeficiente de Poisson

REFERÊNCIAS

1 W.X. Zhu, "Singular stress field of three-dimensional crack", *Eng. Fracture Mechanics*, Vol. **36**, N° 2, pp. 239–244, (1990).

2 J.P. Benthem, "State of stress at the vertex of a quarter-infinite crack in a half-space", *Int. Journal of Solids and Structures*, Vol. **13**, pp. 479–492, (1977).

3 J.P. Benthem, "The quarter-infinite crack in a half-space: alternative and additional solutions", *Int. Journal of Solids and Structures*, Vol. **16**, pp. 119–130, (1980).

4 Z.P. Bažant e L.F. Estenssoro, "Surface singularity and crack propagation", *Int. Journal of Solids and Structures*, Vol. **15**, pp. 405–426, (1979).

5 A.Y.T. Leung e R.K.L. Su, "Analytical solution for mode I crack orthogonal to free surface", *Int. Journal of Fracture*, Vol. **76**, pp. 79–95, (1996).

6 X.M. Su e C.T. Sun, "3D singular stresses in a cracked plate", *Proc. of 9th Int. Conference on Fracture (ICF9)*, Sydney, Australia, "*Advances in Fracture Research*", B.L. Karihaloo *et al.* (eds.), 1–5 April, (1997).

7 R.W.J. Koers, "Use of modified standard 20-node isoparametric brick elements for representing stress/strain fields at a crack tip for elastic and perfectly plastic material", *Int. Journal of Fracture*, Vol. **40**, pp. 79–110, (1989).

8 R.D. Henshell e K.G. Shaw, "Crack tip finite elements are unnecessary", *Int. J. Num. Meth. in Engng.*, vol. **9**, pp. 495–507, (1975).

9 R.S. Barsoum, "On the use of isoparametric finite elements in linear fracture mechanics", *Int. Journal for Num. Methods Engng.*, Vol. **10**, pp. 25–37, (1976).

10 V. Murti e S. Valliappan, "A universal optimum quarter point element", *Eng. Fracture Mechanics*, Vol. **25**, N° 2, pp. 237–258, (1986).

11 L. Banks-Sills e Y. Bortman, "Reappraisal of the quarter-point quadrilateral element in linear elastic fracture mechanics", *Int. Journal of Fracture*, Vol. **25**, pp. 169–180, (1984).

12 S.L. Pu, M.A. Hussain e W.E. Lorensen, "The collapsed cubic isoparametric element as a singular element for crack problems", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **12**, pp. 1727–1742, (1978).

13 C. Manu, "Quarter-point elements for curved crack fronts", *Computers & Structures*, Vol. **17**, N° 2, pp. 227–231, (1983).

14 G. Dhondt, "General behavior of collapsed 8-node 2-D and 20-node 3-D isoparametric elements", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **36**, pp. 1223–1243, (1993).

15 C.E. Freese e D.M. Tracey, "The natural isoparametric triangle versus collapsed quadrilateral for elastic crack analysis", *Int. Journal of Fracture*, Vol. **12**, pp. 767–770, (1976).

16 P.P. Lynn e A.R. Ingraffea, "Transition elements to be used with quarter-point crack-tip elements", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, vol. **11**, pp. 1031–1036, (1977).

17 L Gavete e J. Herranz, "Singular isoparametric elements compatible with linear and bilinear finite elements", *Anales de Ingeniería Mecánica*, Año 6, Vol. **3**, pp. 133–138, (1988).

18 J. Herranz, "Elementos singulares de alto orden no colapsados", *Anales de Ingeniería Mecánica*, Año 9, Vol. **1**, pp. 149–154, (1992).

19 J. Herranz e L. Gavete, "Elementos isoparamétricos de transición compatibles con elementos singulares y con elementos finitos lineales y bilineales", *Anales de Ingeniería Mecánica*, Año 6, Vol. **3**, pp. 139–144, (1988).

20 D.M. Tracey e T.S. Cook, "Analysis of power type singularities using finite elements", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **11**, pp.1225-1233, (1977).

21 L. Gavete, F. Michavila y F. Díez, "A new singularity finite element in linear elasticity", *Computational Mechanics*, Vol. **4**, pp. 361–371, (1989).

22 INRIA (Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique), Presentation du Club ModuleF, Le Chesnay, France (1987).

23 E. Oñate, "*Cálculo de estructuras por el método de elementos finitos*", Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, Barcelona, (1992).

24 T.J. Nykännen, "Fatigue crack growth simulation based on free front shape development", *Fat. and Fract. of Engng. Materials and Structures*, Vol. **19**, N° 1, pp. 99–109, (1996).