

Control Parcial de un Sistema Caótico de tres especies

O. Reséndiz Flores^{1*}, J. Viveros¹

¹Área Académica de Matemáticas y Física, UAEH

* Correo electrónico: oliresendizflores@gmail.com, jviveros@uaeh.edu.mx

Resumen

Se aplica la técnica de control parcial a un modelo ecológico para evitar la extinción de una especie, reproduciendo los resultados de [1]. Esta técnica se aplica a sistemas que exhiben caos transitorio cuando un parámetro alcanza un cierto valor crítico. El caos transitorio se debe a la presencia de una silla caótica en el espacio fase, la técnica de control parcial aprovecha esto para mantener las trayectorias del sistema dentro del régimen caótico.

Palabras clave: Caos transitorio; control parcial; silla caótica; algoritmo de esculpimiento.

1 Introducción

La técnica de control parcial se aplica a sistemas que tienen un comportamiento caótico transitorio. Esta conducta es consecuencia de la presencia de un conjunto caótico no atractor denominado silla caótica, actuando en el espacio fase. Las sillas caóticas son consecuencia de una crisis de frontera, las cuales resultan de la colisión de un atractor caótico con un punto fijo inestable, o con una órbita periódica inestable que coexiste con el atractor y que se encuentra sobre la frontera de la cuenca de atracción del atractor, dando lugar a una infinidad de puntos homoclínicos transversos. Estos últimos forman parte de la silla caótica, cuyo surgimiento ocasiona la destrucción del atractor caótico y marca el comienzo del denominado caos transitorio.

Según el Teorema de Birkhoff-Smale, alrededor de los puntos homoclínicos transversos el sistema tiene un comportamiento similar al del mapa de la herradura de Smale, el cual es el paradigma de sistema caótico.

La estrategia de control parcial se basa en el hecho de que el sistema que se quiere control-

lar satisface condiciones muy parecidas a las de Conley-Moser (cf. Condiciones C1 y C2 [4]).

Para sistemas como el de este trabajo (sistema de ODE no lineal, de primer orden) la característica típica de caos transitorio se expresa de la siguiente manera: existe un conjunto Q de condiciones iniciales que contiene a la silla caótica para el cual las trayectoria solución convergen hacia un estado estable o incluso divergen, no sin antes exhibir un comportamiento caótico (dependencia sensible en las condiciones iniciales) dentro de Q .

Toda vez que pueda garantizarse la existencia de un subconjunto Q_∞ de Q , denominado conjunto seguro, la técnica de control parcial mantendrá a las trayectorias del sistema dentro de Q y cerca de la silla caótica aún en la presencia de ruido.

El trabajo se divide en dos partes, primero se explica en que consiste la técnica de control parcial y segundo, se aplica la estrategia de control al modelo ecológico.

2 Fundamento Teórico

Sea $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ continua, tal que la dinámica de un sistema queda descrita por

$$p_{n+1} = f(p_n), \quad (1)$$

por ejemplo, f puede ser un mapa de retorno.

Supongamos que en subconjunto Q contenido en el espacio fase de f , existe una silla caótica. La intuición dicta que casi todas las trayectorias que inician en Q eventualmente saldrán de este conjunto para converger a otro atractor, o diverger.

Para sistemas como el de este trabajo es común la presencia de perturbaciones, y por ello se incluirá un término de perturbación o ruido ξ_n en cada iteración de (1). Supondremos que las perturbaciones son acotadas, es decir $\|\xi_n\| \leq \xi_0$.

El objetivo es mantener la dinámica de (1) dentro de Q , y para ello será necesario aplicar un control u_n . El sistema resultante es el siguiente

$$\begin{aligned} q_{n+1} &= f(p_n) + \xi_n, \\ p_{n+1} &= q_{n+1} + u_n. \end{aligned} \quad (2)$$

El reto de esta técnica de control es el de mantener las trayectorias dentro de Q con controles tales que $\|u_n\| \leq u_0$, y $u_0 < \xi_0$ (controles más pequeños que el ruido).

En [5] se desarrolla la técnica que logra lo anterior, en particular se establece la base de lo que posteriormente se denominó *conjunto seguro* (Definición 1). Los conjuntos seguros con un conjunto de condiciones iniciales, para las cuales la estrategia de control garantiza que las órbitas de (2) puedan mantenerse dentro de la región en donde la dinámica es caótica. Para ello el mapa debe cumplir las condiciones C1 y C2, tipo Conley-Moser, que no escribimos aquí por falta de espacio.

La construcción del conjunto seguro Q_∞ se lleva a cabo con el denominado Algoritmo de Esculpimiento, que se explica en la siguiente sección. Cabe mencionar que la técnica de control no determina el lugar exacto en Q en donde estarán las órbitas de (2) y por ello a esta estrategia de control se le conoce como *Control Parcial*.

2.1. Algoritmo de esculpimiento

Considere el sistema (2) con $\|\xi_n\| \leq \xi_0$ y suponga que presenta comportamiento caótico transitorio en una región Q cerrada y acotada del espacio fase, dentro de la cual se desea mantener las órbitas, de modo que $\|u_n\| \leq u_0$, con $u_0 \leq \xi_0$.

Definición 1 ([3]) Decimos que $S \subset Q$ es seguro si para cada $q \in S$, la distancia de $f(q) + \xi$ a S es a lo más u_0 para todo $\|\xi\| \leq \xi_0$.

Entonces S es seguro si para toda condición inicial en $p_0 \in S$ y perturbación ξ , siempre es posible encontrar un control u tal que $f(q) + \xi + u \in S$ con $\|u\| \leq u_0$. Esta es la principal característica de los conjuntos seguros de homeomorfismos f que satisfacen condiciones tipo Conley-Moser.

Se definirá el operador de esculpimiento, cuyo propósito es desechar recursivamente todos aquellos puntos p para los cuales no existe un control u con $\|u\| \leq u_0$, tal que $f(p) + \xi + u \in S$.

Definición 2 Sea C un conjunto cerrado y acotado, decimos que p en C es un punto malo para C , si existe $\|\xi\| \leq \xi_0$ tal que la distancia de $f(p) + \xi$ a C es más grande que u_0 .

Definición 3 Sea $\Psi : P(\mathbb{R}^k) \rightarrow P(\mathbb{R}^k)$,

$$\Psi(S) := \{p \in S : p \text{ no es malo para } S\}.$$

Ψ se llama operador de esculpimiento.

Para encontrar un conjunto seguro en Q procederemos de la siguiente manera, sea $S_0 = Q$ y

$$S_n := \Psi(S_{n-1}) \quad \forall n \geq 1$$

Entonces S_n contiene a los puntos de S_{n-1} para los cuales es posible regresar a S_{n-1} en presencia de una perturbación y bajo la acción de un control.

Resulta que si S compacto, entonces $\Psi(S)$ es compacto. Existe la posibilidad de que algún S_n sea vacío, en tal caso el conjunto seguro también

será vacío. De lo contrario, si todo S_n es no vacío y al ser cada S_n compacto se sigue que

$$S_\infty := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} S_n$$

es no vacío. Note que $S_0 \supset S_1 \supset \dots \supset S_n \supset \dots$. Puede demostrarse que S_∞ es seguro y además es el conjunto más grande que satisface la definición. El cálculo de S_∞ no es una tarea fácil y por ello daremos una condición suficiente para decir cuándo un conjunto es seguro.

Sea A un conjunto cualquiera y $A + d$ el conjunto de puntos que distan de A a lo más d , similarmente $A - c$ es el conjunto de puntos en A que distan del exterior de A al menos c .

Puede demostrarse que S es seguro si $f(S)$ está contenido en $(S + u_0) - \xi_0$.

Dado lo anterior convenimos en redefinir al conjunto de puntos que no son malos para S_n , de la siguiente manera:

$$S_{n+1} = \{p \in S_n : f(p) \in (S_n + u_0) - \xi_0\}$$

Así, el problema se reduce a calcular los conjuntos $(S_n + u_0) - \xi_0$. Al proceso de encontrar el conjunto S_∞ se le conoce como *Algoritmo de Esculpimiento*.

2.2. Implementación numérica del algoritmo de esculpimiento

Una vez elegido Q es necesario calcular la imagen de Q bajo (2), para ello se tomarán puntos de Q sobre una malla suficientemente fina para garantizar que la distancia entre cualesquier dos puntos vecinos sea menor que u_0 . Cabe decir que en nuestro caso Q es un intervalo el cual se partió de manera uniforme. Al conjunto de puntos sobre la malla lo llamaremos Q_0 .

Haciendo $S_0 = Q_0$, los siguientes S_n serán subconjuntos de Q_0 , S_n convergerá a un S^* , es decir $S_n = S^*$ para todo $n \geq n_0$, en tal caso convendremos en que $S_\infty = S^*$.

Sea $[[p]]$ el punto de Q_0 más cercano a p . El siguiente proceso se aplica iterativamente como

se explica en el siguiente párrafo. Para un subconjunto A de Q_0 se calculan todos los puntos que están a distancia a lo más u_0 de A , es decir, se calcula $A + u_0$. Despues se obtienen todos los puntos de $A + u_0$ que estén a distancia al menos ξ_0 del exterior de $A + u_0$, el resultado es el conjunto $(A + u_0) - \xi_0$. Luego, para cada punto p en A se determina $[[f(p)]]$ y se verifica si $[[f(p)]]$ pertenece a $(A + u_0) - \xi_0$, si no, entonces diremos que p es malo para A .

Para obtener S_k primero se calcula $(A + u_0) - \xi_0$ con $A = S_0$. Para cada $p \in S_0$, si p es malo, se desecha y no pertenecerá a S_1 . Una vez obtenido S_1 , se calcula nuevamente $(A + u_0) - \xi_0$ con $A = S_1$ y se produce S_2 quitando todos aquellos elementos de S_1 que resultan ser malos para S_1 . Se hace esto un número finito de veces hasta que $S_n = S^*$ para todo $n \geq n_0$.

3 Modelo ecológico

El modelo ecológico consiste de un sistema de tres ecuaciones diferenciales no lineales que describen la dinámica entre tres especies que componen una cadena alimenticia: recurso R , presa o consumidor C y predadores P . La especie consumidor se alimenta de la especie recurso, y la especie depredador se alimenta de la especie consumidor pero no de la especie recurso.

El modelo de Duarte *et al* consiste en el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales no lineales:

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dt} &= R \left(1 - \frac{R}{K}\right) - \frac{x_c y_c C R}{R + R_0} \\ \frac{dC}{dt} &= x_c C \left(\frac{y_c R}{R + R_0} - 1\right) - \psi(P) \frac{y_p C}{C + C_0} \\ \frac{dP}{dt} &= \psi(P) \frac{y_p C}{C + C_0} - x_p P. \end{aligned} \quad (3)$$

En donde

$$\psi(P) = x_p(1 - \sigma)P + x_i\sigma P^2.$$

Cuando $\sigma = 0$ se obtiene el modelo de McCann y Yodzis,

$$\begin{aligned}
\frac{dR}{dt} &= R \left(1 - \frac{R}{K} \right) - \frac{x_c y_c C R}{R + R_0} \\
\frac{dC}{dt} &= x_c C \left(\frac{y_c R}{R + R_0} - 1 \right) - \frac{x_p y_p C P}{C + C_0} \\
\frac{dP}{dt} &= x_p P \left(\frac{y_p C}{C + C_0} - 1 \right).
\end{aligned} \tag{4}$$

La extensión de Duarte *et al* del modelo de McCann y Yodzis agrega un parámetro σ que representa la fracción de la población de predadores que cooperan para cazar, mientras que el resto $(1 - \sigma)$ cazan individualmente (sistema (3)).

De acuerdo con [2], estableceremos $x_c = 0.4$, $y_c = 2.009$, $x_p = x_i = 0.08$, $y_p = 2.876$, $R_0 = 0.16129$ y $C_0 = 0.5$.

Cuando $\sigma = 0$ y $K = 0.99$ existen dos atractores en el espacio fase de (4), uno de ellos es un atractor caótico y el otro es un ciclo límite (Figura 1).

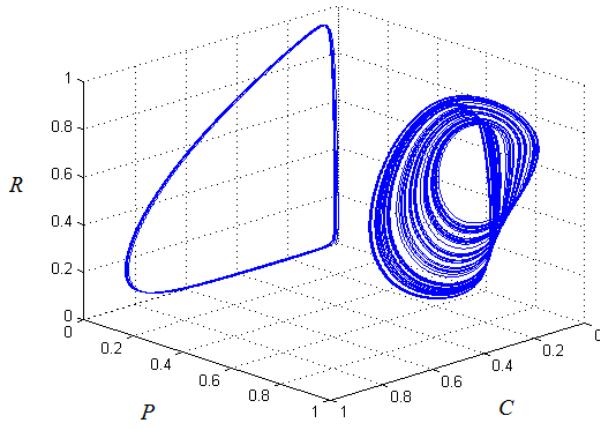
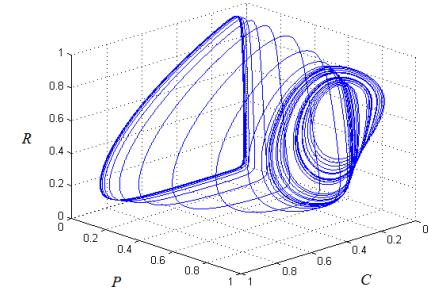


Figura 1: Trayectorias sobre el atractor caótico y ciclo límite de (4), con $K = 0.99$.

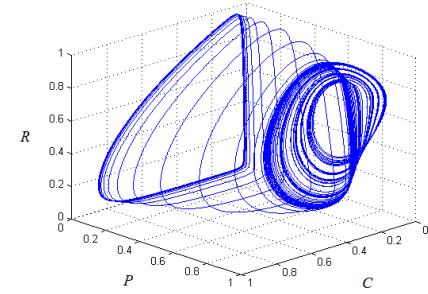
Se usó la función *lyapunov* de MATLAB para calcular los exponentes de Lyapunov del sistema (4). Para la trayectoria con condición inicial $(0.85687, 0.14404, 0.87407)$ de la Figura 1, calculamos hasta $t = 30000$, los exponentes de Lyapunov son 0.1088 , -0.0503 y -0.4340 . Notemos que el primer exponente de Lyapunov es positivo, una característica de sistemas que presentan comportamiento caótico. La existencia del ciclo límite se puede evidenciar haciendo un análisis del comportamiento de las trayectorias sobre el

plano $P = 0$, pues este es positivamente invariante bajo los sistema (3) y (4).

Hasta el momento se ha estudiado el sistema (4) cuando $\sigma = 0$ y $K = 0.99$. A partir de este punto consideraremos dos rutas y las hemos de abordar simultáneamente. La primera ruta está dirigida a reproducir los resultados de [1] con el sistema (3) y parámetros $\sigma = 0.07 > 0$ y $K = 0.99$, el cual denominaremos MYD. Si en este sistema $\sigma > \sigma_c = 0.04166$ ocurre una crisis de frontera, entonces se puede observar comportamiento caótico transitorio en el espacio fase (ver figura 2a). En la segunda ruta se abordará el sistema (4) donde $\sigma = 0$, luego fijaremos $K = 1$, y lo denominaremos MY. Este sistema exhibe caos transitorio, y la crisis de frontera ocurre cuando $K_c \approx 0.99904$ (ver figura 2b). En ambos escenarios, después de la crisis de frontera el atractor caótico es destruido y el ciclo límite se vuelve el único atractor en el espacio fase. Como el ciclo límite se sitúa en el plano $(R, C, 0)$, para casi todas las condiciones iniciales la población de predadores disminuye hasta ser cero, es decir, se extingue.



(a) Trayectoria MYD.



(b) Trayectoria de MY.

Figura 2: Caos transitorio en MYD y MY.

El objetivo es evitar la extinción de los depredadores aplicando la estrategia descrita ante-

riormente, en virtud del comportamiento caótico transitorio.

La técnica de control parcial toma en cuenta perturbaciones externas, las cuales ocurren con frecuencia en la dinámica de una cadena alimenticia, por ejemplo, la caza furtiva. También puede pensarse en las perturbaciones como errores del esquema numérico. Al controlar sistemas que describen situaciones reales es de vital importancia intervenir lo menos posible, una de las ventajas del control parcial es precisamente que la magnitud promedio del control es menor que la magnitud promedio de la perturbación.

4 Estrategia de control para el modelo ecológico

Para aplicar el algoritmo de esculpimiento necesitamos definir un mapa f y una región Q dentro del espacio fase en donde se desea mantener la dinámica. Aprovechando las propiedades específicas del sistema ecológico, se definirá un mapa unidimensional de la siguiente manera. Se calculan los mínimos locales t_n de $P(t)$, y se generan puntos

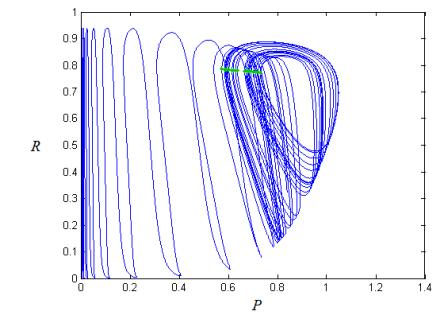
$$(R_n, C_n, P_n) = (R(t_n), C(t_n), P(t_n)).$$

Cuando $P(t)$ alcanza un mínimo, es visible que los correspondientes valores de $R(t)$ y $C(t)$ son casi constantes, pues los puntos (P_n, R_n) y (P_n, C_n) forman una recta en los planos PC y PR cuyas pendientes son muy pequeñas (figura 3), esto nos permite restringirnos a controlar únicamente a la variable P .

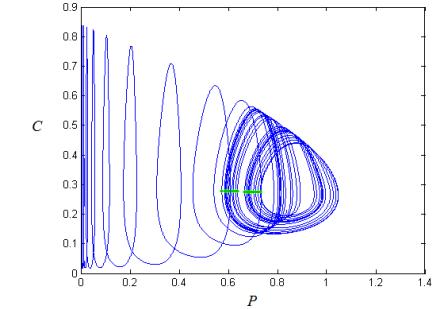
El mapa f se define como $f(P_n) = P_{n+1}$ para ambos sistemas. Al calcular los mínimos locales de una condición inicial se generan una cantidad no muy grande de puntos P_n , por ello se decidió calcular los P_n para mil condiciones iniciales, que se tomaron del cubo

$$\Omega = [0.14, 0.89] \times [0.12, 0.54] \times [0.57, 1.05].$$

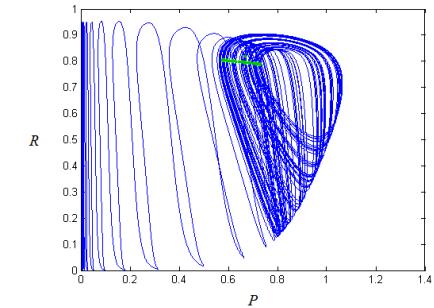
En cada intervalo $[a, b]$ que conforma Ω , a corresponde a la media de los mínimos de $R(t)$, $C(t)$, $P(t)$ respectivamente, y b es la media de los máximos



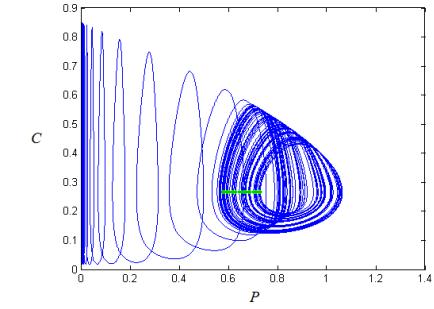
(a) Puntos (P_n, R_n) en el plano PR para MYD.



(b) Puntos (P_n, C_n) en el plano PC para MYD.



(c) Puntos (P_n, R_n) en el plano PR para MY.



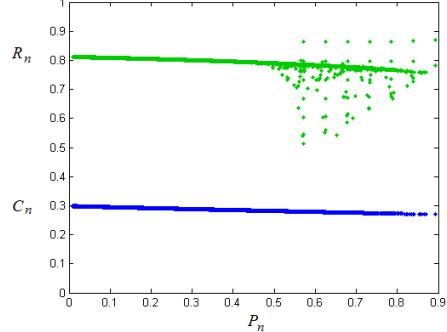
(d) Puntos (P_n, C_n) en el plano PC para MY.

Figura 3: Puntos (P_n, R_n) y (P_n, C_n) .

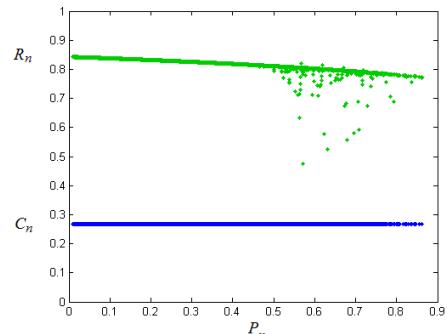
de $R(t)$, $C(t)$, $P(t)$, respectivamente, de 17 condiciones iniciales cuyas trayectorias permanecían sobre el atractor hasta antes de la crisis de frontera.

Se estimaron los mínimos relativos de $P(t)$ para cada una de las mil condiciones iniciales, y se obtuvo la Figura 4, en donde es posible observar que los valores C_n son casi constantes (puntos en azul); sin embargo, este no fue el caso

de los valores R_n (puntos en verde). Esto último no se reporta en [1], nosotros sí lo resaltamos porque para aquellos puntos que se salen de la línea recta que gobierna el comportamiento de los mínimos, la técnica de control hace más esfuerzo por mantener la dinámica dentro de la región.



(a) Puntos (P_n, C_n) y (P_n, R_n) para MYD.



(b) Puntos (P_n, C_n) y (P_n, R_n) para MY.

Figura 4: En las subfiguras (4a) y (4b) se muestran en azul los puntos (P_n, C_n) y en verde los puntos (P_n, R_n) , para MYD y MY, respectivamente.

Considerando las asignaciones

$$\bar{f}_{MYD} : P_n \mapsto P_{n+1} \quad \text{y} \quad \bar{f}_{MY} : P_n \mapsto P_{n+1}$$

para los sistemas MYD y MY, que se ilustran en la Figura 5, se puede observar que f forma una curva bien definida para ambos casos. Para calcular los conjuntos seguros se necesita conocer $\bar{f}_{MYD}(p)$ y $\bar{f}_{MY}(p)$ para cualquier p en la región Q , por esta razón se consideró un ajuste polinomial para las parejas ordenadas (p_n, p_{n+1}) .

En la Figura 5 se aprecia que cada f posee dos puntos fijos, p_{MYD}^* y p_{MY}^* denotan a los puntos fijos de menor magnitud del sistema MYD y MY, respectivamente. Si $p < p^*$ entonces las órbitas bajo el mapa f_{MYD} (y f_{MY}) tienden a cero, por ello únicamente nos fijaremos en valores

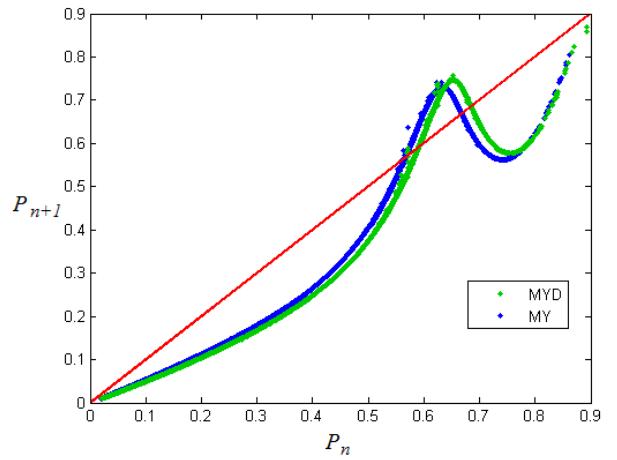


Figura 5: En verde los 9,437 pts. (P_n, P_{n+1}) para MYD. En azul los puntos para MY (total 15,838 pts.). En rojo la recta identidad.

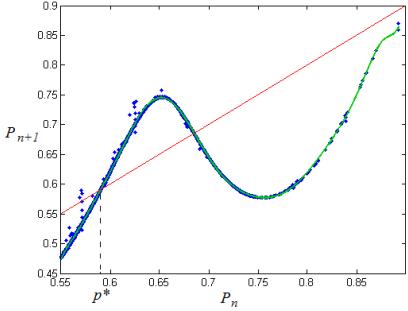
por encima de p^* como se ilustra en la Figura 6. Se eligió un ajuste polinomial de grado 13 para el sistema MYD y de grado 14 para el sistema MY. Se aplicará el algoritmo de esculpimiento sobre f_{MYD} y f_{MY} .

En nuestro caso la región Q es un subintervalo cerrado y acotado. Dado que todas las condiciones iniciales $p_0 < p^*$ tienden a cero, estas se excluirán de la región Q . Luego, $P(t)$ no tiene mínimos locales mayores que 0.84, por lo tanto tomaremos $Q = [p^*, 0.84]$ para ambos casos. El siguiente paso es calcular los conjuntos seguros.

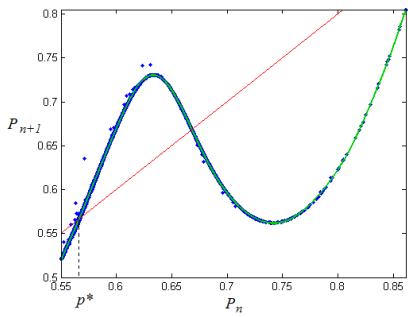
Tomaremos $\xi_0 = 0.0114$ y $u_0 = 0.0076$ como en [1]. Las figuras 7 muestran las iteraciones hacia el conjunto seguro para cada sistema. En rojo se aprecia el conjunto seguro final Q_∞ .

Ahora se aplica la técnica de control parcial. A continuación, se describe el algoritmo para MYD, para aplicarlo a MY únicamente se deben sustituir los valores que son exclusivos para ese sistema.

Sea $X_0 = (R_0, C_0, P_0)$, en donde $P_0 \in Q_\infty$. $R_0 = m_R P_0 + b_R$, y similarmente $C_0 = m_C P_0 + b_C$ donde m_R y b_R son la pendiente y término constante del ajuste polinomial de grado uno de los puntos (P_n, R_n) de la figura 4 (análogamente se obtienen m_C y b_C con los puntos (P_n, C_n)). Se resuelve el sistema de ecuaciones (3) con la condición inicial X_0 . Cuando $P(t)$ alcanza un mínimo local P_n , entonces se aplica una perturbación ξ_n aleatoria con $|\xi_n| \leq \xi_0$.

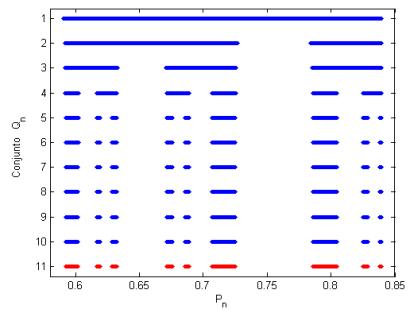


(a) Función f_{MYD} , donde $p_{MY}^* = 0.56607$

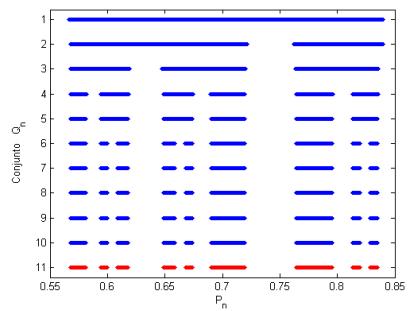


(b) Función f_{MY} , donde $p_{MY}^* = 0.56607$.

Figura 6: Ajustes polinomiales usando la función *polyfit* de MATLAB.



(a) Iteraciones al conjunto seguro final Q_∞ (en rojo) para MYD.



(b) Iteraciones al conjunto seguro final Q_∞ (en rojo) para MY.

Figura 7: Conjuntos seguros.

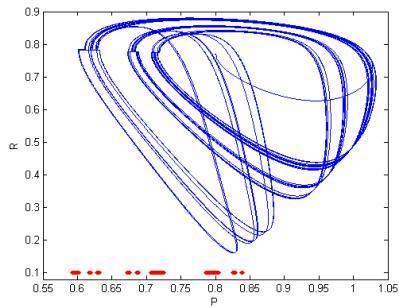
Si $P_n + \xi_n$ no pertenece al conjunto seguro, se debe encontrar u_n que por definición de conjunto seguro existe y satisface $|u_n| \leq u_0$, tal que $P_{n+1} = P_n + \xi_n + u_n \in Q_\infty$. Usando el conjunto de parejas ordenadas (P_n, R_n) y (P_n, C_n) , se aproximará nuevamente la recta definida por el conjunto de mínimos en los planos PC y PR mediante un ajuste polinomial de grado 1, obteniéndose nuevamente constantes m_R , b_R , m_C y b_C . Se calcula nuevamente la solución numérica del sistema MYD con la condición inicial $(P_{n+1} m_R + b_R, P_{n+1} m_C + b_C, P_{n+1})$.

Por el contrario, si $P_n + \xi_n \in Q_\infty$ tomaremos $u_n = 0$ y nuevamente se integrará numéricamente el sistema con condición inicial $(P_{n+1} m_R + b_R, P_{n+1} m_C + b_C, P_{n+1})$, donde $P_{n+1} = P_n + \xi_n$. El proceso se itera nuevamente las veces que sean necesarias. La elección de u_n puede hacerse de distintas maneras, nosotros elegimos el u_n de menor magnitud que hace posible $P_{n+1} \in Q_\infty$.

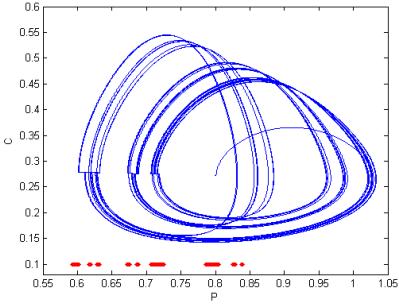
Las figuras 8 y 9 muestran los resultados de la técnica de control sobre el sistema MYD y MY respectivamente.

Note que se logró mantener a las trayectorias del sistema tres dimensional dentro de una región, evitando la extinción de los depredadores con un control mínimo (i.e. $|u_n| \leq u_0 < \xi_0$).

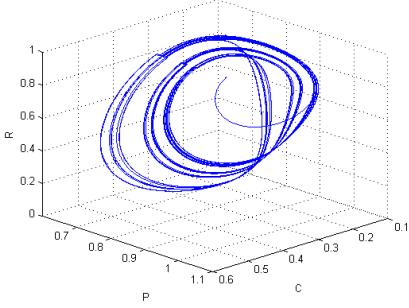
La figura 10 muestra la magnitud de los controles y perturbaciones vs n . Observamos que, en teoría, $|u_n| \leq u_0$, pero la subfigura (a) muestra una instancia de lo contrario. Hay un u_n (de 50) que rebasa la cota de control u_0 . Este detalle requiere de un análisis más profundo. Es posible que sea consecuencia de una acumulación de errores numéricos. Sin embargo, la media de las magnitudes de los controles sigue siendo considerablemente menor que la media de las magnitudes de las perturbaciones.



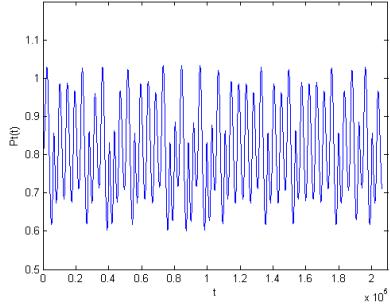
(a) Plano PR .



(b) Plano PC .



(c) Trayectoria controlada.

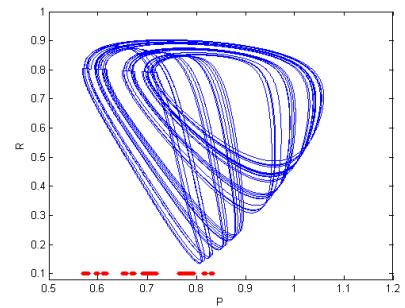


(d) Serie $P(t)$ controlada.

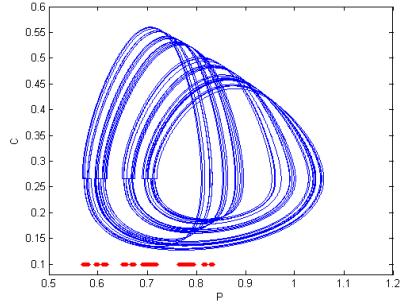
Figura 8: Trayectoria caontrolada para MYD con condición inicial $(0.77081, 0.27187, 0.8)$.

5 Conclusiones

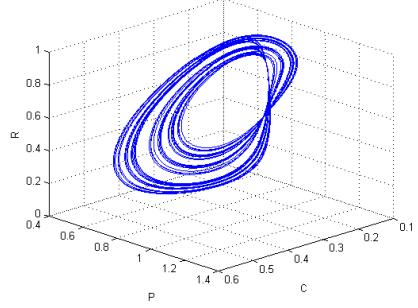
Se corroboró el hecho contraintuitivo de evitar la extinción de $P(t)$ aplicando un control u_n más pequeño que la perturbación ξ_n , logrando reubicar a P dentro del conjunto seguro y así mantener la dinámica dentro de la región de interés. Es importante notar que el efecto de la



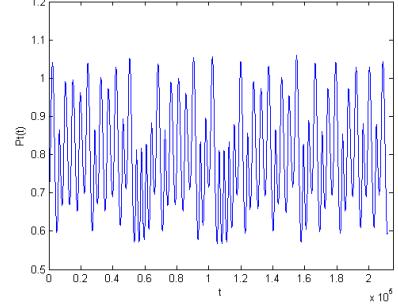
(a) Plano PR .



(b) Plano PC .



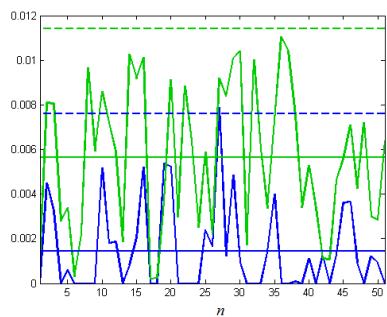
(c) Trayectoria controlada



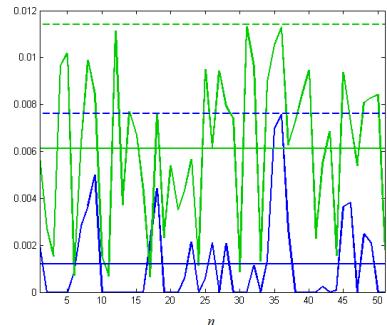
(d) Serie $P(t)$ controlada.

Figura 9: Trayectoria controlada para MY con condición inicial $(0.79413, 0.26652, 0.7)$.

técnica de control no recae únicamente sobre la variable P . Reubicar a $P(t)$ dentro del conjunto seguro también requiere desplazar a $R(t)$ y a $C(t)$, ya que la nueva condición inicial se encuentra sobre los segmentos de recta de la figura 4. Por último, para contrastar con lo anterior, después de realizar numerosas simulaciones, hemos observado que la técnica de control parcial



(a) Sistema MYD



(b) Sistema MY

Figura 10: n vs u_n (azul), n vs ξ_n (verde). Las líneas punteadas verde y azul son las cotas ξ_0 y u_0 respectivamente. La línea continua verde representa la media de las magnitudes de las perturbaciones, y la azul la media de las magnitudes de los controles.

es robusta, es decir que aún cuando la condición inicial (R_0, C_0, P_0) no corresponde a un conjunto seguro, la estrategia de control parcial logra todavía mantener al sistema dentro del régimen transitorio.

Referencias

- [1] R. Capens, J. Sabuco, and M. A. F. Sanjun. When less is more: Partial control to avoid extinction of predators in an ecological model. *Ecological Complexity*, 19, 2014.
- [2] K. McCann and P. Yodzis. Bifurcation structure of a three-species food chain model. *Theoretical Population Biology*, 48:93–125, 1995.
- [3] J. Sabuco, S. Zambrano, M. A. F. Sanjuán, and J. A. Yorke. Finding safety in partially controllable chaotic systems. *Commun. Non-linear Sci. Numer. Simulat.*, 17:4274–4280, 2012.
- [4] S. Zambrano and M. A. F. Sanjuán. Exploring partial control of chaotic systems. *Phys. Rev E*, 79, 2009.
- [5] S. Zambrano, M. A. F. Sanjuán, and J. A. Yorke. Partial control of chaotic systems. *Phys. Rev. E*, 77, 2008.