

# PARÁMETROS ESTADÍSTICOS DE LA RESISTENCIA AL CORTE DE VIGAS DE CONCRETO ARMADO <sup>1</sup>

Jorge Medina<sup>2</sup> y Carlos Quintero Febres<sup>3</sup>

**Resumen:** En este trabajo se determinan el factor de sesgo y el coeficiente de variación de las variables que gobiernan la resistencia al corte en vigas de concreto armado mediante el empleo de técnicas de simulación. Se utilizan tres técnicas de simulación a fin de establecer la técnica más adecuada para los fines que se persiguen.

**Palabras claves:** coeficiente de variación, factor de sesgo, resistencia al corte, técnicas de simulación.

## STATISTICAL PARAMETERS OF THE SHEAR RESISTANCE OF REINFORCED CONCRETE BEAMS

**Abstract:** In this work, the bias factor and the coefficient of variation of the variables governing the shear resistance of reinforced concrete beams are determined by means of simulation techniques. Three simulation techniques are used in order to establish the more appropriated technique for the purpose pursued in this study.

**Keywords:** bias factor, coefficient of variation, shear resistance, simulation techniques.

## INTRODUCCIÓN

La confiabilidad estructural es el área que estudia la seguridad de un diseño estructural basada en la consideración de las diferentes incertidumbres inherentes al mismo, y se aplica tanto en el diseño de estructuras nuevas y la evaluación de estructuras existentes, así como en la formulación de códigos de diseño estructural (códigos como el ACI, AISC, AASHTO y Eurocódigos, entre otros) basados en la filosofía LRFD (según las siglas en inglés de “Load and Resistance Factor Design”).

El estudio de la confiabilidad de un elemento estructural se basa en la formulación de una función de estado límite, también llamada de comportamiento o de margen de seguridad  $Z$ , ecuación (1), que relaciona por un lado, la resistencia del elemento  $R$  (capacidad), y por el otro, las acciones sobre el mismo  $Q$  (demanda). Los valores positivos de  $Z$  representan la condición segura ( $Z \geq 0$ ). Las variables que intervienen en la ecuación (1) son variables aleatorias por lo que en general se caracterizan por el valor medio o *media* ( $\mu$ ), la *desviación estándar* ( $\sigma$ ) y las *funciones de probabilidad* ( $f_R, f_Q$ ). La confiabilidad del elemento estructural se cuantifica mediante la determinación de la *probabilidad de falla* ( $P_f$ ) o, alternativamente, del *índice de confiabilidad* ( $\beta$ ) ambos a partir de la función de estado límite.

La ecuación (2) representa la forma más sencilla empleada para determinar la probabilidad de falla, para los casos donde  $R$  y  $Q$  son variables aleatorias normales. Esta condición no siempre ocurre, por lo que la probabilidad así calculada se suele llamar *probabilidad de falla normal*, y representa un valor aproximado o de orientación para estimar la  $P_f$  real (Bignoli, 1986). En la mayoría de los casos la expresión analítica de la  $P_f$  es muy compleja y difícil de evaluar por lo que se recurre a técnicas de simulación de la ecuación (1) para obtenerla. La ecuación (2) también ilustra la expresión más simple del índice de confiabilidad, válida también en la condición indicada antes. La ecuación (2) ha sido utilizada en numerosos trabajos (Ellingwood et al., 1980; Freudenthal, et al., 1966; Zadeh y Nanni, 2013). Formulaciones para casos más complejos han sido propuestas y son descritas en la literatura (Choi et al., 2007; Melchers, 1999; Nowak y Collins, 2000).

$$Z = R - Q \quad (1)$$

<sup>1</sup> Artículo recibido el 12 de noviembre de 2014 y aceptado para publicación el 25 de marzo de 2015.

<sup>2</sup> Profesor Asociado, Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela. Email: jorgem@ula.ve

<sup>3</sup> Profesor Titular, Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela. E-mail: carlosq@ula.ve

$$p_f = p(Z < 0) \Rightarrow p_f = \Phi\left(-\frac{\mu_z}{\sigma_z}\right) \Rightarrow \Phi(-\beta) \quad (2)$$

donde:

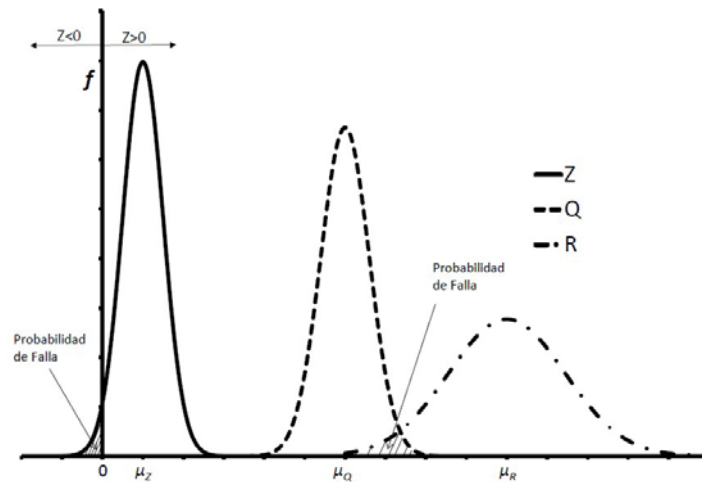
$\mu_z \equiv$  media del margen de seguridad Z;  $\mu_z = \mu_R - \mu_Q$ ,

$\sigma_z \equiv$  desviación estándar del margen de seguridad Z;  $\sigma_z = \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_Q^2}$ ,

$\Phi \equiv$  función de probabilidad normal acumulada,

$\beta \equiv$  índice de confiabilidad;  $\beta = \frac{\mu_z}{\sigma_z}$ .

La Figura 1 muestra la representación gráfica de las funciones de probabilidad  $f_R, f_Q, f_Z$  y de la  $p_f$  la cual se indica como el área sombreada, donde  $Z < 0$  ó  $Q > R$ , situación que no satisface el estado límite impuesto.



**Figura 1: Funciones de probabilidades de R, Q y Z.**

La caracterización de una variable aleatoria puede hacerse en forma alternativa a la tradicional, hecha con el valor medio y la desviación estándar ( $\mu, \sigma$ ), mediante el uso del *factor de sesgo* ( $\lambda$ ) indicado en la ecuación (3), donde se relaciona el valor medio con el valor nominal (de uso común en el diseño). Como medida de dispersión se usa el coeficiente de variación ( $V$ ) indicado en la ecuación (4), que expresa la proporción que la desviación estándar tiene en relación al valor medio. Estos dos parámetros tienen la virtud de ser adimensionales, lo que les proporciona mayor generalidad en su uso y han sido utilizados en diversos estudios de confiabilidad de elementos estructurales (véase por ejemplo, Siu et al., 1975; Nowak y Szerszen, 2003 o Rakoczy y Nowak, 2014).

$$\lambda = \frac{\mu}{x} \quad (3)$$

donde:

$\lambda \equiv$  factor de sesgo,

$\mu \equiv$  media de la variable aleatoria,

$x \equiv$  valor nominal de la variable aleatoria.

$$V = \frac{\sigma}{\mu} \quad (4)$$

donde,

$\sigma \equiv$  desviación estándar de la variable aleatoria,

$V \equiv$  coeficiente de variación.

Este trabajo se enfoca en determinar los parámetros estadísticos que caracterizan la variable aleatoria  $R$  (capacidad) de la ecuación (1), asociada al corte resistente en vigas de concreto armado, por medio de los parámetros adimensionales *factor de sesgo* ( $\lambda$ ) y *coeficiente de variación* ( $V$ ), según las ecuaciones (3) y (4). Asimismo, se muestra un ejemplo de aplicación de los factores obtenidos. Los valores de  $\lambda$ ,  $V$  para la variable  $Q$  de la ecuación (1) serán objeto de otro estudio por parte de los autores, en el que se realiza un procedimiento similar al realizado en este artículo considerando el corte actuante (demanda) como función aleatoria dependiente de las cargas, dimensiones de los elementos, materiales, geometría de la estructura y condiciones de apoyo.

A fin de lograr los objetivos señalados, se emplean las *técnicas de simulación Monte Carlo, Hipercubo Latino y 2K+1 puntos estimados de Rosenblueth*, descritos en Nowak y Collins (2000), para obtener los parámetros estadísticos del corte resistente a partir del conjunto de valores nominales necesarios para establecerla (dimensiones y resistencia de los materiales constituyentes) y así caracterizar la variable aleatoria  $R$  a partir de  $\lambda$ ,  $V$  (para luego obtener  $\mu$ ,  $\sigma$ ) y  $f_R$ .

Cabe destacar que el ejercicio con las tres técnicas de simulación permite determinar las ventajas y desventajas de cada una de las técnicas. La comparación de dichos resultados permite establecer una propuesta sobre el factor de sesgo y coeficiente de variación a emplear, así como la técnica de simulación más adecuada.

## SIMULACIÓN DE LA RESISTENCIA AL CORTE DE UNA VIGA DE CONCRETO

En diseño, la resistencia nominal al corte de un elemento de concreto armado,  $V_r$ , se obtiene de la contribución de la resistencia al corte del concreto  $V_c$  y la del acero transversal (estribos)  $V_s$ . En este trabajo se obtienen los factores de sesgo y coeficientes de variación ( $\lambda$ ,  $V$ ) para ambas contribuciones a la resistencia al corte por las tres técnicas de simulación indicadas antes para así obtener los parámetros estadísticos de la resistencia al corte de la viga.

La resistencia nominal al corte (capacidad) de una viga de concreto de peso normal con refuerzo en el alma se define como (González y Robles, 1997; Nilson, 1999; entre muchos otros):

$$V_r = V_c + V_s \quad (5a)$$

$$V_c = 0.166\sqrt{f'_c}bd \quad (5b)$$

$$V_s = \frac{A_v f_y d}{se} \quad (5c)$$

donde:

$V_r \equiv$  corte resistente de la viga (en N),

$V_c \equiv$  corte resistente del concreto de peso normal (en N), sujeto exclusivamente a corte y flexión (ACI, 2002),

$V_s \equiv$  corte resistente del acero (en N),

$f'_c \equiv$  resistencia del concreto a los 28 días, en MPa,

$b \equiv$  ancho de la viga, en mm,

$d \equiv$  altura útil de la viga, en mm,

$A_v \equiv$  área de acero transversal de los estribos, en mm<sup>2</sup>,

$se$   $\equiv$  separación de los estribos, en mm,  
 $f_y$   $\equiv$  esfuerzo de cedencia del acero de los estribos, en MPa.

El procedimiento de simulación consiste en emplear los parámetros estadísticos de las variables que intervienen en el cálculo del corte resistente, que son:  $f'_c$ ,  $b$ ,  $d$ ,  $se$ ,  $A_v$  y  $f_y$ ; los cuales se obtienen de Nowak y Szerszen (2003), excepto los referentes a la separación de estribos ( $se$ ) que se obtienen por simulación.

### Simulación del corte resistente del concreto

La ecuación (5b) se evalúa mediante técnicas de simulación con los datos de las Tabla 1 (Nowak y Szerszen, 2003) y de las ecuaciones (6a) y (6b) para los parámetros estadísticos de la resistencia del concreto. Los valores nominales de las variables independientes de la ecuación (5b) que se emplean en las simulaciones se indican en la Tabla 1, además para la resistencia del concreto  $f'_c$  se utilizan los siguientes valores en MPa: 20,67; 24,115; 24,518; 27,56; 31,005 y 34,45. Estos diferentes valores de las variables se combinan con los indicados en la Tabla 3 y del parámetro  $se$ , para generar 648 conjuntos diferentes de valores nominales que se emplean en las simulaciones.

**Tabla 1: Parámetros estadísticos para la simulación del corte resistente.**

Variable	$\lambda$	V	Distribución	Valores nominales
$b$	1,010	0,040	Normal	200 ; 250 mm
$d$	0,990	0,040	Normal	250 ; 400 ; 750 mm

**Tabla 2: Resultados de la simulación para  $V_c$ .**

Técnica	$f'_c$ (MPa)	$\lambda_{Vc}$	$V_{Vc}$
<b>Monte Carlo</b>	20,67	1,183	0,079
	24,115	1,138	0,076
	24,518	1,134	0,075
	27,56	1,106	0,073
	31,005	1,086	0,069
	34,45	1,074	0,066
<b>Hipercubo Latino</b>	20,67	1,185	0,079
	24,115	1,140	0,076
	24,518	1,136	0,076
	27,56	1,108	0,073
	31,005	1,087	0,069
	34,45	1,076	0,066
<b>2k+1 puntos estimados de Rosenblueth</b>	20,67	1,183	0,078
	24,115	1,138	0,075
	24,518	1,134	0,075
	27,56	1,106	0,072
	31,005	1,086	0,069
	34,45	1,074	0,066

$$\lambda_{f'_c} = -0,0081 f_c'^3 + 0,1509 f_c'^2 - 0,9338 f_c' + 3,0649 \quad (6a)$$

$$V_{f'_c} = -2,71 \times 10^{-3} f_c'^2 + 1,37 \times 10^{-3} f_c' + 0,127 \quad (6b)$$

donde:

$f'_c$   $\equiv$  esfuerzo del concreto a los 28 días en ksi (Nowak y Szerszen; 2003, p. 381).

Para la simulación se emplea la ecuación (5b) por los tres métodos de simulación mencionados con los 648 conjuntos de datos obtenidos de las Tablas 1 y 3. Por el método de Monte Carlo se emplean esta ecuación

10.000 veces por cada conjunto de valores nominales, 100 veces por el Hipercubo Latino y por 2k+1 puntos estimados de Rosenblueth se requiere evaluar las ecuaciones 13 veces para cada conjunto de valores nominales. Los resultados de la simulación por las distintas técnicas se indican en la Tabla 2.

Los datos de la Tabla 2 se ajustaron mediante mínimos cuadrados a los polinomios indicados en las ecuaciones (7a) y (7b) para obtener el factor de sesgo y el coeficiente de variación del corte resistente del concreto ( $V_c$ ) en función de  $f'_c$  en MPa. Estas ecuaciones son válidas para concretos de peso normal con valores de  $f'_c \leq 34,45$  MPa.

$$\lambda_{V_c} = -7,64 \times 10^{-6} f'_c{}^3 + 1,11 \times 10^{-3} f'_c{}^2 - 0,051 f'_c + 1,834 \quad (7a)$$

$$V_c = 4,96 \times 10^{-7} f'_c{}^3 - 4,87 \times 10^{-5} f'_c{}^2 + 6,19 \times 10^{-4} f'_c + 0,082 \quad (7b)$$

### Simulación del corte resistente del acero transversal

Antes de realizar la simulación de la ecuación (5c) con los parámetros estadísticos de la Tabla 3 (Nowak y Szerszen, 2003) se debe señalar que los parámetros referentes a la separación de estribos ( $se$ ) no se incluyen en el estudio de Nowak, por lo que se deben determinar primero. Los parámetros estadísticos de la separación de los estribos ( $se$ ) se obtienen a partir de los resultados de ensayos señalados en Russo y Puleri, (1997) y Zararis (2003). Para ello, primero se determina de los ensayos los parámetros estadísticos de la cuantía del acero de los estribos ( $\rho_v$ ) que se considera una función aleatoria. Luego se procede a establecer los parámetros estadísticos de  $se$  por simulación. Finalmente con los datos de  $se$ , se realiza la simulación de  $V_s$  por las diferentes técnicas.

**Tabla 3: Parámetros estadísticos para la simulación del corte resistente.**

Variable	$\lambda$	V	Distribución	Valores nominales
$d$	0,990	0,040	Normal	250 ; 400 ; 750 mm
$A_v$	1,000	0,015	Normal	143 ; 214 ; 253 ; 285 ; 380 ; 507 mm <sup>2</sup>
$f_y$	1,145	0,050	Normal	415 Mpa

### Parámetros estadísticos de la cuantía de estribos

Los parámetros estadísticos de la cuantía de estribos ( $\rho_v$ ) se consiguieron a partir de los ensayos del corte de falla reportados en Zararis (2003) que fueron realizados por Angelakos et al.; McGormley, et al.; Placas y Regan y el registrado en Russo y Puleri (1997), efectuado por Clark. Fue necesario aplicar los métodos para funciones aleatorias indicados en Nowak y Collins (2000), ya que de la información suministrada por los autores citados sólo se podía obtener directamente  $V_s$  y  $x$  definidos en las ecuaciones (8) y (9).

$$V_s = \left[ (0.5 + 0.25a/d) \rho_v f_y \right] bd \quad (8)$$

donde:

$V_s \equiv$  corte resistido por el acero (Zararis, 2003) en N,

$a/d \equiv$  relación luz / altura útil,

$b \equiv$  ancho de la viga, en mm,

$d \equiv$  altura útil de la viga, en mm,

$f_y \equiv$  esfuerzo de cedencia del acero, en MPa

$\rho_v \equiv$  cuantía de estribos,  $\rho_v = \frac{A_v}{b * se}$ .

La razón entre el corte de falla obtenido en el experimento y el obtenido por la propuesta de Zararis (2003) se denomina  $x$ .

$$x = \frac{V_{\text{exp}}}{V_{\text{formula}}} \quad (9)$$

donde:

$V_{exp} \equiv$  corte del ensayo,

$V_{formula} \equiv$  corte obtenido por la aplicación de la propuesta de Zararis (2003).

La función  $\rho_v$  en la ecuación (10) se obtiene de combinar las ecuaciones (8) y (9). Es una función aleatoria porque las variables se consideran aleatorias (Tabla 4) con excepción de  $a/d$ , que depende de la luz (asociada a la variable  $Q$  de la ecuación (1)).

$$\rho_v = \frac{V_s}{\left[ (0.5 + 0.25a/d) f_y \right] b d x} \quad (10)$$

**Tabla 4: Parámetros estadísticos de las variables de  $\rho_v$  (Nowak y Szerszen, 2003).**

Variable	$\lambda$	V
$b$	1,01	0,04
$d$	0,99	0,04
$f_y$	1,145	0,05

Los parámetros estadísticos de  $\rho_v$ , indicados en las ecuaciones (11b) y (11c), se establecen a partir de la linearización de la ecuación (10) obtenida por Series de Taylor y que se muestra en la ecuación (11a), según el procedimiento descrito en Nowak y Collins (2000). El análisis se realiza para cada experimento mostrado en Zararis (2003) y Russo y Puleri (1997) con los datos de la Tabla 3. Con respecto a la media y desviación estándar de  $V_s$  y  $x$ , fueron obtenidos de los resultados experimentales señalados en las dos referencias anteriores.

$$\rho_v \cong \frac{\bar{V}_s}{\left[ (0.5 + 0.25a/d) \bar{f}_y \right] \bar{b} \bar{d} \bar{x}} + \frac{\partial \rho_v}{\partial V_s} (V_s - \bar{V}_s) - \frac{\partial \rho_v}{\partial f_y} (f_y - \bar{f}_y) - \frac{\partial \rho_v}{\partial b} (b - \bar{b}) - \frac{\partial \rho_v}{\partial d} (d - \bar{d}) - \frac{\partial \rho_v}{\partial x} (x - \bar{x}) \quad (11a)$$

$$\mu_{\rho_v} = \frac{\bar{V}_s}{\left[ (0.5 + 0.25a/d) \bar{f}_y \right] \bar{b} \bar{d} \bar{x}} \quad (11b)$$

$$\sigma_{\rho_v}^2 = \left( \frac{\partial \rho_v}{\partial V_s} \sigma_{V_s} \right)^2 + \left( \frac{\partial \rho_v}{\partial f_y} \sigma_{f_y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \rho_v}{\partial b} \sigma_b \right)^2 + \left( \frac{\partial \rho_v}{\partial d} \sigma_d \right)^2 + \left( \frac{\partial \rho_v}{\partial x} \sigma_x \right)^2 \quad (11c)$$

La Tabla 5 muestra los resultados del cálculo del factor de sesgo y coeficiente de variación de  $\rho_v$  para cada autor. Como resultado se obtuvo que el factor de sesgo promedio de los cuatro grupos es igual a 0,869 ( $\lambda_{\rho_v} = 0,869$ ) y el coeficiente de variación igual a 16,85% ( $V_{\rho_v} = 16,85\%$ ). En cuanto a la función de distribución  $f_{\rho_v}$ , con los resultados obtenidos en la Tabla 5 y el empleo del Método de Monte Carlo se consigue que la distribución que mejor se ajusta es la Log Normal según pruebas de bondad de ajuste (Figura 2), donde los datos de la simulación se comparan con las tres distribuciones que menor diferencia presentan entre las frecuencias obtenidas de la simulación y las esperadas según la distribución analizada, y que son, además las distribuciones que mayor empleo tienen en el área de la confiabilidad estructural (Benjamin y Cornell, 1981; Nieves y Domínguez, 2010).

**Tabla 5: Cálculo de los parámetros estadísticos de  $\rho_v$ .**

Autor	McGormley et al.		Angelakos et al.		Placas y Regan		Clark	
Variable	$\mu$	$\sigma$	$\mu$	$\sigma$	$\mu$	$\sigma$	$\mu$	$\sigma$
$f_y$	488,31	24,415	572,500	28,625	316,238	15,812	367,087	18,354
$b$	0,205	0,008	0,303	0,012	0,154	0,006	0,205	0,008
$d$	0,415	0,017	0,916	0,037	0,269	0,011	0,386	0,015
$V_s$	0,165	0,014	0,137	0,018	0,033	0,001	0,142	0,022
$x$	1,016	0,085	1,005	0,132	1,030	0,045	1,780	0,280
$\rho_v$	2,97E-3	4,15E-4	6,99E-4	1,40E-4	1,80E-3	1,76E-4	3,08E-3	7,26E-4
$\lambda_{\rho_v}$	0,873		0,873		0,857		0,873	
$V_{\rho_v}$	0,14		0,20		0,10%		0,24	

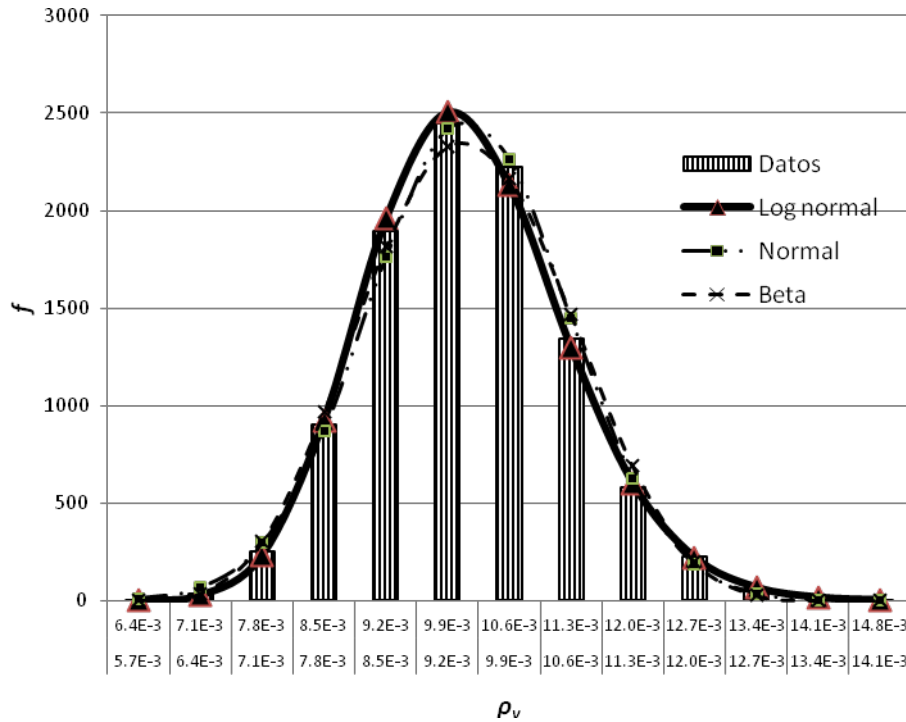


Figura 2: Distribución de frecuencias de la cuantía de separación de estribos.

#### Parámetros estadísticos de la separación de estribos

Establecidos los parámetros estadísticos de  $\rho_v$ , se puede obtener los correspondientes a la separación de los estribos ( $se$ ) por la aplicación de las técnicas de simulación a la ecuación (12) (Russo y Puleri, 1997). En la Tabla 6 se muestran los parámetros estadísticos de las variables implicadas (Nowak y Szerszen, 2003) y la Tabla 7 muestra los resultados de los parámetros para la separación de estribos. Cabe destacar que por el método de Monte Carlo se realizan 10.000 cálculos de la ecuación (12), por el método Hipercubo Latino se aplica la ecuación (12) con cien combinaciones de valores, mientras que por el método de 2k+1 Puntos Estimados de Rosenblueth se evalúa la ecuación (12) siete veces.

Tabla 6: Parámetros estadísticos para la simulación de  $se$ .

Variable	$\lambda$	V	Distribución
$A_v$	1,00	0,015	Normal
$b$	1,01	0,040	Normal
$\rho_v$	0,87	0,169	Lognormal

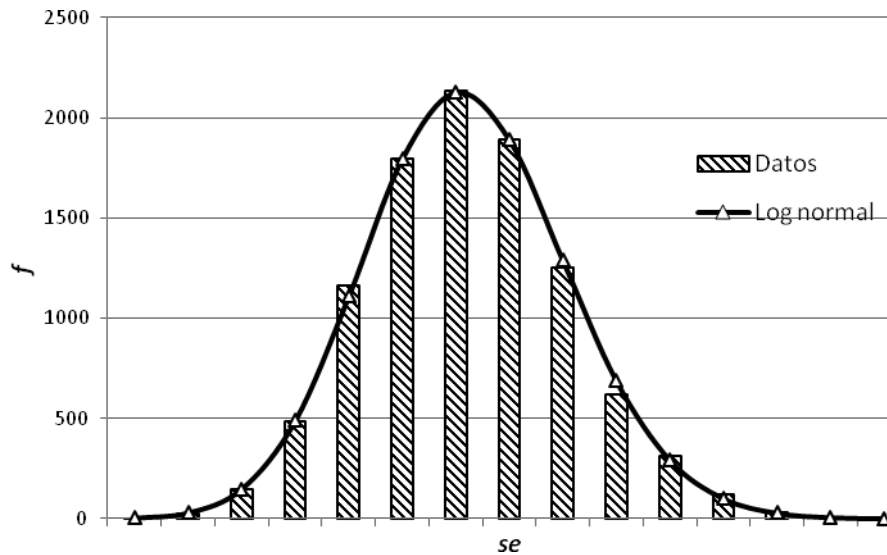
$$se = \frac{A_v}{b\rho_v} \quad (12)$$

Tabla 7: Resultados de la simulación para  $se$ .

Técnica	$\lambda_{se}$	$V_{se}$
Monte Carlo	1,14	0,052
Hipercubo Latino	1,14	0,054
2k+1 puntos estimados de Rosenblueth	1,17	0,174

En los valores de la Tabla 7 se observa una diferencia importante en el coeficiente de variación por el Método de 2k+1 Puntos Estimados de Rosenblueth, en comparación a lo obtenido por los otros métodos. Esto se debe al alto valor de  $V_{\rho_v}$  ( $V_{\rho_v} = 0.169$ ), lo que confirma lo señalado por Zhao et al. (1999), en el sentido de que

este procedimiento es aplicable para variables aleatorias con desviaciones pequeñas. Por otra parte, se observa que los resultados de la simulación por Monte Carlo, se pueden ajustar a una distribución Log-Normal (Figura 3) según el resultado arrojado por una prueba de bondad de ajuste, luego de comparar con otras distribuciones de uso frecuente en el área de la confiabilidad estructural (Distribución Normal, Lognormal y Beta que son las que poseen una mejor aproximación al histograma obtenido) (Benjamin y Cornell, 1981; Nieves y Domínguez, 2010; Nowak y Collins, 2000).



**Figura 3: Distribución de frecuencias separación de estribos.**

Conocido los parámetros estadísticos de la variable aleatoria  $se$  ( $\lambda_{se} = 1,14$ ;  $V_{se} = 0,054$  y  $f_{se}$  log-normal), se realiza la simulación de la ecuación (5c) con los parámetros estadísticos de la Tabla 3 y de  $se$ . Los valores nominales son los indicados en la Tabla 3, mientras que para  $se$  los valores nominales que se emplean son  $[d/2; d/3; d/4]$ . La Tabla 8 compara los resultados por los tres métodos de simulación. En esta tabla y la Tabla 2 se observa que por el método de  $2k+1$  puntos estimados de Rosenblueth existe una diferencia de alrededor 0,4% con respecto al método de Monte Carlo; mientras que por el Hipercubo Latino la diferencia es aproximadamente del 0,8%. Considerando el número de simulaciones que requiere el método  $2k+1$  puntos estimados de Rosenblueth, se considera que sus resultados son aceptables, excepto bajo las condiciones que se propiciaron en los resultados de la Tabla 7 y que se comentan en el párrafo anterior.

**Tabla 8: Resultados de la simulación para  $V_s$ .**

Técnica	$\lambda_{V_s}$	$V_{V_s}$
Monte Carlo	0,997	0,085
Hipercubo Latino	0,997	0,078
2k+1 puntos estimados de Rosenblueth	0,997	0,084

#### Parámetros estadísticos de la resistencia al corte de una viga de concreto armado

Los parámetros estadísticos del corte resistente de una viga de concreto armado se obtienen a partir de los correspondientes parámetros del corte resistido por el concreto,  $V_c$ , (ecuaciones (7a) y (7b) para el factor de sesgo y coeficiente de variación, respectivamente), y del corte resistido por el acero transversal,  $V_s$ , para los cuales se propone  $\lambda_{V_s} = 1,00$ ;  $V_{V_s} = 0,084$  en base a los resultados indicados en la Tabla 8. De esta forma se propone aplicar la ecuación (13) para obtener la media del corte resistente a partir de los factores de sesgo de  $V_c$  y  $V_s$ , y la ecuación (14) para obtener la desviación estándar del corte resistente a partir de los coeficientes de variación de  $V_c$  y  $V_s$ .

$$\bar{V}_r = \bar{V}_c + \bar{V}_s \Rightarrow \bar{V}_r = \lambda_{V_c} V_{cn} + \lambda_{V_s} V_{sn} \quad (13)$$

$$\sigma_{V_r}^2 = \sigma_{V_c}^2 + \sigma_{V_s}^2 \Rightarrow \sigma_{V_r} = \sqrt{(V_{V_c} \lambda_{V_c} V_{cn})^2 + (V_{V_s} \lambda_{V_s} V_{sn})^2} \quad (14)$$

donde,

$\bar{V}_r \equiv$  media del corte resistente de una viga de concreto armado,

$\sigma_{V_r} \equiv$  desviación estándar del corte resistente de una viga de concreto armado,

$V_{cn} \equiv$  corte resistente nominal del concreto (calculado a partir de los valores nominales),

$V_{sn} \equiv$  corte resistente nominal del acero (calculado a partir de los valores nominales),

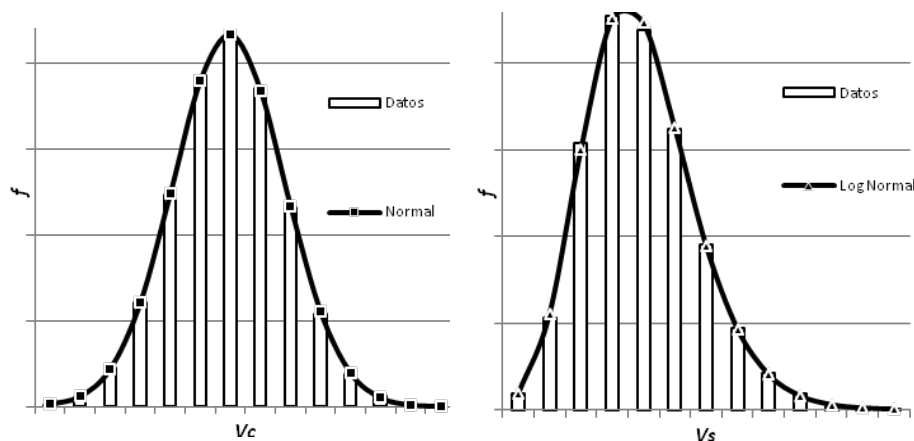
$\lambda_{V_c} \equiv$  factor de sesgo del corte resistente del concreto,

$\lambda_{V_s} \equiv$  factor de sesgo del corte resistente del acero,

$V_{V_c} \equiv$  coeficiente de variación del corte del concreto,

$V_{V_s} \equiv$  coeficiente de variación del corte del acero.

La Figura 4 muestra las distribuciones de los cortes de concreto y acero obtenidas por el método de Monte Carlo. La distribución del corte resistente del concreto se aproxima a la distribución normal, mientras que el corte resistente del acero transversal a una log-normal de acuerdo a la prueba de bondad de ajuste.

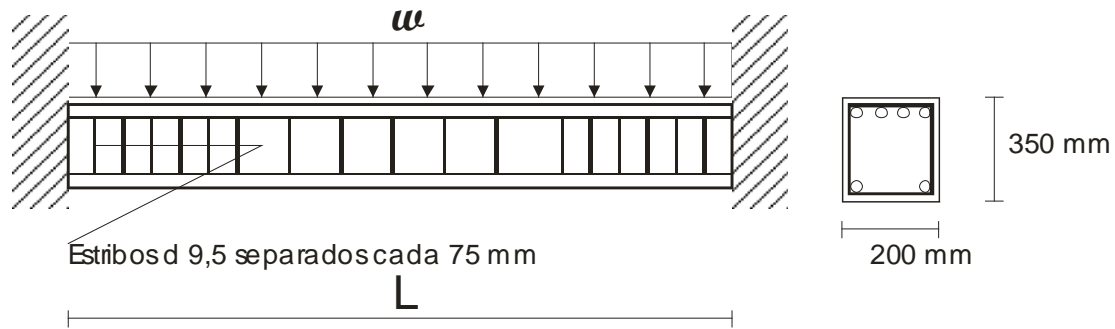


**Figura 4: Distribución de frecuencias del corte resistente en el concreto y acero.**

## EJEMPLO

En el ejemplo propuesto se determina la  $p_f$  de la viga doblemente empotrada indicada en la Figura 5 ante el corte. La viga es de 200x350 mm,  $f'_c = 20,67$  MPa,  $f_y = 415$  MPa, estribos diámetro 9,5 mm de 2 ramas separados cada 75 mm,  $L = 8$  m,  $W_{muerta} = 7,4$  KN/m.

Para las dimensiones indicadas los valores nominales resistentes del corte son:  $V_c = 52,829$  kN y  $V_s = 275,994$  kN según las ecuaciones (5b) y (5c). Se emplean las recomendaciones indicadas en las ecuaciones (7a) y (7b) y las del corte del acero transversal ( $\lambda_{V_c} = 1,187$ ;  $V_{V_c} = 7,84\%$  corte del concreto y  $\lambda_{V_s} = 1$ ;  $V_{V_s} = 8,4\%$  corte del acero transversal) y se pueden aplicar a las ecuaciones (3) y (4) sobre los valores nominales resistentes para obtener los parámetros estadísticos del corte en el concreto y acero o bien en las ecuaciones (13) y (14), que permiten obtener los parámetros estadísticos del corte resistente, sin necesidad de aplicar algunos de los métodos de simulación señalados.



**Figura 5: Viga analizada.**

$$\mu_R = 1,187 * 52,829 + 1 * 275,994 \Rightarrow \mu_R = 338,702 \text{ kN}$$

$$\sigma_R = \sqrt{(0,0784 * 1,187 * 52,829)^2 + (0,084 * 1 * 275,994)^2} \Rightarrow \sigma_R = 23,699 \text{ kN}$$

Con respecto a la variable  $Q$  de la ecuación (1) (estos parámetros se obtienen mediante la simulación del corte en la viga producto de la carga por el método de 2k+1 puntos estimados de Rosenblueth), los parámetros estadísticos del corte producido por la carga son:  $\mu_Q = 31,081 \text{ kN}$  y  $\sigma_Q = 3,108 \text{ kN}$ .

Por lo tanto, al aplicar la ecuación (2) se obtienen el índice de confiabilidad y la probabilidad de falla para corte de la viga aproximada a una función normal.

$$\beta = \frac{338,702 - 31,081}{\sqrt{23,699^2 + 3,108^2}} \Rightarrow \beta = 12,9$$

$$p_f \approx \Phi(-\beta) \Rightarrow p_f \approx \Phi(-12,9) \Rightarrow p_f \approx 3,31 * 10^{-38} \approx \frac{1}{3 * 10^{37}}$$

El resultado indica que aproximadamente 1 de  $3 * 10^{37}$  vigas en estas condiciones (apoyo, carga y luz) podría sobrepasar el estado límite de corte.

## CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En este estudio se determinaron los parámetros estadísticos de la resistencia al corte de vigas de concreto armado (capacidad). Esta depende de varias variables aleatorias básicas ( $b$ ,  $d$ ,  $A_v$ ,  $s_e$ ,  $f'_c$  y  $f_y$ ) relacionadas con las propiedades de los materiales, las dimensiones, etc. Algo similar ocurre con las cargas o sus efectos (demanda). En otras palabras, la *confiabilidad de elementos estructurales* depende de numerosas variables aleatorias básicas. En este orden de ideas, el estudio de la *confiabilidad de sistemas estructurales* (concebidos como un ensamblaje de elementos estructurales) implica la consideración de un número considerable de variables aleatorias relacionadas con todos los elementos estructurales que lo conforman. Por ello resulta de interés el conocer los parámetros estadísticos de las capacidades (y/o demandas) de los elementos individuales a fin de reducir el número de variables aleatorias a considerar en el estudio de la confiabilidad de sistemas estructurales (por ejemplo, confiabilidad de pórticos formados por numerosas vigas y columnas). Este estudio se orienta en esa dirección.

El presente estudio se aplica a concreto de peso normal, con  $20,67 \leq f'_c \leq 34,45 \text{ Mpa}$ ; para dimensiones típicas encontrados en pórticos, donde el ancho de viga  $b$  es de 200 y 250 mm, la altura útil oscila entre  $250 \leq d \leq 750 \text{ mm}$ , el área de acero transversal  $A_v$  para barras de acero de diámetro de 9,5 y 12,7 mm.

Las tres técnicas de simulación utilizadas en este estudio para obtener los parámetros estadísticos de una función aleatoria arrojaron resultados comparables. En este sentido, para determinar los parámetros estadísticos

fundamentales (media y desviación estándar) de una función aleatoria resulta muy conveniente el utilizar el método de  $2k+1$  puntos estimados de Rosenblueth, puesto que requiere de un número considerablemente menor de simulaciones que en los otros procedimientos.

Sin embargo, es importante señalar que el método de  $2k+1$  puntos estimados de Rosenblueth, no es apropiado cuando una de las variables aleatorias presenta una diferencia importante en la dispersión de sus datos (como lo refleja  $\sigma$  o  $V$ ) con respecto a las otras variables aleatorias tal como se observó en la Tabla 7, en contraste con los resultados de la Tabla 2 y 8.

Por otra parte, si se desea establecer el tipo de distribución de probabilidades que caracteriza a una función aleatoria, para lo que se requiere un número considerable de datos, el método de Monte Carlo resulta insustituible.

## AGRADECIMIENTOS

Se agradece al Consejo de Desarrollo Científico, Humanístico, Tecnológico y de las Artes de la Universidad de Los Andes por el financiamiento de este proyecto (I-1246-11-02-C).

## REFERENCIAS

- ACI 318-02 (2002). *Building Code Requirements for Structural Concrete*, American Concrete Institute, Detroit, Michigan.
- Barker, R. y Puckett, J. (1997). *Design of Highway Bridges (Based on ASSHTO LRFD Bridge Design Specifications)*, John Wiley & Sons, Inc, Nueva York.
- Benjamin, J. y Cornell, C. (1981). *Probabilidad y Estadística en Ingeniería Civil*, McGraw-Hill Latinoamericana S.A., Bogotá, Colombia.
- Bignoli, A. (1986). *Introducción al Cálculo de la Confiabilidad de las Estructuras Civiles*, Librería “El Ateneo” Editorial, Buenos Aires, Argentina.
- Choi, S., Grandhi, R. y Canfield, R. (2007). *Reliability-based Structural Design*, Springer-Verlag London Limited, London, United Kingdom.
- Ellingwood, B., Galambos, T., MacGregor, J. y Cornell, C. (1980). *Development of a Probability Based Load Criterion for American National Standard A58*, U.S Department of Commerce, Washington, DC.
- Freudenthal, A., Garrelts, J. y Shinozuka, M. (1966). “The analysis of structural safety”, *ASCE Journal of Structural Division*, Vol. 92, No. ST1, pp. 267-325.
- González, O. y Robles, F. (1997). *Aspectos Fundamentales del Concreto Reforzado*, Editorial Limusa S.A. de C.V. Grupo Noriega Editores, México D.F., México.
- Melchers, R. (1999). *Structural Reliability Analysis and Prediction*, John Wiley & Sons Ltd, West Sussex, UK.
- Nieves, A. y Domínguez, F. (2010). *Probabilidad y Estadística para Ingeniería (Un enfoque Moderno)*, McGraw-Hill/Interamericana Editores S.A. de C.V., México D.F., México.
- Nilson, A. (1999). *Diseño de Estructuras de Concreto*, McGraw-Hill Interamericana, S.A., Bogotá, Colombia.
- Nowak, A. y Collins, K. (2000). *Reliability of Structures*, 2<sup>nd</sup> Edition, CRC Press, Boca Raton, Florida.
- Nowak, A. y Szerszen, M. (2003). “Calibration of design code for buildings (ACI 318): part 1 statistical models for resistance”, *ACI Structural Journal*, Vol. 100, No.3, pp. 377-382.
- Rakoczy, A. y Nowak, A. (2014). “Resistance factors for lightweight concrete members”, *ACI Structural Journal*, Vol. 111, No. 1, pp. 103-111.
- Russo, G. y Puleri, G. (1997). “Stirrup effectiveness in reinforced concrete beams under flexure and shear”, *ACI Structural Journal*, Vol. 94, No. 3, pp. 227-238.

- Siu, W., Parimi, S. y Lind, N. (1975). "Practical approach to code calibration", *ASCE Journal of the Structural Division*, Vol. 101, No. ST7, pp. 1469-1480.
- Zadeh, H. y Nanni, A. (2013). "Reliability analysis of concrete beams internally reinforced with fiber-reinforced polymer bars", *ACI Structural Journal*, Vol. 110, No. 6, pp. 1023-1031.
- Zararis, P. (2003). "Shear strength and minimum shear reinforcement of reinforced concrete slender beams", *ACI Structural Journal*, Vol. 100, No. 2, pp. 203-214.
- Zhao, Y., Ono, T. e Idota, H. (1999). "Response uncertainty and time-variant reliability analysis for hysteretic MDF structures", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 28, No. 10, pp. 1187-1213.