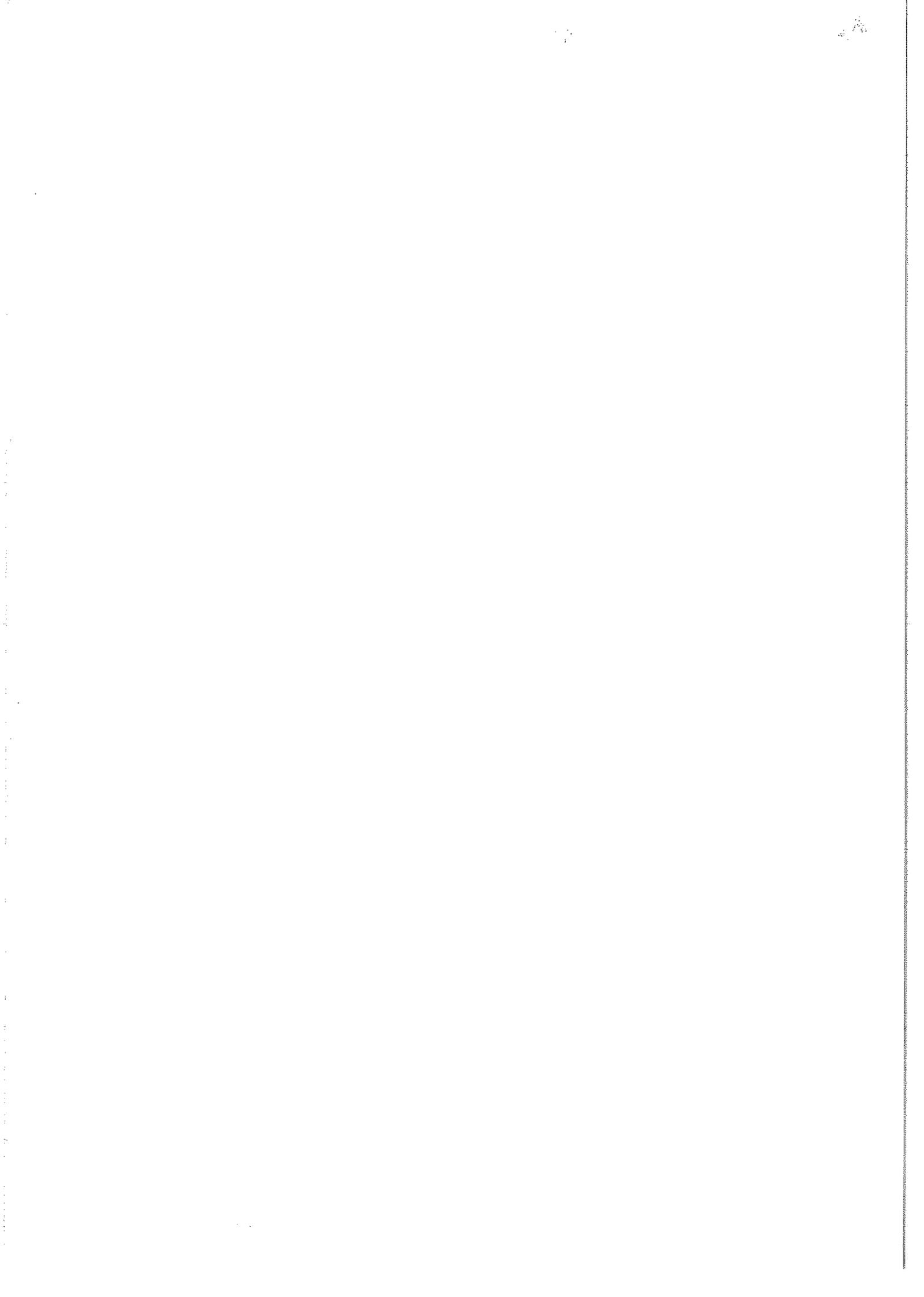


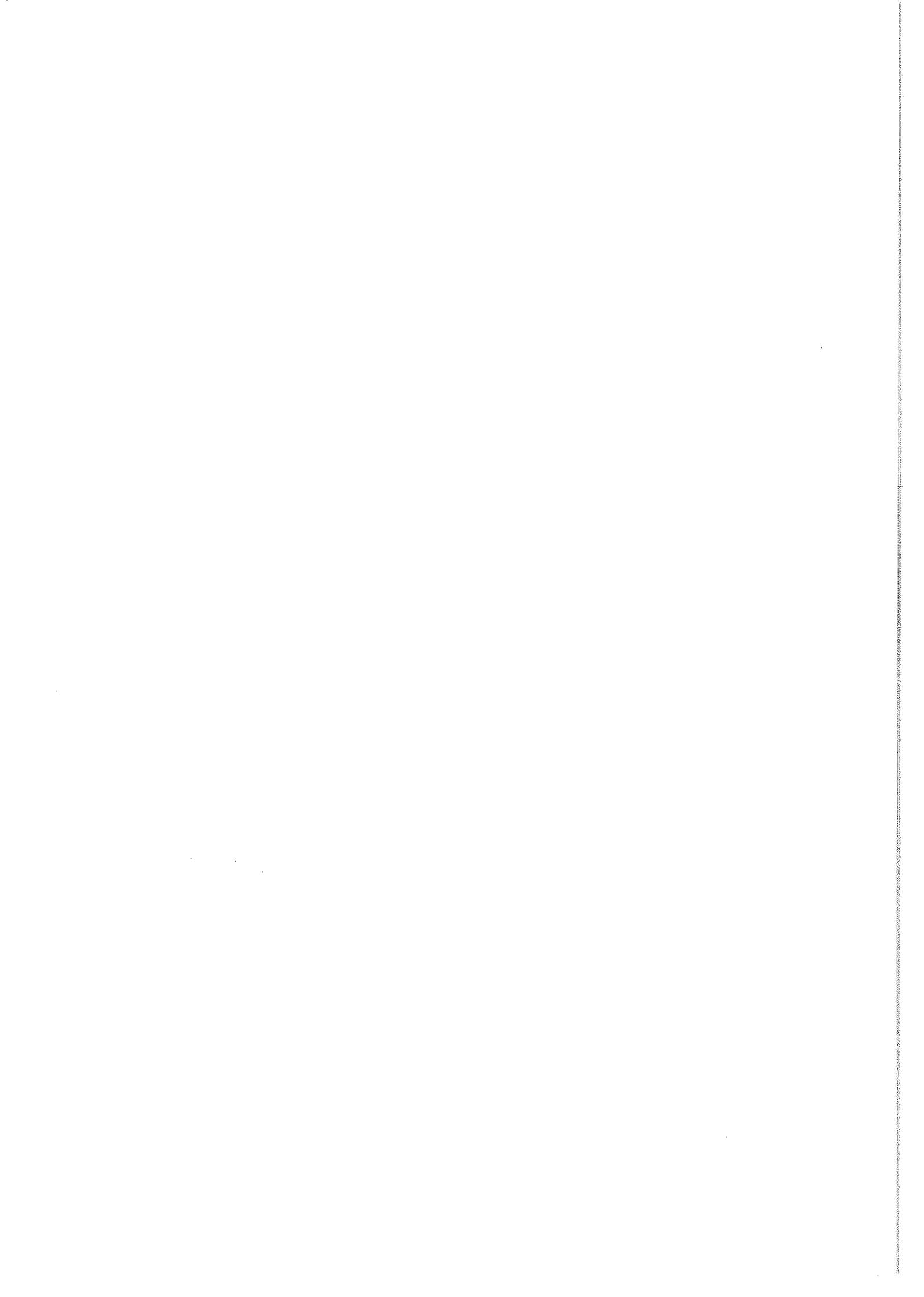
Monografías de Ingeniería Sísmica

Editor A. H. Barbat

Definición de la acción sísmica

A.H. Barbat
L. Orosco
J.E. Hurtado
M. Galindo





Monografías de Ingeniería Sísmica

Editor A. H. Barbat

Definición de la acción sísmica

A.H. Barbat
L. Orosco
J.E. Hurtado
M. Galindo

Monografía CIMNE IS-10 1994

CENTRO INTERNACIONAL DE METODOS NUMERICOS EN INGENIERIA
Edificio CI, Campus Norte UPC
C/ Gran Capitán, s/n
08034 Barcelona, España.

MONOGRAFIAS DE INGENIERIA SISMICA
Editor A.H. Barbat

ISSN: 1134-3249

DEFINICION DE LA ACCION SISMICA
Monografía CIMNE IS-10
© Los Autores

ISBN: 84-87867-448-0
Depósito Legal: B-42081-1994

IMPRESO EN ESPAÑA - PRINTED IN SPAIN

PREFACIO

La necesidad de enfrentarse con una de las acciones más severas que se ejercen sobre las estructuras, como son los terremotos, ha hecho que la Ingeniería Sísmica se haya convertido en una de las áreas de más rápido desarrollo dentro de las diferentes disciplinas de la ingeniería. Por otra parte, el hecho de que la acción sísmica sea de una naturaleza compleja, y que con frecuencia sucedan eventos sísmicos que desbordan las previsiones existentes sobre ellos, ha mantenido la vocación tradicional de la Ingeniería Sísmica de recoger y asimilar los nuevos desarrollos que tienen lugar en campos tan diversos como la sismología, el análisis de señales, la teoría de probabilidad y procesos estocásticos, la mecánica de materiales y estructuras, el control estructural, etc.

Una de las áreas en las cuales se ha observado un mayor avance en los años recientes ha sido en la correspondiente a la definición de la acción sísmica. En términos generales, puede decirse que las posibilidades de definición de dicha acción se han multiplicado si se compara con las que eran típicas de los años sesenta. Así, se han logrado importantes desarrollos en el modelo tradicional de espectros de respuesta usual en el diseño cotidiano de estructuras sencillas, al incorporar espectros basados en modelos sismológicos, espectros de índices de daño, de energía, etc. Por otra parte, se dispone actualmente de una amplia gama de algoritmos de simulación de acelerogramas, que van desde aquellos que se limitan a guardar compatibilidad con espectros de respuesta o con un modelo sismológico, que suelen ser utilizados en el análisis no lineal de estructuras, hasta los que corresponden a modelos de variación espacial de las ondas, que interesan en un análisis de estructuras de gran envergadura, como puentes y presas. Finalmente, ha tenido lugar un importante desarrollo en lo referente a la modelación estocástica de la acción sísmica, lo cual ha posibilitado el avance de los métodos de cálculo probabilista de respuesta y de seguridad estructurales. Todos estos desarrollos han sentado las bases de una nueva ciencia, llamada Ingeniería Sismológica, cuyo objeto principal es justamente el de definir la acción de los sismos

sobre las estructuras de manera compatible con las teorías y modelos propios de la sismología y la geofísica.

La literatura disponible sobre este tema se encuentra muy dispersa. Por esta razón se ha querido en el presente trabajo reunir las teorías más importantes desarrollados hasta el momento y ordenarlas en un texto coherente, que pueda ser de utilidad para estudiantes, ingenieros e investigadores que se relacionen con este campo. Por otra parte, se ha reunido una profusa colección de referencias que pretende servir de orientación al lector para ampliar los diferentes temas tratados.

Este trabajo ha sido financiado parcialmente a través del proyecto de investigación PB90-0393 de la Dirección General de Investigación Científica y Técnica (DGICYT) del Ministerio de Educación y Ciencia. Asimismo, se ha contado con el apoyo del Instituto Colombiano para el Desarrollo de la Ciencia y la Tecnología, COLCIENCIAS.

ÍNDICE

1. Conceptos básicos

1.1. Introducción	1
1.2. Marco de definición de los terremotos de diseño	1
1.3. Posibilidades de definición de la acción sísmica	4
Referencias	6

2. Definición mediante espectros de respuesta

2.1. Conceptos generales	9
2.2. Estimación de espectros a partir de sismos reales	14
2.3. Espectros de respuesta basados en factores de amplificación probabilistas	16
2.4. Definición a partir de relaciones de atenuación	19
2.5. Espectro de energía inducida	21
2.6. Espectros de respuesta no lineales	30
2.7. Espectros de índices de daño	31
2.8. Espectros de respuesta estocásticos	34
2.8.1. Introducción	34
2.8.2. Relaciones probabilistas de entrada-salida. Caso estacionario	35
2.8.3. Respuesta extrema estimada. Caso estacionario	37
2.8.3. Caso de una simulación no estacionaria	39
2.9. Otros métodos para generar espectros de respuesta	40
2.9.1. Espectro estocástico basado en el modelo sísmológico de Boore	40
2.9.2. Espectros basados en funciones acumulativas	43
2.9.3. Espectros basados en el concepto de movimiento estacionario equivalente	46
Referencias	47

3. Acelerogramas no compatibles con un espectro

3.1. Primeras formulaciones	51
3.1.1. Ruido blanco	51
3.1.2. Superposición de ondas o pulsos	52
3.1.3. Modelo de Kanai-Tajimi	53
3.2. Ruido blanco filtrado y modulado	55
3.3. Superposición de ondas armónicas moduladas	59
3.4. Espectros evolutivos	59
3.5. Modelos sismológicos	61
3.6. Series temporales	65
3.7. Superposición de funciones	66
3.8. Modelos que utilizan la función de Green	68
3.9. Modelos de espectro instantáneo	69
3.10. Modelos que consideran la variación temporal de las ondas	71
3.11. Simulación espacial mediante espectros evolutivos	77
3.11.1. Ondas univariadas, n -dimensionales estocásticas	77
3.11.2. Onda estocástica, bidimensional y univariable	79
3.11.3. Aplicación a la generación de una onda estocástica, univariable y bidimensional	80
3.11.4. Ejemplo de aplicación	81
Referencias	84

4. Acelerogramas compatibles con un espectro

4.1. Introducción	49
4.2. Definición del modelo	89
4.3. Cálculo de las amplitudes	89
4.4. Generación de la función de densidad espectral de potencia	93
4.5. Mejora de la señal artificial	95
4.5.1. Ajuste de línea base	95
4.5.1. Ajuste de la aceleración máxima	96
4.5.1. Ajuste de la respuesta espectral	96
4.6. Ejemplo	97
4.7. Simulación compatible con un espectro de energía	100
Referencias	103

Anexo. Procesos aleatorios: conceptos fundamentales

A.1. Generalidades	105
A.2. Función de densidad de probabilidad y de distribución de probabilidad	106
A.3. Probabilidad condicional e independencia	109
A.4. Valores medios	111

A.5. Procesos estacionarios	114
A.5.1. Propiedades de la función de autocorrelación	114
A.5.2 Correlación cruzada	114
A.6. Función de densidad espectral de potencia	115
A.7. Densidad espectral cruzada de procesos aleatorios	117
A.8. Procesos ergódicos y medias temporales	118
A.8.1. Densidad espectral temporal	120
A.9. Espectro energético de procesos no estacionarios	121
Referencias	122

CAPÍTULO 1

CONCEPTOS BÁSICOS

1.1 INTRODUCCIÓN

La presente monografía se propone describir las diferentes maneras que existen hasta el momento de definir la acción de los sismos sobre las estructuras. En vista del avance que ha tenido lugar en años recientes la ingeniería sísmica, y en particular la aplicación de modelos estocásticos a ella, se hace necesaria una visión panorámica de los diferentes métodos existentes hasta el momento sobre las diferentes posibilidades de modelizar los sismos. Sin embargo, la bibliografía sobre tales métodos se encuentra a la fecha muy dispersa en diferentes publicaciones, careciéndose de una publicación que reúna y sintetice los modelos más de destacados al respecto. Por esa razón, esta monografía puede servir para orientar las decisiones sobre modelización de las acciones sísmicas en los diversos campos del diseño de estructuras y la investigación.

1.2 MARCO DE DEFINICIÓN DE LOS TERREMOTOS DE DISEÑO

Tradicionalmente, la fuerza destructiva de los terremotos ha sido relacionada con la aceleración máxima del terreno. Sin embargo, esta forma de definir la acción, no es suficientemente fiable, ya que en varias situaciones han sido observados daños poco relevantes en estructuras sometidas a movimientos sísmicos con una aceleración máxima muy alta. Esto se debe al hecho de que otras características de los sismos, tales como la intensidad, el contenido de frecuencias, la duración, el número en un intervalo de tiempo dado, la secuencia en que se producen los choques, etc., pueden tener una influencia importante en la degradación estructural. Por este motivo, el factor más importante a tener en cuenta al elegir un procedimiento de descripción de la acción sísmica es la modalidad de cuantificación de su potencial de daño.

Algunos de los índices que se han propuesto para caracterizar la violencia de los terremotos están basados en los registros de movimiento sísmico, mientras

que otros, en la respuesta de las estructuras sometidas a dichos movimientos⁽¹⁾. La predicción de la fuerza destructiva de los terremotos futuros se hace a partir de características de este tipo correspondientes a los terremotos ocurridos en el pasado, tales como los valores máximos de la aceleración, velocidad y desplazamiento del terreno, el espectro de amplitudes de Fourier, el espectro de pseudovelocidades, la intensidad espectral propuesta por Housner, el valor medio cuadrático de las aceleraciones correspondientes a la fase fuerte de un acelerograma, etc.

Una definición numérica coherente de la acción sísmica requiere distinguir entre el concepto determinista y el no determinista de definición. En el caso determinista, el conocimiento de las características del movimiento sísmico del terreno en la actualidad permite determinar completamente las características de dicho movimiento tanto en el pasado como en el futuro. En el caso contrario la definición es no determinista. Aunque el movimiento sísmico del terreno es fundamentalmente un proceso aleatorio, definiciones deterministas de la acción se han utilizado frecuentemente en el pasado y se siguen utilizando también hoy en día, debido a su forma más sencilla de aplicación en el diseño. Sin embargo tales definiciones no tienen en cuenta las incertidumbres en los parámetros característicos de los terremotos, con lo cual pueden dar lugar a definiciones erróneas de las acciones de diseño.

La definición de la acción sísmica está directamente condicionada por el tipo de análisis estructural que se pretende realizar. Si el análisis es lineal, la definición más utilizada se basa en la teoría de los espectros de respuesta y la respuesta estructural se calcula mediante el análisis modal. En un análisis no lineal, la aplicabilidad de los espectros de respuesta no está completamente fundamentada desde un punto de vista teórico. Sin embargo, la mayoría de códigos de construcción sismo-resistente del mundo autorizan un diseño lineal equivalente que utiliza un espectro de respuesta inelástica para las estructuras más convencionales. En casos más complejos, es necesaria una definición de la excitación sísmica a través de acelerogramas y se requiere la aplicación de procedimientos de cálculo paso a paso de la respuesta estructural. Un análisis de este tipo es mucho más complicado; su complejidad no reside sólo en el procedimiento de solución, sino también en la necesidad de conocer ciertos detalles acerca de la estructura, que en un diseño preliminar no se suelen definir⁽¹⁾.

Al mismo tiempo, la elección de los métodos de definición de la acción sísmica está también relacionada con el tipo de región sísmica bajo estudio. Por ejemplo, existen zonas sísmicas muy activas para las cuales se dispone de registros de aceleración de movimientos sísmicos fuertes, así como de otros datos sismológicos que proporcionan información referente a la atenuación de las ondas sísmicas, amplitud, frecuencia predominante, aceleración máxima y duración de los terremotos. Los procedimientos de definición numérica de la acción sísmica en una zona de este tipo son más sencillos y los resultados más fiables. Al contrario, existen regiones sísmicas en las cuales los datos instrumentales faltan o son incompletos,

caso en el cual los procedimientos que se deben utilizar son más complejos y los resultados que se obtienen menos fiables. La calidad de los datos sísmológicos de la mayoría de las regiones sísmicas del mundo se sitúa entre estos dos tipos extremos, pero con una tendencia de acercarse más al segundo.

Para los fines del diseño estructural, dos conceptos se erigen como los más importantes para fijar el marco de definición de la acción sísmica: el período de retorno y el nivel de intensidad de uno o varios parámetros sísmológicos del terremoto de diseño. El primero de tales conceptos puede definirse como el tiempo medio que se espera transcurra entre dos sucesos sísmicos de características semejantes. Dicho concepto fue propuesto por Gumbel a partir de la teoría estadística de los valores extremos desarrollada por él.⁽²⁻⁵⁾

Por otra parte, la definición de los terremotos de diseño a partir de parámetros sísmológicos, tales como intensidad, magnitud, aceleración máxima o frecuencia predominante, plantea grandes dificultades debido, primero, a la limitada información que suministran y segundo, a las incertidumbres en las características de la acción. Por este motivo, en el diseño sísmo-resistente de estructuras especiales se han introducido conceptos probabilistas de definición. Por ejemplo, en normativas para el diseño de centrales nucleares como las de *U.S. Atomic Energy Commission* se definen dos niveles de intensidad de la acción sísmica de la siguiente manera: *OBE* (Operating Basis Earthquake) —terremoto durante el cual el funcionamiento de la central nuclear debe ser normal—; *SSE* (Safe Shutdown Earthquake) —terremoto durante el cual se tiene que tomar la medida de parar el funcionamiento de las instalaciones—^(5,6).

El terremoto *OBE* se define en la referencia (6) como el sismo que, en función de las características geológicas y sísmológicas, tanto regionales como locales, puede esperarse que se produzca, con una probabilidad razonable de ocurrencia, durante la vida útil de una estructura. Las vibraciones producidas en la estructura por un terremoto de este tipo no deben poner en riesgo el funcionamiento de aquellas instalaciones de la central nuclear que hayan sido diseñadas para que resistan cargas sísmicas. El *SSE* se define como el terremoto que produce el máximo movimiento del terreno bajo la acción del cual ciertas estructuras, sistemas y componentes de gran importancia de una central nuclear deben quedar en funcionamiento⁽⁶⁾.

Esta definición de los niveles *OBE* y *SSE*, desarrollada inicialmente para centrales nucleares, ha sido posteriormente extendida a la definición de los niveles de la acción sísmica en otros tipos de estructuras singulares. En este último caso las definiciones son más generales. El *OBE* es un tipo de terremoto moderado (medio) que puede ocurrir varias veces durante la vida de una estructura. La estructura debe resistir su acción sin que sufra daños importantes que la pongan fuera de uso. La reparación de los daños debe tener un coste razonable. El *SSE* es el terremoto más fuerte que se espera ocurra una sola vez durante la vida de una estructura. Se tiene la justificación económica de aceptar que un terremoto con estas características produzca daños estructurales importantes, siempre que,

al mismo tiempo, se evite la destrucción de la construcción, las pérdidas de vidas y de bienes materiales ^(7,8).

La U.S. Atomic Energy Commission, en la referencia (9), considera que la aceleración a^{OBE} del movimiento sísmico de un terremoto de tipo OBE debe ser como mínimo la mitad de la aceleración a^{SSE} de un sismo SSE, es decir

$$a^{\text{OBE}} = \frac{1}{2} a^{\text{SSE}} \quad (1.1)$$

En otras normas de diseño de centrales nucleares como, por ejemplo, la *National Building Code of Canada*⁽¹⁰⁾ la relación entre las aceleraciones del movimiento sísmico correspondientes a los terremotos de niveles OBE y SSE, $a^{\text{OBE}}/a^{\text{SSE}}$, se considera 0.4 en lugar de 0.5.

En el borrador de la nueva normativa de diseño sísmico de centrales nucleares de los Estados Unidos^(11,12), se admite la utilización de técnicas probabilistas en la definición de los movimientos sísmicos producidos en una región. Por otra parte, en la mencionada normativa se prevé la posibilidad de considerar para el terremoto OBE un nivel mínimo igual a un tercio del terremoto SSE, caso en el cual no se requiere un análisis explícito de la respuesta sísmica de la estructura. Sin embargo, se admite también la utilización de terremotos OBE mayores que un tercio del SSE, con el consiguiente requerimiento de efectuar un análisis estructural adecuado.

1.3 POSIBILIDADES DE DEFINICIÓN DE LA ACCIÓN SÍSMICA

Las diferentes maneras de definir la acción sísmica pueden aplicarse indistintamente para los dos niveles de movimiento sísmico del terreno introducidos anteriormente: OBE y SSE. Tanto en el caso determinista como en el aleatorio, las formas más usuales de caracterizar un terremoto son los espectros sísmicos de respuesta y los acelerogramas. Tal como se ha visto anteriormente, la definición depende también del comportamiento de la estructura. Por ejemplo, para modelos con un comportamiento lineal elástico es muy usual la aplicación del desacoplamiento modal del sistema de ecuaciones del movimiento y la definición de la acción mediante espectros sísmicos de respuesta. Este mismo tipo de definición se utiliza también en las *normas sísmicas*. Evidentemente, la aplicación de procedimientos de análisis que utilicen tal definición proporciona únicamente valores máximos de la respuesta estructural. Sin embargo, el cálculo de la historia completa de la respuesta sísmica conlleva un exceso de información acerca del comportamiento de la estructura, que no puede aprovecharse en el diseño. Por este motivo, la utilización del desacoplamiento modal y de los espectros sísmicos de respuesta puede considerarse adecuada para un cálculo de estructuras con comportamiento lineal elástico.

En las normas sísmicas existentes en los distintos países del mundo, la teoría de los espectros sísmicos de respuesta se ha extendido también al análisis no lineal de estructuras, definiéndose en tal caso espectros correspondientes a sistemas con

comportamiento no lineal. Éstos se representan gráficamente en función de los mismos períodos propios correspondientes al sistema considerado lineal elástico y de coeficientes que tienen en cuenta la ductilidad del material de la estructura. En el capítulo 2 se describen los diferentes espectros lineales y no lineales de respuesta, así como los espectros de energía y de índices de daño que suelen ser utilizados en los casos descritos.

En el caso en que los modelos estructurales utilizados se deforman por encima del límite elástico, es posible calcular la respuesta mediante procedimientos numéricos de integración paso a paso del sistema de ecuaciones del movimiento. Éstos requieren una definición del movimiento sísmico del terreno mediante acelerogramas y proporcionan toda la historia de la respuesta estructural. Evidentemente, existen zonas sísmicas para las cuales se dispone únicamente de espectros de respuesta que pueden ser por ejemplo, los estipulados en una norma sísmica. En tal caso es posible utilizar procedimientos numéricos que permiten generar familias de acelerogramas artificiales, cuyos espectros coincidan con los espectros de respuesta existentes. Cuando los acelerogramas generados de esta manera corresponden a acciones sísmicas fuertes, el comportamiento estructural es no lineal y el cálculo se efectúa utilizando procedimientos numéricos adecuados a este caso.

En el caso de definición determinista de la acción, los parámetros más utilizados son, básicamente, la aceleración máxima, la frecuencia del movimiento y, algunas veces, registros de aceleración de movimientos fuertes del terreno, ocurridos en el pasado en la región.

No obstante, en muchos casos, la información disponible a través de los catálogos sísmicos de los distintos países consiste solamente en datos referentes a la situación de los epicentros, el tiempo de ocurrencia, la intensidad y/o a la magnitud y a veces la aceleración máxima de los terremotos. Tal como se ha visto anteriormente, éstos son datos de partida importantes en la estimación de otros parámetros necesarios en la operación de definición numérica de la acción como, por ejemplo, el período de retorno o la aceleración correspondiente al nivel de intensidad deseado.

Cuando la definición de la acción se realiza utilizando la teoría de los procesos estocásticos, pueden generarse mediante simulación numérica tanto espectros sísmicos de respuesta como acelerogramas. Sin embargo, los parámetros requeridos por dicha definición son diferentes de los utilizados en el caso anterior. Los parámetros estocásticos necesarios son, por ejemplo, la función de autocorrelación de la aceleración sísmica o la densidad espectral de potencia. El cálculo de la respuesta de la estructura es también estocástico, es decir, se obtiene en primer lugar la densidad espectral de potencia y/o la varianza de la respuesta y, a partir de éstas, la respuesta extrema estimada. Los datos de entrada mencionados permiten la generación de espectros de respuesta artificiales mediante procesos estocásticos. Dichos espectros se calculan aplicando la hipótesis de que la respuesta extrema estimada de un modelo con un solo grado de libertad,

sometido a una aceleración en su base modelizada como proceso estocástico, representa un valor aproximado de la ordenada de un espectro de respuesta. El cálculo de la estructura, una vez que se dispone de espectros estocásticos, se lleva a cabo mediante procedimientos estándar de análisis dinámico. Hay, también, normas de cálculo sísmico de estructuras⁽¹³⁾, que definen estocásticamente la acción mediante la función de la densidad espectral de potencia.

Es importante aclarar que, aún cuando en una zona se dispone de una definición de la acción sísmica mediante una norma sísmica, existen situaciones en las cuales las mismas normas estipulan un estudio más preciso de las características de la acción. Por ejemplo, para estructuras importantes, singulares, tales como centrales nucleares, presas, depósitos para gas natural licuado, etc., las mismas normas sísmicas requieren *estudios sismológicos* y especialmente de *Ingeniería Sismológica*, a fin de realizar la definición de la acción sísmica en el emplazamiento de la estructura.

En el capítulo 3 se describen las diversas formas como puede definirse la acción sísmica en el campo probabilístico, las cuales a su vez pueden ser utilizadas para la generación de acelerogramas sintéticos. Allí mismo se explican los algoritmos para la generación de acelerogramas no compatibles con un espectro de respuesta, con base en modelos estacionarios y no estacionarios, así como aquellos que consideran la variación espacial de las ondas (modelos de campos aleatorios).

En el capítulo siguiente se describe en detalle un caso de amplia aplicación práctica, como es la generación de acelerogramas compatibles con un espectro dado de respuesta o de energía (capítulo 5). Al final se ha incluido un Anexo que describe los aspectos básicos de la teoría de procesos estocásticos.

REFERENCIAS

1. J. Lin y S. A. Mahin, *Effect of Inelastic Behaviour on the Analysis and Design of Earthquake Resistant Structures*, Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley, California, Report UCB/EERC 85-8, 1985.
2. E. J. Gumbel, *Statistics of Extremes*, Columbia University Press, New York, 1967.
3. A.H. Barbat y J.M. Canet, *Estructuras Sometidas a Acciones Sísmicas*, Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, CIMNE, 2ª edición, Barcelona, 1994.
4. D. Lungu y D. Ghiocel, *Metode Probabilistice in Calculul Construcțiilor*, Editura Tehnică, București, 1982.
5. J. R. Benjamin y C. A. Cornell, *Probabilidad y Estadística en Ingeniería Civil*, McGraw-Hill Latinoamericana S.A., Bogotá, 1981.
6. *** "Seismic and Geologic Siting Criteria for Nuclear Power Plants", Part 100, Reactor Site Criteria, Title 10, Chapter 1, Code of Federal Regulations — Energy, (10 CFR Part 100), Appendix A, *United States Nuclear Regulatory Commission*, 1973.
7. *** "Seismic and Geologic Siting Criteria for Nuclear Power Plants", Part 100, Reactor Site Criteria, Title 10, Chapter 1, Code of Federal Regulations — Energy,

- (10 CFR Part 100), Appendix A, *United States Nuclear Regulatory Commission*, 1978.
8. A. H. Barbat, *Cálculo Sísmico de las Estructuras*, Editores Técnicos Asociados, Barcelona, 1982.
 9. *** "Design Response Spectra for Seismic Design of Nuclear Power Plants", Revision 1, **Regulatory Guide 1.60**, *U.S. Atomic Energy Commission, Directory of Regulatory Standards*, 1973.
 10. J. D. Stevenson, "External hazards in reliability and risk assessment of nuclear power plants", *Proceedings of the Second International Conference on Structural Safety and Reliability*, (München, Septiembre de 1977), Werner Verlag, Düsseldorf, 401-428, 1977.
 11. *** Borrador de 3 de Julio de 1991 de "Seismic and Geologic Siting Criteria for Nuclear Power Plants", (10 CFR Part 100), Appendix B, *United States Nuclear Regulatory Commission*, 1991.
 12. *** Borrador de 1 de Mayo de 1991 de "Earthquake Engineering Criteria for Nuclear Power Plants" (11 CFR Part 50), Appendix S, *United States Nuclear Regulatory Commission*, 1991.
 13. Joint Committee on Structural Safety CEB-CECM-CIB-FIP-IABSE, *Basic Data on Loads*, Second Draft, London, March 1974.

CAPÍTULO 2

DEFINICIÓN MEDIANTE ESPECTROS DE RESPUESTA

2.1 CONCEPTOS GENERALES

Los espectros de respuesta representan una vía usual de definición del movimiento sísmico del terreno a utilizar en el análisis de estructuras. Su gran interés reside en el hecho de que permiten una descripción de las más importantes características de la respuesta sin necesidad de disponer de una historia en el tiempo de la excitación. Otras de sus ventajas se deben al hecho de que un espectro de respuesta puede suavizarse, promediarse o simplemente modificarse para incluir los efectos de las condiciones locales del terreno, aún cuando se desconocen los detalles del proceso de excitación.

En Ingeniería Sísmica se definen como espectros de respuesta las representaciones gráficas de valores aproximados de la respuesta máxima de un sistema lineal elástico con un grado de libertad sometido a la acción de un acelerograma. El movimiento de dicho sistema está descrito por la ecuación

$$\ddot{x}(t) + 2\nu\omega\dot{x}(t) + \omega^2x(t) = -\ddot{y}(t) \quad (2.1)$$

En esta ecuación, $x(t)$ es el desplazamiento de respuesta del sistema, ω es su frecuencia propia de vibración, en rad/s, ν es su fracción del amortiguamiento crítico y $a(t)$ es la aceleración del movimiento sísmico del terreno. Las otras características cinemáticas de dicho movimiento sísmico son la velocidad $\dot{y}(t)$ y el desplazamiento $y(t)$. La solución de la ecuación (2.1) se expresa como⁽¹⁾

$$x(t) = -\frac{1}{\omega_v} \int_0^t \ddot{y}(\tau) e^{-\nu\omega(t-\tau)} \text{sen}[\omega_v(t-\tau)] d\tau \quad (2.2)$$

La integral (2.2) se conoce con el nombre de integral de Duhamel. Derivando respecto al tiempo, se obtiene la historia de la respuesta en velocidades

$$\dot{x}(t) = - \int_0^t \ddot{y}(\tau) e^{-\nu\omega(t-\tau)} \cos \omega_\nu(t-\tau) d\tau + \nu\omega x(t) \quad (2.3)$$

y derivando de nuevo, se obtiene la respuesta en aceleraciones absolutas del sistema

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) + \ddot{y}(t) &= \omega_\nu \int_0^t a(\tau) e^{-\nu\omega(t-\tau)} \text{sen } \omega_\nu(t-\tau) d\tau \\ &\quad - 2\nu\omega \dot{x}(t) - (\nu\omega)^2 x(t) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Los espectros de respuesta en desplazamientos, velocidades y aceleraciones se definen, para un cierto acelerograma, como los máximos valores de las respuestas del sistema, expresados en función de la frecuencia ω o del período T , para una fracción del amortiguamiento crítico dada ν

$$S_d^r(\omega, \nu) = |x(t)|_{\max} \quad (2.5)$$

$$S_v^r(\omega, \nu) = |\dot{x}(t)|_{\max} \quad (2.6)$$

$$S_a^r(\omega, \nu) = |\ddot{x}(t) + \ddot{y}(t)|_{\max} \quad (2.7)$$

Utilizando las expresiones (2.2), (2.3) y (2.4), las ecuaciones de definición de los espectros pueden escribirse en la siguiente forma explícita:

$$S_d^r(\omega, \nu) = \left| - \frac{1}{\omega_\nu} \int_0^t \ddot{y}(\tau) e^{-\nu\omega(t-\tau)} \text{sen } \omega_\nu(t-\tau) d\tau \right|_{\max} \quad (2.8)$$

$$S_v^r(\omega, \nu) = \left| - \int_0^t \ddot{y}(\tau) e^{-\nu\omega(t-\tau)} \cos \omega_\nu(t-\tau) d\tau + \nu\omega x(t) \right|_{\max} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} S_a^r(\omega, \nu) &= \left| \omega_\nu \int_0^t \ddot{y}(\tau) e^{-\nu\omega(t-\tau)} \text{sen } \omega_\nu(t-\tau) d\tau \right. \\ &\quad \left. - 2\nu\omega \dot{x}(t) - (\nu\omega)^2 x(t) \right|_{\max} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Puede verse que S_d^r y S_v^r son, respectivamente, los valores máximos de los desplazamientos y velocidades relativos, mientras que S_a^r es el máximo valor de la aceleración absoluta de la respuesta de un oscilador con un grado de libertad.

Con el objeto de obtener expresiones más simples que las dadas por las expresiones (2.8), (2.9) y (2.10) se introducen las siguientes aproximaciones:

- ω_v se sustituye por ω y los términos fuera de la integral en el segundo miembro de las ecuaciones (2.9) y (2.10) que multiplican a la fracción del amortiguamiento crítico, se desprecian, ya que el amortiguamiento en las aplicaciones más frecuentes de la Ingeniería Civil es pequeño ($2\% \leq \nu \leq 20\%$).
- La función coseno que aparece en el espectro de velocidades (2.9) puede sustituirse a efectos de cálculo por la función seno, sin que ello implique importantes variaciones en los valores máximos de la velocidad del sistema⁽²⁾. Esta aproximación es válida en el rango usual de las frecuencias que aparecen en el diseño sísmico y deja de cumplirse para períodos muy elevados.

Esto permite introducir tres nuevas cantidades, definidas como *seudoespectros de respuesta* de los desplazamientos, velocidades y aceleraciones, cuyas expresiones son

$$S_d(\omega, \nu) = \left| -\frac{1}{\omega} \int_0^t \ddot{y}(\tau) e^{-\nu\omega(t-\tau)} \operatorname{sen} \omega(t-\tau) d\tau \right|_{\max} \quad (2.11)$$

$$S_v(\omega, \nu) = \left| -\int_0^t \ddot{y}(\tau) e^{-\nu\omega(t-\tau)} \operatorname{sen} \omega(t-\tau) d\tau \right|_{\max} \quad (2.12)$$

$$S_a(\omega, \nu) = \left| \omega \int_0^t \ddot{y}(\tau) e^{-\nu\omega(t-\tau)} \operatorname{sen} \omega(t-\tau) d\tau \right|_{\max} \quad (2.13)$$

con lo cual se pueden escribir las siguientes ecuaciones que las relacionan:

$$S_v = \omega S_d \quad (2.14)$$

$$S_a = \omega^2 S_d \quad (2.15)$$

A partir de (2.14) y (2.15), los tres seudoespectros de respuesta pueden dibujarse en la misma gráfica utilizando una escala trilogarítmica, tal como puede observarse en el ejemplo de la figura 2.1.

Los seudoespectros sísmicos de respuesta tienen una gran importancia práctica en la ingeniería, siendo ampliamente utilizados en el diseño sísmico de estructuras, mientras que los espectros sísmicos de respuesta, no. Por este motivo y con el objeto de simplificar la terminología, se les denominará espectros sísmicos de respuesta, a los primeros.

Un análisis de los rasgos generales de los espectros sísmicos de respuesta en relación a la frecuencia propia ω de la estructura sería de gran importancia a fin de disponer de un punto de partida en la predicción de la acción a través de espectros. Dicho análisis tiene como objetivo establecer una correlación entre las ordenadas espectrales y los máximos valores de las características del movimiento sísmico del terreno: aceleración máxima a_{\max} , velocidad máxima v_{\max} y desplazamiento máximo d_{\max} .

SAN FERNANDO EARTHQUAKE FEB 9, 1971

PACOIMA DAM, CALIFORNIA ** COMP S16E
 CORRECCION DE MEDIA Y MIN. CUADRADOS
 CORREC. INSTR. DOMINIO FRECUENCIA
 FLTR. TEMP. BTWR(8) P-B**(0.07-35.00) HZ

Amortiguamiento:

0.050
 0.075
 0.100
 0.150
 0.200

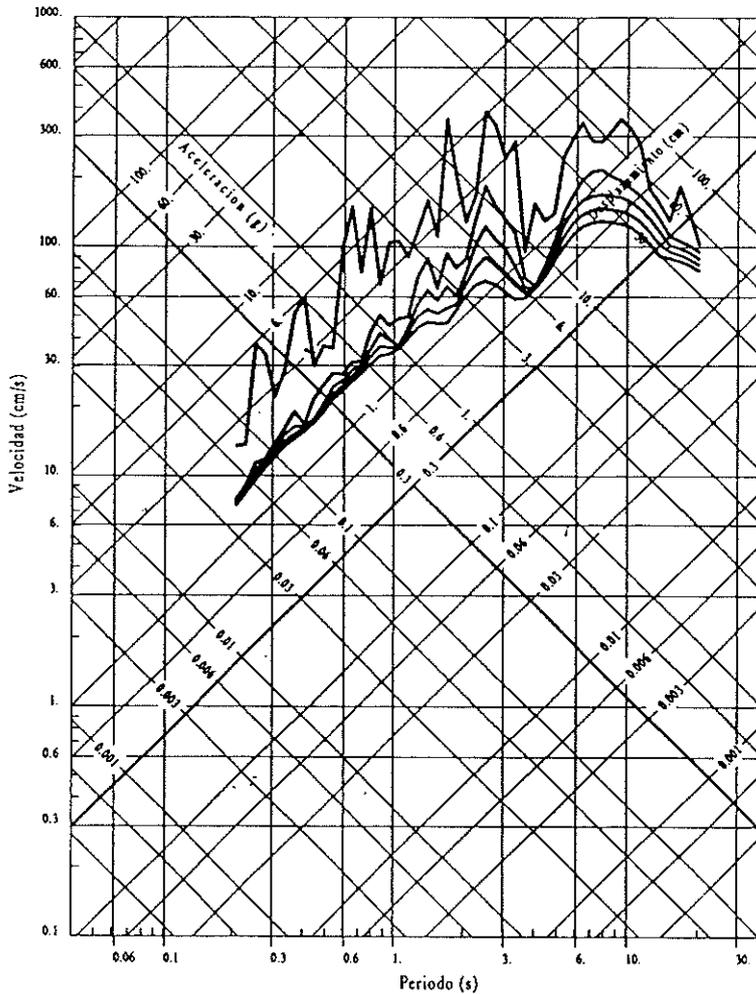


Figura 2.1 Representación trilogarítmica de un espectro sísmico de respuesta.

Supóngase primeramente que la frecuencia de la estructura es muy grande. En tal caso, los dos primeros términos del miembro izquierdo de la ecuación (2.1) llegan a ser despreciables y la ecuación puede escribirse en la forma aproximada $\omega^2 x(t) \approx -\ddot{y}(t)$. Referente a los valores máximos de la acción y de la respuesta se hace la misma consideración, es decir que, si $\omega \rightarrow \infty$, $S_a \rightarrow a_{\max}$. Obviamente, este tipo de respuesta se produce en estructuras muy rígidas, con frecuencias muy altas en comparación a las del movimiento del terreno, en las cuales el desplazamiento dinámico relativo es muy pequeño. En el caso contrario, cuando la frecuencia ω es muy pequeña, pueden despreciarse los dos últimos términos del miembro izquierdo de la ecuación (2.1), quedando en la forma $\ddot{x}(t) \approx -\ddot{y}(t)$.

Integrando y tomando valores máximos, se tiene que si $\omega \rightarrow 0$, $S_d \rightarrow d_{\max}$. Esto ocurre en el caso de estructuras muy flexibles, con frecuencias propias muy pequeñas en comparación con las del movimiento del terreno y que sufren desplazamientos dinámicos muy grandes. Para frecuencias que se encuentren entre estos límites extremos, se produce una amplificación del movimiento del terreno en su paso a través del filtro estructural, que puede estudiarse analizando los siguientes factores de amplificación dinámica

$$\beta_a(\nu, T) = \frac{S_a}{a_{\max}}, \quad \beta_v(\nu, T) = \frac{S_v}{v_{\max}}, \quad \beta_d(\nu, T) = \frac{S_d}{d_{\max}} \quad (2.16)$$

Tal como puede verse, los valores de los factores de amplificación dinámica β_a , β_v y β_d dependen tanto de las propiedades del terremoto de acelerograma $a(t)$, como de las propiedades de la estructura, caracterizadas por los períodos propios T y las fracciones del amortiguamiento crítico ν . Para períodos propios menores que 0.1 s, β_a varía mucho con el período, S_a es grande comparado con a_{\max} y S_d es pequeño⁽¹⁾. Todo lo contrario ocurre para períodos propios largos: β_d varía mucho con el período y S_d es grande comparado con d_{\max} . En el caso de períodos propios intermedios, β_v varía mucho en función del período propio T y S_v es grande comparado con v_{\max} . Las capas superficiales de suelo que se encuentran en el lugar de definición de la acción constituyen uno de los factores que más influyen en la forma y en la amplitud de los espectros sísmicos de respuesta. Las condiciones locales del terreno, tales como el grosor y la estructura de las mencionadas capas, pueden tener, básicamente, dos tipos de efectos sobre el movimiento sísmico⁽³⁾: a) atenuación de los períodos bajos del movimiento del terreno y b) amplificación de los períodos largos del mismo. Esto produce, además de un cambio de forma de los espectros de respuesta, amplificaciones pequeñas en el rango de períodos bajos así como grandes amplificaciones para los períodos altos.

A partir del estudio de espectros de respuesta correspondientes a un número suficiente de terremotos registrados en una región, es posible la estimación de la forma de un espectro típico válido para la región completa y, además, obtener reglas generales de desarrollo de espectros aproximados. Éstos son espectros suavizados, obtenidos utilizando un número limitado de parámetros característicos. Cuando se utilizan espectros de este tipo en el diseño sísmico de estructuras, se les denomina *espectros de diseño*. En síntesis, un espectro de diseño es una representación gráfica suavizada que intenta simular las características esenciales de un espectro de respuesta, pero que, a diferencia de éste, es válido para una región sísmica entera; dicho espectro está normalizado a un cierto nivel considerado aplicable al diseño⁽⁴⁾. En los siguientes apartados se incluyen diferentes procedimientos de definición, tanto de espectros de respuesta como de espectros de diseño.

2.2 ESTIMACIÓN DE ESPECTROS A PARTIR DE REGISTROS REALES

Si para una región se dispone de un número suficiente de registros y, en consecuencia, de los correspondientes espectros de respuesta, pueden seleccionarse aquellos que tengan unas características comunes prefijadas y luego calcularse estadísticamente espectros medios suavizados. Este procedimiento tiene la ventaja de que puede llegar a proporcionar espectros de respuesta que incluyan las condiciones locales del terreno de la región^(3,5,6). Es importante resaltar que, dentro de este grupo de métodos, un espectro se puede describir a partir de un número muy limitado de parámetros conocidos⁽⁴⁾. Esta modalidad de definición de la acción, considera de manera directa las condiciones locales del terreno. Sin embargo, la utilización en un cálculo sismorresistente de estructuras de un espectro de respuesta correspondiente a terremoto real registrado en el pasado en la región para la cual se pretende definir la acción, implica serios riesgos de una evaluación incorrecta del comportamiento estructural. Obviamente, existe una alta probabilidad de que se produzcan en la misma región terremotos con características totalmente diferentes.

Por otra parte, la extrapolación de espectros de respuesta de una zona sísmica a otra, que es una operación de práctica bastante corriente, es aún menos aconsejable, debido al hecho de que puede llevar a la definición de acciones con un contenido de frecuencias y con unas amplitudes totalmente distintas a las características de los terremotos esperados y que, además, no consideren las condiciones locales reales del terreno.

En la referencia (7), con los datos de 17 registros de sismos de subducción obtenidos en la parte alta y rocosa de Ciudad de México, se obtiene el espectro de amplitudes de Fourier de las aceleraciones producidas por un terremoto del mencionado tipo, usando un modelo de regresión bayesiana. Multiplicando el espectro de Fourier correspondiente a la parte alta, por la relación espectral de amplificación correspondiente al sitio en estudio, se calcula el espectro de amplitudes de Fourier para dicho sitio. Tales relaciones espectrales fueron calculadas empíricamente mediante funciones de transferencia con datos proporcionados por la red de acelerómetros de la ciudad de México, y tienen por objeto medir las amplificaciones del movimiento en la zona blanda con respecto a la zona rocosa. Haciendo uso de la teoría de vibraciones aleatorias, se obtienen espectros de respuesta elásticos para distintos amortiguamientos, considerando la duración del movimiento fuerte como el tiempo entre el 5% y el 95% de la intensidad de Arias (ec. 2.30). Los resultados muestran que la duración del registro es función del período del suelo en el lugar en estudio y de la magnitud del evento sísmico, primordialmente. Este procedimiento puede extenderse a espectros inelásticos, utilizando el método lineal equivalente. En la figura 2.2 se pueden observar algunos resultados obtenidos⁽⁷⁾.

Sin embargo, existen ciertas zonas del mundo, en las cuales no existen registros. La única solución que queda en tal caso para disponer de una acción

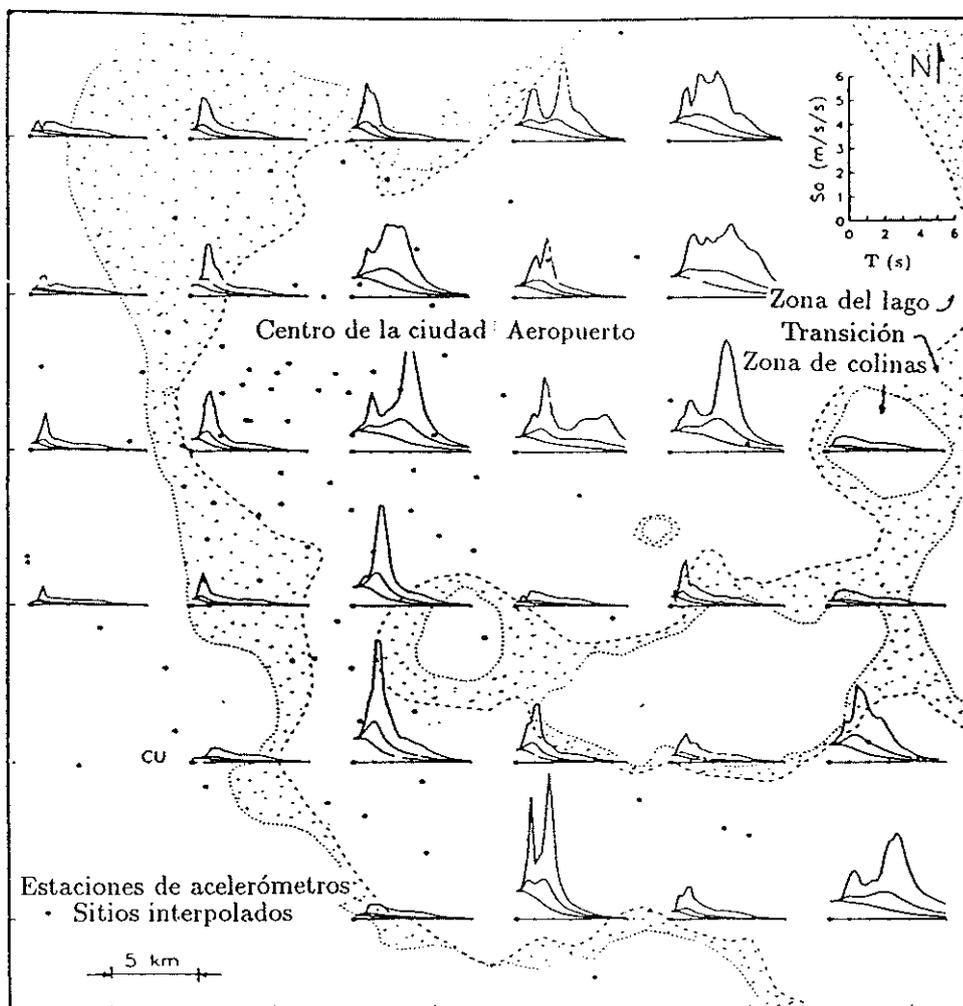


Figura 2.2 Espectros de respuesta en sitios arbitrarios de ciudad de México⁽⁷⁾.

sísmica a utilizar en el cálculo de estructuras, es el desarrollo de espectros de respuesta en los cuales se fije un único punto a partir de valores, estimados de manera empírica, de la aceleración máxima del movimiento del terreno y de la frecuencia (o período) predominante del movimiento sísmico esperado. El contenido completo de frecuencias de la acción se describe mediante funciones predefinidas a partir de dicho punto, como puede verse, por ejemplo, en la referencia (8).

2.3 ESPECTROS DE RESPUESTA BASADOS EN FACTORES DE AMPLIFICACIÓN PROBABILISTAS

Este procedimiento consiste en multiplicar los máximos valores del movimiento sísmico del terreno por factores de amplificación β , teniendo en cuenta los siguientes rangos de frecuencias:

- frecuencias altas, para las cuales las aceleraciones espectrales son proporcionales a la máxima aceleración del terreno.
- frecuencias intermedias, para las cuales las velocidades espectrales son proporcionales a la máxima velocidad del terreno.
- frecuencias bajas, para las cuales los desplazamientos espectrales son proporcionales al máximo desplazamiento del terreno.

En el diseño, el conjunto de curvas β correspondientes a diferentes acelerogramas se sustituye por una curva única que puede obtenerse de dos maneras⁽⁹⁾:

- Como media del conjunto de curvas β . Este procedimiento ha sido desarrollado por Housner^(5,10-12) y en él se basa la definición de la acción en la mayoría de las normas sísmicas del mundo.
- Como envolvente del conjunto de curvas β . Este procedimiento ha sido propuesto por Newmark en 1969 a fin de obtener espectros de respuesta para el cálculo sísmico de centrales nucleares⁽¹³⁻¹⁵⁾. Este es el procedimiento que se describirá a continuación.

Newmark y Hall han hecho una evaluación estadística de los factores de amplificación β_a , β_v y β_d , (ecuación 2.16), a partir de registros de acelerogramas obtenidos para varios terremotos^(3,13). Cualquiera de estos factores de amplificación se denominarán a continuación, de manera genérica, β y serán tratados como variables aleatorias. Se considera el cuantil β_p , que corresponde a la probabilidad p de que existan valores de β menores que β_p

$$P(\beta \leq \beta_p) = p \quad (2.17)$$

Conociendo la media m_β y la desviación estándar σ_β de β , el valor del cuantil β_p se obtiene como

$$\beta_p = m_\beta \left(1 + \kappa \frac{\sigma_\beta}{m_\beta} \right) \quad (2.18)$$

Definiendo el coeficiente de variación V_β del factor de amplificación dinámica β mediante la relación

$$V_\beta = \frac{\sigma_\beta}{m_\beta} \quad (2.19)$$

la ecuación (2.18) se reescribe en la forma

$$\beta_p = m_\beta(1 + \kappa V_\beta) \quad (2.20)$$

El parámetro κ , que es el número de desviaciones estándar que deben sumarse a la media para obtener el cuantil β_p , depende del tipo de distribución de la variable β y de la probabilidad p . La media m_β del factor de amplificación dinámica es el parámetro más importante de los dos que aparecen en la ecuación (2.20), ya que describe la forma de variación del factor β . La media espectral m_β depende mucho de las características de los terremotos utilizados en el estudio estadístico⁽¹⁶⁾. El otro parámetro, el coeficiente de variación V_β , tiene una gran variabilidad estadística respecto al período y al amortiguamiento de la estructura. En la variabilidad de la curva β alrededor de la media influyen muy poco las condiciones locales del terreno, por lo cual los valores de V_β pueden extrapolarse de una zona a otra^(9,17).

Newmark y Hall consideraron en sus cálculos la hipótesis de que la distribución de los factores de amplificación β es lognormal y han utilizando cuantiles correspondientes a las probabilidades $p = 50\%$ y $p = 84\%$. La evaluación que han hecho ha sido mejorada posteriormente, en base a registros de nuevos terremotos que han proporcionado nuevos datos^(14,15). En la tabla 2.1 se dan relaciones, incluidas en la referencia (13), que permiten el cálculo de los factores de amplificación β en función de la fracción del amortiguamiento crítico ν del modelo para las probabilidades mencionadas. En la tabla 2.2 se dan valores de dichos factores para diferentes fracciones del amortiguamiento crítico.

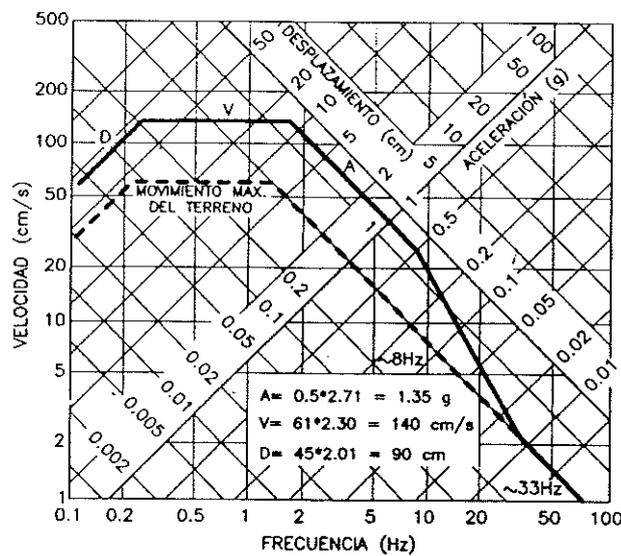
Tabla 2.1 Relaciones de cálculo de los factores de amplificación⁽¹³⁾.

tipo de factor β	cuantil	valor de β
β_a	84.1%	$4.38 - 1.04 \ln \nu$
β_v	84.1%	$3.38 - 0.67 \ln \nu$
β_d	84.1%	$2.73 - 0.45 \ln \nu$
β_a	50%	$3.21 - 0.68 \ln \nu$
β_v	50%	$2.31 - 0.41 \ln \nu$
β_d	50%	$1.82 - 0.27 \ln \nu$

Las relaciones de la tabla 2.1 o los factores de amplificación de la tabla 2.2 pueden utilizarse para multiplicar por β los valores máximos del movimiento sísmico del terreno. Las ordenadas espectrales que se calculen de esta manera se representan en escala trilogarítmica. Los espectros sísmicos de respuesta suavizados obtenidos mediante esta operación son conocidos como espectros de diseño de *Newmark-Hall*. Su construcción puede verse en la figura 2.3, en la cual se ha considerado una fracción del amortiguamiento crítico de 5% y los valores correspondientes al cuantil de 84%. Se observa que para frecuencias que superen 8 Hz, la línea recta que define el espectro de respuesta deja de ser paralela a la línea

Tabla 2.2 Factores de amplificación según Newmark y Hall⁽¹³⁾.

ν	84.1%			50%		
	β_a	β_v	β_d	β_a	β_v	β_d
0.5	5.10	3.84	3.04	3.68	2.59	2.01
1	4.38	3.38	2.73	3.21	2.31	1.82
2	3.66	2.92	2.42	2.74	2.03	1.63
3	3.24	2.64	2.24	2.46	1.86	1.52
5	2.71	2.30	2.01	2.12	1.65	1.39
7	2.36	2.08	1.85	1.89	1.51	1.29
10	1.99	1.84	1.69	1.64	1.37	1.20
20	1.26	1.37	1.38	1.17	1.08	1.01

Figura 2.3 Espectro de diseño de Newmark-Hall⁽¹²⁾.

que define la máxima aceleración del terreno, a la que intersecta en un punto definido por una frecuencia de 33 Hz.

En otros estudios se han supuesto para los factores de amplificación β distribuciones tales como la normal o la Gumbel para máximos⁽⁹⁾. Un procedimiento de definición de espectros de respuesta análogo al de Newmark-Hall ha sido propuesto en las reglamentaciones de diseño de edificios del *Applied Technology Council (ATC)*^(18,19), basado en las investigaciones de Seed y otros⁽²⁰⁾ sobre la influencia del suelo en el espectro de aceleración. En dicho trabajo se calcularon los espectros de aceleración de registros obtenidos en diferentes perfiles de suelo, normalizados según su aceleración máxima. La figura 2.4 muestra el resultado correspondiente a los espectros promedio para cada tipo de perfil de suelo, y la 2.5 muestra el espectro recomendado por el ATC.

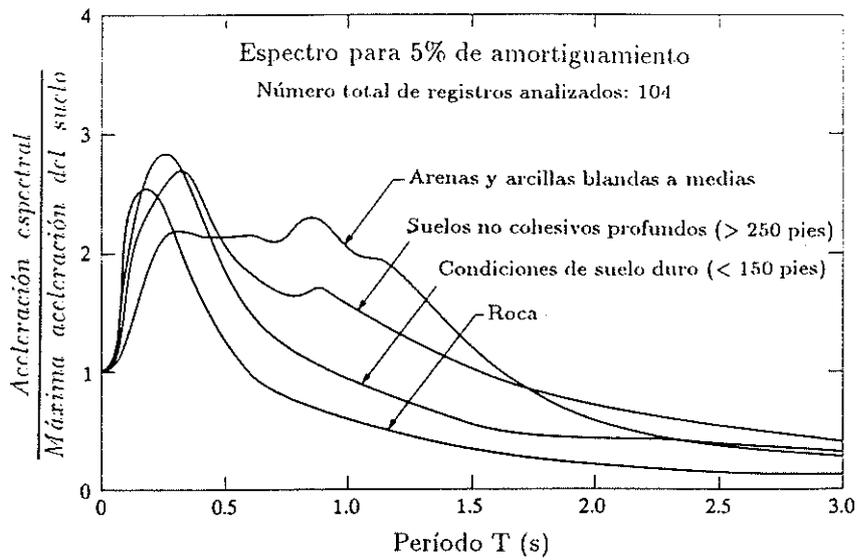


Figura 2.4 Espectros promedio de Seed y otros para diferentes tipos de suelo⁽²⁰⁾.

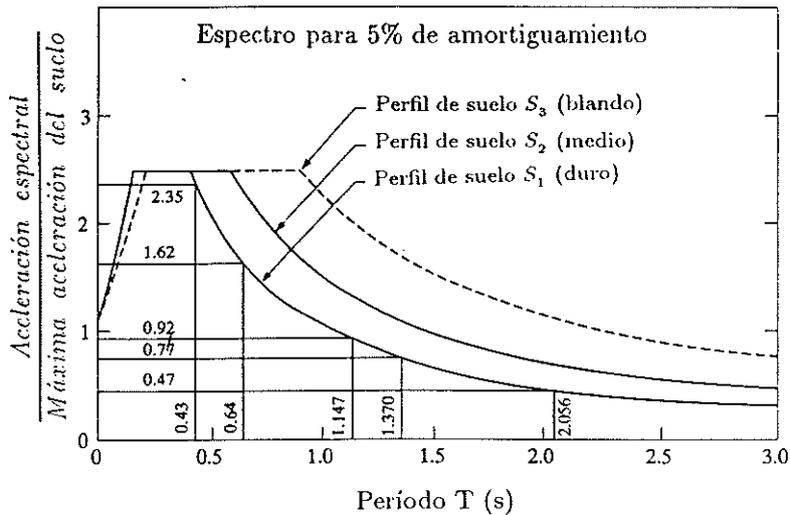


Figura 2.5 Espectro de diseño del ATC^(18,19).

2.4 DEFINICIÓN A PARTIR DE RELACIONES DE ATENUACIÓN

En el marco de este grupo de métodos, se realiza una predicción del movimiento sísmico del terreno en base a funciones empíricas que dependen de la magnitud M y de la distancia epicentral D . Los estudios de Campbell^(16,18,21) referentes al desarrollo de relaciones para los valores máximos del desplazamiento, velocidad y aceleración del movimiento del terreno han sido completados por Joyner y Boore⁽²²⁾ a fin de permitir la estimación de ordenadas espectrales co-

respondientes a distintos períodos propios de vibración. El trabajo mencionado en la referencia (22) constituye una continuación natural del anterior estudio, ya que la máxima aceleración del terreno es prácticamente igual a la respuesta espectral correspondiente a períodos bajos. La obtención de una característica η que pueda representar indistintamente un parámetro que describa el máximo movimiento del terreno o una ordenada de un espectro de respuesta, puede expresarse mediante la siguiente fórmula⁽³⁾:

$$\log \eta = f(M, D) \pm \epsilon \quad (2.21)$$

En la ecuación (2.21), f es una función que depende de la magnitud M y de la distancia epicentral D y ϵ es un error aleatorio de $\log \eta$. La influencia de la magnitud sobre la forma del espectro de respuesta ha sido mencionada por Housner⁽¹⁴⁾ y demostrada por McGuire^(23,24) y otros⁽³⁾. Los terremotos de gran magnitud contienen frecuencias bajas, mientras que los de magnitud pequeña tienen un contenido de frecuencias altas. Joyner y Boore⁽²²⁾ han propuesto para la función f de la ecuación (2.21) la siguiente expresión:

$$f(M, D) = a + b(M - 6) + c(M - 6)^2 + d \log R + kR + s \pm \epsilon \quad (2.22)$$

en la cual a, b, c, d, h, k y s son coeficientes cuyos valores se dan en la tabla 2.3 para diferentes períodos propios T . La ecuación (2.22) es válida para un rango de magnitudes $5.0 \geq M \geq 7.7$. El coeficiente s toma valores iguales a cero, mientras que los valores distintos de cero incluidos en la tabla corresponden a capas de suelo con un grosor mayor que 5 m.

Tabla 2.3 Coeficientes para el cálculo del seudoespectro de velocidades (en cm/s) correspondiente a una fracción del amortiguamiento crítico de 5%, según la referencia (3).

T (s)	a	b	c	d	h	k	s
0.10	2.16	0.25	-0.06	-1.00	11.3	-0.0073	-0.02
0.15	2.40	0.30	-0.08	-1.00	10.8	-0.0067	-0.02
0.20	2.46	0.35	-0.09	-1.00	9.6	-0.0063	-0.01
0.30	2.47	0.42	-0.11	-1.00	6.9	-0.0058	0.04
0.40	2.44	0.47	-0.13	-1.00	5.7	-0.0054	0.10
0.50	2.41	0.52	-0.14	-1.00	5.1	-0.0051	0.14
0.75	2.34	0.60	-0.16	-1.00	4.8	-0.0045	0.23
1.00	2.28	0.67	-0.17	-1.00	4.7	-0.0039	0.27
1.50	2.19	0.74	-0.19	-1.00	4.7	-0.0026	0.31
2.00	2.12	0.79	-0.20	-1.00	4.7	-0.0015	0.32
3.00	2.02	0.85	-0.22	-0.98	4.7	-0.0000	0.32
4.00	1.96	0.88	-0.24	-0.95	4.7	-0.0000	0.29

Los parámetros que definen la función f corresponden a un movimiento sísmico de dirección aleatoria⁽³⁾ y han sido identificados a partir de los espectros de respuesta de una serie de terremotos registrados en el oeste de U.S.A. Se ha considerado que $\log \eta$ tiene una distribución normal, por lo cual η tiene una distribución lognormal. Los valores de los mencionados parámetros incluidos en la tabla 2.3 son cuantiles que corresponden a una probabilidad de 84%.

2.5 ESPECTRO DE ENERGÍA INDUCIDA

En los últimos años se ha producido un incremento notable del interés por estudiar la acción sísmica sobre las estructuras desde el punto de vista de la energía inducida con fines de diseño. Dicho interés se debe, fundamentalmente, al hecho de que en dicho parámetro se recoge mayor información sobre la respuesta de la estructura en la duración que en los espectros usuales respuesta, tanto elásticos como inelásticos. En este sentido, Akiyama⁽²⁵⁾ desarrolló un método de diseño basado en el llamado *espectro de energía*. Asimismo, algunos investigadores han estudiado recientemente la distribución de energía en estructuras, tanto analítica como experimentalmente ⁽²⁶⁻²⁸⁾

Por otra parte, el análisis de la absorción de energía está ligado al de la determinación de llamados *índices de daño* debido a la influencia de la disipación de energía en la degradación de las propiedades estructurales y a los problemas de fatiga de bajo ciclaje derivados de la duración y la intensidad del sismo. Este punto se discutirá en el apartado 2.7

En vista de la dependencia del espectro de energía de la duración del sismo, dicho método se presenta particularmente útil para el análisis de la fatiga estructural causada por eventos sísmicos. La ecuación de movimiento de un sistema de un grado de libertad, en general, no lineal, es

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + f(x) = -m\ddot{y} \quad (2.23)$$

donde \ddot{y} representa la aceleración del suelo y $f(x)$ la fuerza de restauración. Al multiplicar por el incremento de deformación dx , o lo que es igual, por $x\dot{t}$, la ecuación de la distribución de la energía de un sistema de un grado de libertad hasta un tiempo determinado t de la historia de respuesta se presenta como ^(1,12):

$$\int_0^t m\ddot{x}\dot{x}dt + \int_0^t c\dot{x}^2dt + \int_0^t f(x)\dot{x}dt = - \int_0^t m\ddot{y}\dot{x}dt \quad (2.24)$$

La evaluación de estas integrales al término de la duración del sismo t_0 da como resultado la siguiente distribución:

$$\frac{m \dot{x}^2(t_0)}{2} + W_d + (W_e + W_p) = E \quad (2.25)$$

donde el primer término corresponde la energía cinética al final del evento, la cual es despreciable. El segundo término, W_d representa la energía disipada por amortiguamiento. De acuerdo con la referencia (25), ésta se puede estimar satisfactoriamente por

$$W_d = \left(1 - \frac{1}{1 + 3\nu + 1.2\nu^2}\right)E \quad (2.26)$$

Esto arroja como resultado que $E - W_d$ se distribuye entre W_e , la energía almacenada elásticamente (y que, en el transcurso de la deformación se convierte en energía cinética y viceversa), y W_p disipada por plastificación en los múltiples ciclos histeréticos. La manera como se dé esta última repartición determinará el daño de la estructura en toda la duración del evento. En términos generales puede decirse que en la mayoría de los casos habituales, donde se confía la disipación de energía a la plastificación de la estructura, el valor de W_e es muy pequeño en comparación con W_d y, por tanto, esta puede estimarse adecuadamente a partir de $E - W_d$.

El espectro de energía inducida, E , suele definirse en términos de una velocidad equivalente,

$$V_e = \sqrt{\frac{2E}{m}} \quad (2.27)$$

Un aspecto que hace atractivo el método de energía para efectos de diseño es el hecho de que su espectro es relativamente independiente del grado de plastificación de la estructura, de manera que para fines de diseño puede definirse de manera única para cualquier tipo de sistema estructural y grado de no linealidad inherente él. En efecto, la figura 2.6 muestra los espectros de velocidad equivalente correspondientes a varios sistemas elasto-plásticos sometidos al registro del sismo de Tokachi-oki (1968) tomado en Hachinoe Harbor. Los sistemas se encuentran definidos por el coeficiente de resistencia sísmica

$$C = \frac{F_u}{W} \quad (2.28)$$

donde F_u es la resistencia a cortante del sistema y W su peso.

Puede verse que después de un cierto período el espectro oscila alrededor de un valor determinado y que la disminución de la resistencia del elemento opera una especie de promediado del mismo. Esto hace que se haya propuesto ⁽¹⁾ la forma simple de espectro suavizado de dos líneas rectas que se muestra en la figura para fines de diseño.

El espectro de energía guarda estrechas relaciones con otras medidas de la excitación sísmica. En efecto, para un sistema lineal se tiene ⁽²⁹⁾

$$\int_0^\infty \frac{E}{m} d\omega = \frac{\cos^{-1} \nu}{\sqrt{1 - \nu^2}} \int_0^\infty \ddot{y}^2 dt \quad (2.29)$$

donde la integral

$$I = \int_0^\infty \ddot{y}^2 dt \quad (2.30)$$

es la conocida Intensidad de Arias ⁽³⁰⁾. De acuerdo con el teorema de Parseval

$$\int_0^\infty \ddot{y}^2 dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty |Y(\omega)|^2 d\omega \quad (7) \quad (2.31)$$

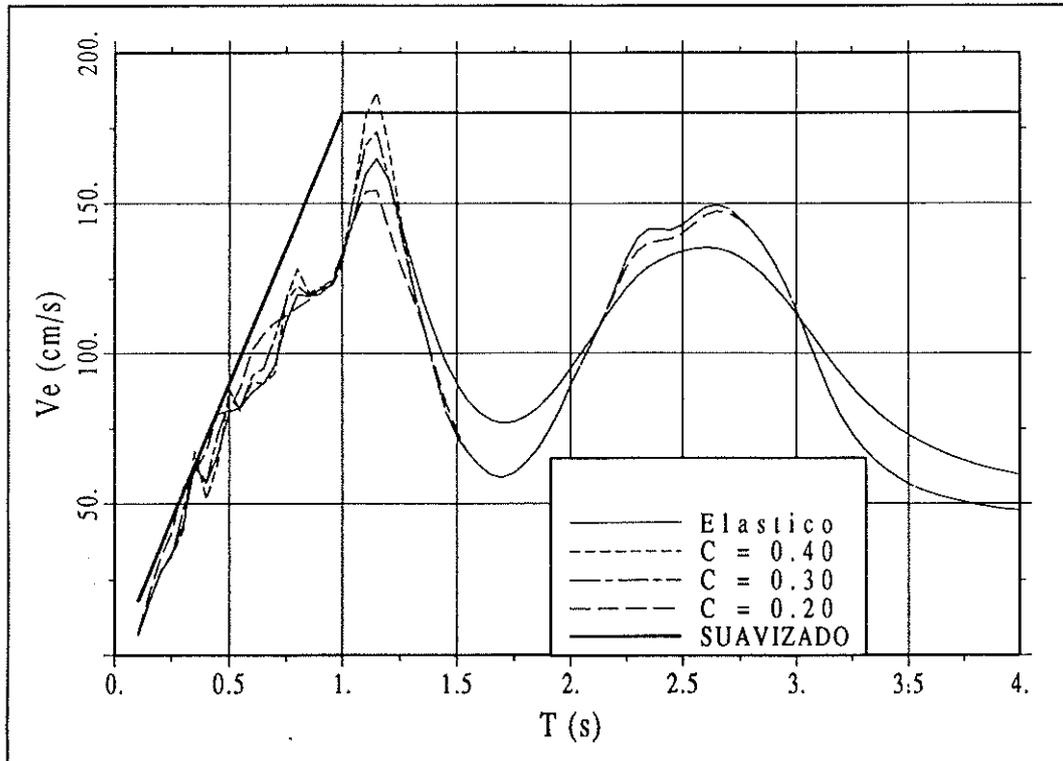


Figura 2.6 Espectros de energía de sistemas elastoplásticos. Sismo de Hachinoe.

donde $|Y(\omega)|$ es la amplitud de Fourier del registro. De acuerdo con esto,

$$\int_0^{\infty} V_e^2(\omega) = \frac{2 \cos^{-1} \nu}{\sqrt{1 - \nu^2}} \int_0^{\infty} \ddot{y}^2 dt \quad (2.32)$$

y

$$\int_0^{\infty} V_e^2(\omega) = \frac{2 \cos^{-1} \nu}{\pi \sqrt{1 - \nu^2}} \int_0^{\infty} |Y(\omega)|^2 d\omega \quad (2.33)$$

Las ecuaciones anteriores recogen las relaciones existentes entre las diferentes medidas de la energía sísmica. En particular, la última ecuación indica que, en primer lugar, el espectro de energía inducida contiene toda la información del registro tal como el espectro de Fourier, lo cual facilita la generación de acelerogramas sintéticos compatibles con un espectro de V_e dado, tal como se mostrará más adelante; y, en segundo lugar, que todos los valores que afecten al espectro de Fourier afectan igualmente al de energía inducida.

Sobre esta última observación resulta conveniente recoger aquí las principales conclusiones de un trabajo reciente de Sawada y otros ⁽³¹⁾ sobre las estrechas

correlaciones que median entre los parámetros del espectro de potencias con la relación sencilla a/v , en el que a es la aceleración máxima del suelo y v la velocidad máxima del suelo:

1.- El parámetro de dispersión del espectro de potencias es menor cuanto mayor es el factor a/v . Dicho parámetro, dado por

$$\delta = \sqrt{1 - \frac{\lambda_2^2}{\lambda_0 \lambda_1}} \quad (2.34)$$

donde λ_i es el momento espectral de orden i (ecuación 3.6), es una medida de la dispersión de la energía en diferentes frecuencias y, por tanto, del ancho de banda de la zona de mayores amplitudes de energía.

2.- La frecuencia correspondiente al pico del espectro de potencia está igualmente en relación inversa con el factor a/v .

Para ambos casos los autores mencionados reportan coeficientes de correlación superiores a 0.8. Es de anotar, además, que fuertes influencias del parámetro a/v en el espectro de aceleración han sido reportada por Zhu y Heidebrecht⁽³²⁾. La siguiente es la clasificación del parámetro a/v propuesta por estos autores:

- 1.- $a/v > 12$: Alto
- 2.- $12 > a/v > 8$: Normal
- 3.- $a/v < 8$: Bajo.

De acuerdo con todo lo anterior, el trazado de un espectro suavizado de energía inducida tal como el propuesto en la referencia (25), y mostrado esquemáticamente en la figura 2.6, que se caracteriza por una banda de frecuencias muy ancha, resulta adecuado solamente en el caso de valores bajos de a/v . Por otra parte, la falta de una rama descendente del espectro, la cual se da para valores altos de a/v en la zona de períodos medios, implica una intensidad infinita, de acuerdo con la ecuación 2.32.

Sawada et al.⁽³¹⁾ han obtenido la siguiente regresión de dicho parámetro, con base en registros de sismos en Japón:

$$\frac{a}{v} = 10^{-0.07M} 41R - 0.12T_s - 0.51 \quad (2.35)$$

donde M es la magnitud del sismo, R la distancia epicentral y T_s el período característico del suelo.

Con el fin de obtener una estadística que permita escalar el espectro de energía con base en información sismológica y definir su forma, se procesaron los registros que se listan en la tabla 2.4. La duración efectiva fué calculada según la sugerencia de Trifunac y Brady⁽²⁹⁾ como el el lapso transcurrido entre los instantes en que la Intensidad de Arias alcanza un 5% y un 95% de su valor total. Los registros fueron clasificados de acuerdo a su valor de a/v según los criterios expuestos más arriba, y normalizados de dos maneras: de acuerdo a

la aceleración máxima y de acuerdo a la raíz media cuadrática σ_d del registro calculada sobre la duración efectiva:

$$\sigma_d^2 = \frac{\int \ddot{y}^2 dt}{t_d} \quad (2.36)$$

Los espectros fueron calculados para un amortiguamiento del 10%, el cual envuelve adecuadamente a los obtenidos para diferentes sistemas no lineales encontrados en la práctica ⁽²⁵⁾

La figuras 2.7 y 2.8 muestran la relación existente entre el valor máximo del espectro de V_e , V_{em} , y la duración efectiva t_d , así como las regresiones lineales obtenidas para los casos de normalización según la aceleración y la raíz media cuadrática, respectivamente. La tabla 2.5 presenta los valores de los coeficientes de correlación, así como los coeficientes de regresión de V_{em} contra t_d , dada por:

$$\frac{V_{em}}{a}, \frac{V_{em}}{\sigma_d} = a_0 + a_1 t_d \quad (2.37)$$

Puede verse que la correlación del pico del espectro con la duración efectiva es mucho mejor en el segundo caso de normalización que en el primero. Igualmente resulta claro que la relación entre el pico del espectro de energía y la duración es muy diferente en el caso de valores bajos de a/v que en el de valores medios y altos.

El siguiente punto que interesa precisar es el correspondiente a la forma del espectro. De acuerdo con lo dicho anteriormente, es de esperar que los espectros correspondientes a valores altos de a/v se caractericen por un ancho de banda menor que los asociados a un valor de a/v bajo, y que además la frecuencia del pico del espectro sea menor en estos últimos. Esta sensibilidad del espectro de energía al parámetro a/v unida a la correspondiente a la duración, hace que sea difícil realizar un promedio de diferentes espectros, el cual, por otra parte, arrojaría como resultado una intensidad determinada que puede no corresponder a la que se pretende establecer para el espectro, de acuerdo a la ecuación 2.32, lo cual es importante para el caso de la simulación de acelerogramas, como se detalla en el capítulo 4. Por estas razones resulta preferible examinar las formas típicas del espectro de energía para los tres grupos de valores máximos de movimiento del suelo definidos anteriormente.

Podemos describir las tendencias generales en este respecto así:

1.- En el caso de valores altos de a/v la banda de periodos de máxima energía puede tomarse entre 0.2 ~ 0.5 seg. de período inferior y 1.0 ~ 1.5 seg. de superior, en el espectro suavizado mostrado en la figura 2.9.

2.- Para valores intermedios de a/v , dicha banda oscila entre un período de 0.2 ~ 0.5 seg. de período inferior y 1.5 ~ 2.5 seg. para el superior aproximadamente.

Tabla 2.4 Registros analizados para el estudio del espectro de energía.

Sismo	Registro	Fecha
Friuli	Forgaria	76.09.15
Friuli	San Rocco	76.09.15
Parkfield	Temblor	66.06.27
Tokachi oki	Hachinoe Harbour	68.05.16
Miyagi ken oki	Tohoku University	78.06.12
Eureka	Eureka Federal Building	54.12.21
Loma Prieta	Capitola Station	89.10.18
Loma Prieta	Santa Cruz Mountains	89.10.18
Loma Prieta	Stanford Parking	89.10.18
Loma Prieta	Gilroy, Gavilan College	89.10.18
Loma Prieta	Halls Valley	89.10.18
Loma Prieta	Monterey City Hall	89.10.18
Loma Prieta	Palo Alto VA Hospital	89.10.18
Loma Prieta	Cliff House	89.10.18
Loma Prieta	Corralitos Eureka Canyon	89.10.18
Loma Prieta	Diamond Heights	89.10.18
Loma Prieta	S. Francisco Int. Airport	89.10.18
Loma Prieta	Telegraph Hill	89.10.18
Loma Prieta	Rincon Hill	89.10.18
Loma Prieta	Pacific Heights	89.10.18
Loma Prieta	Presidio	89.10.18
Chile	LLolleo	85.03.03
Chile	Viña del mar	85.03.03
Chile	Valparaiso	85.03.03
Mexico	Ciudad Universitaria	85.09.19
Mexico	Sismex Viveros	85.09.19
Mexico	Tacubaya	85.09.19
Imperial Valley	El Centro	40.05.18
Ferndale	Ferndale City Hall	51.10.07
Kern County	Pasadena Caltech Athenaeum	52.07.21
Kern County	Taft Lincoln School Tunnel	52.07.21
San Jose	Bank of America	55.09.04
San Francisco	Golden Gate Park	57.03.22
Seattle	Olympia Highway Test Lab.	49.04.13
Taft	Taft Lincoln Scholl Tunnel	54.01.12
Parkfield	Cholame Shandon Arr. 2	66.06.27
Parkfield	Cholame Shandon Arr. 5	66.06.27
Parkfield	Cholame Shandon Arr. 8	66.06.27
San Fernando	Pacoima Dam	71.02.09
San Fernando	Wilshire Blvd., Los Ang.	71.02.09
San Fernando	North Robertson Blvd., Los Ang.	71.02.09
San Fernando	Castaic Old Ridge Route	71.02.09
San Fernando	Orion Blvd., Los Ang.	71.02.09
SMART-1-33	33-E02	85.06.12
SMART-1-33	33-C02	85.06.12
SMART-1-39	39-E02	86.01.16
SMART-1-39	39-C02	86.01.16
SMART-1-41	41-E02	86.05.20
SMART-1-41	41-C02	86.05.20
SMART-1-43	43-E02	86.07.30
SMART-1-43	43-C02	86.07.30
SMART-1-45	45-E02	86.11.14
SMART-1-45	45-C02	86.11.14
Northridge	Pacoima Dam	94.01.17
Northridge	New Hall	94.01.17
Northridge	Arleta Fire Station	94.01.17
Northridge	Sylmar Hospital	94.01.17
Northridge	Santa Monica City Hall	94.01.17

3.-En el caso de valores bajos de a/v , la banda de máxima energía parece desplazarse hacia la derecha con la duración del evento. En el caso de duraciones cortas, coincide en términos globales con la del caso anterior, mientras que para

Tabla 2.5 Coeficientes para la estimación del espectro de energía

Criterio	a/v	a_0	a_1	ρ
a	Bajo	0.251	0.0247	0.792
	Medio	0.309	0.0083	0.391
	Alto	0.156	0.0131	0.567
σ_a	Bajo	20.478	2.32	0.884
	Medio	25.272	1.274	0.635
	Alto	12.193	1.613	0.717

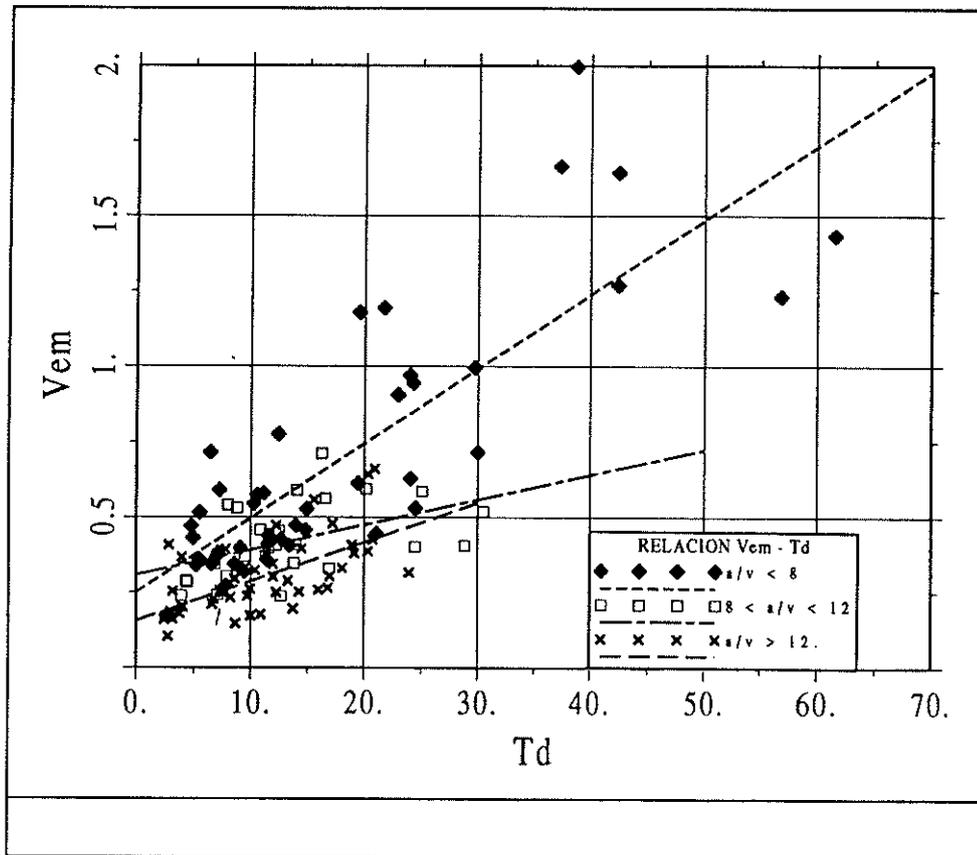


Figura 2.7 Correlación entre t_d y V_{em} normalizado según a .

duraciones mayores presenta un período inferior de aproximadamente 0.5 ~ 1.0 seg. y uno superior de 3 ~ 5 seg.

4.- En todos los casos se presenta una rama descendente a partir del período superior, que puede ser descrita aproximadamente de manera inversamente proporcional al período.

En consecuencia, con el fin de trazar un espectro suavizado para fines de

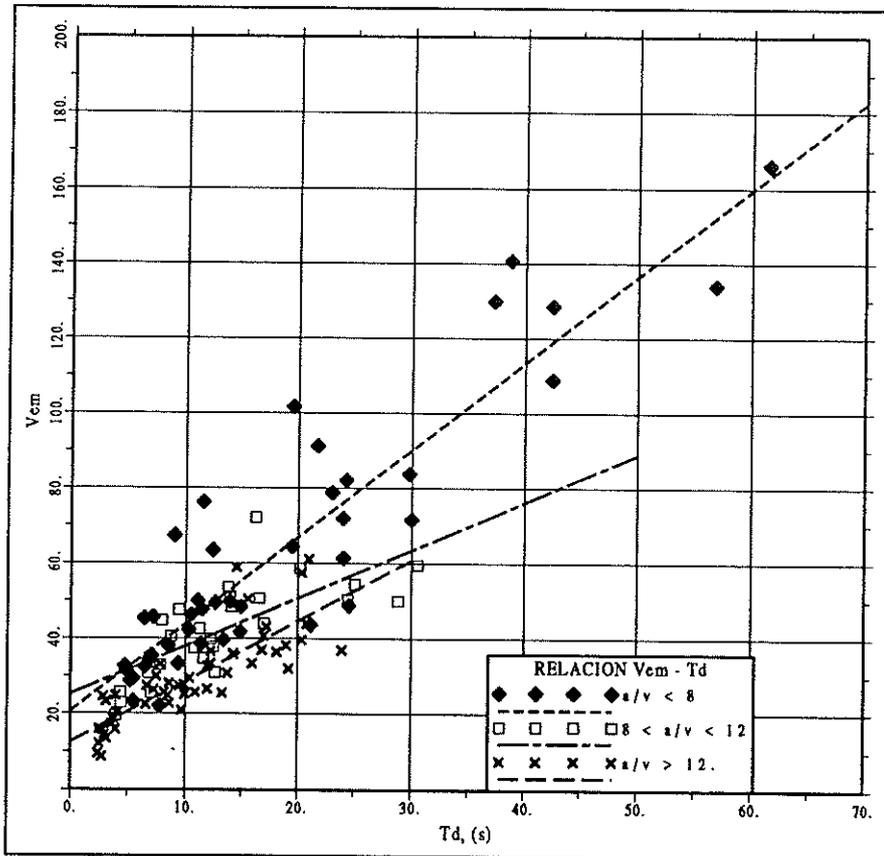


Figura 2.8 Correlación entre t_d y $V_{e,m}$ normalizado según σ_d .

diseño o de generación de acelerogramas sintéticos es preferible utilizar las ecuaciones de regresión correspondiente a la normalización del pico de V_e con base en la raíz media cuadrática que en la aceleración pico, debido no solamente a la mejor correlación obtenida sino también a la relación entre la σ_d , el área del cuadrado del espectro y la intensidad del sismo, de acuerdo con las ecuaciones 2.31 a 2.33. La figura 2.9 muestra un espectro suavizado general que resulta adecuado para las múltiples situaciones descritas anteriormente. Como es sabido⁽²⁷⁾, el espectro de energía tiende a un valor límite de v , la velocidad máxima del suelo, cuando el período natural tiende a infinito. Si llamamos f_3 a la frecuencia de cruce de la rama ascendente con la horizontal, f_2 a la de cruce de ésta con la rama parabólica, y f_1 a la frecuencia máxima de interés (generalmente tomada entre 25 y 30 Hz), el espectro se formula como

$$V_e = v + \frac{(V_{em} - v)f}{f_3}, \quad f < f_3$$

$$V_e = V_{em}, \quad f_3 < f < f_2$$

$$V_e = \frac{V_{em} f_2}{f}, \quad f_2 < f < f_1 \quad (2.39)$$

La aplicación de la ecuación 2.32 a este espectro da como resultado

$$V_{e-m}^2 f_2^2 \left(\frac{1}{f_2} - \frac{1}{f_1} \right) + V_{em}^2 (f_2 - f_3) + \frac{(V_{em} - v)^2 f_3}{3} + v^2 f_3 =$$

$$\frac{\cos^{-1} \nu}{2\pi \sqrt{1 - \nu^2}} \int_0^\infty \dot{y}^2 dt \quad (2.40)$$

Al asignar valores adecuados a la frecuencia de corte f_1 , y a f_3 de acuerdo a lo expuesto anteriormente, la ecuación anterior permite calcular la frecuencia f_2 .

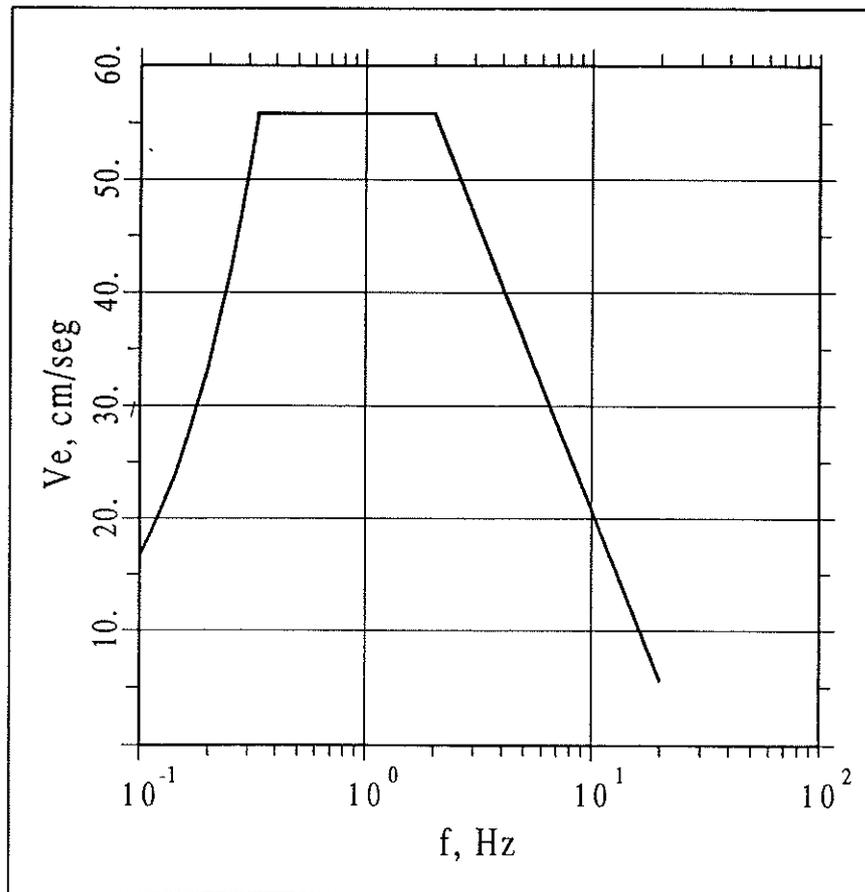


Figura 2.9 Espectro suavizado de energía.

2.6 ESPECTROS DE RESPUESTA NO LINEALES

De acuerdo con todas las hipótesis consideradas hasta ahora, la energía inducida por terremotos en estructuras se disipa en parte por el efecto del amortiguamiento y en parte por el efecto de las deformaciones no elásticas en los elementos estructurales. Las estructuras bien diseñadas y construidas deben ser capaces de absorber y disipar la energía sufriendo un daño mínimo durante terremotos moderados y daños limitados durante terremotos fuertes⁽⁷⁾. La simulación numérica del proceso de deterioro de las estructuras durante la acción sísmica es complicada, requiriendo procedimientos de cálculo no lineal, así como definiciones adecuadas de la acción. A pesar de sus numerosas ventajas, los espectros de respuesta tienen la gran limitación de que permiten definir la acción sísmica sólo para sistemas estructurales lineales elásticos. En este sentido sería muy útil extender el concepto de espectros de respuesta a sistemas no lineales, especialmente para su uso en el cálculo de estructuras poco complejas como, por ejemplo, los pórticos, estructuras que normalmente tienen un comportamiento no lineal, dúctil, durante los terremotos fuertes.

Espectros de respuesta correspondientes a sistemas no lineales pueden obtenerse como resultado de un cálculo numérico, utilizando procedimientos de integración paso a paso de las ecuaciones del movimiento, o pueden desarrollarse en base a observaciones empíricas, modificando los espectros de respuesta lineales. Se suelen representar gráficamente en función del período propio T del modelo correspondiente a su rango lineal y de un coeficiente de ductilidad μ . Cualquiera que fuera el procedimiento de obtención utilizado, es usual considerar un comportamiento elastoplástico para el modelo con un solo grado de libertad en el que se basa el cálculo, del tipo simplificado que puede verse en la figura 2.10.

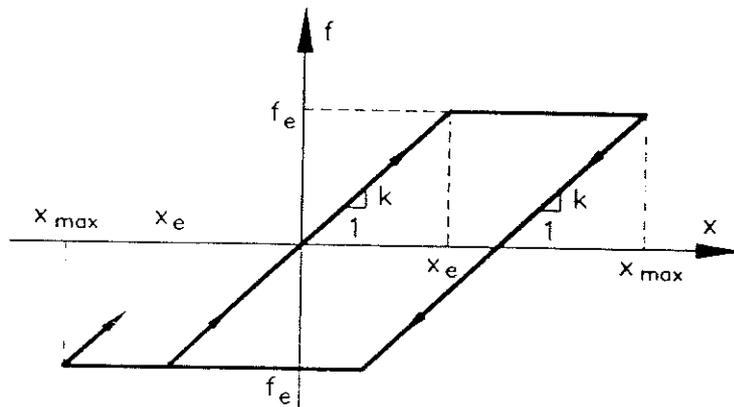


Figura 2.10 Ley elastoplástica de comportamiento de un sistema con un grado de libertad.

A partir de dicha figura se puede definir también el coeficiente de ductilidad μ , como la relación entre el desplazamiento máximo x_{max} del modelo y su desplazamiento al límite elástico x_e .

$$\mu = \frac{x_{\max}}{x_l} \quad (2.41)$$

Los espectros de respuesta no lineales pueden ser útiles en el diseño de estructuras que pueden calcularse como sistemas con un solo grado de libertad. Sin embargo, aunque ampliamente utilizados, no existe una completa justificación para su aplicación al cálculo de la respuesta máxima de sistemas con varios grados de libertad.

Para obtener un espectro de respuesta no lineal se calculan sus ordenadas mediante integración numérica de la ecuación diferencial del movimiento. Dicho cálculo se repite variando tanto la rigidez k del modelo y, consecuentemente, su período propio correspondiente al rango elástico, como su coeficiente de ductilidad. El resultado se representa gráficamente en escala trilogarítmica, igual que en el caso de los espectros de respuesta lineales, con la diferencia de que la velocidad y la aceleración se suelen representar con su valor real, mientras que el desplazamiento se divide por el coeficiente de ductilidad. Un espectro de este tipo⁽³³⁾ correspondiente al terremoto de El Centro de 1940, se da en las figuras 2.11 y 2.12. Obviamente, la velocidad y la aceleración espectrales se obtienen directamente de estas gráficas, mientras que los valores del desplazamiento espectral deben multiplicarse por el coeficiente de ductilidad.

La utilización en el análisis de estructuras con comportamiento elastoplástico de espectros de respuesta modificados de este tipo puede proporcionar resultados razonables, aunque aproximados, para coeficientes de ductilidad de hasta 5 o 6. Sin embargo, en algunos estudios se recomienda reducir el límite de aplicación del método a la mitad de estos valores⁽³⁾. En las referencias (15,33) se describen métodos para construir este tipo de espectros.

2.7 ESPECTROS DE ÍNDICES DE DAÑO

Dentro del campo de los espectros de respuesta considerados en este capítulo, cabe mencionar los llamados espectros de índices de dano, propuestos recientemente por diversos autores^(28,34-38). En síntesis, se trata de reflejar en ellos la resistencia mínima que debe tener la estructura de un sistema de un grado de libertad de un período inicial dado, expresada en términos de aceleración, para alcanzar un grado de daño considerado como límite, para un sismo dado. El primer índice propuesto, está basado en la capacidad de ductilidad del sistema, μ_u , definida como la relación entre el desplazamiento máximo tolerable de la estructura (generalmente estudiado en un ensayo de carga monotónica), x_u y su desplazamiento al límite elástico x_l

$$\mu_u = \frac{x_u}{x_l} \quad (2.42)$$

De acuerdo con esto, la estructura alcanza su máximo grado de daño, cuando el

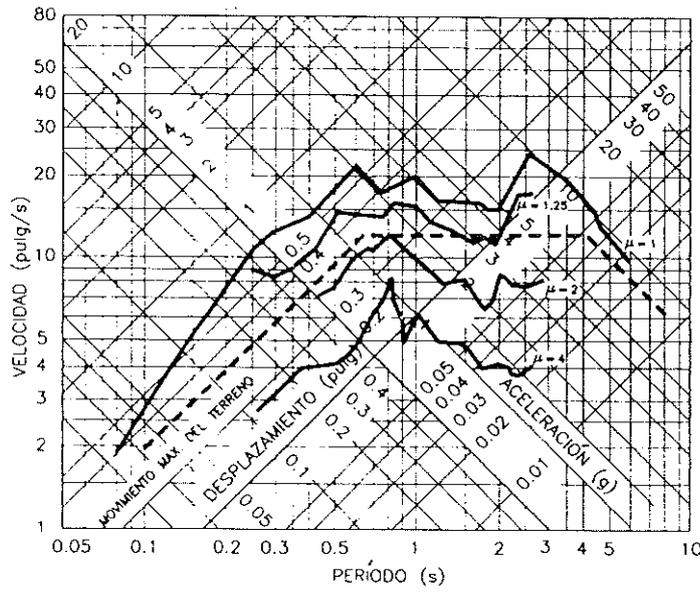


Figura 2.11 Espectro de respuesta elastoplástico, terremoto de El Centro, 1940, sin amortiguamiento viscoso^(33,39).

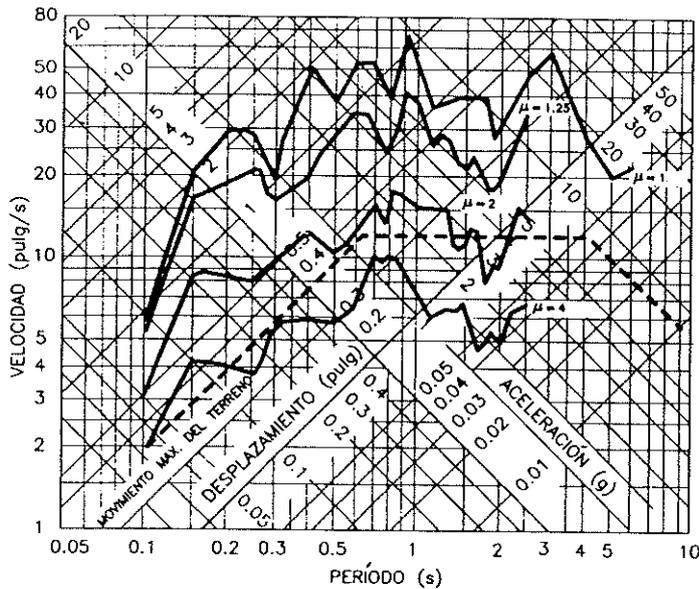


Figura 2.12 Espectro de respuesta elastoplástico, terremoto de El Centro, 1940, 10% del amortiguamiento crítico^(33,39).

índice

$$D_{\mu} = \frac{\mu - 1}{\mu_u - 1} \tag{2.43}$$

alcance el valor unitario.

Adicionalmente, se ha propuesto un índice basado en la energía disipada en toda la duración del sismo, con respecto a la energía que el sistema es capaz de

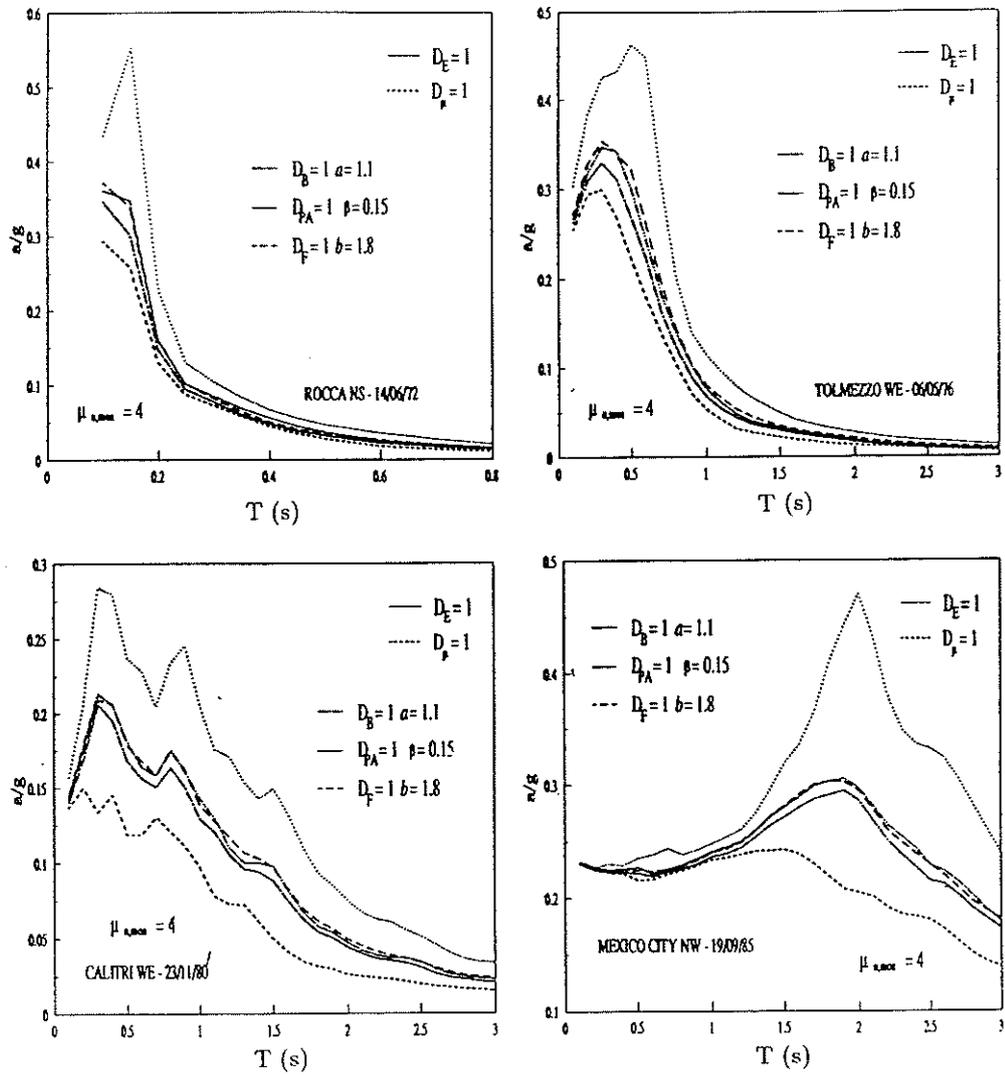


Figura 2.13 Comparación de espectros de índices de daño.

disipar monótonicamente ⁽³⁸⁾:

$$\mu_e = 1 + \frac{W_P}{F_u x_t} \quad (2.44a)$$

$$D_e = \frac{\mu_e - 1}{\mu_u - 1} \quad (2.44b)$$

Se ha demostrado analíticamente que el primer criterio $D_\mu = 1$ se satisface con resistencias F_u mucho menores que el segundo, $D_e = 1$. Sin embargo, está claro

que el criterio de ductilidad, al estar basado en el valor de una respuesta máxima, no considera el progresivo deterioro de la estructura en los ciclos subsiguientes a ella, como si puede considerarlo el segundo. Por esta razón, Park y Ang han propuesto un índice que combina linealmente ambos valores ⁽³⁵⁾:

$$D_{PA} = \frac{\mu + \beta(\mu_e - 1)}{\mu_u} \quad (2.45)$$

en el cual el valor β ha sido obtenido solamente para el caso de elementos de hormigón armado, a través del análisis de múltiples resultados experimentales de laboratorios de Estados Unidos y Japón. Dicho factor califica la influencia de la energía disipada en el deterioro de la resistencia del elemento, y es mayor cuanto menor sea la capacidad de disipación de energía del mismo.

Otros índices propuestos están basados en los ensayos de fatiga de bajo ciclaje, consistentes en el sometimiento del elemento a pruebas de carga cíclica, en los cuales la falla se produce por daño acumulado. Por esta razón, tales índices son también útiles para reflejar los efectos de todos los ciclos histeréticos de la respuesta. Uno de tales índices es el propuesto por Cosenza y otros ⁽³⁷⁾ dado por

$$D_F = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\mu_i - 1}{\mu_u - 1} \right)^b \quad (2.46)$$

En esta fórmula, b es un parámetro tomado de los ensayos de fatiga de bajo ciclaje, y la sumatoria se extiende sobre todos los n ciclos de carga.

En principio, la construcción de un espectro correspondiente a un valor dado de un índice de daño implica el cálculo de la resistencia del sistema, expresada en términos de aceleración, necesaria para alcanzar tal valor del índice, cuando es sometido al sismo en cuestión. La figura 2.13, tomada de la referencia (37), muestra una comparación de los resultados obtenidos para tal resistencia mínima de acuerdo a los diferentes índices para cuatro sismos. Puede verse que el criterio del factor de ductilidad es el menos conservador, al contrario del correspondiente al criterio energético. Los criterios de Park y Ang, junto con los criterios de fatiga de bajo ciclaje, coinciden adecuadamente en la zona de valores intermedios.

2.8 ESPECTROS DE RESPUESTA ESTOCÁSTICOS

2.8.1 Introducción

El método de desarrollo de espectros de respuesta que se analiza a continuación parte del cálculo de los valores de la respuesta extrema estimada para sistemas con un grado de libertad, sometidos a una excitación sísmica modelizada como proceso estocástico estacionario o no estacionario. Se hace la hipótesis de que los mencionados valores extremos describen adecuadamente las ordenadas de los correspondientes espectros sísmicos de respuesta^(40,41). Los espectros obtenidos de esta manera se denominarán *espectros de respuesta estocásticos* y se

pueden utilizar en un análisis convencional de estructuras lineales, aplicando el desacoplamiento modal. La principal ventaja de este procedimiento de definición de la acción reside en el hecho de que proporciona espectros desarrollados a partir de hipótesis probabilistas realistas, generalmente aceptadas, acerca del movimiento sísmico del terreno. Como ventaja adicional se menciona que el procedimiento requiere muy pocos datos de entrada, disponibles en la mayoría de las zonas sísmicas, incluidas aquellas para las cuales existen pocos registros de terremotos⁽⁴²⁾.

2.8.2 Relaciones probabilistas entrada - salida - caso estacionario

Considérese un sistema lineal con un grado de libertad, sometido a una excitación sísmica. La aceleración del terreno $z(t)$ se describe como un proceso aleatorio ergódico, normal y de media nula, que se caracteriza por su densidad espectral de potencia $S_z(\theta)$. Los estimadores de la densidad espectral de potencia del proceso aleatorio de excitación $S_z(\theta)$ y del proceso aleatorio de respuesta $S_x(\theta)$, se expresan (ver Anexo)

$$S_z(\theta) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi T_0} |Z(\theta)|^2 \quad (2.47)$$

$$S_x(\theta) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi T_0} |X(\theta)|^2 \quad (2.48)$$

donde

$$Z(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} z(t) e^{-i\theta t} dt \quad (2.49)$$

es la transformada directa de Fourier de $z(t)$. Por consiguiente, en el límite para $T_0 \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{2\pi T_0} |X(\theta)|^2 = \frac{m^2}{2\pi T_0} |H(\theta)|^2 |Z(\theta)|^2 \quad (2.50)$$

con lo cual

$$S_x(\theta) = m^2 |H(\theta)|^2 S_z(\theta) \quad (2.51)$$

donde el módulo de la función de transferencia es

$$|H(\theta)| = \frac{1}{k \sqrt{\left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right)^2 + \left(2\nu \frac{\theta}{\omega}\right)^2}} \quad (2.52)$$

Pueden obtenerse ecuaciones parecidas a la (2.51), pero relacionando la densidad espectral de potencia de las velocidades y aceleraciones de respuesta del sistema con la densidad espectral de potencia de las aceleraciones del terreno. Se obtiene así:

$$S_{\dot{x}}(\theta) = m^2 \theta^2 |H(\theta)|^2 S_x(\theta) \quad (2.53)$$

$$S_{\ddot{x}}(\theta) = m^2 \theta^4 |H(\theta)|^2 S_x(\theta) \quad (2.54)$$

La varianza de los desplazamientos, velocidades y aceleraciones de respuesta de la estructura se define mediante las siguientes expresiones, respectivamente:

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(\theta) d\theta \quad (2.55)$$

$$\sigma_{\dot{x}}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\dot{x}}(\theta) d\theta \quad (2.56)$$

$$\sigma_{\ddot{x}}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\ddot{x}}(\theta) d\theta \quad (2.57)$$

Utilizando ahora en (2.55) la expresión de $S_x(\theta)$ dada por (2.27), la varianza de los desplazamientos de respuesta vale⁽¹⁾

$$\sigma_x^2 = m^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |H(\theta)|^2 S_x(\theta) d\theta \quad (2.58)$$

De la misma forma se obtiene

$$\sigma_{\dot{x}}^2 = m^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \theta^2 |H(\theta)|^2 S_x(\theta) d\theta \quad (2.59)$$

$$\sigma_{\ddot{x}}^2 = m^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \theta^4 |H(\theta)|^2 S_x(\theta) d\theta \quad (2.60)$$

A modo de ejemplo, supóngase que la aceleración de un terremoto en su epicentro se simula de una manera simplificada, mediante un ruido blanco ideal cuya densidad espectral de potencia es constante e igual a S_0 para $\theta \in (-\infty, +\infty)$. de esta manera se llega a las siguientes expresiones de la varianza para desplazamiento, velocidad y aceleración de respuesta del sistema :

$$\sigma_x^2 = \frac{\pi S_0}{2\nu\omega^3} \quad (2.61)$$

$$\sigma_x^2 = \frac{\pi S_0}{2\nu\omega} \quad (2.62)$$

$$\sigma_{\dot{x}}^2 = \frac{\pi S_0 \omega}{2\nu} \quad (2.63)$$

Estas últimas ecuaciones tienen una aplicación práctica muy limitada, debido a que se basan en la hipótesis restrictiva que considera la acción sísmica un ruido blanco ideal.

2.8.3 Respuesta extrema estimada – caso estacionario

El *valor extremo* x_e del proceso de respuesta estructural en desplazamientos $x(t)$ se define como el valor que se espera ocurra una sola vez en un intervalo finito de tiempo dado t_e . El problema de la determinación de x_e puede resolverse bajo algunas hipótesis restrictivas. Aquí se considerará, por ejemplo, aquélla que supone que el proceso es de banda estrecha^(43,44). Al número de veces en los cuales la respuesta sobrepasa el valor positivo o negativo de x_e durante el intervalo de tiempo t_e se le denomina $N(\pm x_e)$, mientras que $n(\pm x_e)$ es el número de sobrepasos por unidad de tiempo. Acorde con la anterior definición del valor extremo de la respuesta, se tiene la siguiente ecuación:

$$N(\pm x_e) = n(x_e) t_e = 1 \quad (2.64)$$

Puede demostrarse que se cumple la siguiente relación

$$n(+x_e) = \int_0^{\infty} p(x_e, \dot{x}) \dot{x} \, d\dot{x} \quad (2.65)$$

la cual expresa la probabilidad de que $x(t) \in [x_e, x_e + dx]$ y de que, al mismo tiempo, $\dot{x}(t) \in [\dot{x}, \dot{x} + d\dot{x}]$. La densidad de probabilidad gaussiana de segundo orden de las variables x y \dot{x} puede escribirse, como

$$p(x, \dot{x}) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_{\dot{x}}} e^{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{\sigma_x}\right)^2 + \left(\frac{\dot{x}}{\sigma_{\dot{x}}}\right)^2\right]} \quad (2.66)$$

en donde se ha hecho la hipótesis de que $x(t)$ y $\dot{x}(t)$ tienen media nula. Para el valor extremo x_e , la densidad de probabilidad vale

$$p(x_e, \dot{x}) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_{\dot{x}}} e^{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x_e}{\sigma_x}\right)^2 + \left(\frac{\dot{x}}{\sigma_{\dot{x}}}\right)^2\right]} \quad (2.67)$$

Sustituyendo (2.67) en (2.65), se tiene⁽⁴¹⁾

$$n(+x_e) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma_x}{\sigma_x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_e}{\sigma_x}\right)^2} \quad (2.68)$$

Si se considera ahora que el proceso $x(t)$ es estacionario, puede usarse la relación⁽⁴⁵⁾

$$\frac{\sigma_x}{\sigma_x} = \theta_m \quad (2.69)$$

para definir una frecuencia media θ_m del proceso⁽⁴⁴⁾. Sustituyendo (2.45) en (2.68), se obtiene

$$n(+x_e) = \frac{\theta_m}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_e}{\sigma_x}\right)^2} \quad (2.70)$$

Teniendo en cuenta que

$$n(\pm x_e) = 2 n(+x_e) \quad (2.71)$$

la sustitución de (2.70) en (2.71) proporciona

$$n(\pm x_e) = t_e \frac{\theta_m}{\pi} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_e}{\sigma_x}\right)^2} \quad (2.72)$$

La ecuación (2.64) permite establecer la siguiente ecuación de definición del valor de x_e

$$t_e \frac{\theta_m}{\pi} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_e}{\sigma_x}\right)^2} = 1 \quad (2.73)$$

cuya solución es

$$x_e = \sigma_x \sqrt{2 \ln\left(t_e \frac{\theta_m}{\pi}\right)} \quad (2.74)$$

Si se introduce la notación

$$\zeta_{t_e} = \sqrt{2 \ln\left(t_e \frac{\theta_m}{\pi}\right)} \quad (2.75)$$

siendo ζ_{t_e} el llamado “factor de pico”, la ecuación (2.74) se escribe en la forma

$$x_e^* = \zeta_{t_e} \sigma_x \quad (2.76)$$

2.8.4 Caso de una simulación no estacionaria

Los sismos son fenómenos no estacionarios, característica que debe ser tomada en cuenta en la definición de la acción. Una forma simple de hacerlo es transformando el proceso estacionario $x(t)$ en uno no estacionario $a(t)$, multiplicándolo por funciones deterministas del tiempo $I(t)$, llamadas funciones de intensidad

$$a(t) = z(t)I(t) \quad (2.77)$$

Las funciones de intensidad pueden obtenerse, para un área sísmica determinada, mediante un análisis estadístico de los registros de aceleraciones sísmicas obtenidos en tal área, en consecuencia, la ecuación del movimiento para un modelo con un solo grado de libertad sometido a una aceleración del terreno no estacionaria $a(t)$ se escribe

$$m\ddot{\tilde{x}}(t) + c\dot{\tilde{x}}(t) + k\tilde{x}(t) = -m a(t) \quad (2.78)$$

en donde la respuesta $\tilde{x}(t)$ es un proceso aleatorio no estacionario.

En este caso, las varianzas $\sigma_{\dot{\tilde{x}}}$ y $\sigma_{\tilde{x}}$ son sólo aproximadamente proporcionales. Sin embargo, incluso en este caso, Damrath⁽⁴⁴⁾ ha considerado que lo son, introduciendo una frecuencia media del proceso dada por

$$\theta_m = \frac{\sigma_{\dot{\tilde{x}}}}{\sigma_{\tilde{x}}} \quad (2.79)$$

En este caso, las ordenadas espectrales, que también dependen de la duración t_e del movimiento sísmico fuerte, se denominan x_e^t y se expresan como

$$x_e^t = \alpha_{p,t_e} \sigma_{\tilde{x}_m} \quad (2.80)$$

en donde $\sigma_{\tilde{x}_m}$ es el valor máximo de la desviación estándar, t_{x_m} es el instante de tiempo en el cual se produce dicho valor, mientras que el factor de pico α_{p,t_e} se debe calcular solucionando numéricamente el problema del primer sobrepaso.

A las ordenadas de los espectros estocásticos estacionarios x_e^t se les puede asociar una probabilidad de que sean superadas⁽⁴⁵⁾. En estas condiciones, una ordenada espectral x_e^{p,t_e} , correspondiente a una probabilidad p de que sea superada y a una duración t_e del movimiento sísmico fuerte, se expresa como

$$x_e^{p,t_e} = \zeta_{p,t_e} \sigma_x \quad (2.81)$$

donde el factor de pico ζ_{p,t_e} también depende de la probabilidad p . Vanmarcke, en la referencia (45), propone considerar esta dependencia modificando la ecuación (2.75) de la siguiente forma:

$$\zeta_{p,t_e} = \sqrt{2 \ln \left(t_e \frac{\theta_m}{\pi} \right) (-\ln p)^{-1}} \quad (2.82)$$

Los valores de ζ_{p,t_e} cambian bastante en estas circunstancias si se tiene en cuenta que, por ejemplo, para probabilidades p de 0.5, 0.9 y 0.99, los valores que toma $(-\ln p)^{-1}$ son 1.44, 9.49 y 99.49, respectivamente.

En el caso no estacionario, la definición de ordenadas espectrales correspondientes a una probabilidad p de que sean superadas

$$\tilde{x}_e^{p,t_e} = \alpha_{p,t_e} \alpha_{\tilde{x}_m}(t_e) \quad (2.83)$$

implica el cálculo del factor de pico α_{p,t_e} que, en estas condiciones, depende de la probabilidad⁽⁴⁵⁾.

Otro método que utiliza los espectros de respuesta, desarrollado para estructuras sobre apoyos múltiples, se describe en la referencia (20). El procedimiento está basado en los principios generales de la Teoría de las Vibraciones Aleatorias y permite incluir en el análisis el efecto de las diferencias entre el tiempo de llegada de las ondas a los distintos apoyos, el efecto de la pérdida de coherencia de las diferentes ondas sísmicas debido a su reflexión y refracción en medios heterogéneos, así como el efecto de las condiciones locales del suelo en los distintos apoyos.

2.9 OTROS MÉTODOS PARA GENERAR ESPECTROS DE RESPUESTA

En este apartado se mencionan algunas propuestas de definición de espectros, que si bien utilizan principios ya expuestos, presentan algunas variaciones en su formulación.

2.9.1. Espectro estocástico basado en el modelo sismológico de Boore

En la referencia (46) se calculan espectros de respuesta estocásticos para movimientos fuertes del terreno, valorando el contenido frecuencial del fenómeno mediante el modelo sismológico propuesto por Boore⁽⁴⁷⁾, a diferencia de propuestas anteriores, basados en el de Kanai-Tajimi, preferentemente. El modelo de Boore, se expresa como

$$A_a(f) = C S_1(f) S_2(f) S_3(f) \quad (2.84)$$

C es un factor de escala que se expresa como

$$C = \frac{R_\Phi F V}{4\pi\rho\beta_v^3} \left(\frac{1}{R} \right) \quad (2.85)$$

donde R_{Φ} expresa la forma de radiación, F mide los efectos de superficie, V tiene en cuenta el reparto de la energía en componentes horizontales, R es la distancia hipocentral, ρ mide la densidad, y β_v es la velocidad de las ondas de corte en la zona de generación del sismo.

$S_1(f)$ es el espectro de fuente, cuya expresión es

$$S_1(f) = \frac{M_0(2\pi f_c)^2}{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^2} \quad (2.86)$$

M_0 es el momento sísmico y f_c es la frecuencia esquina en la fuente.

$S_2(f)$ tiene en cuenta la amplificación del movimiento debido al fuerte contraste entre las impedancias de las capas o debido a la menor resistencia que oponen a las ondas sísmicas a medida que se aproximan a la superficie. $S_3(f)$ es el factor de atenuación. En la referencia (46) este factor se escribe como

$$S_3(f) = P(f, f_m) \exp\left(\frac{-\pi f R}{Q\beta}\right) \quad (2.87)$$

donde $P(f, f_m)$ es un filtro pasa baja que tiene en cuenta la súbita caída que exhibe el espectro de aceleración para frecuencias superiores a un valor dado f_m ; Q es el factor de atenuación, que se supone constante, a pesar que algunos estudios demuestran que depende de la frecuencia⁽⁴⁶⁾. Una expresión para el mismo es

$$P(f, f_m) = \left[1 + \left(\frac{f}{f_m}\right)^8\right]^{-1/2} \quad (2.88)$$

A fin de usar estas expresiones para predecir futuros sismos, es preciso relacionar los parámetros anteriores a una medida del sismo, como por ejemplo el momento sísmico, M_0 . Brune⁽⁴⁸⁾, sugiere

$$f_c = 4.9 \times 10^6 \beta_v \left(\frac{\Delta\sigma}{M_0}\right)^{1/3} \quad (2.89)$$

donde $\Delta\sigma$ es la caída de tensión dinámica, en tanto que f_m se puede considerar más un efecto de condiciones locales que de la fuente, por lo que se puede considerar independiente del momento sísmico.

Considerando la ecuación 2.76, se considera para la función de intensidad la sugerida por Shinozuka y Sato

$$I(t) = I_0(e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}) \quad (2.90)$$

Se puede considerar que $I(t)$ es la variación en el tiempo de la desviación standard de la aceleración media

$$I(t) = \sqrt{E[a^2(t)]} \quad (2.91)$$

Considerando $t_e = T$ y utilizando la ecuación de Parseval⁽⁴⁶⁾ se puede escribir

$$a_{rms}^2 = \frac{1}{T} \int_0^{T_d} I^2(t) dt = \frac{2}{T} \int_0^\infty A_a^2(f) df \quad (2.92)$$

donde T_d es la duración total y T es la duración efectiva, según la definición de Trifunac y Brady⁽²⁹⁾ que se incorpora al modelo seleccionando parámetros α y β apropiados. De la ecuación (2.91) se calcula I_0 . La densidad espectral de potencia del proceso $z(t)$ de ecuación 2.53 se determina como

$$S_z(f) = \frac{S_{z_0}}{T} A_a^2(f) \quad (2.93)$$

S_{z_0} es una constante que se obtiene mediante la condición

$$\int_0^\infty S_z(f) df = 1 \quad (2.94)$$

A fin de determinar los valores máximos, se considera la función $P(|\eta|, T)$, que es la probabilidad de que el valor absoluto del desplazamiento del oscilador no sobrepase el valor η , cuando está sujeto a un sismo de duración T . Esta función se calcula siguiendo los desarrollos de Rice⁽⁴⁹⁾ quien la define en términos de una función de riesgo o tasa de deterioro, que es el número de veces que se espera que el desplazamiento del oscilador cruce con pendiente positiva el nivel η en un intervalo dt , en el tiempo t , suponiendo que no hubo estos pasos antes de este instante. Usualmente el problema se resuelve en forma inversa, determinando el nivel η cuando se tiene definida la probabilidad de no excedencia P y la duración T .

Se define el *factor de pico* ζ como la relación entre el desplazamiento máximo para una dada probabilidad de excedencia y la raíz cuadrática media del desplazamiento, evaluado a lo largo de la duración efectiva

$$\zeta = \frac{\eta}{\left[\frac{1}{T} \int_0^T k(t) dt \right]^{1/2}} \quad (2.95)$$

donde $k(t)$, es la covarianza de la respuesta del oscilador, que depende del tiempo al ser un movimiento no estacionario. Con los conceptos antes expuestos, se ha calculado la respuesta de un oscilador lineal con una fracción del amortiguamiento crítico del 5%. Se toma como acción de referencia un movimiento de suelo con las siguientes características: $M = 7$, $R = 10$, $\Delta\sigma = 100$, $Q = 300$, $f_m = 7.5$ Hz, $\rho = 2.7$ gm/cm³, $\beta_v = 3.2$ km/s, $F = 2$, $V = 0.71$ y $R_\Phi = 0.63$. Las condiciones locales de suelo se toman como roca firme, o sea que $S_2(f) = 1$.

Los parámetros de la función envolvente se eligen de tal modo que la duración del movimiento, según la definición de Trifunac y Brady⁽²⁹⁾, sea de 10 segundos y el pico se produzca a los 2 segundos. Estos valores corresponden a 0.10 Hz de frecuencia esquina y 41.11 cm/s^2 de valor cuadrático medio de la aceleración (figura 2.14). El espectro empírico de Joyner y Boore usado en la figura se obtuvo mediante un análisis de regresión de 12 registros de sismos poco profundos.

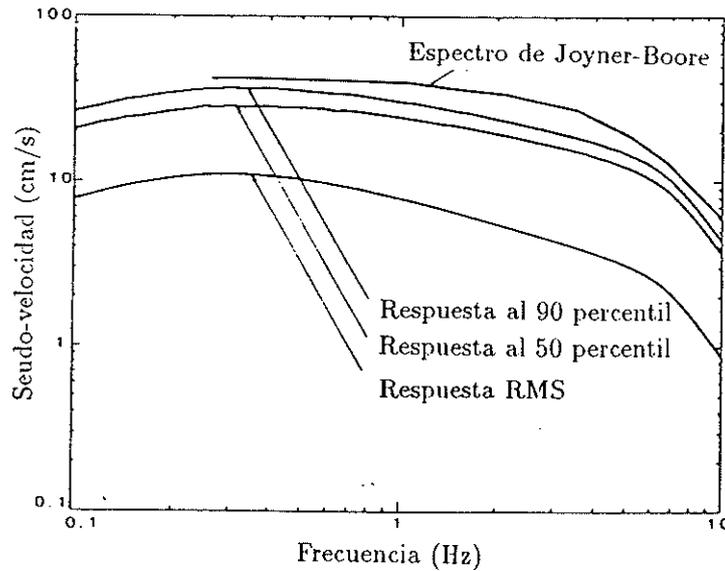


Figura 2.14 Comparación entre el espectro empírico de Joyner-Boore y los espectros de pseudo-velocidad para cuantiles del 50% y 90%.⁽⁴⁶⁾

2.9.2 Espectros basados en funciones acumulativas

En las referencias (46,50) se presenta un modelo sencillo para calcular espectros de respuesta de movimientos fuertes, donde se evalúa el contenido frecuencial mediante dos funciones. La primera, definida en el dominio del tiempo y llamada *aceleración cuadrática acumulada*, da una medida de la contribución al valor medio cuadrático de la aceleración, de las componentes entre el tiempo t y $t + dt$. Se define como

$$U(t) = \frac{\int_0^t a^2(s) ds}{\int_0^{T_1} a^2(t) dt} \quad (2.96)$$

donde T_1 es la duración del registro. La segunda, definida en el dominio de la frecuencia, denominada *amplitud espectral cuadrática acumulada*, cuantifica la contribución al valor medio cuadrático de la aceleración, de las componentes entre las frecuencias f y $f + df$; se expresa como

$$V(f) = \frac{\int_0^f A^2(g)dg}{\int_0^\infty A^2(f)df} \quad (2.97)$$

donde $A(f)$ es el espectro de amplitudes de Fourier. Estas curvas tienen la forma que se aprecia en figura 2.15. Para mayor simplificación se las aproximó mediante una recta comprendida entre el 5% y el 95% del contenido total de energía. El valor medio cuadrático de la aceleración en el dominio del tiempo se expresa como

$$\sigma_a^2 = \frac{1}{T} \int_0^{T_1} a^2(t)dt \quad (2.98)$$

mientras que en el dominio de la frecuencia se define como

$$\sigma_a^2 = \frac{2}{T} \int_0^\infty A^2(f)df \quad (2.99)$$

y tienen la forma que se indica en la figura 2.15.

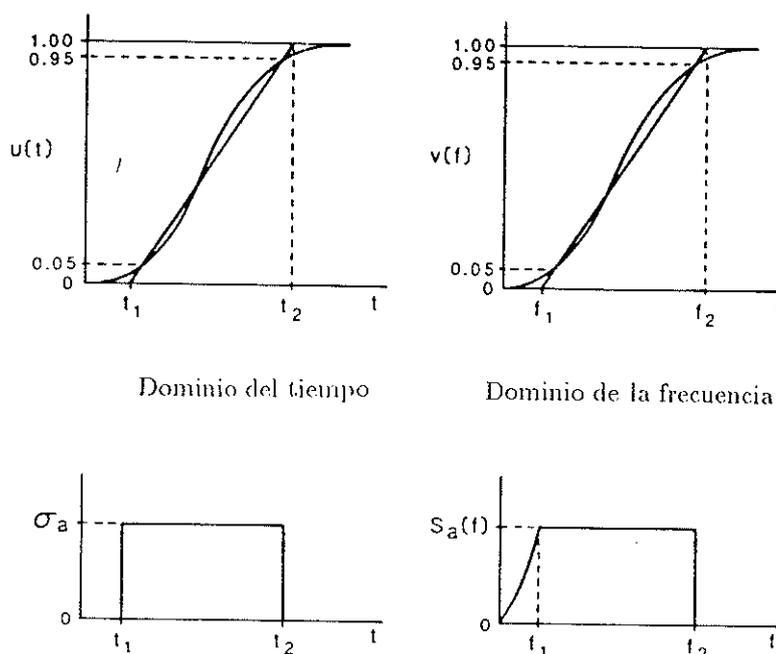


Figura 2.15 Esquema del modelo para aceleración del suelo, en el dominio del tiempo y la frecuencia.

Se supone que el modelo en el dominio de la frecuencia representa la función de densidad espectral de potencia. Haciendo uso de los conceptos desarrollados en el apartado 2.8, se calcula el valor medio cuadrático de los desplazamientos σ_x^2 . Para ello, se hace la hipótesis que el área bajo la curva de la función de densidad espectral de potencia (figura 2.8) es igual al valor medio cuadrático de la aceleración.

$$\sigma_a^2 = \int_0^{f_1} \left(\frac{f}{f_1}\right)^4 S_0 df + \int_{f_1}^{f_2} S_0 df \quad (2.100)$$

con lo que se calcula S_0

$$S_0 = \frac{5\sigma_a^2}{5f_2 - 4f_1} \quad (2.101)$$

Haciendo uso de la teoría de vibraciones aleatorias, se determina la respuesta de un oscilador de un grado de libertad. En forma concisa, el valor medio cuadrático de los desplazamientos resulta ser

$$\sigma_x^2 = \frac{S_0}{32\pi^2 \xi_0 f_0^3} I(r_1, r_2, \xi_0) \quad (2.102)$$

donde $\frac{S_0}{32\pi^2 \xi_0 f_0^3}$ es la respuesta de un oscilador a una excitación de tipo ruido blanco e $I(r_1, r_2, \xi_0)$ es una expresión que describe el efecto de la forma espectral sobre la respuesta en función de las relaciones r_1 y r_2 entre las frecuencias esquinas f_1, f_2 y la frecuencia del oscilador f_0

$$r_1 = f_1/f_0 \quad r_2 = f_2/f_0 \quad (2.103)$$

Se calcula luego el valor extremo del valor medio cuadrático del desplazamiento usando la aproximación de Cartwright y Longuet-Higgins⁽⁵¹⁾

$$x_x^t = \sqrt{2 \ln(2f_0 T)} \sigma_x \quad (2.104)$$

expresión análoga a la 2.74, donde $T = t_2 - t_1$, es la duración efectiva del sismo. Si la frecuencia de un oscilador se ubica entre las frecuencias de esquina de la aceleración del suelo, la raíz media cuadrática del desplazamiento es igual a la del ruido blanco y el valor medio cuadrático de la pseudo-velocidad de la respuesta es

$$\sigma_{v(ps)} = (2\pi f_0) \sigma_x = \sqrt{\frac{S_0}{8\xi_0 f_0}} \quad (2.105)$$

Se concluye por consiguiente, que por este procedimiento se obtienen los espectros a partir de sólo cuatro parámetros del movimiento del suelo: la raíz media cuadrática de la aceleración, la duración efectiva del movimiento y dos frecuencias de esquina que caracterizan la duración efectiva del sismo. En la figura 2.16 se muestra uno de los espectros calculados por este método, que se aplicó a dos conjuntos de registros reales del sismo de Coalinga (California), de Mayo de 1983. La comparación con un espectro obtenido de forma exacta, muestra la bondad del procedimiento.

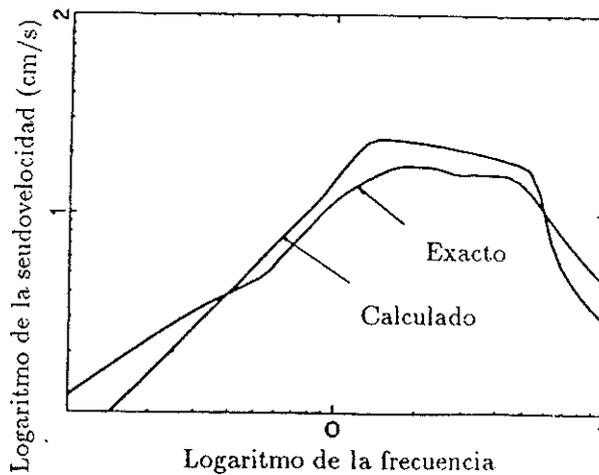


Figura 2.16 Comparación entre el método aproximado propuesto y el exacto para el sismo de Coalinga.

2.9.3 Espectros basados en el concepto de movimiento estacionario equivalente

Este método permite generar espectros de respuestas partiendo de los conceptos sobre el movimiento estacionario equivalente a un registro real desarrollado por Vanmarcke y Lai⁽⁶²⁾, y consiste en reemplazar un registro real no estacionario por una porción de un proceso Gaussiano estacionario con media nula. Haciendo uso de un criterio energético se propone reemplazar la función envolvente por la aceleración media cuadrática y una duración estacionaria equivalente s .

Este movimiento equivalente estacionario sólo precisa cuatro parámetros para ser definido; ellos pueden ser la duración equivalente s y los tres del filtro de Kanai-Tajimi: la constante (G_0), la frecuencia y el amortiguamiento del suelo en el sitio considerado (ω_g , y ν_g). En el dominio de la frecuencia se calcula la aceleración espectral esperada $E[S_a]$ mediante una integración numérica.

Utilizando los movimientos estacionarios equivalentes, es posible manejar un conjunto apreciable de registros de manera consistente, simplemente especificando la función de distribución de los cuatro parámetros del modelo o sus equivalentes.

REFERENCIAS

1. A.H. Barbat y J.M. Canet, *Estructuras Sometidas a Acciones Sísmicas*, Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, CIMNE, 2ª edición, Barcelona, 1994.
2. D. E. Hudson, "Some problems in the application of spectrum techniques to strong-motion earthquake analysis", *Bulletin of the Seismological Society of America*, **52**, 417-430, 1962.
3. W. Scott Dunbar y R. G. Charlwood, "Empirical methods for the prediction of response spectra", *Earthquake Spectra*, **7**(3), 333-353, 1991.
4. W. J. Hall y S. L. McCabe, "Current design spectra: background and limitations", en *Earthquake Hazard and the Design of Constructed Facilities in the Eastern United States*, (K. H. Jacob y C. J. Turkstra, editores), Annals of the New York Academy of Sciences, Volume 558, 222-233, 1989.
5. G. W. Housner, "Design spectrum", en *Earthquake Engineering*, (R. L. Wiegel, editor), Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 93-106, 1970.
6. R. W. Clough y J. Penzien, *Dynamics of Structures*, Second Edition, McGraw-Hill Inc., New York, 1993.
7. E. Reinoso, L.E. Perez-Rocha, A. Arciniega and M. Ordaz "Prediction of Response Spectra at any Site in Mexico City". *Proceedings 10th World Conference on Earthquake Engineering*, Madrid, **2**, 767-772, Ed. Balkema, Rotterdam, 1992
8. J. A. Canas, J. J. Egozcue, A. H. Barbat, J. Miquel Canet, E. Banda, *Peligrosidad Sísmica en Cataluña*, Monografía ME007 de la E.T.S. Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, Universidad Politécnica de Cataluña, Barcelona, 1987.
9. D. Lungu y D. Ghiocel, *Metode Probabilistice in Calculul Construcțiilor*, Editura Tehnică, București, 1982.
10. G. W. Housner, "Characteristics of strong-motion earthquakes", *Bulletin of Seismological Society of America*, **37**, 1947.
11. G. W. Housner, "Limit design of structures to resist earthquakes", *Proceedings of the First World Conference of Earthquake Engineering*, 5.1-5.12, 1956.
12. G. W. Housner, "Behaviour of structures during earthquakes", *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, **85**, 109-129, 1959.
13. N. M. Newmark y W. J. Hall, "Seismic design criteria for nuclear reactor facilities", *Proceedings 4th World Conference of Earthquake Engineering*, Santiago, Chile, **B-4**, 37-50, 1969.
14. N. M. Newmark, J. A. Blume y K. K. Kapur, "Seismic design criteria for nuclear power plants", *Journal of the Power Division*, ASCE, **99**, 287-303, 1973.
15. N. M. Newmark y W. J. Hall, *Earthquake Spectra and Design*, Earthquake Engineering Research Institute, Berkeley, California, 1982.
16. EERI, "The basics of seismic risk analysis", *Earthquake Spectra*, **5**, 675-702, 1989.
17. J.A.Blume y A.Kiremidjian, "Probabilistic procedures for peak ground motion", *Journal of the Structural Division*, ASCE, **105**(11), 2293-2311, 1979.
18. K. W. Campbell, "Engineering seismology", *Encyclopedia of Physical Science and Technology*, **5**, 145-159, 1987.
19. ATC, *Tentative Provisions for the Development of Seismic Regulations for Buildings*, Applied Technology Council, Publication 3-06, National Bureau of Standards, Publication 510, National Science Foundation, Publication 78-8, 1978.
20. H. B. Seed, C. Ugas, J. Lysmer, "Site -Dependent Spectra for Earthquake Resistant Design", Report EERC 74-12, University of California, Berkeley, 1974.

21. K. W. Campbell, "An empirical estimate of near source ground motion for a major, $m_b = 6.8$ earthquake in eastern United States", *Bulletin of the Seismological Society of America*, **76**, 1-17, 1986.
22. W. B. Joyner y D. M. Boore, "Measurement, characterization and prediction of strong ground motion", en *Earthquake Engineering and Soil Dynamics, II*, (J. L. von Thun, editor), ASCE Geotechnical Special Publication, **20**, 43-102, 1988.
23. R. K. McGuire, "Seismic structural response analysis incorporating peak response regressions on earthquake magnitude and distance", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **5**, 211-234, 1975.
24. R. K. McGuire, "Seismic ground motion parameter relations", *Journal of Geotechnical Engineering*, ASCE, **104(GT4)**, 481-490, 1978.
25. H. Akiyama, *Earthquake Resistant Limit State Design of Buildings*, University of Tokio Press, Tokio, 1985.
26. T. Minami, Y. Osawa, "Elastic-plastic response spectra for different hysteretic rules" *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **16**, 555-568, 1988.
27. C. M. Uang, V. Bertero, "Evaluation of seismic energy in structures" *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **18**, 77-90, 1990.
28. T. F. Zahrah, W. J. Hall, "Earthquake energy absorption in SDOF structures", *Journal of Structural Division*, ASCE, **110**, (8), 1757-1771, 1984.
29. M.D. Trifunac and A.G. Brady "A Study of the Duration of Strong Earthquake Ground Motion", *Bulletin of the Seismological Society of America*, **65**, 581-626, 1975.
30. A. Arias, "A measure of earthquake intensity", en *Seismic Design of nuclear power plants*, R. Hansen ed., M.I.T. Press, Cambridge, Massachusetts, 1970.
31. T. Sawada, K. Hirao, O. Tsujihara, H. Yamamoto, "Relationship between maximum amplitude ratio ($\frac{a}{v}$, $\frac{a_d}{v_d}$) and spectral parameters of earthquake ground motion", *Proceedings of the 10th World Conference on Earthquake Engineering*, 2-617, Madrid, 1992. Balkema, Rotterdam, 1992.
32. T. J. Zhu, A. C. Heidebrecht, W. K. Tso, "Effect of peak ground acceleration to velocity ratio on ductility demand of inelastic systems", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **16**, 63-79, 1988.
33. J. A. Blume, N. M. Newmark y L. H. Corning, *Design of Multistory Reinforced Concrete Buildings for Earthquake Motions*, Portland Cement Association, 1961.
34. G. H. Powell, R. Allahabadi, "Seismic Damage Prediction by Deterministic Methods: Concepts and Procedures", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **16**, 719-734, 1988.
35. Y. J. Park, A. H. S. Ang, "Mechanistic Seismic Damage Model for Reinforced Concrete", *Journal of Engineering Mechanics Division*, ASCE, **111**, (4), 722-739, 1985.
36. H. Banon, D. Veneziano, "Seismic Safety of Reinforced Concrete Members and Structures", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **10**, 179-193, 1982.
37. E. Cosenza, G. Manfredi, R. Ramasco, "The Use of Damage Functionals in Earthquake Engineering: A Comparison between Different Methods", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **22**, 855-868, 1993.
38. S. A. Mahin, V.V. Bertero, "An Evaluation of Inelastic Seismic Design Spectra", *Journal of Engineering Mechanics Division*, ASCE, **107** 1777-1799, 1981.
39. M. Paz, *Dinámica Estructural*, Editorial Reverté, S. A., 1992.
40. H. Ventsel, *Theorie des probabilités*, Edition Mir, Moscow, 1973.
41. A. H. Barbat, *The Seismic Analysis of Elevated Water Tanks Considering the Interaction Phenomena*, Tesis, Universidad Politécnica de Iași, Iași, Rumanía, 1978.
42. A. H. Barbat y A. Roca, "Stochastic prediction of seismic response spectra", *Proceed-*

- ings of the ECE/UN Seminar on Prediction of Earthquakes*, (C. S. Oliveira, editor), Laboratório Nacional de Engenharia Civil, Lisboa, Volumen 1, 313-334, 1990.
43. S. H. Crandall, "First-crossing probabilities of the linear oscillator", *Journal of Sound and Vibration*, **12**(4), 285-300, 1970.
 44. R. Damrath, *Ein Stochastischer Verfahren der Seismischen Analyse von Bauwerken mit Anwendung auf Kernkraftwerke*, Thesis, Berlin, 1974.
 45. E. H. Vanmarcke, "Structural response to earthquakes", en *Seismic Risk and Engineering Design*, (C. Lomnitz y E. Rosenblueth, editores), Elsevier Scientific Publishing Company, 287-337, Amsterdam, 1976.
 46. E. Safak, "Analytical approach to calculation of response spectra from seismological models of ground motion", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **16**, 121-134, 1988.
 47. D.M. Boore "The Prediction of Strong Ground Motion". *Proceedings NATO Advanced Studies Institute Strong Ground Motion Seismology*, Ankara, Turkey, 1990.
 48. J.N. Brune "Tectonic Stress and the Spectra of Seismic Shear Waves from Earthquakes", *Journal of Geophysical Research*, **75**, 4997 - 5009. 1970.
 49. S.O. Rice "Mathematical Analysis of Random Noise", *Bell Systems Technology Journal*, **23**, 282-332, 1944.
 50. E. Safak, C. Muelle and J. Boatwright "A Simple Model for Strong Ground Motion and Response Spectra", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **16**, 203-215. 1988.
 51. D.E. Cartwright and M.S. Longuet-Higgins "The Statistical Distribution of the Maxima of a Random Function", *Proceedings Royal Society (London)*, **A 237**, 212-223. 1956.
 52. J.S. Lin and J.Y. Tyan "Equivalent Stationary Motion and Average Response Spectra", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **14**, 267-279. 1986.



CAPÍTULO 3

ACELEROGRAMAS ARTIFICIALES NO COMPATIBLES CON UN ESPECTRO

3.1 PRIMERAS FORMULACIONES

Las primeras propuestas de modelos estocásticos de los sismos, consideraban a éstos como procesos estacionarios modulados por funciones deterministas que especifican la variación temporal de la intensidad del sismo. Se los conoce generalmente como modelos no estacionarios uniformemente modulados, y se caracterizan por tener espectros que no varían en el tiempo.

En estos primeros modelos ya tenía en claro que las principales características estadísticas de los acelerogramas registrados eran la duración, la intensidad y el contenido de frecuencia. Estos últimos son en general funciones del tiempo.

3.1.1 Ruido blanco

Las primeras simulaciones de la acción sísmica, consideradas como *ruido blanco*, sirvieron para evaluar las principales características de estructuras simples lineales, al ser sometidas a este tipo de excitación. Es en el tipo de contenido de frecuencias de este modelo donde reside su mayor debilidad pues la función de densidad espectral de potencia es constante para todo el rango de frecuencias. La densidad espectral de potencia de un ruido blanco limitado en banda es la forma más simple que puede usarse para definir esta función y se expresa como

$$G(\omega) = \begin{cases} G_0 & \text{si } 0 \leq \omega \leq \omega_0 \\ 0 & \text{si } \omega > \omega_0 \end{cases} \quad (3.1)$$

Housner⁽¹⁾, Rosenblueth^(2,3), Bycroft⁽⁴⁾ y Brady⁽⁵⁾ usaron ruido blanco para re-

alizar distintos estudios de evaluación de respuesta estructural.

Crandall et al.⁽⁶⁾, usaron ruido blanco para estudiar las distribuciones de probabilidad de los tiempos de primer sobrepaso a través de un cierto nivel prescrito, de un sistema vibratorio simple con poco amortiguamiento y diferentes condiciones iniciales.

Housner y Jennings⁽⁷⁾ demostraron que la parte central del acelerograma de un movimiento fuerte, podría ser modelizado por trozos de un proceso estacionario gaussiano, obtenido mediante el filtrado de ruido blanco a través de un filtro lineal de segundo orden (oscilador de un grado de libertad), con lo que se obtiene una función de densidad espectral no constante. Como la función de densidad espectral de potencia de un proceso estacionario y el seudoespectro de velocidades de un sistema lineal con amortiguamiento nulo se aproximan bastante, se ajustan los parámetros del modelo, caracterizados por su densidad espectral, mediante el cálculo de los seudespectros promediados de registros reales. También se usa este procedimiento en las referencias (8,9).

3.1.2 Superposición de ondas o pulsos

Housner⁽⁷⁾ simuló movimientos del terreno mediante una secuencia de pulsos de igual magnitud, pero con tiempos de ocurrencia aleatorios. Posteriormente usó la misma técnica de superposición pero con pulsos sinusoidales completos; demostró la necesidad de que tales pulsos tengan valores positivos y negativos, para obtener la forma deseada del espectro de respuesta promedio suavizado, no amortiguado. Tomó los tiempos de llegada de los pulsos aleatorios con distribución de probabilidades uniforme sobre un intervalo de tiempo fijo, lo que equivale a un proceso simple de tipo Poisson. Para determinar la distribución requerida de los períodos y amplitudes de los pulsos, ajustó la esperanza del espectro de respuesta asociado al proceso de simulación, al promedio obtenido de los espectros normalizados de movimientos reales.

Este método se basa en el hecho de que cualquier función periódica puede ser expandida en una serie de senos, (o cosenos), de la forma

$$z(t) = \sum_{j=1}^n A_j \sin(\omega_j t + \phi_j) \quad (3.2a)$$

o bien

$$z(t) = \sum_{j=1}^n A_j \cos(\omega_j t + \phi_j) \quad (3.2b)$$

donde A_j es la amplitud, ϕ_j es el ángulo de fase de la n -ésima senoide y ω_j es la frecuencia. ϕ_j son n variables aleatorias, independientes y uniformemente distribuidas en el intervalo $[0, 2\pi]$, mientras las amplitudes suelen ser calculadas en función de la densidad espectral de potencia definida para el proceso, $G_z(t)$,

tal como se describirá más adelante, evaluada en la frecuencia j correspondiente, ya que la varianza total del proceso pone en relación ambos valores:

$$\sigma_z = \sum \frac{A_j^2}{2} = \int G_z(\omega) d\omega \quad (3.2c)$$

lo cual permite calcular la amplitud de la senoide a partir de una densidad espectral discretizada por incrementos $\Delta\omega$, como

$$A_j \approx \sqrt{2G_z(\omega_j)\Delta\omega_j} \quad (3.2d)$$

Los registros modelizados por estos procedimientos estacionarios no son apropiados para simular movimientos menos intensos, o la parte final de los que tienen larga duración. Este último tipo de registro es muy importante en el estudio de licuefacción de arenas bajo ciclos de deformación. Para describir mejor estas características es necesario emplear procesos aleatorios no estacionarios.

3.1.3 Modelo de Kanai-Tajimi

Un modelo desarrollado por Kanai y Tajimi en los años sesenta ha recibido y continúa recibiendo una amplia aceptación debido a su sencillez. En este modelo se busca superar la hipótesis de densidad espectral constante, propia del ruido blanco, la cual está en contradicción con las estimaciones de densidad espectral de sismos reales. Kanai y Tajimi proponen estimar la densidad espectral de un sismo como la correspondiente a un filtro de segundo orden, $z(t)$:

$$z(t) = 2\nu\omega\dot{x} + \omega^2 x \quad (3.3)$$

donde x es la respuesta a un ruido blanco $n(t)$ de densidad espectral G_0 :

$$\ddot{x} + 2\nu_g\omega_g\dot{x} + \omega_g^2 x = n(t) \quad (3.4)$$

De esta manera se tendría:

$$G_z(\omega) = G_0 \frac{1 + 4\nu_g^2 \omega_g^2 \omega^2}{(\omega_g^2 - \omega^2)^2 + 4\nu_g^2 \omega_g^2 \omega^2} \quad (3.5)$$

En principio, los parámetros ν_g y ω_g se han asociado tradicionalmente al suelo del sitio en cuestión. Sin embargo, en términos generales, se encuentran determinados por todos los factores que contribuyen a la modificación de las frecuencias dominantes del evento, tales como la magnitud, la distancia epicentral y la geología local. Tales parámetros suelen ser estimados a partir de acelerogramas, por medio de la identificación de los primeros momentos espectrales del registro con los del modelo. El momento espectral de orden j está definido por:

$$\lambda_j = \int_0^{\infty} \omega^j G(\omega) d\omega \quad (3.6)$$

En la referencia (69) se han determinado los parámetros a partir de los tres primeros momentos espectrales ($j = 0, 1, 2$) para un largo número de sismos, con el fin de analizar los factores que determinan a los parámetros ν_g y ω_g . Recientemente, se ha propuesto utilizar un número mayor de momentos, $3n$, $n = 1, 2, 3$, con el fin de captar en el modelo compuesto

$$G_z(\omega) = \sum_{k=1}^n \frac{1 + 4\nu_k^2 \omega_k^2 \omega^2}{(\omega_k^2 - \omega^2)^2 + 4\nu_k^2 \omega_k^2 \omega^2} G_k \quad (3.7)$$

otras frecuencias importantes. La figura 3.1 muestra la homologación del sismo de Taft con el modelo de Kanai - Tajimi convencional⁽⁶⁹⁾

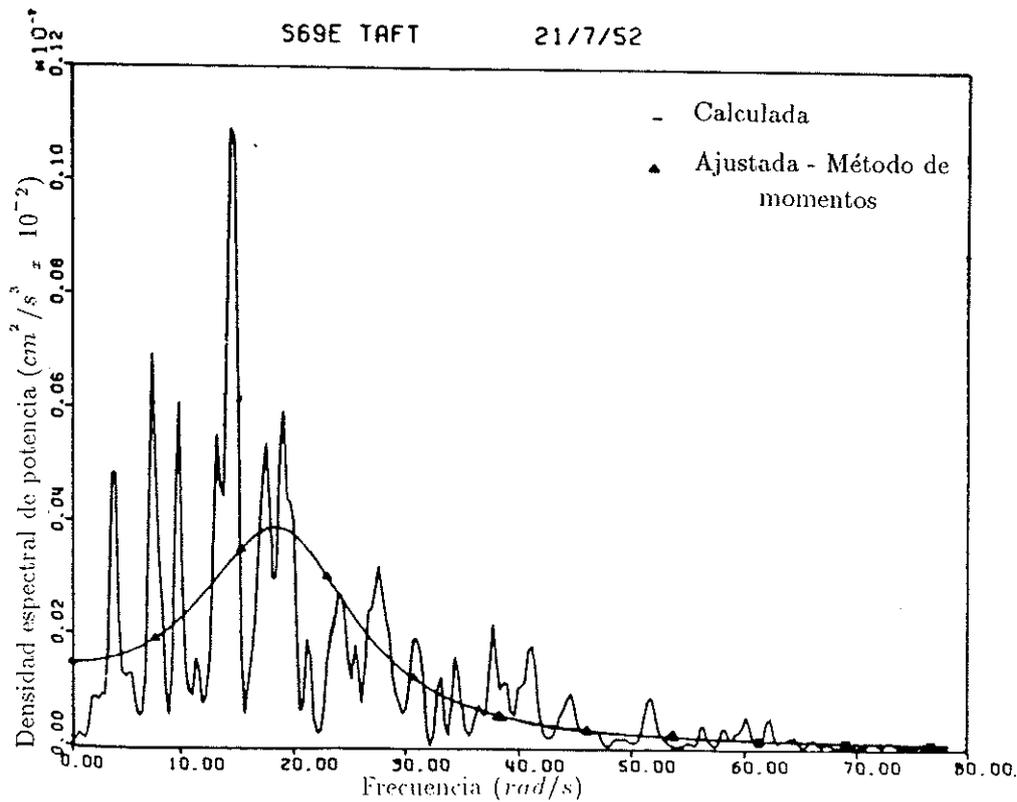


Figura 3.1 Modelo de Kanai-Tajimi. ⁽⁶⁹⁾

3.2 RUIDO BLANCO FILTRADO Y MODULADO

El modo más simple de obtener un proceso no estacionario $a(t)$, es multiplicar un proceso estacionario $z(t)$, por una función envolvente dependiente del tiempo $I(t)$ (ecuación 2.53).

$$a(t) = I(t)z(t) \quad (3.8)$$

Housner, Jennings y Tsai⁽¹¹⁾ modelan el sismo considerando la no estacionariedad aplicando una función envolvente a trozos del proceso aleatorio gaussiano usado para modelar la parte central de sismos intensos que se explica en la referencia (7), y que consiste básicamente en ruido blanco filtrado.

En las referencias (12,13) se propone un proceso de Poisson filtrado, modificado por una función envolvente, para modelizar los movimientos esperados durante sismos intensos.

Han sido varias las propuestas para la función envolvente, también llamada de intensidad, siendo la ventana rectangular la más simple. Se pueden citar, por ejemplo, la propuesta por Damrath⁽¹⁴⁾

$$I(t) = \frac{t}{t_0} e^{\frac{1-t}{t_0}} \quad (3.9)$$

y por Shinozuka y Sato⁽¹⁵⁾

$$I(t) = H(t)(e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}) \quad (3.10)$$

donde α y β son constantes y $H(t)$ es la función escalón de Heaviside. Esta ecuación fue aplicada a un proceso gaussiano obtenido mediante el filtrado de ruido blanco. El filtro consistió en un sistema amortiguado de un grado de libertad con período natural no amortiguado igual a 0.5 seg y una fracción de amortiguamiento crítico de 0.3.

En la referencia (16) se propone una función de modulación de amplitudes normalizada con respecto a la duración e intensidad del sismo, de tal modo de facilitar el cálculo de los valores estadísticos de los parámetros que la describen, ya que estos dependen fuertemente de la duración de los sismos. De no ser así, el tratamiento estadístico de un conjunto de registros diferentes, es impracticable. La función de modulación de intensidades $I(t)$ de la ecuación (3.8) se expresa como

$$I(t) = Z \sin^\alpha \left[\pi \left(\frac{t}{t_d} \right)^\beta \right] \quad (3.11)$$

donde α y β son parámetros que determinan la forma y t_d la duración de la parte fuerte del movimiento, obtenido según Trifunac y Brady⁽¹⁷⁾ y que queda definido como el tiempo requerido para que se acumule la energía comprendida entre el

5% y el 95% de la intensidad de Arias. Para determinar los valores de α y β , se utiliza la función esperanza de energía acumulada de la historia de aceleraciones de un sismo intenso, que se define como

$$E[W(t)] = \int_0^t E[a^2(\tau)]d\tau \approx \int_0^t a^2(\tau)d\tau \quad (3.12)$$

en la que $E[a^2(\tau)]$ es la aceleración media cuadrática que se espera en el tiempo τ y debido a la aproximación considerada, puede ser calculada considerando un solo registro. Ya que la amplitud relativa entre la función de modulación y el proceso estocástico estacionario $z(t)$ es arbitrario, es posible considerar que $E[z^2(\tau)] = 1$, por lo que

$$\sigma_a^2(t) = I^2(t)E[z^2(t)] = I^2(t) = \sigma^2(t) \quad (3.13)$$

donde σ es la raíz media cuadrática de la aceleración generada. La aceleración del suelo $a(t)$ simulada se define en el dominio de la frecuencia por la función de densidad espectral de potencia de área unitaria normalizada $S_{z_n}(\omega)$.

$$E[W_N(t_n)] = \frac{\int_0^{t_n} E[a^2(\tau)]d\tau}{\int_{t_d} E[a^2(\tau)]d\tau} \approx \frac{\int_0^{t_n} \sin^{2\alpha}(\pi\tau^\beta)d\tau}{\int_0^1 \sin^{2\alpha}(\pi\tau^\beta)d\tau} \quad (3.14)$$

donde t_n es la duración normalizada del movimiento ($t_n = t/t_d$) y $0 \leq t_n \leq 1$. La ecuación (3.14) representa la esperanza de la función de energía acumulada normalizada de las historias de aceleraciones, entre el 5% y el 95% de la intensidad de Arias. Los parámetros α y β se determinan mediante el ajuste de la función envolvente a la energía cuadrática media normalizada de registros reales, mediante mínimos cuadrados.

La raíz cuadrática media estacionaria de la aceleración, normalizada con respecto a la duración de la parte fuerte del terremoto, se define como

$$\sigma_d = \frac{\int_{t_d} a^2(\tau)d\tau}{t_d} \quad (3.15)$$

por lo que la energía total esperada del proceso se obtendrá multiplicando la ecuación 3.15 por la duración t_d . Se obtiene entonces

$$I^2(t) = \sigma^2(t) \approx \sigma_d^2 \frac{\sin^{2\alpha}[\pi(t/t_d)^\beta]}{\int_0^1 \sin^{2\alpha} \pi\tau^\beta d\tau} \quad (3.16)$$

El cuadrado de la función de modulación, obtenido con 3.16, contiene el 90% del total de la energía. Se puede usar un factor de escala para ajustar la intensidad

de $I(t)$ teniendo en cuenta el 10% de la energía descartada al comienzo y fin del registro. La forma final de la función de modulación, luego de algunos ajustes, es la que expresa la ecuación 3.11, donde

$$Z = \sqrt{\frac{10/9}{\int_0^1 \sin^{2\alpha}(\pi\tau^\beta) d\tau}} \sigma_d \quad (3.17)$$

Los modelos que usan ruido blanco filtrado, con amplitud modulada por una función envolvente determinista, sobreestiman la respuesta espectral para períodos más grandes que la duración efectiva del sismo⁽¹⁸⁾. Se hace la hipótesis en este tipo de modelo, que la función envolvente varía en el tiempo mucho más lentamente que la señal filtrada, de tal modo que el contenido de frecuencia de la señal no se afecta. Esta aproximación introduce un error en el modelo para las frecuencias bajas que puede ser significativo en estructuras cuyos periodos naturales sean más grandes que la duración de fuente del sismo. En la ecuación (3.8) y para una función típica $I(t)$, el contenido de frecuencia de $a(t)$ no puede ser igual al de $z(t)$ para todas las frecuencias. Esto se puede comprobar calculando el espectro de amplitudes de Fourier de $a(t)$, $A_a(\omega)$, que es igual a la convolución de la transformada de Fourier $F_I(\omega)$ de $I(t)$, y la transformada de Fourier $F_z(\omega)$ de $z(t)$, dada por:

$$A_a(\omega) = 2\pi \int F_I(\omega_1) F_z(\omega - \omega_1) d\omega_1 \quad (3.18)$$

La hipótesis de que $A_a(\omega) = A_z(\omega)$ sería válida sólo si $|F_I(\omega)| = \delta(\omega)$, donde $\delta(\omega)$ es la función Delta. Para una función envolvente de duración limitada, $|F_I(\omega)|$ no es una función Delta, a pesar que presenta un pico para frecuencia cero. Más aún, por razones físicas se requiere que $A_a(0) = 0$, sin embargo, $A_a(0)$ es distinto de cero, (ecuación 3.18) aún cuando $A_z(0)$ sí lo es. Esto correspondería a una carga estática ficticia, que no existe en realidad.

Este problema se puede eliminar si es que el orden de filtrado y multiplicación por la envolvente son intercambiados. Esto último corresponde a considerar un *disparo de escopeta*. En este caso se multiplica primero el ruido blanco por la función de intensidad y luego se procede al filtrado.

Ruiz y Penzien⁽¹⁹⁾ en 1969 usaron para la simulación de movimientos sísmicos, un modelo estocástico lineal, que consistía en el filtrado no estacionario a un ruido de escopeta. En el capítulo 4 se dan detalles del mismo.

Analíticamente se expresa este modo alternativo de definir la acción sísmica de la siguiente manera:

$$a(t) = \int_0^t h_z(t - \tau) s(\tau) d\tau \quad (3.19)$$

donde el tiro de escopeta $s(\tau)$ está definido como $s(\tau) = I(\tau)n(\tau)$. En esta expresión, $I(\tau)$ es la función envolvente, $n(\tau)$ es el ruido blanco, y $h_z(t - \tau)$

es la respuesta al impulso unitario del suelo. En el dominio de la frecuencia la ecuación (3.19) se convierte en:

$$A_a(\omega) = A_z(\omega)A_s(\omega) \quad (3.20)$$

donde $A_s(\omega)$ es el espectro de amplitudes de Fourier del tiro de escopeta. Se desprende de ecuación (3.20) que ya que por definición $A_z(0) = 0$ y $A_s(0)$ no es infinito, entonces $A_a(0) = 0$. Para comprobar que $A_a(\omega) = A_z(\omega)$ no solamente para la frecuencia cero, sino que también para todas las frecuencias, es suficiente demostrar que el disparo de escopeta tiene un espectro de amplitud constante en la media. La transformada de Fourier $F_s(\omega)$ de $s(t)$ es:

$$F_s(\omega) = \int_0^{\infty} I(t)n(t) e^{-i\omega t} dt \quad (3.21)$$

y el espectro de la amplitud, $A_s(\omega)$, está dado por

$$\begin{aligned} A_s^2(\omega) &= F_s(\omega)F_s^*(-\omega) \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} I(t_1)I(t_2) n(t_1) n(t_2) e^{-i\omega(t_1-t_2)} dt_1 dt_2 \end{aligned} \quad (3.22)$$

donde * denota compleja conjugada. El valor esperado del conjunto $E[A_s^2(\omega)]$ de $A_s^2(\omega)$ puede ser calculado tomando el promedio del conjunto de un solo lado, el positivo. Ya que la integración es una operación lineal, la media puede ser obtenida sobre el integrando, en el que la única variable aleatoria es $n(t)$. Como $n(t)$ es un ruido blanco, entonces

$$E[n(t_1)n(t_2)] = \sigma_n^2 \delta(t_1 - t_2) \quad (3.23)$$

donde $\delta(t_1 - t_2) = 1$ para $t_1 = t_2$ y cero para los demás casos. Por lo tanto, si se pone $t_1 = t_2$, la integral doble se reduce a una integral simple y se transforma en

$$E[A_s^2(\omega)] = \sigma_n^2 \int_0^{\infty} I^2(t) dt \quad (3.24)$$

Esta expresión es independiente de la frecuencia, por lo tanto es constante. Si el ruido blanco cumple con la condición

$$\sigma_n^2 = \left[\int_0^{\infty} I^2(t) dt \right]^{-1} \quad (3.25)$$

$E[A_s(\omega)]$, puede ser hecho igual a la unidad.

Se han realizado una serie de pruebas con ambos tipos de modelos y se llegó a la conclusión que para sismos de envergadura (magnitud mayor que 7), la duración efectiva es generalmente más grande que el rango de períodos de interés en la ingeniería, por lo que el error no tiene mayor importancia. Pero para sismos de mediana intensidad y duración más corta, el uso de modelos tipo ruido blanco uniformemente modulados sobreestima la respuesta espectral en un factor de dos, por lo que es recomendable usar modelos tipo tiro de escopeta filtrado.

3.3 SUPERPOSICIÓN DE ONDAS ARMÓNICAS MODULADAS

Si al proceso estacionario definido por las ecuaciones (3.2.a y 3.2.b) se lo multiplica por una función de intensidad, se obtendrá un proceso no estacionario en amplitud, que ha sido usado por muchos investigadores⁽²⁰⁾. Como ejemplo, se puede citar al propuesto por Gasparini y Vanmarcke⁽²¹⁾ y que se expresa como

$$a(t) = I(t) \sum A_n \sin(\omega_n t + \phi_n) \quad (3.26)$$

donde $I(t)$ es la función de intensidad, ϕ_n son variables aleatorias independientes uniformemente distribuidos entre 0 y 2π . A_n son amplitudes y ω_n las frecuencias. En el capítulo 5 se detalla este procedimiento.

3.4 ESPECTROS EVOLUTIVOS

La no estacionariedad del movimiento producido por un sismo se manifiesta en el dominio de las amplitudes y en el de las frecuencias. Lo primero implica una variación en el tiempo del valor cuadrático medio del proceso y en el segundo caso, la variación de la función de densidad espectral de potencia en función del mismo parámetro. Una de las maneras de tener en cuenta esta importante característica de los movimientos producidos por terremotos para su simulación, es mediante el uso de *espectros evolutivos*⁽²²⁻²⁵⁾, concepto introducido por Priestley⁽²⁶⁾ y que se aplica a los procesos no estacionarios conocidos como *procesos oscilatorios*. Un proceso aleatorio $X(t)$ se dice oscilatorio si existe una familia de funciones deterministas "oscilatorias" $\Phi(t, f)$ de la forma⁽²⁷⁾

$$\Phi(t, f) = A(t, f) e^{i2\pi ft} \quad (3.27)$$

donde $A(t, f)$ es una función de modulación determinista que varía lentamente en el tiempo, de tal modo que $X(t)$ pueda expresarse como

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(t, f) e^{i2\pi ft} dZ(f) \quad (3.28)$$

donde $Z(f)$ es un proceso aleatorio ortogonal, siendo sus incrementos $dZ(f)$, $dZ(f')$ variables estocásticas no correlacionadas. La variación lenta en el tiempo

de $A(t, f)$ se especifica considerando que la transformada de Fourier de $A(t, f)$ está concentrada en la región de la frecuencia nula, o sea

$$A(t, f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi\theta t} dH(f, \theta) \quad (3.29)$$

$|dH(f, \theta)|$ tiene un máximo absoluto en $\theta = 0$. La condición impuesta a $A(t, f)$ tiene como fin preservar el sentido físico de f como una frecuencia, un concepto fundamental en procesos no estacionarios⁽²⁸⁾. Aplicando los conceptos de un análisis armónico generalizado, un proceso estacionario $\tilde{X}(t)$ puede representarse como una suma de ondas senoidales y cosenoidales, con distintas frecuencias ($e^{i2\pi ft}$) y amplitudes y ángulos de fases aleatorios ($dZ(f)$) de la siguiente manera:

$$\tilde{X}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi ft} dZ(f) \quad (3.30)$$

por lo que el concepto de frecuencia tiene el significado convencional asociado con las funciones armónicas.

Para el proceso no estacionario $X(t)$, las funciones $e^{i2\pi ft}$ no pueden usarse como elementos básicos, ya que son intrínsecamente estacionarias. Por lo tanto, para no perder de vista el sentido de frecuencia en el caso de un proceso no estacionario se deben considerar otras funciones como elementos básicos, que tengan una forma oscilatoria aunque no sean estacionarias. Éstas son las definidas en ecuación (3.27) con la restricción expresada mediante la ecuación (3.29).

La expresión (3.28) puede interpretarse como el límite de una "suma" de senos y cosenos con diferentes frecuencias, y amplitudes aleatorias que varían en el tiempo ($A(t, f)dZ(f)$). El valor cuadrático medio a través de todas las realizaciones del proceso se define como

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} G(f, t) df \quad (3.31)$$

donde $G(f, t)$ es la función de densidad espectral de potencia evolutiva, y describe la distribución en frecuencias del valor medio cuadrático en la vecindad de un tiempo t ("potencia local").

En el capítulo 4 se detalla el modelo propuesto por Shinozuka⁽²⁹⁾ que emplea los conceptos expuestos. La figura 3.2 muestra la estimación de la densidad espectral evolutiva calculada en la referencia (30) para uno de los registros del sismo de México de 1985.

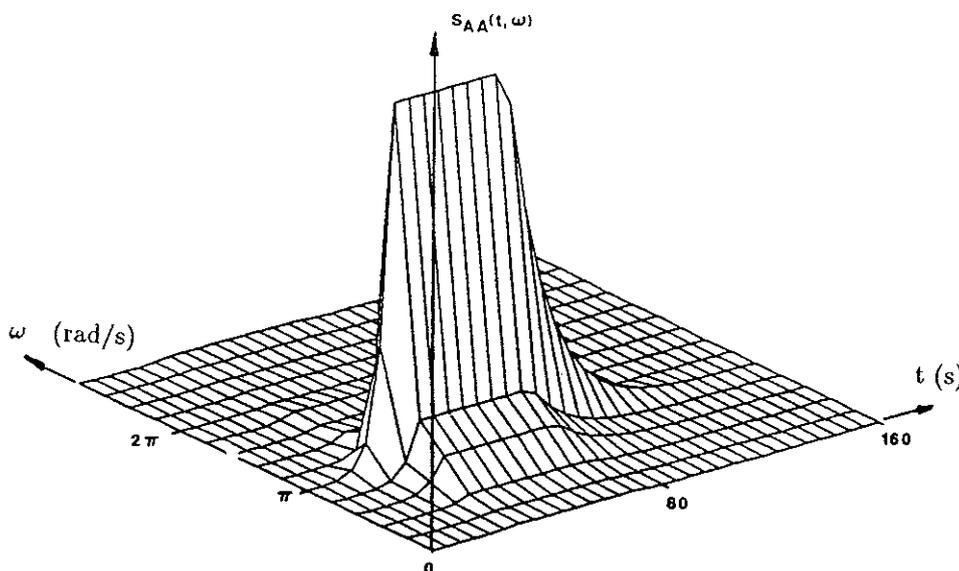


Figura 3.2 Espectro evolutivo del sismo de México.⁽³⁰⁾

3.5 MODELOS SISMOLÓGICOS

En los últimos tiempos han sido desarrollados modelos basados en propiedades físicas de la fuente y del medio en el que se propaga el movimiento^(31,32,33,34). Estos modelos permiten la incorporación directa de parámetros sísmicos tales como magnitud, distancia focal, dimensiones de la falla, atenuación y velocidad de la onda de corte.

Los buenos resultados obtenidos para estimar características del movimiento del suelo han sido comprobados por varios investigadores^(35,36,37).

Los modelos sismológicos tienen al menos tres ventajas sobre los empíricos:

- 1) Ayudan a comprender la mecánica de los mecanismos que originan sismos.
- 2) Pueden ser usados para predecir futuros terremotos.
- 3) Sus resultados pueden ser extrapolados para los casos en que no hay datos disponibles.

La simulación de procesos que tengan en cuenta las características físicas de los movimientos sísmicos resultan complicados, debido al gran número de parámetros implicados.

El modelo sismológico de tipo espectro radiado fue desarrollado primeramente por Brune⁽³¹⁾, y está basado en las propiedades físicas de la fuente y el medio en que se propaga el movimiento del terreno. Aparte de las ventajas enumeradas antes y comunes a todos los modelos sismológicos, los modelos de espectro radiado, dados en el dominio de la frecuencia, presentan una forma conveniente para el cálculo de la respuesta estructural, usando la teoría de vi-

braciones aleatorias.

De entre los distintos modelos propuestos, el de Boore⁽³⁸⁾, explicado en el apartado 2.7.1, ofrece amplias posibilidades de aplicación en el campo de la ingeniería. Como se ha dicho allí, este modelo relaciona el espectro de amplitudes de Fourier $A_a(f)$ de un registro de sismo fuerte con diferentes parámetros físicos que se derivan de consideraciones sismológicas y geomecánicas.

Varias modificaciones sucesivas de este modelo han sido propuestas recientemente por Carli y Faravelli⁽³⁹⁻⁴¹⁾, con el fin de incluir el carácter no estacionario de la frecuencia en el modelo. En efecto, si la densidad espectral del modelo estacionario puede estimarse a partir del espectro de Fourier por

$$G(\omega) = \frac{(CS_1(\omega)S_2(\omega)S_3(\omega))^2}{\pi T_r} \quad (3.32)$$

donde T_r es el tiempo de ruptura de la falla, para el caso no estacionario el espectro evolutivo puede calcularse según lo descrito anteriormente:

$$G(\omega t) = |A(\omega t)|^2 G(\omega) \quad (3.33)$$

donde la función $A(\omega t)$ debe ser calculada a partir de un registro dado. La figura (3.3) muestra el resultado de la aplicación de este método al sismo de Sturmo, Italia⁽³⁹⁾.

En la más reciente de las modificaciones mencionadas⁽⁴¹⁾ se propone que la amplitud del espectro evolutivo de Fourier sea calculada como

$$A_a(f|f_s(t)) = C\phi(f_s(t))S_1(f|f_s(t))S_2(f)S_3(f) \quad (3.34)$$

en la cual $f_s(t)$ define la variación de la frecuencia durante la duración del sismo, mientras que $\phi(f_s(t))$ es una función responsable de mantener constante la energía en el tiempo, de suerte que la variación de la misma sólo resida en la función de intensidad $I(t)$ que se aplique sobre el registro obtenido.

Alternativamente, en la referencia (42) se propone un modelo estocástico que utiliza nueve parámetros para describir las principales características de los movimientos del suelo, incluida la no estacionariedad tanto en amplitud como en el contenido de frecuencia. Mediante análisis numéricos se comprobó que esta última característica influye en la respuesta de estructuras tanto con comportamiento lineal como no lineal.

La aceleración del suelo $a(t)$ en un determinado sitio, es tratado como una realización específica de un proceso estocástico, descrito por un conjunto de ecuaciones diferenciales lineales

$$\ddot{y} + 2\xi_g(t)\omega_g(t)\dot{y} + \omega_g^2(t)y = f_g(t)n(t) \quad (3.35)$$

$$\ddot{a} + 2\omega_c\dot{a} + \omega_c^2 a = \ddot{y} \quad (3.36)$$

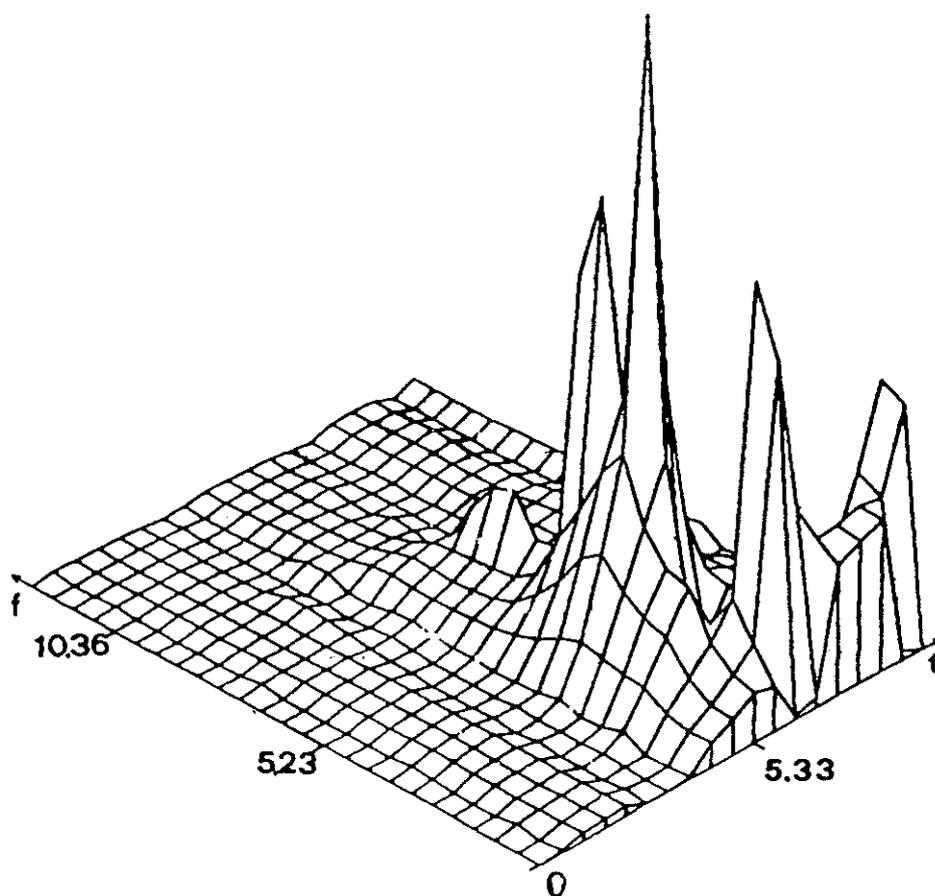


Figura 3.3 Espectro evolutivo - Modelo sísmológico. ⁽³⁹⁾

donde $\xi_g(t)$, $\omega_g(t)$ y $f_g(t)$ son coeficientes determinísticos que varían con el tiempo y $n(t)$ es un ruido blanco Gaussiano de media nula. La ecuación (3.36) corresponde a un modelo de fuente de Brune, y describe correctamente el comportamiento de las amplitudes espectrales de baja frecuencia, sin afectar sustancialmente las amplitudes espectrales del modelo dado por ecuación (3.35), a frecuencias superiores a $2\omega_c$. La frecuencia esquina ω_c puede ser calculada a partir de los mecanismos focales. Para los casos de procesos de banda ancha, comunes en la ingeniería, $f_g(t)$ adopta la forma $f_g(t) = 2\omega_g(t) \sqrt{\alpha_g(t)} I_g(t)$ donde $\alpha_g = \xi_g(t)\omega_g(t)$ e $I_g(t)$ es la intensidad del movimiento. $I_g(t)$ es modelizada adecuadamente por la función envolvente

$$I_g(t) = I_{\max} \tau^\beta \exp[\beta(1 - \tau)] \quad (3.37)$$

donde $\tau = (t + t_0)/(t_{\max} + t_0)$. El parámetro I_{\max} es la máxima intensidad de la aceleración del suelo y t_{\max} el tiempo en que se produce la primera aceleración

no nula, antes del instante de disparo, introducido para proveer flexibilidad en el ajuste de los datos y no es necesario en el caso de usar el modelo con fines de predicción. El parámetro β es una medida adimensional de la duración del acelerograma.

Las funciones paramétricas $\omega_g(t)$ y $\alpha_g(t)$ son modelizadas adecuadamente por

$$\omega_g(t, \bar{\theta}) = \omega_r + (\omega_p - \omega_r) \left(\frac{\omega_s - \omega_r}{\omega_p - \omega_r} \right)^\tau \quad (3.38)$$

donde ω_p , ω_s y ω_r pueden ser interpretadas aproximadamente como las frecuencias dominantes de las ondas primarias, secundarias y superficiales presentes en el movimiento de suelo, y

$$\alpha_g(t, \bar{\theta}) = \omega_p \xi_p + (\omega_r \xi_r - \omega_p \xi_p) t / t_d \quad (3.39)$$

donde ξ_p y ξ_r miden los rangos de frecuencia alrededor de ω_p y ω_r respectivamente, que contribuyen en forma significativa al proceso y t_d es la duración del acelerograma. Se determina el conjunto óptimo de parámetros $\bar{\theta} = [I, t, t_d, \omega_p, \omega_s, \omega_r, \xi_p, \xi_r]$ que se ajuste a un acelerograma objetivo, mediante el método bayesiano⁽⁴³⁾.

Este modelo puede ser usado para obtener la respuesta de osciladores lineales y no lineales, haciendo uso de una formulación basada en la teoría de las vibraciones estocásticas. Para coeficientes $I_g(t)$, $\omega_g(t)$ y $\alpha_g(t)$ que varían lentamente con el tiempo, el valor cuadrático medio de la respuesta en desplazamiento de un sistema lineal equivalente $\tilde{x}(t)$ se puede obtener en forma aproximada por la siguiente ecuación diferencial de primer orden⁽⁴³⁾:

$$\ddot{\tilde{x}}(t) + 2\xi_0\omega_0\dot{\tilde{x}}(t) = \frac{I_g^2(t)}{2\omega^2(t)} R_g[\omega(t), \xi_0\omega_0; \bar{\theta}_g(t)] \quad (3.40)$$

donde $\bar{\theta}_g(t)$ es función de $\omega_g(t)$ y de $\alpha_g(t)$ y depende, como $R_g(t)$, de la estructura del espectro de potencia evolutivo de la aceleración del suelo. El espectro mencionado se define como

$$S_N(\omega; \bar{\theta}_g(t)) = S(\omega; \theta_g(t)) / I_g^2(t) \quad (3.41)$$

donde $S(\omega; \bar{\theta}_g(t))$ es el espectro de potencia evolutivo del modelo. Para osciladores poco amortiguados se tiene

$$R_g[\omega(t), \xi_0\omega_0; \bar{\theta}_g(t)] \rightarrow S_N(\omega(t); \bar{\theta}_g(t)) \quad (3.42)$$

De este estudio se concluye que la respuesta, tanto lineal como no lineal, es fuertemente influenciada por el contenido no estacionario de frecuencia de la acción sísmica.

3.6 SERIES TEMPORALES

La introducción de los modelos ARMA en el campo de la ingeniería data de unos veinte años, siendo Liu uno de sus precursores⁽⁴⁴⁾ y fueron usados por numerosos investigadores para describir el movimiento de suelo, en estudios de respuesta estructural e identificación de sistemas^(45,46). En la referencia (47) se propone un modelo tipo ARMA para simular movimientos estocásticos del suelo por acción de un sismo. Un proceso estocástico estacionario muestreado a intervalos regulares puede ser representado por un modelo ARMA de la siguiente manera:

$$z_k - \alpha_1 z_{k-1} - \dots - \alpha_p z_{k-p} = n_k - \beta_1 n_{k-1} - \dots - \beta_q n_{k-q} \quad (3.43)$$

donde z_k es el proceso estacionario y n_k es una secuencia de ruido blanco con media nula y desviación estándar finita $E[n^2]$, y α_p y β_q son los parámetros del modelo correspondiente a los procesos AR y MA respectivamente. Los términos a la izquierda de la igualdad corresponden a la parte autorregresiva de orden p y los términos a la derecha, corresponden a la parte de media móvil de orden q . Si las series temporales se obtienen mediante mediciones, es posible determinar un conjunto óptimo de parámetros y del orden del modelo. Distintas técnicas computacionales se han propuesto para tal fin, siendo el más utilizado el propuesto por Akaike, conocido como el criterio de la predicción final del error (FPE); según el cual el modelo óptimo es el que da el menor valor de tal indicador⁽⁴⁸⁾.

Otra manera de evaluar el modelo es calcular la autocorrelación de la secuencia residual, que debería ser no correlacionada o sea un ruido blanco, si es que el modelo se ajusta bien al conjunto de datos. Hay procedimientos estadísticos que evalúan la blancura de la secuencia residual⁽⁴⁸⁾. Es preferible tener la menor cantidad de parámetros posibles ya que la varianza crece con el número de éstos.

Ólafsson hace el estudio considerando la hipótesis que la aceleración del terreno no puede ser tratada como una muestra de un proceso estocástico evolutivo. Es muy común tomar la aceleración del suelo $a(t)$, como un proceso Gaussiano estacionario modulado en amplitud con una función del tiempo (ecuación 2.53)

$$a(t) = I(t)z(t) \quad (3.44)$$

donde $z(t)$ es el proceso Gaussiano de media nula que se obtiene mediante la ecuación (3.43) e $I(t)$ es la función de modulación, para la que se propone la siguiente expresión:

$$I(t) = \gamma t^\mu \exp(-\lambda t) \quad (3.45)$$

donde γ , μ y λ son parámetros. Se obtiene la respuesta linealizada de un oscilador de segundo orden como

$$\tilde{x}_k = \alpha_{1s} \tilde{x}_{k-1} + \alpha_{2s} \tilde{x}_{k-2} + a_k \quad (3.46)$$

donde α_{1s} y α_{2s} son los AR parámetros del sistema estructural, relacionados a la frecuencia natural ω_s y la relación de amortiguamiento crítico ξ_s de la estructura mediante las siguientes expresiones:

$$\alpha_{1s} = 2 \exp[-\xi_s \omega_s \Delta t] \cos(\omega_s \sqrt{1 - \xi_s^2} \Delta t) \quad (3.47)$$

$$\alpha_{2s} = -\exp(-2\xi_s \omega_s \Delta t) \quad (3.48)$$

En la referencia (49) se modela el movimiento del terreno debido a la acción sísmica utilizando una serie temporal no estacionaria, autorregresiva, de coeficientes variables en el tiempo y suavizados previamente completando y extendiendo una propuesta anterior de Akaike⁽⁶⁰⁾.

3.7 SUPERPOSICIÓN DE FUNCIONES

Los modelos clásicos que utilizan procesos estocásticos estacionarios suponen una distribución uniforme para los ángulos de fases en un análisis espectral de Fourier. Sin embargo muchos estudios⁽⁶¹⁻⁶⁴⁾ demuestran que no es así, por lo que este parámetro debe ser considerado, junto con la distribución de amplitudes, en la generación de acelerogramas artificiales.

En la referencia (55) se propone un método para la generación de registros artificiales consistente en la superposición de una función simple $f(t)$, cuya definición en los dominios del tiempo y la frecuencia presenta una clara relación, que permite controlar de modo fehaciente las características de no estacionariedad tanto en amplitudes como en contenido de frecuencias, tomando en cuenta la influencia que sobre éstas últimas tienen parámetros como el momento sísmico, la velocidad de ruptura, la distancia epicentral, etc. La transformada de Fourier de la función $f(t)$ es

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-i\omega t) dt \quad (3.49)$$

$$F(\omega) = A(\omega) \exp(-i\phi(\omega)) \quad (3.50)$$

donde $A(\omega)$ es la amplitud de $F(\omega)$, considerada constante dentro de los límites de la banda de frecuencias considerada, mientras que $\phi(\omega)$ es el ángulo de fase o retardo de $F(\omega)$, supuesto lineal en tal rango.

Se obtiene entonces el movimiento de suelo $a(t)$ como una sumatoria de la función $f_n(t)$

$$a(t) = \sum_{n=1}^N f_n(t) \quad (3.51)$$

donde $f_n(t)$ se define como

$$f_n(t) = 2A_n \pi^{-1} (t - t_{g_n} \sin[\omega_{c_n}(t - t_{g_n})]) \cos[\omega_{0_n} t - \phi_{0_n} - \omega_{c_n} t_{g_n}] \quad (3.52)$$

donde A_n es la amplitud de Fourier de la función $f(t)$; t_{g_n} es la pendiente de la función lineal que se supone para el ángulo de fase $\phi(\omega)$ y ϕ_{0_n} es el valor inicial de tal ángulo. ω_{0_n} y ω_{c_n} son la frecuencia central y el semiancho de banda del rango de frecuencias considerado, respectivamente. $A_n(t)$ representa la intensidad de $f_n(t)$; el parámetro t_{g_n} corresponde a la posición central en el eje del tiempo, con respecto a la cual se produce la fluctuación de $f_n(t)$; el valor de fase inicial ϕ_{0_n} determina la forma geométrica de la función; ω_{0_n} es la frecuencia predominante de $f_n(t)$ y ω_{c_n} es la frecuencia relacionada con la envolvente de $f_n(t)$, ya que como describe la distribución de la amplitud en el eje de las frecuencias, controla el modo en que $f_n(t)$ se desarrolla en el eje de los tiempos.

En el dominio de la frecuencia se expresa $g(t)$ como

$$G(\omega) = \sum_{n=1}^N F_n(\omega) \quad (3.53)$$

$$G(\omega) = \sum_{n=1}^N A_n P_{\omega c}(\omega - \omega_{0_n}) \exp\left[i[-\phi_{0_n} - t_{g_n}(\omega - \omega_{0_n} + \omega_{c_n})] P_{\omega c}(\omega - \omega_{0_n})\right] \quad (3.54)$$

La no estacionariedad se define en este caso mediante el parámetro t_{g_n} . A pesar que $f_n(t)$ no es exactamente una función causal, situando la distribución de t_g lo suficientemente lejos del origen del eje de los tiempos, la función $g(t)$ puede ser aproximadamente causal.

Debido a las incertidumbres en las condiciones geológicas de la fuente y del sitio y a la aleatoriedad de la ruptura en la falla, es primordial describir en forma estocástica los parámetros de la ecuación (3.46). Éstos deberían ser descritos por una función de densidad de probabilidad cruzada $p(A, \omega_0, \omega_c, \phi_0, t_g)$ relacionada con el mecanismo físico del fenómeno. Como es difícil expresar esta función en forma racional, se hace la siguiente hipótesis:

$$p(A, \omega_0, \omega_c, \phi_0, t_g) = \bar{p}(\omega_0) p(A/\omega_0) p(\omega_c/\omega_0) p(\phi_0/\omega_0) \bar{p}(t_g/\omega_0) \quad (3.55)$$

donde $\bar{p}(\cdot)$ es la función de distribución del argumento y $p(\cdot/\cdot)$ significa probabilidad condicional.

3.8 MODELOS QUE USAN LA FUNCIÓN DE GREEN

En la referencia (56) se propone un modelo teórico concebido a los fines de predecir el movimiento del suelo debido a un sismo en un determinado sitio y que tiene en cuenta el comportamiento de la falla y la propagación de las ondas desde la fuente al sitio. El modo de propagación de las ondas sísmicas depende principalmente del fenómeno de amplificación que se opera en la capa superficial del suelo y la múltiple dispersión en la heterogénea estructura de la tierra. Para modelizar este comportamiento se considera el semiespacio compuesto por dos capas, una superficial, de espesor finito, que descansa sobre una segunda capa, considerada como un medio semiinfinito aleatorio. Los parámetros del modelo son la relación entre la distancia epicentral y la profundidad focal; la relación de impedancia entre la primera y segunda capa; el valor de Q ; dimensiones de la falla; el ángulo de inclinación; la dirección del deslizamiento; el ángulo entre la dirección de propagación de ruptura de la superficie de falla y la dirección del sitio de registro.

Las componentes horizontal y vertical de la fuerza de deslizamiento Q_0 son respectivamente, Q_h y Q_v . Se calculan las funciones de Green para estas fuerzas en forma exacta, en función de la relación entre la distancia epicentral y la profundidad focal, para cada uno de los puntos en que se ha discretizado el plano de falla, llamados focos elementales. Estos puntos se ubican sobre la línea central de tal plano.

El mecanismo de ruptura en la superficie de falla, es descrito considerando el comportamiento dinámico de un sistema masa-resorte sometido a un proceso de caída de tensión en tal superficie⁽⁵⁷⁾, y las expresiones incluyen parámetros tales como el número de Mach, la velocidad de ruptura, la velocidad de las ondas de corte, la rigidez al corte, la caída de presión efectiva, y la relación de amortiguamiento de la superficie de falla. El movimiento del suelo se expresa entonces mediante la convolución de las funciones de Green que modelan el comportamiento del medio de propagación de las ondas y las características del sitio considerado, con la función de fuente que describe el mecanismo de ruptura en la falla. El movimiento se obtiene como resultado de una sumatoria de las ondas radiadas en cada instante en que el frente de ruptura alcanza un foco elemental. La relación entre la distancia epicentral y la profundidad focal y la relación de impedancia entre las dos capas son parámetros críticos en la formulación de modelos predictivos⁽⁵⁶⁾.

En la referencia (58) se propone el método de la función de Green empírica que en esencia consiste en construir un sismo intenso como la superposición de sismos pequeños registrados en la vecindad del lugar donde se supone se habrá de producir el intenso. Por lo tanto es primordial establecer para la región de estudio relaciones apropiadas entre los parámetros de foco, las que son calculadas a partir de los datos de sismos registrados en el lugar^(56,58).

En el caso de que los sismos en determinado sitio tengan características espec-

trales correspondientes al modelo llamado ω^{-2} , se puede expresar el movimiento del suelo con una expresión del tipo

$$a(t) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{r}{r_{ij}} F(t - t_{ij}) u_{ij}(t) \quad (3.56)$$

donde $F(t)$ es una función que depende, entre otros, de parámetros tales como la raíz cúbica de la relación entre momentos sísmicos de eventos pequeños y grandes, distancias entre el sitio en estudio e hipocentro, entre el sitio y la ubicación de la ij -ésima subfalla, la velocidad de las ondas de corte, la velocidad de ruptura, el instante en que comienza el movimiento intenso, etc. Mientras tanto, $u(t)$ es la función de Green, que se construye a partir de los registros de sismos menores, los que se corrigen teniendo en cuenta, mediante relaciones adecuadas, las diferencias en la caída de tensiones, los efectos de atenuación debido al medio de propagación, la frecuencia de corte superior del espectro de aceleraciones y los modos de radiación de las ondas existentes

Este método es apropiado cuando existen muchos datos de buena calidad disponibles para determinar la función de Green, pero no presenta las mismas ventajas en el caso de contar con pocos registros. En tal caso se usan sismos de menor magnitud simulados estocásticamente, usando modelos espectrales sismológicos, como funciones semi-empíricas de Green que luego se suman de manera desfasada, de la misma forma que en el método empírico de Green. Como modelo sismológico puede usarse el de Boore^(37,38), adecuado para la simulación de sismos de campo lejano, pues no incluye las características físicas de la fuente y éstas influyen grandemente en los movimientos del terreno en sitios ubicados cerca del hipocentro. A pesar de que este último método tiene la desventaja de no incluir en sí mismo los efectos de la propagación y las condiciones locales, éstos se pueden contemplar mediante la adecuación de los factores de atenuación obtenidos para la región, a condiciones geotécnicas locales, determinadas por medio de estudios empíricos.

3.9 MODELOS DE ESPECTRO INSTANTÁNEO

Un proceso estocástico estacionario $z(u)$ puede ser definido por la siguiente representación espectral⁽⁴¹⁾.

$$z(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega z} dZ(\omega) \quad (3.57)$$

donde ω es la frecuencia angular y $Z(\omega)$ es un proceso aleatorio que tiene incrementos ortogonales. Para todo par $\omega_1 \neq \omega_2$

$$E[dZ(\omega_1)dZ(\omega_2)] = 0 \quad (3.58)$$

La función de autocorrelación $R_z(\tau)$ del proceso estacionario es

$$R_z(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} S_z(\omega) d\omega \quad (3.59)$$

donde $S_z(\omega)$ es la función de densidad espectral de potencia.

Si se realiza un cambio de escala no lineal en el eje u , con respecto a la nueva variable tiempo t , de acuerdo a la expresión $u = u(t)$, el proceso obtenido $\tilde{a}(t) = z(u(t))$ no será estacionario en frecuencia. Se define el espectro de potencia instantáneo del proceso $\tilde{a}(t)$ como⁽⁵⁹⁾

$$S_{\tilde{a}}(t, \omega) = \frac{1}{u'(t)} S_z\left(\frac{\omega}{u'(t)}\right) \quad (3.60)$$

y relaciona la densidad espectral de potencia de un proceso $\tilde{a}(t)$ no estacionario con el de un proceso estacionario $z(u)$ asociado a $\tilde{a}(t)$. El proceso $z(u)$ se puede obtener de $\tilde{a}(t)$ cuando está definida la función de modulación no lineal $u(t)$. La derivada de esta función $u'(t)$ es responsable sólo de una modulación de la frecuencia del proceso estocástico $\tilde{a}(t)$ por lo que la condición de no estacionariedad para esta modulación de frecuencia no implica una representación espectral evolutiva para $\tilde{a}(t)$.

Se pueden suponer para el espectro estacionario $S_z(\omega)$ diferentes expresiones analíticas, tales como la del modelo Kanai-Tajimi⁽⁶⁰⁾ o el modelo de Boore⁽³⁸⁾, obteniéndose en todos los casos una aproximación no estacionaria debido a la modulación en el tiempo de la frecuencia del modelo espectral seleccionado. Se debe hacer notar que la aplicación de la ecuación (3.60) deja la varianza del proceso $z(u)$ inalterada. Esto significa que cuando $z(u)$ es un ruido blanco filtrado, la superposición de una función de intensidad $I(t)$ tiene el efecto de una modulación de la amplitud del proceso no estacionario $\tilde{a}(t)$, por lo que se obtiene la aceleración sísmica, modulada en amplitud y frecuencia, como

$$a(t) = I(t)\tilde{a}(t) = I(t)z(u(t)) \quad (3.61)$$

Es posible utilizar este procedimiento si se dispone de por lo menos un registro $r(t)$ del sitio en estudio, que contenga la mayoría de las características del lugar. Se puede analizar $r(t)$ para obtener la función de modulación de amplitud $I(t)$, la función de modulación de frecuencia $u(t)$, y la forma del espectro de potencia $S_z(\omega)$ del proceso estacionario asociado.

La función $u(t)$ obedece generalmente a la siguiente relación:

$$u(t) = \frac{v(t)}{v'(t_0)} \quad (3.62)$$

donde $v(t)$ es una relación que da el valor medio de los puntos de ordenada nula en el acelerograma en función del tiempo; t_0 es el instante en el que comienza la parte

más intensa del acelerograma, y puede ser estimada con una simple inspección visual de la historia de aceleraciones. Las condiciones que debe cumplir $v(t)$, son

- a) Ser diferenciable.
- b) Ser una función creciente con el tiempo. Se supone generalmente una expresión polinomial del tipo

$$v(t) = C_1 t + C_2 t^2 + C_3 t^3 \quad (3.63)$$

donde las constantes C_1 , C_2 y C_3 , se calculan por una aproximación numérica de $v(t)$ con el número acumulado de cruces por cero del registro real $r(t)$ considerado. Se puede descomponer el registro original en un número n de señales, tales que

$$r(t) = \sum_{i=1}^n r_i(t) \quad (3.64)$$

donde cada $r_i(t)$ se obtiene filtrando el espectro de Fourier de amplitudes de $r(t)$ en un rango de frecuencias especificado y volviendo al dominio del tiempo. Con esta descomposición el procedimiento de identificación se puede repetir fácilmente en los diferentes $r_i(t)$ lo que permite una caracterización más exacta en el tiempo y la frecuencia de la señal de aceleración, aunque requiere un esfuerzo numérico mayor. Generalmente, la exactitud deseada se logra usando series de dos términos en la ecuación (3.56).

La figura 3.4 muestra un acelerograma generado de acuerdo a este modelo, compatible con el registro del sismo de Ventura (1971). Puede observarse la variación de la frecuencia a lo largo del evento, y la buena concordancia obtenida entre el modelo y el registro dado.

3.10 MODELOS QUE CONSIDERAN LA VARIACIÓN ESPACIAL DE LAS ONDAS

El estudio de la variación no sólo en el tiempo, sino también en el espacio, del movimiento del suelo es importante en el caso de estructuras de grandes dimensiones (tuberías, túneles, puentes, presas, etc). Este tipo de construcciones pueden ser dañadas por las deformaciones y movimientos diferenciales, causados por las ondas volmicas y de superficie producidas por los sismos.

Harada⁽⁶¹⁾, Tamura, Winterstain, Haresh-Shah⁽⁶²⁾, Deodatis y Theoharis⁽⁶³⁾, Loh⁽⁶⁴⁾ y Loh y Yeh⁽⁶⁵⁾ entre otros han propuesto modelos para describir este aspecto de los movimientos sísmicos.

Un modelo estocástico para describir la variación espacial de los desplazamientos del suelo se describe en la referencia (64). Basándose en los mecanismos de propagación de las ondas, se deducen expresiones analíticas del coeficiente de correlación espacial de los desplazamientos del suelo

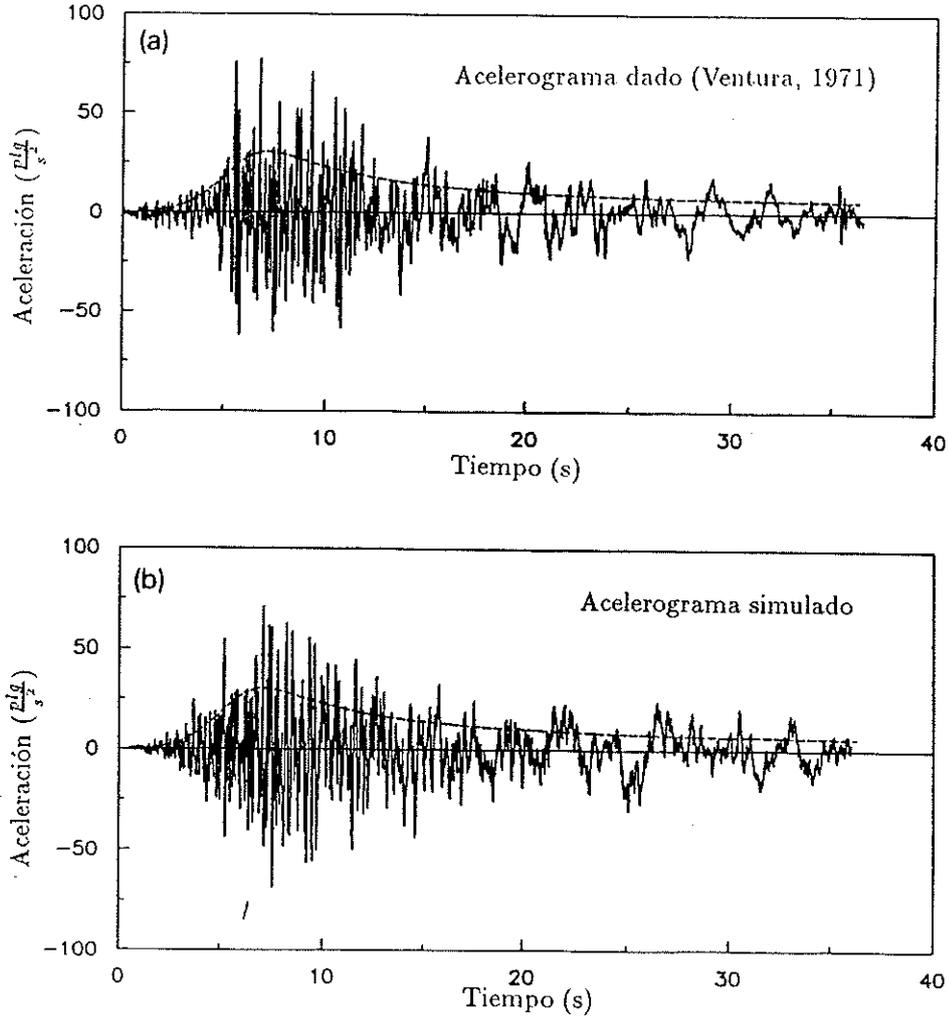


Figura 3.4 Acelerograma generado por medio del espectro instantáneo.⁽⁵⁹⁾

$$\rho_{ij}(\tau, D_{ij})|_{\tau=0} = \begin{cases} * \exp(-\tilde{a} |D_{ij}|) \\ * \exp(-\tilde{a} |D_{ij}|^2) \\ * \exp(-\tilde{a} |D_{ij}|) \cos 2\pi k_0 D_{ij} \\ * \exp(-\tilde{a} |D_{ij}|^2) \cos 2\pi k_0 D_{ij} \end{cases} \quad (3.65)$$

donde D_{ij} es la separación entre las estaciones i y j y \tilde{a} y k_0 son parámetros que controlan la forma de correlación espacial. Estos dos parámetros se evalúan a partir de los datos calculados y dependen de la dirección de propagación de la

onda, los tipos de onda y la magnitud y localización del sismo. La ecuación (3.65) toma en cuenta que el coeficiente de correlación entre los puntos de coordenadas x y $x + D$, puede atenuarse a medida que la distancia crece. La función de correlación $R(D_{ij})$ de varianza A^2 y media nula, se deriva de (3.65) y tiene la siguiente forma:

$$R(D_{ij}) = A^2 \exp(-\tilde{a} | D_{ij} |) \cos 2\pi k_0 D_{ij} \quad (3.66)$$

El espectro de número de onda del movimiento del suelo se puede obtener tomando la transformada de Fourier en el espacio de la coordenadas r , utilizando la relación de Wiener- Khintchine y considerando la variación espacial de las ondas sísmicas

$$\begin{aligned} S_g(\kappa) &= \int_{-\infty}^{\infty} R(r) e^{i2\pi\kappa r} dr \\ &= 2\tilde{a}A^2 \left[\frac{1}{\tilde{a}^2 + 4\pi^2(k + k_0)^2} + \frac{1}{\tilde{a}^2 + 4\pi^2(k - k_0)^2} \right] \end{aligned} \quad (3.67)$$

donde κ es el número de onda.

El desarrollo anterior puede efectuarse también en el dominio de la frecuencia. La aceleración $\ddot{a}_1(t)$ en el punto 1 y la aceleración $\ddot{a}_2(t)$ en el punto 2 se puede describir por su densidad espectral cruzada $C(\omega, \xi)$. La expresión general para la covarianza con un retardo espacial $\bar{\xi}$, está dada por

$$C(\omega, \bar{\xi}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} P(\omega, \bar{\kappa}) \exp(-i\bar{\kappa}\bar{\xi}) d\bar{\kappa} \quad (3.68)$$

donde $P(\omega, \bar{\kappa})$ es el espectro de frecuencia-número de onda y $C(\omega, \bar{\xi})$ es la función de densidad espectral cruzada.

Cuando el tiempo de retardo es nulo, se expresa la función de covarianza $c(\bar{\xi})$ como

$$c(\bar{\xi}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C(\omega, \bar{\xi}) d\omega \quad (3.69)$$

La coherencia y el coeficiente de correlación se definen como

$$\gamma(\omega, \bar{\xi}) = | C(\omega, \bar{\xi} | / C(\omega, \bar{0}) \quad (3.70)$$

$$\rho(\bar{\xi}) = c(\bar{\xi}) / c(\bar{0}) \quad (3.71)$$

Se pueden encontrar diferentes expresiones matemáticas para describir la coherencia⁽⁶⁴⁾. Para el estudio en el dominio de la frecuencia de la variación espacial de las ondas sísmicas, dicha coherencia puede expresarse como

$$\gamma(\omega, \bar{\xi}) = \begin{cases} \exp[-\alpha_1 |\xi|] \\ \exp[-\alpha_1 |\xi|](1 + \alpha_1 |\xi| + \alpha_1 |\xi|^2) \\ \exp[-(\alpha_1 \xi)^2] \\ \exp[-(\alpha_1 + \alpha_2 \omega |\xi|)] \end{cases} \quad (3.72)$$

donde $\bar{\xi}$ es la distancia de separación entre dos puntos y α_1 es una constante no negativa que describe el grado de correlación; así, $\alpha_1 = 0$ corresponde a una correlación perfecta y $\alpha_1 = \infty$, indica ausencia de correlación. Las tres primeras formas de la ecuación (3.72) son independientes de la frecuencia y las diferencias de fase entre dos puntos no se evalúan a través del cálculo de $\gamma(\omega, \bar{\xi})$. Haciendo la hipótesis de que las ondas tienen una dirección dominante, la diferencia de fase debido a la separación $\bar{\xi}$ se puede expresar como $\exp(i\omega\bar{\xi}/V)$, donde V es la velocidad de propagación de la onda en esta dirección. Por consiguiente, la función de densidad espectral cruzada $C(\omega, \bar{\xi})$, se puede expresar como

$$C(\omega, \bar{\xi}) = S_0(\omega)\gamma(\omega, \bar{\xi}) \exp\left(i\omega\frac{\bar{\xi}}{V}\right) \quad (3.73)$$

donde $\gamma(\omega, \bar{\xi})$ está dada por ecuación (3.64), V es la velocidad de propagación de la onda dominante, $S_0(\omega)$ es la función de densidad espectral de potencia común a todas las estaciones y la parte exponencial representa la diferencia de fase entre dos estaciones, causada por la propagación de la onda dominante.

Posteriormente, en la referencia (47) y tomando como base los conceptos antes expuestos, se desarrolla un modelo estocástico para el estudio y predicción de los movimientos diferenciales del terreno, que tiene en cuenta las características de la fuente, la atenuación de ondas, y la correlación espacial. Para considerar la variación espacial de las ondas, se considera un campo estocástico homogéneo y estacionario, y para el cual la función de correlación cruzada se define como

$$R_{12}(\xi, \tau) = \lim_{\substack{T \rightarrow \infty \\ S \rightarrow \infty}} \frac{1}{2\pi ST} \int_{-T}^T \int_S U_1(\mathbf{x}, t) U_2(\mathbf{x} + \xi, t + \tau) dS(\mathbf{x}) dt \quad (3.74)$$

donde $dS = dx dy dz$, el vector ξ representa la distancia entre dos puntos, U_1 y U_2 son desplazamientos del terreno y τ es el tiempo de retardo. Tomando la transformada de Fourier de esta función de correlación con respecto a la separación espacial ξ y al tiempo de retardo, se obtiene el espectro de frecuencia-número de onda $P(\kappa, \omega)$.

La expresión general para la covarianza en términos del espacio de retardo ξ y el espectro de frecuencia-número de ondas es la expresión dada por ecuación (3.73). Este espectro describe importantes propiedades de un registro que varía

en el espacio tales como la rapidez y el azimut de la onda plana que se ajusta al campo de ondas registrado.

La coherencia se determina, para una frecuencia dada, mediante la expresión

$$\gamma_{ij}^2(f) = \frac{|S_{ij}(f)|^2}{S_i(f)S_j(f)} \quad (3.75)$$

donde $S_i(f)$, $S_j(f)$ son las densidades de los registros en los acelerógrafos i y j respectivamente y $S_{ij}(f)$ es la función de densidad espectral cruzada que se calcula usando la ventana de Tukey.

El espectro cruzado dado por ecuación (3.68), puede expresarse también como

$$C(\mathbf{r}, f) = \int_A P(\boldsymbol{\kappa}, f) \exp[-2\pi i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] d\mathbf{k} \quad (3.76)$$

donde A es el área para la que $P(\boldsymbol{\kappa}, f) \neq 0$. Si se normaliza la integral de tal modo que para cualquier $P(\boldsymbol{\kappa}, f)$, se tenga $C(0, f) = 1$, entonces el resultado para cualquier separación ξ , representa la coherencia entre esos dos puntos. La magnitud del vector propagación cambiará con la frecuencia mientras la dirección se mantiene aproximadamente constante, por lo que no debería haber pérdida de coherencia a lo largo del frente de onda.

Analizando los desplazamientos diferenciales que se producen durante un sismo, éstos pueden ser explicados parcialmente como una consecuencia del desfase de las ondas de período largo que se propagan entre dos estaciones. El desplazamiento relativo $U_D(\xi, t)$ entre dos puntos x_1 y x_2 durante un sismo, se puede expresar como

$$U_D(\xi, t) = U_1(x_1, t) - U_2(x_2, t) \quad (3.77)$$

donde $\xi = |x_1 - x_2|$ es la distancia entre dos puntos 1 y 2. La función de densidad espectral de potencia de $U_D(\xi, t)$ se expresa como

$$S_{U_D}(\xi, \omega) = S_{U_1U_1}(\omega) + S_{U_2U_2}(\omega) - 2\Re[S_{U_1U_2}(\xi, \omega)] \quad (3.78)$$

donde $S_{U_1U_1}(\omega)$ y $S_{U_2U_2}(\omega)$ son los espectros de potencia de los desplazamientos en los puntos x_1 y x_2 , respectivamente, y $\Re[S_{U_1U_2}(\xi, \omega)]$ es la parte real del espectro de potencia cruzado. Si se considera que el espectro de potencia de la deformación en cada estación, $S_{UU}(\omega)$ no varía mientras la onda se propaga con decreciente grado de correlación en el espectro cruzado $S_{U_1U_2}(\xi, \omega)$, la ecuación (3.78) puede expresarse como

$$S_{U_D}(\xi, \omega) = S_{U_1U_1}(\omega) \left[1 + \frac{S_{U_2U_2}(\omega)}{S_{U_1U_1}(\omega)} - 2\Re[R(\xi, \omega)] \right] \quad (3.79)$$

donde $R(\xi, \omega)$ es el espectro cruzado normalizado.

El modelo matemático del espectro local $S_{UU}(\omega)$ puede definirse de modo análogo a la expresión (3.65), de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} S_{UU}(\omega) &= C S_0(\omega, \omega_c) P(\omega, \omega_m) [e^{-\omega R/QV}] \\ &= C \left[\frac{1}{1 + (\omega/\omega_c)^2} \right]^2 \left[\frac{1}{1 + (\omega/\omega_m)^8} \right] [e^{-\omega R/QV}] \end{aligned} \quad (3.80)$$

donde $S_0(\omega, \omega_c)$ es el espectro de fuente con frecuencia esquina ω_c y $P(\omega, \omega_m)$ es un filtro de corte para altas frecuencias, ya que los espectros de desplazamientos muestran una brusca caída por encima de una cierta frecuencia de corte ω_m . C es una constante que es función del modo de radiación, de la amplificación en campo libre y de la función de fuente. V es la velocidad de las ondas de corte y Q el factor de atenuación. Los términos exponenciales toman en consideración la atenuación de la amplitud de las ondas sísmicas. Para tener en cuenta las características del lugar se puede modificar la expresión anterior

$$S_{UU}(\omega) = C S_0(\omega, \omega_c) P(\omega, \omega_m) [A_j(\omega)]^2 |TF_j(\omega)|^2 \quad (3.81)$$

donde $A_j(\omega)$ describe los efectos de atenuación de las ondas y $|TF_j(\omega)|$ los efectos locales del suelo. Se puede considerar que $|TF_j|$ es el factor de amplificación para el suelo propuesto por Roesset⁽⁶⁶⁾. El espectro cruzado normalizado $R(\xi, \omega)$ se expresa como

$$R(\xi, \omega) = \exp \left[-\alpha \left(\frac{\omega |\xi|}{2\pi V} \right) \right] \exp \left[i \frac{\omega \xi}{V} \right] \quad (3.82)$$

donde V es la velocidad de fase de la onda dominante. La expresión (3.74) decrece de forma exponencial, a medida que la distancia entre dos puntos aumenta. La variable α varía linealmente con ω/V , que es el número de onda del movimiento.

Con la hipótesis de un campo estacionario, es posible usar la expresión de la coherencia espacial dado por la ecuación (3.67), para identificar el parámetro α .

El espacio paramétrico β usado en la identificación de los parámetros se define como

$$\beta = [C, \omega_c, \omega_m, H, G_s, G_r, \rho_r, \rho_s, \eta_s, \eta_r]$$

donde H es la profundidad de la capa de suelo, G_s es su módulo de corte, ρ_s la densidad del suelo, η_s el amortiguamiento del suelo y el subíndice r se refiere a la roca.

Basado en la expresión (3.81) es posible definir la relación de espectros entre dos estaciones como

$$\frac{S_{U_2U_2}(\omega)}{S_{U_1U_1}(\omega)} = \frac{|TF_2(\omega)|^2}{|TF_1(\omega)|^2} \exp\left[-\frac{\omega\xi}{VQ}\right] \quad (3.83)$$

donde ξ es la separación entre los dos puntos. Esta relación puede cambiar de forma como resultado de la amplificación local en el sitio y el uso de funciones de dispersión geométrica distintas.

Cuando la onda llega a la capa de suelo superficial, lleva en sí las características de la fuente, del paso a través de las capas profundas, de la atenuación de la amplitud, cambios de fase y características locales del sitio. Estas últimas tienen gran influencia en los movimientos superficiales del suelo. La función de transferencia de las capas superficiales del terreno puede ser calculada como

$$|TF(\omega)|^2 = \frac{S_{UU}(\omega)}{S_0(\omega)} \quad (3.84)$$

El valor medio cuadrático de los desplazamientos relativos puede entonces expresarse en la forma

$$\sigma_{UD} = \left[2 \int_0^\infty [S_{UU}(\omega) - \Re[S_{U_1U_2}(\xi, \omega)]] d\omega \right]^{1/2} \quad (3.85)$$

Los estudios realizados permiten concluir que la velocidad de propagación es el parámetro más sensible en este modelo estocástico para desplazamientos diferenciales.

3.11 SIMULACIÓN ESPACIAL MEDIANTE ESPECTROS EVOLUTIVOS

En este apartado se explica el modelo propuesto por Shinozuka⁽²⁹⁾, basada en el concepto de los espectros evolutivos. Esta técnica se ha desarrollado como una extensión del método de representación espectral, desarrollado originalmente por el mismo investigador. Intenta mejorar las propuestas basadas en procesos ARMA, que si bien tienen en cuenta la naturaleza multidimensional y multivariable de los sismos, tienen la limitación de que el movimiento del suelo es tratado como un proceso estocástico cuando se considera su variabilidad en el tiempo, o como un campo estocástico cuando se considera su variabilidad espacial.

3.11.1 Ondas univariadas, n-dimensionales estocásticas

Se considera la siguiente onda espacial estocástica n-dimensional:

$$y_0(x^*) = \int_{-\infty}^{\infty} A(x^*, \kappa^*) e^{i\kappa^* x^*} dZ(\kappa^*) \quad (3.86)$$

donde $x^* = [t, x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ es un vector de dimensión $(n + 1)$ que contiene la variable tiempo (t) y n variables espaciales (x'_i), y $\kappa^* = [\omega, \kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n]^T$, es también un vector $(n + 1)$ -dimensional, que contiene la frecuencia (ω), en correspondencia con la variable tiempo y n números de onda (κ'_i), en correspondencia con las n variables espaciales. $A(x^*, \kappa^*)$ es una función de modulación, $dZ(\kappa^*)$ representa un incremento ortogonal e $y_0(x^*)$ es una onda estocástica "oscilatoria" en el sentido de la definición de Priestley.

El valor medio cuadrático de la onda oscilatoria estocástica es

$$E[y_0^2(x^*)] = \int_{-\infty}^{\infty} |A(x^*, \kappa^*)|^2 dF(\kappa^*) \quad (3.87)$$

donde $dF(\kappa^*) = E[dZ(\kappa^*)]^2$

Introduciendo el espectro evolutivo de potencia de dimensión $n + 1$, con la función

$$dF^0(x^*, \kappa^*) = |A(x^*, \kappa^*)|^2 dF(\kappa^*) \quad (3.88)$$

se definen los contenidos no homogéneos y no estacionarios.

Se puede escribir (3.88) como:

$$dF^0(x^*, \kappa^*) = f^0(x^*, \kappa^*) d\kappa^* = |A(x^*, \kappa^*)|^2 f(\kappa^*) d\kappa^* \quad (3.89)$$

si $f(\kappa^*)$ existe tal que

$$dF(\kappa^*) = f(\kappa^*) d\kappa^* \quad (3.90)$$

Si es válida (3.90), se define la función de autocorrelación como:

$$R_{y_0 y_0}(x^* + \xi^*, x^*) = \int_{-\infty}^{\infty} A(x^* + \xi^*, \kappa^*) A(x^*, \kappa^*) e^{i\xi^* \kappa^*} f(\kappa^*) d\kappa^* \quad (3.91)$$

donde se define el vector de separación ξ^* como

$$\xi^* = [\tau \xi_1 \xi_2 \dots \xi_n]^T \quad (3.92)$$

Se hace notar que si es posible definir el espectro evolutivo como en (3.89), se puede calcular la función de autocorrelación con (3.91), lo que reporta grandes ventajas ya que lo que se puede calcular con más facilidad es el espectro evolutivo y no la función de autocorrelación.

Se puede simular la onda estocástica $y_0(x^*)$, de la siguiente manera, conforme $N_1, N_2, \dots, N_n \rightarrow \infty$ simultáneamente y se considera una onda estocástica cuadrante simétrica, en término de las variables espaciales.

$$\begin{aligned}
 y(x^*) = & \sqrt{2} \sum_{m=1}^{N_t} \sum_{l_1=1}^{N_1} \sum_{l_2=1}^{N_2} \dots \sum_{l_n=1}^{N_n} \sum_{I_1=1, I_i=\pm 1}^{i=2,3,\dots,n} \\
 & \times \sqrt{2A^2(t, x_1, x_2, \dots, x_n, \omega_m, \kappa_{1l_1}, \kappa_{2l_2}, \dots, \kappa_{nl_n})} \\
 & \times \sqrt{f(\omega_m, \kappa_{1l_1}, \kappa_{2l_2}, \dots, \kappa_{nl_n}) \Delta\omega \Delta\kappa_1 \Delta\kappa_2 \dots \Delta\kappa_n} \\
 & \times \cos(\omega_m t + I_1 \kappa_{1l_1} x_1 + I_2 \kappa_{2l_2} x_2 + \dots + I_n \kappa_{nl_n} x_n + \Phi_{ml_1 l_2 \dots l_n}^{I_1 I_2 \dots I_n}) \quad (3.93)
 \end{aligned}$$

donde

$$(\Delta\omega \Delta\kappa_1 \Delta\kappa_2 \dots \Delta\kappa_n) = \left(\frac{\omega_m}{N_t} \quad \frac{\kappa_{1l_1}}{N_1} \quad \frac{\kappa_{2l_2}}{N_2} \quad \dots \quad \frac{\kappa_{nl_n}}{N_n} \right)$$

$\omega_m = m\Delta\omega$, con $m = 1, 2, \dots, N_t$ y $\kappa_{i l_i} = l_i \Delta\kappa_i$; con $l_i = 1, 2, \dots, N_i$ e $i = 1, 2, \dots, n$.

$\Phi_{l_1 l_2 \dots l_n}^{I_1 I_2 \dots I_n}$ son ángulos alatorios de fase, independientes, uniformemente distribuidos en el rango $(0, 2\pi)$.

La onda estocástica simulada es asintóticamente Gaussiana conforme $N_t, N_1, \dots, N_n \rightarrow \infty$ simultáneamente debido al teorema del límite central.

3.11.2 Onda estocástica bidimensional y univariable

La expresión para simular una onda estocástica cuadrante simétrica, con inhomogeneidad espacial en dos dimensiones, es la siguiente, conforme $N_1, N_2, \dots, N_n \rightarrow \infty$ simultáneamente.

$$\begin{aligned}
 y(t, x_1, x_2) = & \sqrt{2} \sum_{l_1=1}^{N_1} \sum_{l_2=1}^{N_2} \sqrt{2F} [\cos(\omega t + \kappa_{1l_1} x_1 + \kappa_{2l_2} x_2 + \Phi_{l_1 l_2}^{(1)}) + \\
 & + \cos(\omega t + \kappa_{1l_1} x_1 - \kappa_{2l_2} x_2 + \Phi_{l_1 l_2}^{(2)})] \quad (3.94)
 \end{aligned}$$

donde

F: Espectro evolutivo

$$\Delta\kappa_i = \frac{\kappa_{i l_i}}{N_i}$$

$$\kappa_{i l_i} = l_i \Delta\kappa_i$$

$\Phi_{l_i}^{(i)}$: dos secuencias de ángulos aleatorios de fase, independientes y uniformemente distribuidos en el rango $(0, 2\pi)$ con $l_i = 1, 2, \dots, N_i$ e $i = 1, 2$.

3.11.3 Aplicación a la generación de una onda estocástica univariable y bidimensional

El espectro evolutivo (F) para una onda con inhomogeneidad espacial en dos dimensiones, se define como

$$F(t, x_1, \omega, \kappa_1, \kappa_2) d\omega d\kappa_1 d\kappa_2 = |A(t, x_1, \omega, \kappa_1)|^2 f(\omega, \kappa_1, \kappa_2) d\omega d\kappa_1 d\kappa_2 \quad (3.95)$$

La función de modulación tiene la siguiente expresión:

$$A(t, x_1, \omega, \kappa_1) = A(t, x_1, \omega) = B(t, \omega)W(t, x_1) \quad (3.96)$$

$B(t, \omega)$ describe la no estacionariedad de la onda y tiene la siguiente forma :

$$B(t, \omega) = \frac{e^{-at} - e^{-(c\omega+g)t}}{e^{-at^*} - e^{-(c\omega+g)t^*}} \quad (3.97)$$

t^* indica el tiempo en el cual $B(t, \omega)$ alcanza su valor máximo, y tiene por expresión:

$$t^* = \frac{\ln(c\omega + g) - \ln(a)}{c\omega + e} \quad (3.98)$$

a, c, g, e , son constantes que influyen en la "forma de onda" que se desee.

Por otro lado la función $W(t, x_1)$ describe la no homogeneidad de la onda, y está dada por:

$$W(t, x_1) = \begin{cases} 0 & \text{si } x_1 < x_t \\ \frac{x_1 - x_T}{x_L} & \text{si } x_T \leq x_1 \leq x_T + x_L \\ 1 & \text{si } x_1 > x_T + x_L \end{cases} \quad (3.99)$$

donde $x_T = x_B - U_T t$. Se expresa $f(\omega, \kappa_1, \kappa_2)$ como

$$f(\omega, \kappa_1, \kappa_2) = f(\kappa_1, \kappa_2) \delta[\omega - g(\kappa_1, \kappa_2)] \quad (3.100)$$

Shinozuka y Harada⁽⁶⁷⁾ propusieron el siguiente espectro de potencia basados en datos de los registros obtenidos el 29 de Enero de 1981, con la red SMART-1 de sismógrafos instalados en Lotung, Taiwan.

$$f(\kappa_1, \kappa_2) = \frac{\sigma^2}{v\pi} b_1^3 b_2 \kappa_1^2 e^{-\left(\frac{b_1 \kappa_1}{2}\right)^2 - \left(\frac{b_2 \kappa_2}{2}\right)^2} \quad (3.101)$$

Se propone para la función $g(\kappa_1, \kappa_2)$ la siguiente expresión:

$$g(\kappa_1, \kappa_2) = c\sqrt{\kappa_1^2 + \kappa_2^2} \quad (3.102)$$

3.11.4 Ejemplo de aplicación

Con los conceptos antes mencionados, se confeccionó un programa de ordenador, llamado GENONDAS⁽⁶⁸⁾. Usando el mismo, se simuló el movimiento sísmico en una superficie de terreno cuadrada de 10.000 m de lado, considerando una duración del proceso de simulación de 15 s, incremento de tiempo en la discretización de 0.5 s, 20 componentes de onda en cada dirección, velocidad de onda 2800 m/s.

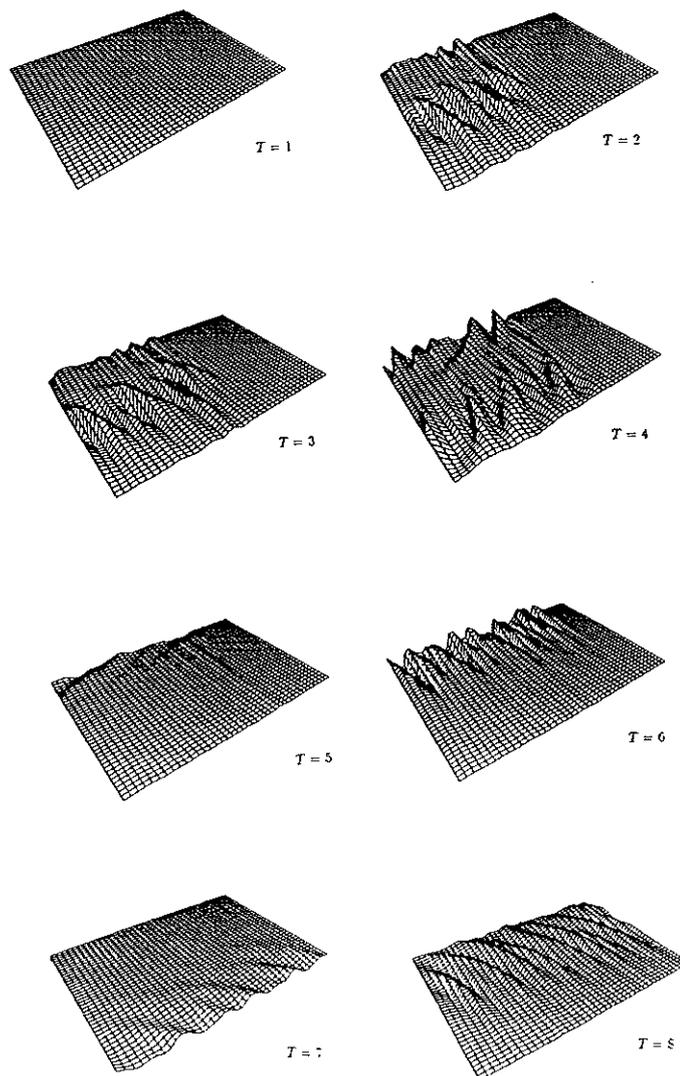


Figura 3.5 Variación del movimiento del terreno en los instantes de tiempo 1-8.

Los valores de κ_{1u} y κ_{2u} son 8.84E-3 y 3.32E-3 respectivamente, la longitud

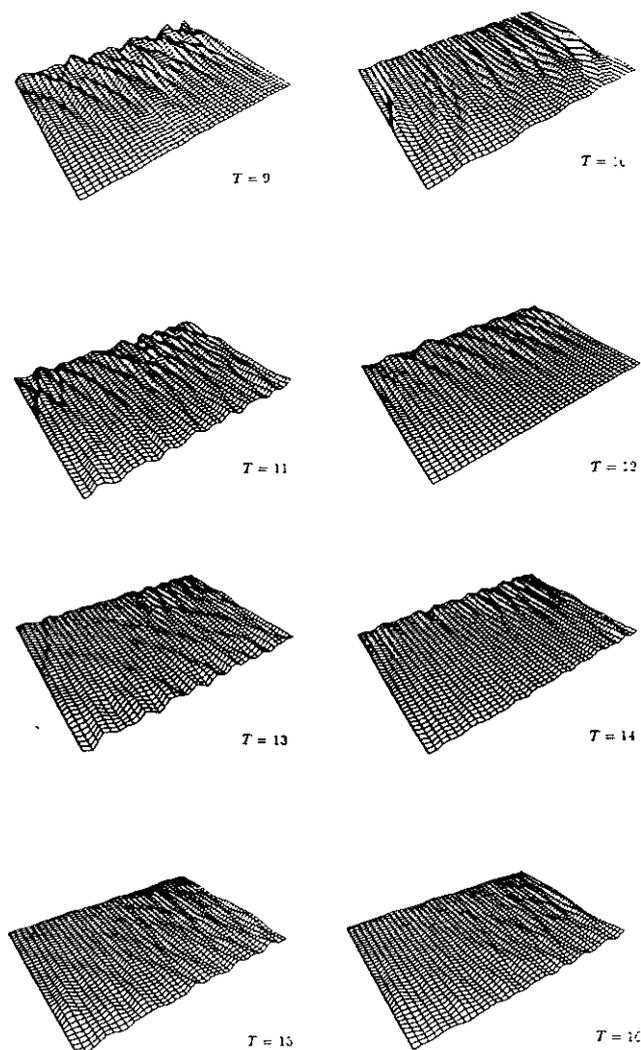


Figura 3.6 Variación del movimiento del terreno en los instantes de tiempo 9–16.

del intervalo considerado para definir la malla en que se subdivide la superficie del terreno es 500 m y los parámetros b_1 , b_2 y σ_{yy} que definen la forma de la onda en la ecuación (3.101), valen 1300, 1500 y 0.0124, respectivamente.

En las figuras 3.5 y 3.6 puede observarse la variación del movimiento a lo largo del eje x_1 en comparación con la variación de la onda a lo largo del eje x_2 en los 16 primeros instantes de tiempo del proceso.

Analizando las gráficas, se observa la existencia de una onda dominante con una longitud aproximada de 2.500 m, propagándose en la dirección negativa de x_1 . Dividiendo la distancia cubierta por un pico único (5.500 m), por el tiempo transcurrido, se tiene que la velocidad aproximada de propagación es de

2.750 m/s, valor cercano al especificado como dato.

Se han derivado acelerogramas distintos, variando los valores de los diferentes parámetros característicos del procedimiento de simulación utilizado en el programa de ordenador GENONDAS. Para obtener señales de distinta frecuencia, es necesario modificar el valor de a en la ecuación (3.97). En la figura 3.7 se da un ejemplo de un acelerograma generado, mientras que la figura 3.8 muestra su espectro de respuesta en aceleraciones.

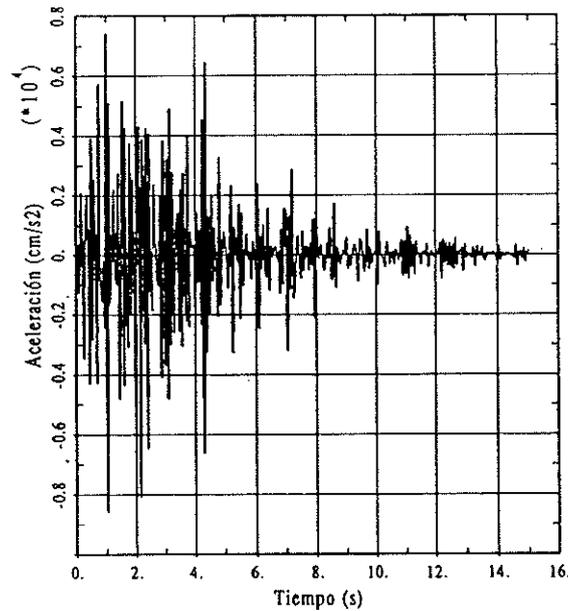


Figura 3.7 Acelerograma sintético, generado mediante el programa GENONDAS.

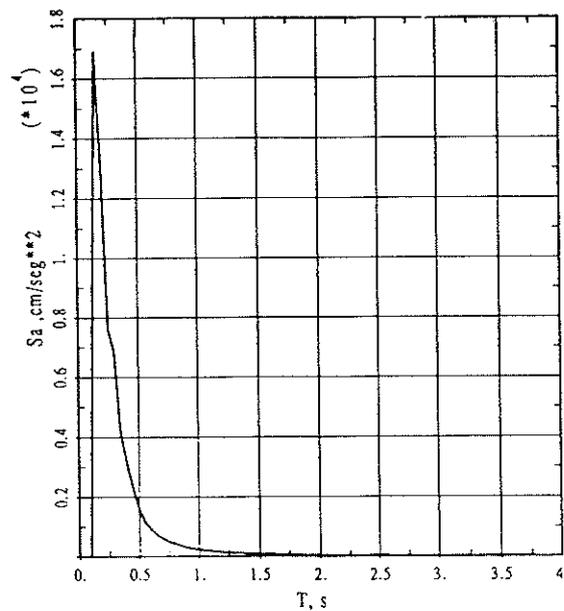


Figura 3.8 Espectro de respuesta en aceleraciones, correspondiente al acelerograma sintético de la figura 3.7.

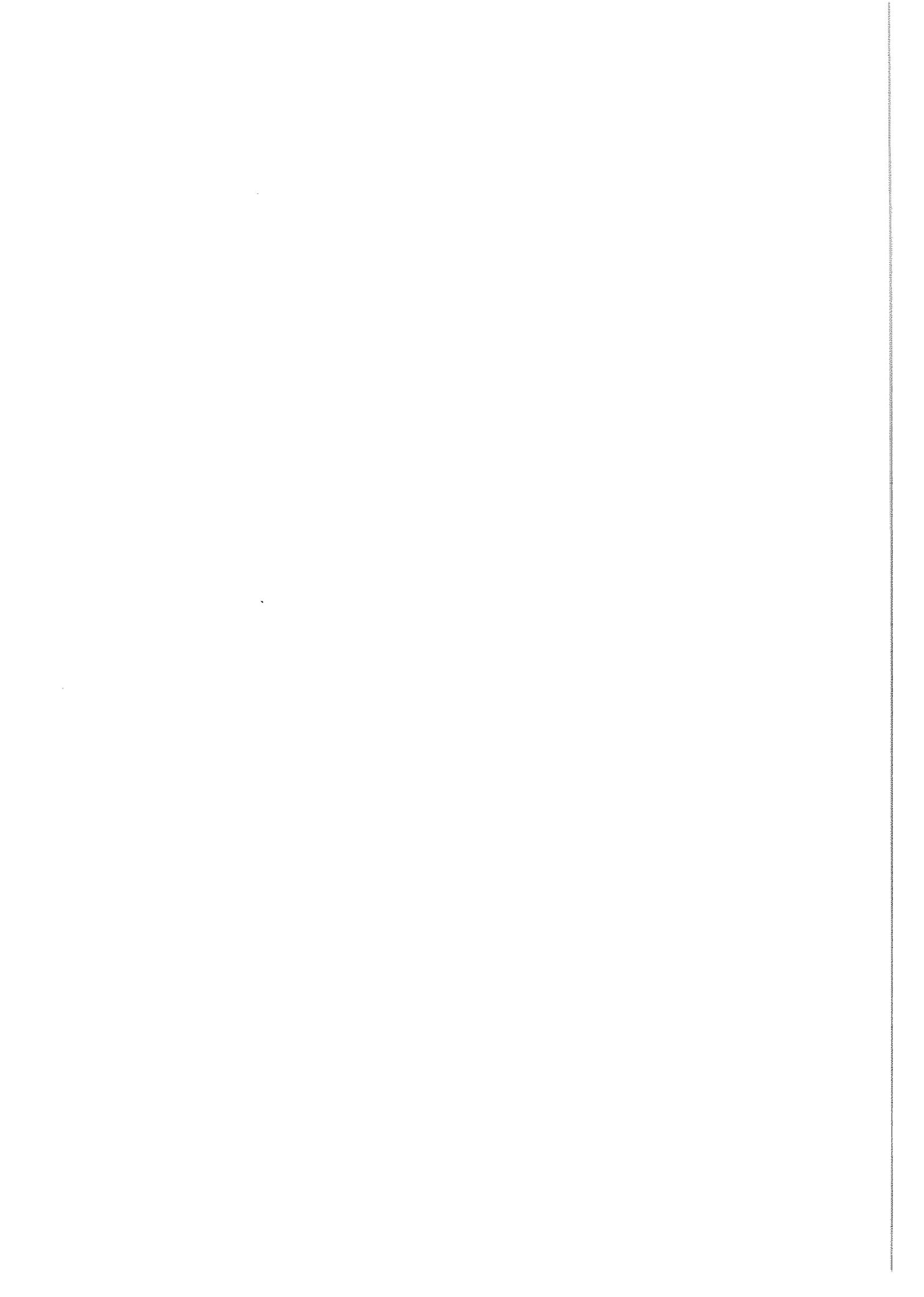
REFERENCIAS

1. G.W. Housner, "Characteristics of Strong-Motion Earthquakes", *Bulletin of the Seismological Society of America*, **37**,1, January, 1947.
2. E. Rosenblueth, "Some Applications of Probability Theory in Aseismic Design", *Proceedings of the World Conference on Earthquake Engineering*, Berkeley, California, June, 1956.
3. E. Rosenblueth and J.E. Bustamante, "Distribution of Structural Response to Earthquakes", *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, **58**, EM3, June, 1962.
4. G.N. Bycroft, "White Noise Representation of Earthquakes", *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, **86**, EM2, April, 1960.
5. A.G. Brady, "Studies of Response to Earthquake Ground Motion", Ph. D. Thesis, California Institute of Technology, Pasadena, California, 1986.
7. G.W. Housner y P.C. Jennings, "Generation of Artificial Earthquakes", *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, **90**, EM1, February, 1964.
8. H. Tajimi, "A Statistical Method of Determining the Maximum Response of a Building Structure During an Earthquake", *Proceedings of the Second World Conference on Earthquake Engineering*, **2**, 781-797, Tokio and Kioto, July, 1960.
9. M.F. Barstein, "Application of Probability Methods for Designing the Effect of Seismic Forces on Engineering Structures", *Proceedings of the Second World Conference on Earthquake Engineering*, **2**, 1467-1482, Tokio and Kioto, July, 1960.
10. S. P. Lai, "Statistical Characterization of Strong - Ground Motion using Power Spectral Density Function", *Bulletin of the Seismological Society of America*, **72**, (1), 259-274, 1982.
11. P.C. Jennings, G.W. Housner and N.C. Tsai, "Simulated Earthquake Motions", Report, California Institute of Technology, Pasadena, California, April, 1968.
12. M. Amin and A.H. Ang, "A Nonstationary Stochastic Model for Strong Motion Earthquakes", *Structural Research Series*, **306**, University of Illinois, Department of Civil Engineering, April, 1966.
13. J.S. Bendat and A.G. Piersol, "Measurement and Analysis of Random Data", John Wiley and Sons, New York, 1966.
14. R. Damrath, "Ein Stochastischer Verfahren der Seismischen Analyse von Bauwerken mit Anwendung auf Kernkraftwerke", Thesis, Berlin, 1974.
15. M. Shinozuka and Y. Sato, "Simulation of Nonstationary Random Process", *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, **93**, EM1, February, 1967.
16. A. Tung and J.N. Wang, "Statistical Parameters of AM and PSD Functions for the Generation of Site-Specific Strong Ground Motions", *Proceedings of the Tenth World Conference on Earthquake Engineering*, **2**. Madrid. Ed. Balkema, Rotterdam, 1992.
17. M.D. Trifunac and A.G. Brady, "A Study of the Duration of Strong Earthquake Ground Motion", *Bulletin of the Seismological Society of America*, **65**, 581-626, 1975.
18. E. Safak and D. Boore, "On Low-frequency Errors of Uniformly Modulated Filtered White Noise Models for Ground Motions", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **16**, 381-388, 1988.
19. PSEQGN, P. Ruiz and J. Penzien, "Artificial Generation of Earthquake Accelerograms", *Earthquake Engineering Research Center*, University of California, Berkeley, California, EERC 69-3, 1969.

20. C.A Cornell, "Stochastic Process Models in Structural Engineering", *Technical Report*, **0**, **34**, Stanford University, Department of Civil Engineering, May, 1964.
21. D.A. Gasparini and E.H. Vanmarcke, "Simulated Earthquake Motions Compatible with Prescribed Response Spectra", **R76-4**, **527**, M.I.T. Department of Civil Engineering Research, Cambridge, Massachusetts.
22. P.W. Brant and M. Shinozuka, "Application of the Evolutionary Power Spectrum in Structural Dynamics", *Proceedings of ASCE-EMD Speciality Conference on Probabilistic Concepts and Methods*, 42-46, 1969.
23. R.J. Scherer, J.D. Riera and G.I. Schuëller, "Estimation of Time Dependent Frequency Content of Earthquake Accelerations", *Nuclear Engineering and Design*, **71**, 301-310, 1982.
24. P.Spanos, J. Roesset and M. Donley, "Evolutionary Power Spectrum Estimation of September 19, 1985 Mexico Earthquake Accelerograms", *Stochastic Approaches in Earthquake Engineering, US-Japan Joint Seminar*, 322-333, Florida, USA, 1987.
25. T. Sawada and H. Kameda, "Modeling of Nonstationary Cross Spectrum for Multivariate Earthquake Motions by Multifilter Technique", *Proceedings 9th WCEE*, **2**, 795-800, Tokio, 1988.
26. M.B. Priestley, "Evolutionary Spectra and Non-stationary Processes", *Journal Royal Statistic Society*, **27**, 204-237, 1965.
27. J. Valerio, "Spectral Analysis of Earthquake Accelerations as Realizations of a Non-Stationary Stochastic Process", *Proceedings of 10th World Conference on Earthquake Engineering*, **2**, 901-907, Madrid, Ed. Balkema, Rotterdam, 1992.
28. M.B. Priestley, "Some Notes on the Physical Interpretation of Spectra of Nonstationary Stochastic Processes", *Journal of the Sound and Vibration*, **17**, (1), 51-54, 1971.
29. M. Shinozuka, G. Deodatis and T. Harada, *Digital Simulation of Seismic Ground Motion*, Technical Report NCEER-87-0017, 1987.
30. M. Grigoriu, S. E. Ruiz, E. Rosenblueth, "Non-stationary Model of Seismic Ground Acceleration", *Earthquake Spectra*, **4**, 551-568, 1988.
31. J.N. Brune, "Tectonic Stress and the Spectra of Seismic Shear Waves from Earthquakes", *Journal of Geophysical Research*, **75**, 4997-5009, 1970.
32. M. Bouchon, "A Dynamic Source Model for the San Fernando Earthquake", *Bulletin Seismic Society America*, **68**, 1555-1576, 1978.
33. W.B. Joyner and D.M. Boore, "A Stochastic Source Model for Synthetic Strong Motion Seismograms", *Proceedings 7th World Conference on Earthquake Engineering*, 1-8, Istanbul, Turkey, 1980.
34. W.B. Joyner, "A Scaling Law for the Spectra of Large Earthquakes", *Bull. Sism. Soc. Am*, **74**, 1167-1188, 1984.
35. T.C. Hanks, "Seismological Aspects of Strong Motions Seismology", *Proceedings 2nd. U.S National Conference on Earthquake Engineering*, 898-912, Stanford University, 1979.
36. T.C. Hanks and R.K. Mc Guire, "The Character of High Frequency Strong Ground Motion", *Bulletin of the Seismological Society of America*, **71**, 2071-2095, 1981.
37. D.M. Boore and W.B. Joyner, "Ground Motions and Response Spectra at Soil Sites from Seismological Models of Radiated Spectra", *Proc. 8th World Conference on Earthquake Engineering*, San Francisco, 457-464, 1984.
38. D.M. Boore, "Short Period P and S - Waves Radiation form Large Earthquakes: Implications for Spectral Relations", *BSSA*, **76**, 43-64, 1986.

- 39 L. Faravelli, "Source-to-site Seismological Models in Structural Dynamics", *Proceedings of the Third International Conference on Recent Advances in Structural Dynamics*, Southampton, II, 1021-1032, 1988.
40. F. Carli, L. Faravelli, "Modeling Non-stationary Ground Motion", *Proceedings of 9th European Conference on Earthquake Engineering*, 4 A, 63-72, Moscow, 1990.
41. F. Carli, "Nonstationary Models of Earthquake Accelerograms", *Proceedings 10th World Conference Earthquake Engineering*, 2, 829-834, Madrid, 1992.
- 42 K. Papadimitriou and J.L. Beck, "Stochastic Characterization of Ground Motion and Applications to Structural Response", *Proceedings of Tenth World Conference on Earthquake Engineering*, 2, 835-838, Madrid, July, 1992.
43. K. Papadimitriou, *Stochastic Characterization of Strong Ground Motion and Applications to Structural Response*, Ph. D. Thesis, Cal Tech, Report EERI,0, 90-103, 1990.
44. S.C. Liu, "Synthesis of Stochastic Representations of Ground Motions", *Bell Systems Technical Journal*, 49, 521-541, 1970.
45. F. Kozin, "Autorregresive Moving Average Models of Earthquake Records", *Journal of Probabilistic Engineering Mechanics*, 3, (2), 1988.
46. N.W. Polhemus and A.S. Cakmak, "Simulation of Earthquake Ground Motions Using Autorregresive Moving Average models", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 9, 343-354, 1981.
47. S. Ólafsson, "The Use of ARMA Models in Strong Motion Modelling", *Proceedings 10th World Conference on Earthquake Engineering*, 2, 857-862, Madrid (Spain), 1992.
48. S.L. Marple, *Digital Spectral Analysis with Applications*, Prentice-Hall, New Jersey, 1987.
49. W. Gersch and G. Kitagawa, "Time Varying AR Coefficient Model for Modelling and Simulating Earthquake Ground Motion", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 13, 243-254, 1985.
50. H. Akaike, "Likelihood and the Bayes Procedure", in *Bayesian Statistics*, (Eds. Bernardo, De Groot, Lindley and Smith), University Press, 141-166, Valencia, Spain, 1980.
51. H. Kutukura, T. Watanabe and M. Izumi, "A Study on the Phase Properties of Seismic Waves", *Proceedings 5th Japan Earthquake Engineering Symposium*, 209-216, 1978.
52. M. Izumi, T. Watanabe and M. Kutukura, "Interrelation of Fault Mechanism Phase Inclinations and Non-stationarities of Seismic Waves", *Proceedings 7th World Conference Earthquake Engineering*, 1, 89-96, Istanbul, 1980.
53. Y. Ohsaki, "On the Significance of Phase content in Earthquake Ground Motions", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 7, 427-439, 1979.
54. T. Kubo, "The Importance of Phase Properties in Generation of Synthetic Earthquake Strong Motions", *Transactions 9th International Conference on Structural Mechanics Reactor Technology*, K1, 49-54, 1987.
55. M. Kimura and M. Izumi, "A Method of Artificial Generation of Earthquake Ground Motion", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 18, 867-874, 1989.
56. M. Kawano, H. Dohi, Y. Osada and T. Kabori, "Study on Forward Prediction Model of Earthquake Ground Motion for Seismic Design of Structural Systems", *Proceedings 10th World Conference on Earthquake Engineering*, 1, 741-746, Madrid, 1992.
57. A. Ben-Menahem, "The Role of the Shear Mach Number in Earthquake Source

- Dynamics", *Bulletin of the Seismological Society of America*, **66**, 1787-1799, 1976.
58. K. Kamae and K. Irikura, "Prediction of Site-Specific Strong Ground Motion Using Semi-Empirical Methods", *Proceedings 10th World Conference on Earthquake Engineering*, **2**, 801-806, Madrid, 1992.
 59. C. H. Yeh and W. K. Wen, "Modelling of Nonstationary Ground Motion and Analysis of Inelastic Structural Response", *Structural Safety*, **8**, 281-298, 1989.
 60. R. W. Clough and J. Penzien, *Dynamics of Structures*, Second edition, McGraw-Hill, 1993, New York.
 61. T. Harada, "Stochastic Wave- Model of Seismic Ground Motion", *Proceedings 10th World Conference Earthquake Engineering*, **2**, 811- 816, Madrid, 1992.
 62. K. Tamura, S. Winterstein and H. Shah, "Random Field Models of Spatially Varying Ground Motions and the Estimation of Differential Ground Motions", *Proceedings 10th World Conference Earthquake Engineering*, **2**, 863-866, Madrid Ed. Balkema, Rotterdam, 1992.
 63. G. Deodatis and A. Theoharis, "Simulation of Seismic Ground Motion in the New Madrid Area Using Analytically Derived Frequency-Wave Number Fourier Amplitudes", *Proceedings 10th World Conference Earthquake Engineering*, **2**, 885-887, Madrid (Spain), 1992.
 64. C. Loh, "Analysis of the Spacial Variation of Seismic Waves and Ground Movements from SMART-1 Array Data", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **13**, 561-581, 1985.
 65. C. Loh and Y. Yeh, "Spatial Variation and Stochastic Modelling of Seismic Differential Ground Movement", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **16**, 583-596, 1988.
 66. J.M. Roesset, "Soil Amplification of Earthquakes", in *Numerical Methods in Geotechnical Engineering*, Eds. C.S. Desai and J.T. Christian), Mc Graw- Hill, New York, 639-682, 1977.
 67. M. Shinozuka y T. Harada, *Harmonic Analysis and Simulation of Homogeneous Stochastic Fields*, Technical Report, Department of Civil Engineering and Engineering Mechanics, Columbia University, New York, 1986.
 68. A.H. Barbat y J.M. Canet, *Estructuras Sometidas a Acciones Sísmicas*, Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, CIMNE, 2^a edición, Barcelona, 1994.



CAPÍTULO 4

ACELEROGRAMAS ARTIFICIALES COMPATIBLES CON UN ESPECTRO

4.1 INTRODUCCIÓN

La mayoría de los procedimientos existentes para generar registros sísmicos artificiales compatibles con un espectro de respuesta dado, se basan en el hecho de que cualquier función periódica puede ser expandida en una serie de ondas sinusoidales⁽¹⁻⁴⁾

$$z(t) = \sum_{i=1}^n A_i \sin(\omega_i t + \phi_i) \quad (4.1)$$

donde ϕ_i , ω_i y A_i son un conjunto de ángulos de fase, frecuencias y amplitudes, respectivamente. Fijando un número n de frecuencias ω_i , equi-espaciadas en el rango de interés y generando aleatoriamente el mismo número n de ángulos de fase ϕ_i , se pueden elegir adecuadamente n amplitudes A_i para que el espectro de la señal $\ddot{x}(t)$ sea compatible con el espectro de respuesta. Evidentemente, a medida que el número n sea mayor, la compatibilidad será tanto mejor, hasta alcanzar el grado de precisión deseado.

4.2 DEFINICIÓN DEL MODELO

El modelo que se describe a continuación permite generar señales sísmicas artificiales —que se expresan como historias de aceleraciones, velocidades y desplazamientos— compatibles con un espectro de respuesta prescrito. El método se basa en el hecho de que cualquier función periódica puede ser expresada como una superposición de ondas sinusoidales moduladas por una función temporal envolvente que define la forma del acelerograma.

$$a(t) = I(t) \sum_{i=1}^n A_i \sin(\omega_i t + \phi_i) \quad (4.2)$$

donde $a(t)$ es el acelerograma buscado. Consecuentemente, el modelo queda definido cuando se conocen el número de sinusoides n , la función envolvente $I(t)$, los ángulos de fase ϕ_i , las frecuencias ω_i y las amplitudes A_i :

- n : Es un número dado (del orden de 1000) que, al aumentar, mejora la compatibilidad del espectro al dar más "riqueza" en frecuencias a la señal.
- $I(t)$: Para simular el carácter transitorio de los terremotos reales, se utiliza una función de intensidad envolvente determinista $I(t)$ predefinida. En la figura 4.1 se muestran algunos ejemplos de funciones obtenidas a partir de la observación de registros reales.
- ϕ_i : El carácter aleatorio de la señal está modelizado mediante los ángulos de fase ϕ_i que son generados tomando valores aleatorios entre 0 y 2π . Para distintos ángulos de fase y con un espectro de respuesta dado, se obtienen diferentes registros artificiales que son similares en su aspecto general (contenido de frecuencias) pero diferentes en el detalle.
- ω_i : Las frecuencias ω_i se eligen a intervalos regulares dentro de un rango especificado, de manera que el registro contenga todo el rango de frecuencias deseado.
- A_i : La señal artificial $a(t)$ es compatible con el espectro de respuesta debido a que las amplitudes A_i se calculan a partir de la función estacionaria de densidad espectral de potencia $G_z(\omega_n)$ que se obtiene, a su vez, a partir del espectro de respuesta $S_u(\omega_n)$. Además, las amplitudes A_i así obtenidas se pueden modificar adecuadamente "intentando" mejorar el ajuste entre el espectro de la señal y el espectro de respuesta.

4.3 CÁLCULO DE LAS AMPLITUDES

La función de densidad espectral de potencia $G_z(\omega)$ de un proceso estocástico aleatorio estacionario y ergódico $z(t)$ se define como la transformada de Fourier de la función de autocorrelación $R_z(\tau)$ de una función muestra $z_1(t)$ del proceso^(5,6)

$$G_z(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_z(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (4.3)$$

donde la función de autocorrelación $R_z(\tau)$ representa el valor medio del producto $z_1(t)z_1(t + \tau)$

$$R_z(\tau) = \overline{z_1(t)z_1(t + \tau)} \quad (4.4)$$

que, al ser el proceso estacionario y ergódico, es independiente de t y presenta los mismos valores para cualquier función muestra $z_1(t)$ de éste.

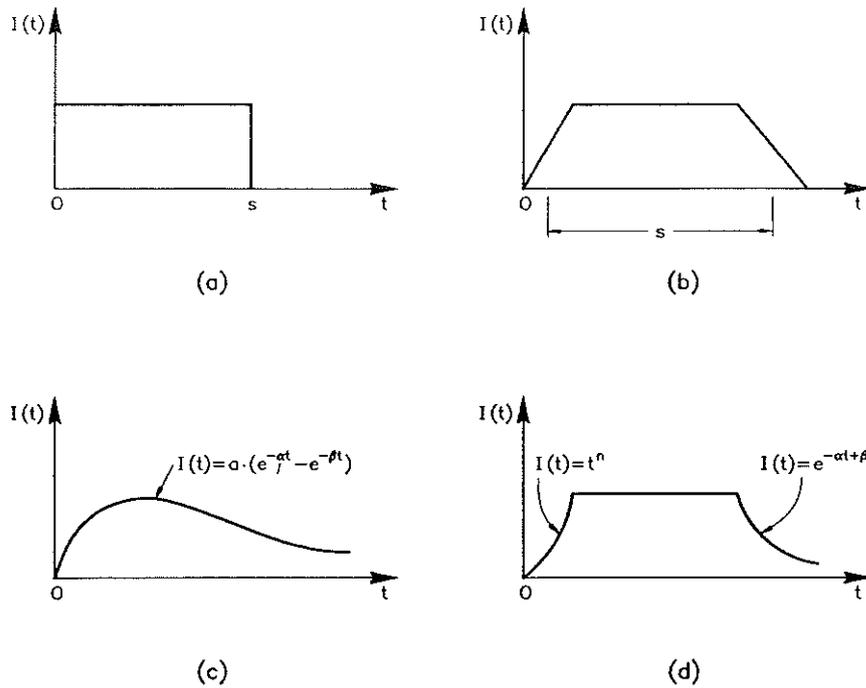


Figura 4.1 Funciones de intensidad utilizadas para simular el carácter transitorio de los terremotos reales.

La función de densidad espectral de potencia representa la contribución relativa de cada frecuencia ω ; al valor medio cuadrático del proceso. Definiciones formales de ésta se pueden encontrar en las referencias(7,8).

Es sabido que en un proceso dado por una función aleatoria estacionaria con media nula, la varianza de la función es igual a la potencia total de su función de densidad espectral^(6,7)

$$\sigma_z^2 = \int_0^{\infty} G_z(\omega) d\omega \quad (4.5)$$

Por otra parte, la varianza de una función sinusoidal dada por

$$\ddot{y}(t) = A \sin(t) \quad (4.6)$$

vale

$$\sigma_{\ddot{y}}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A^2 \sin^2(t) dt = \frac{A^2}{2} \quad (4.7)$$

Consecuentemente, la potencia total del proceso definido por la ecuación (4.2)

de acuerdo con (4.5) y (4.7) es:

$$\int_0^{\infty} G_z(\omega) d\omega = \sigma_z^2 = \sum_{i=1}^n \frac{A_i^2}{2} \quad (4.8)$$

Aproximando la potencia total como la integral del área debajo de la curva $G_z(\omega)$, se tiene

$$\sum_{i=1}^n G_z(\omega_i) \Delta\omega_i = \sum_{i=1}^n \frac{A_i^2}{2} \quad (4.9)$$

expresión que será válida sólo cuando el número de sinusoides n en la función que define el proceso $z(t)$ sea alto.

Dado que la densidad espectral de potencia representa la contribución relativa de cada frecuencia ω_i , se puede aceptar la hipótesis (bastante precisa, aunque no exacta) de la igualdad de sumandos en (4.9):

$$G_z(\omega_i) \Delta\omega_i \approx \frac{A_i^2}{2} \quad (4.10)$$

por lo que, dada dicha función, se pueden calcular las amplitudes que definen la ecuación (4.2) como

$$A_i \approx \sqrt{2G_z(\omega_i) \Delta\omega_i} \quad (4.11)$$

Es interesante notar que la función de densidad espectral de potencia de un filtro de segundo orden, con una fracción del amortiguamiento crítico ν_g y frecuencia ω_g excitado por un ruido blanco, está dada por^(5,9,10,11)

$$G_z(\omega_i) = G_0 \frac{1 + 4\nu_g^2 \frac{\omega_i^2}{\omega_g^2}}{\left(1 - \frac{\omega_i^2}{\omega_g^2}\right)^2 + 4\nu_g^2 \frac{\omega_i^2}{\omega_g^2}} \quad (4.12)$$

donde G_0 es, a su vez, la función de densidad espectral de potencia del ruido blanco ideal que es una constante. Así pues, cuando se usa la ecuación (4.12), se reproduce el caso particular de un modelo consistente en un generador de ruido blanco y un filtro de segundo orden⁽⁹⁾, que corresponde al modelo de Kanai-Tajimi de la filtración de un ruido blanco a través de un estrato de suelo (ver 3.1.2).

4.4 GENERACIÓN DE LA FUNCIÓN DE DENSIDAD ESPECTRAL DE POTENCIA

La determinación de la función de densidad espectral de potencia a partir de un espectro dado ha sido objeto de un considerable esfuerzo. El objetivo es calcular dicha función para una señal desconocida $z(t)$ a partir de la velocidad máxima relativa $S_{\dot{u}}(\omega_n)$ y la fracción del amortiguamiento crítico ξ de un sistema con un grado de libertad excitado por la señal desconocida $z(t)$.

$$G_z(\omega_n) = G_z(S_{\dot{u}}(\omega_n)) = ? \quad (4.13)$$

El procedimiento que se sigue, dentro de la teoría de vibraciones aleatorias, empieza definiendo en términos probabilistas el espectro de pseudo-aceleraciones espectrales $S_{\ddot{u}}$ del sistema con un grado de libertad [$S_{\ddot{u}}(\omega_n, \xi) = \omega_n^2 S_u \simeq |\ddot{u}(t)|_{\max}$] en función de la desviación estándar de las aceleraciones totales medidas en el sistema (ver apartados 2.5.3 y 2.5.4):

$$S_{\ddot{u}_{s;p}} = \zeta_{s;p} \sigma_{\ddot{u}}(\omega_n) \quad (4.14)$$

En esta ecuación $S_{\ddot{u}_{s;p}}$ es el nivel de aceleración bajo el cual el valor absoluto de la respuesta $\ddot{u}(t)$ del sistema tiene una probabilidad p de ser excedido cuando es excitado por una señal estacionaria \ddot{z} de duración s ; $\sigma_{\ddot{u}}(\omega_n)$ es la desviación estándar de las aceleraciones totales del sistema lineal con frecuencia natural ω_n evaluada en el instante s ; $r_{s;p}$ es un factor pico que es función de la probabilidad p y la duración s .

El problema de la determinación del factor de pico $\zeta_{s;p}$ es conocido como el "problema del primer sobrepaso" para el cual existen soluciones aproximadas. En la referencia (12) se incluye un estado del arte sobre este tema. Por otra parte, en las referencias(13,14) se da un procedimiento aproximado, relativamente simple, para predecir la respuesta máxima de un sistema lineal expuesto por un tiempo limitado s , a una excitación no estacionaria. Considerando un sistema de un grado de libertad y una excitación estacionaria, la expresión general aproximada se simplifica en el siguiente factor de pico $\zeta_{s;p}$:

$$\zeta_{s;p} \approx \sqrt{2 \ln \left(-\frac{\omega_n s}{\pi \ln p} \left[1 - e^{-\sqrt{4\xi_s \ln \left(-\frac{\omega_n s}{\pi \ln p} \right)}} \right] \right)} \quad (4.15)$$

donde ξ_s es un amortiguamiento ficticio dependiente de la duración s de la señal, dado por

$$\xi_s = \frac{\xi}{1 - e^{-2\xi\omega_n s}} \quad (4.16)$$

que, desde un punto de vista práctico, se puede tomar igual al amortiguamiento real.

Un resultado básico de la teoría de vibraciones aleatorias de sistemas lineales⁽⁶⁾ establece la siguiente relación entre las funciones de densidad espectral de potencia de la entrada y la salida del sistema:

$$G_u(\omega, \omega_n) = G_z(\omega) |H_u^z(\omega, \omega_n)|^2 \quad (4.17)$$

donde $G_u(\omega, \omega_n)$ es la densidad espectral de potencia de los desplazamientos relativos del sistema lineal con frecuencia natural ω_n , $G_z(\omega)$ es la densidad espectral de potencia del acelerograma y $|H_u^z(\omega, \omega_n)|$ es la función de transferencia del sistema lineal que relaciona las transformadas de Fourier del desplazamiento relativo del sistema con la de la aceleración. Para un tiempo de excitación s grande, ésta vale

$$|H_u^z(\omega, \omega_n)|^2 = [(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\xi_s^2 \omega_n^2 \omega^2]^{-1} \quad (4.18)$$

De acuerdo con la expresión (4.5), la desviación estándar de los desplazamientos relativos del sistema se escribe

$$\sigma_u^2(\omega_n) = \int_0^\infty G_u(\omega, \omega_n) d\omega = \int_0^\infty G_z(\omega) |H_u^z(\omega, \omega_n)|^2 d\omega \quad (4.19)$$

Además, al ser $S_{\ddot{u}}(\omega_n, \xi) = \omega_n^2 S_u$, se establece la siguiente relación entre las desviaciones estándar del desplazamiento y de la aceleración

$$\sigma_{\ddot{u}}(\omega_n) = \omega_n^2 \sigma_u(\omega_n) \quad (4.20)$$

por lo que se tiene:

$$\sigma_{\ddot{u}}^2(\omega_n) = \omega_n^4 \int_0^\infty G_z(\omega) |H_u^z(\omega, \omega_n)|^2 d\omega \quad (4.21)$$

Reemplazando (4.18) en (4.21), operando y simplificando, se obtiene

$$\sigma_{\ddot{u}}^2(\omega_n) \approx G_z(\omega_n) \omega_n \left(\frac{\pi}{4\xi_s} - 1 \right) + \int_0^{\omega_n} G_z(\omega) d\omega \quad (4.22)$$

Finalmente, reemplazando la expresión (4.22) en (4.4), utilizando la relación $S_{\ddot{u}}(\omega_n) = \omega_n S_{\ddot{u}}(\omega_n)$ y despejando $G_z(\omega_n)$ se obtiene:

$$G_z(\omega_n) \approx \frac{1}{\omega_n \left(\frac{\pi}{4\xi_s} - 1 \right)} \left[\frac{\omega_n^2 S_{\ddot{u}}^2(\omega_n)}{r_{s;p}^2} - \int_0^{\omega_n} G_z(\omega) d\omega \right] \quad (4.23)$$

que es la función buscada definida de manera recursiva. Para evaluarla, se empieza por la frecuencia natural más baja ω_1 , donde la contribución del término

integral de la derecha es nula. Para una frecuencia arbitraria ω_i , se conoce la integral numérica de $G_z(\omega)$ y, por tanto, se puede evaluar $G_z(\omega_{i+1})$.

Se puede ver que esta expresión no es única. Depende de la duración del proceso s y del nivel de probabilidad p asignado. El ajuste entre el espectro de respuesta y el espectro calculado será tanto mejor cuanto más grande sea la duración de la señal s . Por su parte, haciendo ensayos numéricos se encuentra que con $p = 0.367$ (para que $\ln p = -1$) se obtienen excelentes resultados incluso para señales relativamente cortas.

4.5 MEJORA DE LA SEÑAL ARTIFICIAL

Una vez calculada la función de densidad espectral de potencia según la expresión (4.23), se puede generar una señal de excitación —compatible con el espectro de respuesta— usando las expresiones (4.11) y (4.1). Luego se la multiplica por la función de intensidad $I(t)$, con lo que se obtiene la función no estacionaria $a(t)$. Sin embargo, la señal así generada presenta algunas deficiencias que fácilmente pueden ser eliminadas o atenuadas. Así por ejemplo, normalmente se desea especificar la aceleración máxima que tendrá la señal $\ddot{x}(t)$ siendo importante además que la velocidad final sea prácticamente nula. En el proceso descrito hasta el momento, no se han tenido en cuenta todos estos detalles que se desarrollan en apartados siguientes.

4.5.1. Ajuste de línea base

El acelerograma $a(t)$ generado puede ser procesado en la misma forma que se hace con un acelerograma registrado de un terremoto real. Así, la corrección de línea de base se puede hacer en la misma forma que fue descrita por Berg y Housner en la referencia (15) para intentar que tanto la velocidad como el desplazamiento de la señal tiendan a cero al final del terremoto. Esto se consigue con una corrección parabólica de la línea de base del acelerograma, donde los coeficientes de la corrección son elegidos de manera tal que minimicen el valor cuadrático medio de la velocidad.

Si $a(t)$ es un acelerograma obtenido mediante el procedimiento descrito, el acelerograma corregido $a'(t)$, tiene la forma:

$$a'(t) = a(t) + c_0 + c_1 \frac{t}{s} + c_2 \left(\frac{t}{s} \right)^2 \quad (4.24)$$

donde s es la duración de la señal. La velocidad se obtiene integrando la ecuación (4.24) con condiciones iniciales nulas y los coeficientes c_0 , c_1 y c_2 se seleccionan de manera tal que el valor cuadrático medio de ésta sea mínimo en el intervalo $[0, s]$. Con todo esto se llega a la relación:

$$\begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -300 & 900 & -630 \\ 1800 & -5760 & 4200 \\ -1890 & 6300 & -4725 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix} \quad (4.25)$$

donde:

$$b_k = s^{-k-3} \int_0^s v(t) t^{k+1} dt \quad k = 0, 1, 2 \quad (4.26)$$

y donde $v(t)$ es la velocidad correspondiente a $a(t)$.

Las integrales de la ecuación (4.26) se pueden evaluar numéricamente, bajo el supuesto de que la aceleración $a(t)$ varía linealmente entre dos instantes de tiempo consecutivos. Después de esta corrección, la doble integración de $a'(t)$ proporciona las velocidades y desplazamientos, respectivamente. Aunque normalmente las funciones $a(t)$ y $a'(t)$ son muy similares, es importante la modificación en la velocidad $v(t)$.

4.5.2. Ajuste de la aceleración máxima

Se debe notar que la aceleración máxima resultante del algoritmo descrito es una variable aleatoria y aunque el espectro de respuesta fue adecuadamente escalado según una aceleración máxima, el procedimiento descrito no garantiza que el resultado final proporcione dicha aceleración. Sin embargo, es de esperar que la diferencia entre la obtenida y la esperada sea relativamente pequeña. Por esto, se puede imponer directamente el valor deseado de la aceleración máxima teniendo en cuenta dos alternativas posibles

- 1) Si el valor absoluto de la aceleración máxima encontrada es menor que la especificada, simplemente se modifica su valor absoluto al valor deseado.
- 2) Si este valor absoluto es mayor, se escalan todas aquellas aceleraciones cuyo valor absoluto sobrepase el especificado.

El procedimiento descrito garantiza que sólo exista una aceleración máxima de valor absoluto igual al especificado. Finalmente, se debe notar que esta modificación artificial solamente afecta a la respuesta en el rango de frecuencias muy altas, por lo que no tiene mayor incidencia.

4.5.3. Ajuste de la respuesta espectral

El carácter aproximado de las expresiones anteriores y los ajustes de línea de base y aceleración pico, hacen que el espectro de respuesta de la señal artificial —aunque compatible— no sea exactamente igual al especificado. Consecuentemente, se puede mejorar el ajuste entre ambos espectros. Para esto, se utiliza un procedimiento cíclico en el que se compara el espectro de respuesta con el especificado en un conjunto de frecuencias de control $j = 1, \dots, m$. En cada frecuencia de control j se obtiene la relación entre la respuesta deseada y la calculada. Para mejorar el ajuste, se modifica el valor correspondiente de la función de densidad espectral de potencia en proporción al cuadrado de esta relación (ecuación 4.24).

$$G(\omega_j)_{i+1} = G(\omega_j)_i \left[\frac{S_u(\omega_j)}{S_u^i(\omega_j)} \right]^2 \quad j = 1, \dots, m \quad (4.27)$$

con la que se genera una nueva señal de excitación.

Este procedimiento no es convergente en todas las frecuencias de control. El proceso iterativo descrito se basa en la hipótesis de que el valor de la densidad espectral de potencia en una frecuencia dada depende exclusivamente de tal frecuencia. Sin embargo, ésta depende también de los valores de dicha función en frecuencias cercanas⁽¹⁶⁾. Por esta razón, el algoritmo iterativo descrito mejora el ajuste sólo en las primeras iteraciones, en las que el efecto de las frecuencias lejanas es despreciable.

4.6 EJEMPLO

El procedimiento para generar señales sísmicas artificiales presentado en este capítulo permite que se especifique una función de densidad espectral de potencia directamente. Por ejemplo, se puede especificar la densidad espectral de potencia de un filtro de segundo orden dado por la ecuación (4.12) y generar así señales artificiales similares a las que se obtendrían con un modelo consistente en un generador de ruido y un filtro de segundo orden. Sin embargo, el método aquí descrito es más general ya que, utilizando la expresión (4.23), se pueden generar señales artificiales compatibles con un espectro de respuesta dado $S_u(\omega_n)$.

Como ejemplo de generación de una señal artificial, se ha utilizado un espectro de respuesta en velocidades proveniente del suavizado realizado sobre los espectros de respuesta de 39 registros de sismos reales dados en la referencia(17), para una fracción del amortiguamiento crítico $\xi = 0.02$. Dicho espectro de respuesta está definido por los 11 valores dados en la tabla 4.1.

Tabla 4.1 Espectro de respuesta dado en velocidades.

T	$S_v[cm/s]$	T	$S_v[cm/s]$
0.001	0.457	0.300	43.180
0.025	1.524	0.400	50.800
0.060	4.191	1.000	50.800
0.105	7.620	2.000	48.260
0.190	25.400	3.500	44.450
		4.000	30.000

También se ha especificado: la aceleración máxima del terreno de $\ddot{x}_{max} = 0.26g = 255[cm/s^2]$; el contenido de frecuencias de la señal dada por un periodo mínimo de 0.005[s] y un periodo máximo de 4.0[s]; la duración total de la señal de $s = 15[s]$; y una función de intensidad $I(t)$ que aumenta linealmente de 0 a 1 en 3 segundos, se mantiene constante en 1 durante 9 segundos y disminuye linealmente a 0 en los 3 segundos restantes (figura 4.1). La señal artificial se ha generado con intervalos de tiempo entre valores de 0.01[s] lo que proporciona 1501 valores de desplazamiento, velocidad y aceleración equiespaciados en el tiempo. La señal fue generada utilizando una serie de 1675 senos con sus correspondientes frecuencias, amplitudes y ángulos de fase. Finalmente, se hicieron los ajustes de línea base, de aceleración máxima y de respuesta espectral con 6 ciclos iterativos.

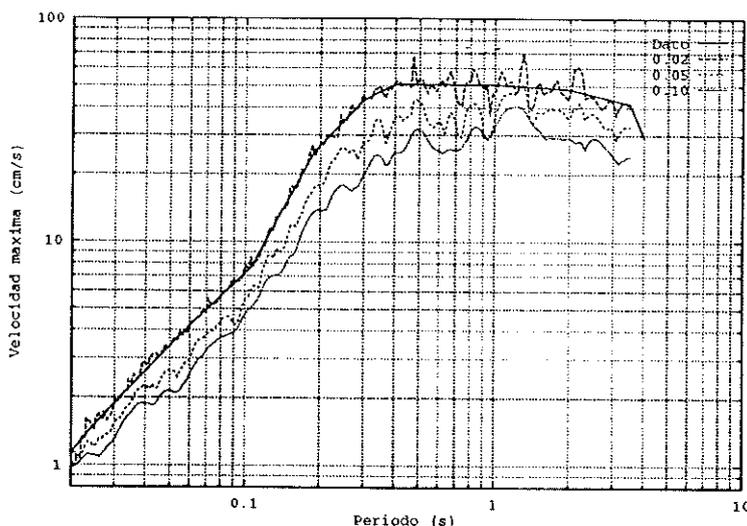


Figura 4.2 Espectro de velocidades.

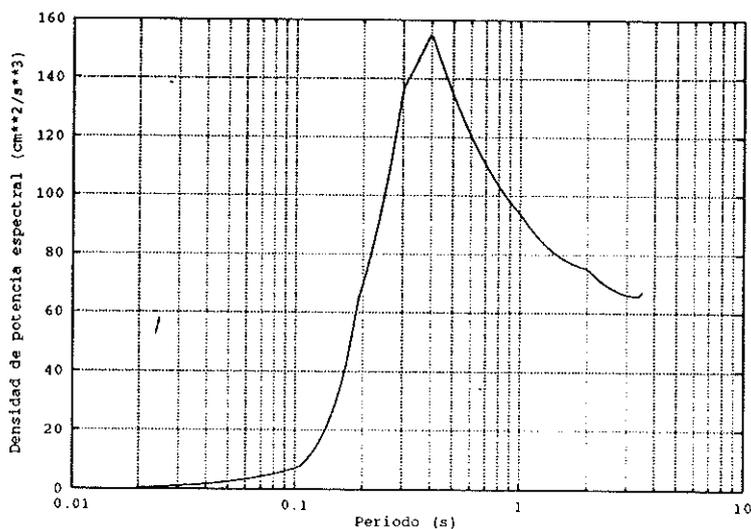


Figura 4.3 Función de densidad espectral de potencia.

En la figura 4.2 se comparan los espectros de velocidad obtenidos para diferentes relaciones de amortiguamiento con el espectro de respuesta. Se debe hacer notar que la diferencia entre el espectro de respuesta y el calculado ya era pequeña (del orden del 22% en media) antes del ajuste de respuesta espectral y, con las seis iteraciones, ésta mejoró ligeramente (hasta situarse en una media del orden de 6.1%). En la figura 4.3 se presenta la función de densidad espectral de potencia evaluada según la expresión (4.23) a partir del espectro de respuesta es-

pecificado. Notablemente, esta función es muy similar en forma a la descrita por Kanai-Tajimi en la referencia (18) en base al estudio del contenido de frecuencias de un gran número de registros reales. Como es de esperar, la función presenta un pico para el periodo ($T = 0.4[s]$) donde el espectro de respuesta presenta una variación significativa de pendiente.

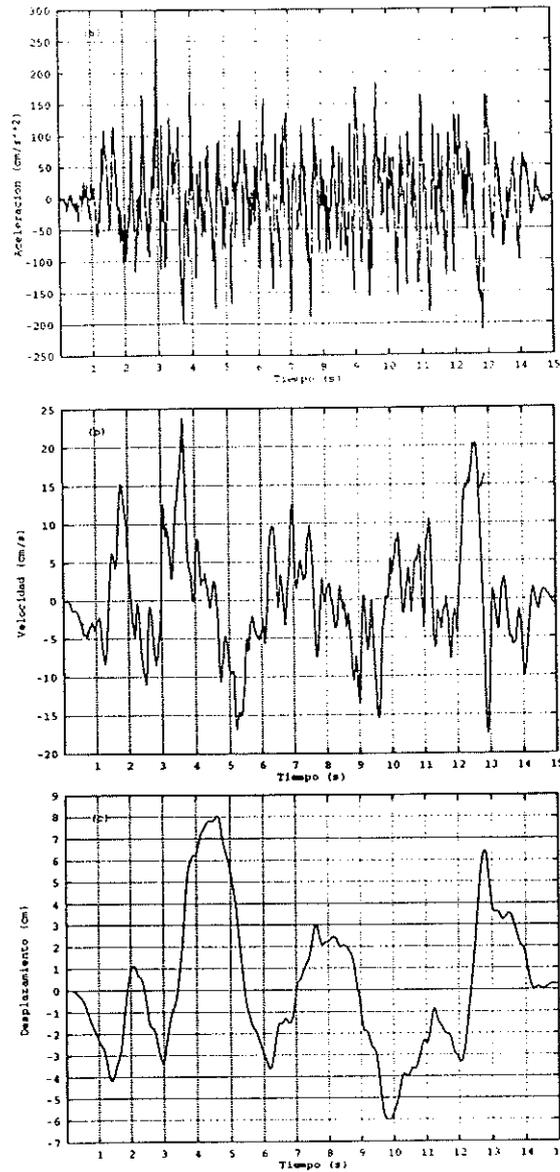


Figura 4.4 a) Aceleración, b) Velocidad y c) Desplazamiento del terreno en función del tiempo.

En las figuras 4.4 (a), (b) y (c) se presenta la historia de aceleraciones, velocidades y desplazamientos, respectivamente. En el gráfico de aceleraciones se observa un único pico algo pronunciado a los tres segundos y esto se debe a que antes de corregir la aceleración máxima, ésta valía $223.5[cm]$. La corrección

simplemente se ha limitado a modificar este valor a $255[\text{cm/s}]$. La pequeña diferencia entre estos valores es aceptable ya que, aunque el espectro de respuesta normalmente debe estar en concordancia con la aceleración máxima especificada –lo que no es el caso–, el método de generación descrito no garantiza obtener el valor exacto, siendo esperable un valor aproximado. Finalmente se debe resaltar el hecho de que las aceleraciones, velocidades y desplazamientos finales son prácticamente nulos debidos a la corrección de línea de base.

4.7 SIMULACIÓN COMPATIBLE CON UN ESPECTRO DE ENERGÍA

La generación de acelerogramas sitéticos compatibles con un espectro de energía inducida se facilita de gran manera por las relaciones que guarda dicho espectro con las medidas espectrales tal como se ha indicado más arriba (ecuaciones 2.30 a 2.34).

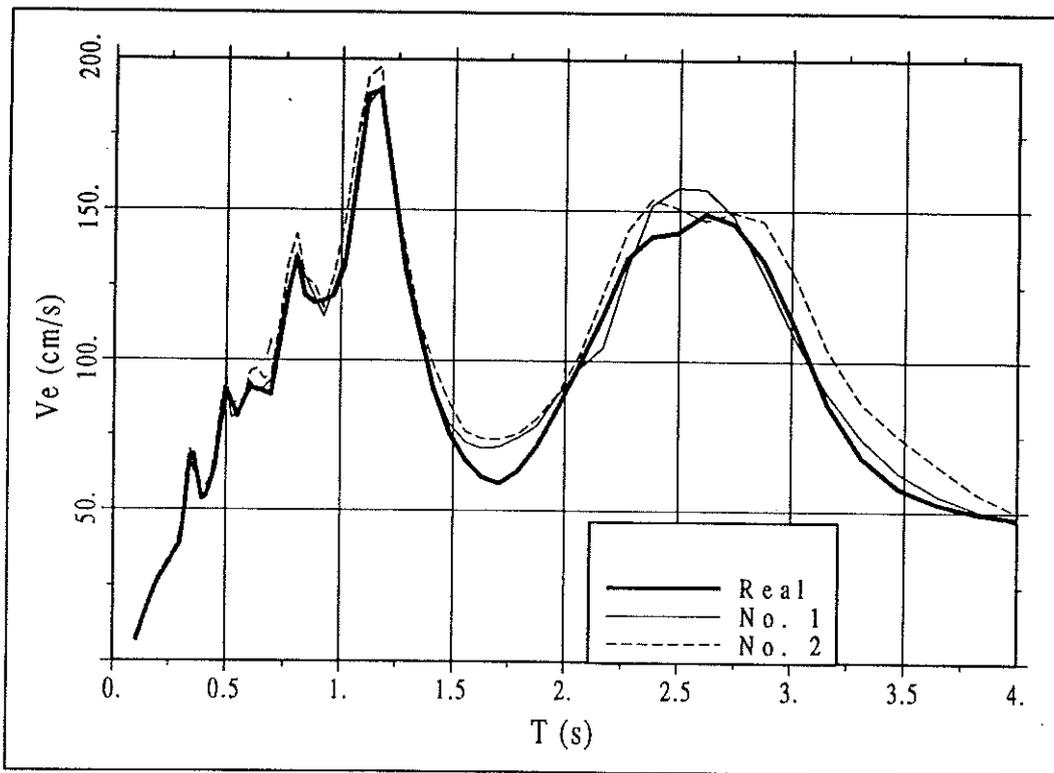


Figura 4.5 Espectros de sismos simulados consistentes con un espectro de energía dado.

En principio, se puede tomar como estimativo de la densidad espectral la siguiente función, calculada sobre la duración efectiva del sismo:

$$G_z(\omega) = \frac{|Y(\omega)|^2}{t_d} \quad (4.28)$$

En sentido estricto, este estimativo de la densidad espectral tiene como defecto el hecho de que no se realiza sobre un proceso estacionario, pues la duración efectiva t_d abarca las fases ascendente y descendente del acelerograma. Una manera de corregir este hecho es tomar como estimativo la fórmula de Vanmarcke y Lai ⁽¹⁹⁾

$$G(\omega) = \frac{|Y(\omega)|^2}{\pi s_0} \quad (4.29)$$

donde s_0 es una aproximación teórica de la duración del segmento estacionario del registro dada por la siguiente ecuación implícita:

$$s_0 = 2 \ln\left(\frac{2s_0}{T_0}\right) \frac{I}{\ddot{y}_{max}^2} \quad (4.30)$$

En esta ecuación T_0 representa el período dominante del sismo en la fase de movimiento fuerte.

En el primer caso, parece adecuado tomar como estimador de la densidad espectral la siguiente ecuación:

$$G(\omega) = \frac{\pi \sqrt{1-\nu^2}}{2t_d \cos^{-1} \nu} V_e^2(\omega) \quad (4.31)$$

En el segundo caso se tendría:

$$G(\omega) = \frac{\sqrt{1-\nu^2}}{2s_0 \cos^{-1} \nu} V_e^2(\omega) \quad (4.32)$$

Es evidente que ambas ecuaciones son proporcionales. De todas maneras, para efectos de simulación de acelerogramas compatibles con un espectro de energía dado solamente interesan los valores relativos de la densidad espectral, ya que la amplitud del registro es ajustada iterativamente hasta obtener una intensidad que sea cercana a la del espectro objetivo. La aceleración máxima del registro será entonces la que resulte de tal proceso de ajuste.

El siguiente punto a resolver es el de la función de modulación $I(t)$ del registro. Las funciones utilizadas usualmente dejan la libertad de definir la duración deseada del mismo. Sin embargo, el espectro de energía V_e es, por definición, altamente sensible a este valor, y en ello radica su importancia para la inclusión de la duración del sismo en el diseño. Por esta razón, los parámetros de la función

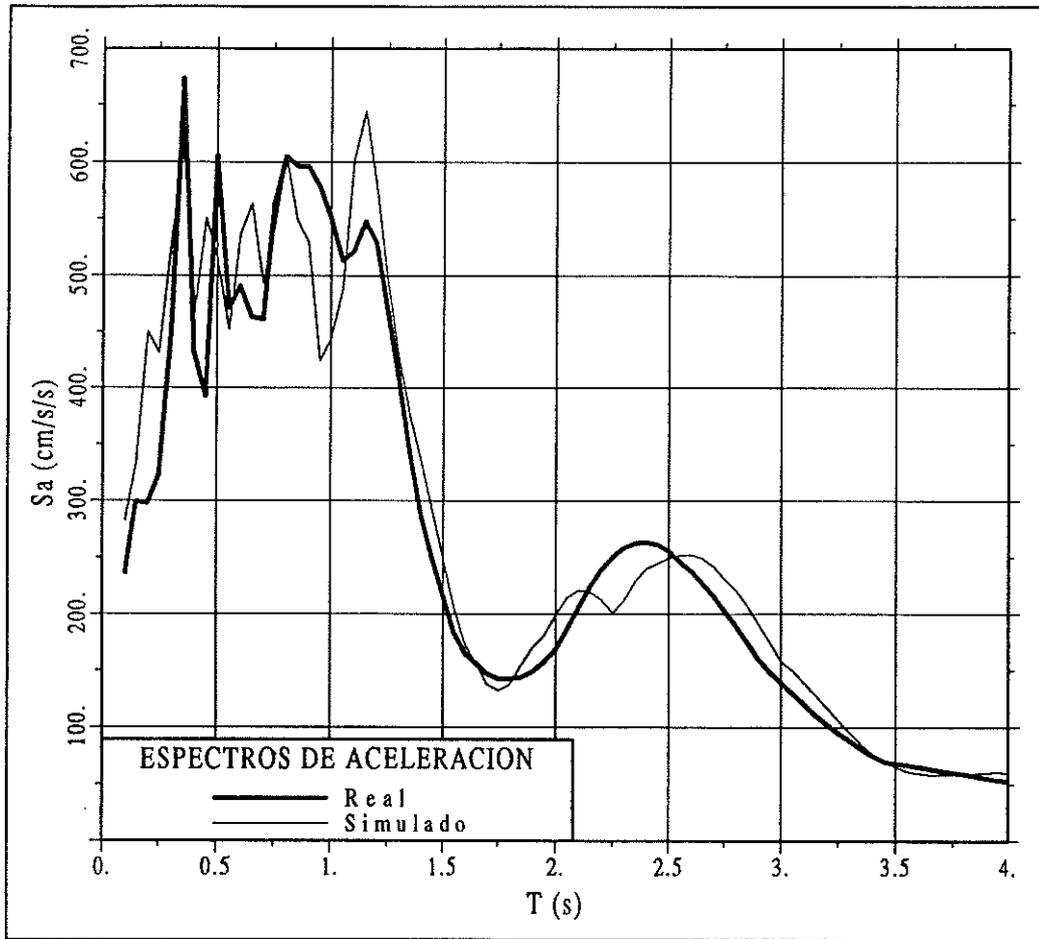


Figura 4.6 Espectros de aceleración del registro real y del simulado.

de modulación del registro tienen que estar en relación directa con la duración efectiva y la intensidad. Debido a esto es conveniente usar como función de modulación la propuesta por Yung *et al.*, mencionada anteriormente (ecuaciones 3.14 a 3.17), en la que los parámetros pueden quedar todos definidos en función de la duración efectiva del registro y el espectro que se trata de obtener. Así, la ecuación 3.15 se convierte en

$$\sigma_d^2 = \frac{\sqrt{1-\nu^2}}{2t_d \cos^{-1} \nu} \int_0^\infty V_e^2 d\omega \quad (4.33)$$

con lo cual tanto la amplitud $z(t)$ como la modulación $I(t)$ están definidas en relación con el espectro de energía y la duración efectiva que se desean obtener, lo cual evita asumir valores arbitrarios de la duración y los parámetros que controlan la forma no estacionaria del registro.

En la figura 4.5 se muestra el espectro real de energía del sismo de Hachinoe para un sistema elástico y un amortiguamiento del 5%, junto con los espectros

de acelerogramas sintéticos generados por este método, utilizando la función de modulación calculada para este caso $I(t)$ calculada de acuerdo a las ecuaciones anteriores. En ella se aprecia un alto grado de concordancia entre el espectro dado y el obtenido.

Finalmente, es importante comprobar cómo otros espectros de respuesta obtenidos con el registro simulado no difieren sensiblemente del del correspondiente al registro real, tal como ilustra la figura 4.6, en cuanto al espectro de aceleración. Esto encuentra su explicación en la relación existente entre el espectro de energía y el de potencia, el cual contiene toda la información del registro sísmico.

REFERENCIAS

1. PSEQGN, P. Ruiz and J. Penzien , "Artificial Generation of Earthquake Accelerograms", *Earthquake Engineering Research Center*, University of California, Berkeley, California, EERC 69-3, 1969.
2. J.L. Bogdanoff , J.E. Golberg, M.C. Bernard , "Response of a Simple Structure to a Random Earthquake-Type Disturbance", *Bulletin of the Seismological Society of America*, 51, (2), 293-310, April, 1961.
3. J.E. Goldberg, J.L. Bogdanoff, D.R. Sharpe , "The Response of Simple Nonlinear Systems to a Random Disturbance of the Earthquake Type", *Bulletin of the Seismological Society of America*, 54, (1), 263-276, February, 1964.
4. M. Galindo, "Una metodología para el análisis numérico del comportamiento resistente no lineal de presas de hormigón con cargas estáticas y dinámicas", Tesis Doctoral, E.T.S. Ingenieros de Caminos. Universidad Politécnica de Cataluña. España. 1993.
5. N.M. Newmark, E. Rosenblueth , "Fundamentos de Ingeniería Sísmica", Editorial Diana, Mexico, Julio, 1976.
6. A.H. Barbat y J.M. Canet, *Estructuras Sometidas a Acciones Sísmicas*, Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, CIMNE, 2ª edición, Barcelona, 1994.
7. S.H. Crandall, W. Mark, *Random Vibration in Mechanical Systems*, Academic Press, 1963.
8. Y.K. Lin, *Probabilistic Theory of Structural Dynamics*, Mc Graw-Hill Book Co., 1967.
9. H. Tajimi *Introduction to Structural Dynamics*, Corona-Sha, Tokyo, Japan, 1964.
10. H. Tajimi "A Statistical Method of Determining the Maximum Response of a Building Structure During an Earthquake", *Proceedings of 2nd World Conference on Earthquake Engineering*, 2, 781-797, Science Council.
11. G.W. Housner, P.C. Jennings, "Generation of Artificial Earthquakes", *ASCE*, 90EM1, 113-150, 1964.
12. T.T. Soong, M. Grigoriu, *Random vibration of Mechanical and Structural Systems*, PTR Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1993
13. E.H. Vanmarke, "Structural Response to Earthquake", Chapter 8, *Seismic Risk*

- and Engineering Decisions*, Lomnitz C. and Rosenblueth E. (Editores), Elsevier Publishing Company, 1978.
14. R. Corotis, E.H. Vanmarke and C.A. Cornell, "First Passage of Nonstationary Random Processes", *Journal of Engineering Mechanics Division*, ASCE, **98**, EM2, 401-414, 1972.
 15. G.V. Berg and G.W. Housner, "Integrated Velocity and Displacement of Strong Earthquake Ground Motion", *Seismological Society of America*, **51**, (2), 175-189, April, 1961.
 16. D.A. Gasparini and E.H. Vanmarke, "Simulated Earthquake Motions Compatible with Prescribed Responce Spectra", **R76-4,527**, M.I.T. Department of Civil Engineering Research, Cambridge, Massachusetts, 1976.
 17. E.H. Vanmarke, J.M. Biggs, R. Frank, D. Gasparini, G. Gazetas, P. Arnold and W. Luyties, "Comparison of Seismic Analysis Procedures for Elastic Multi-Degree Systems", M.I.T. Department of Civil Engineering Research, Cambridge, 1976.
 18. K. Kanai, "An Empirical Formula for the Spectrum of Strong Earthquake Motions", *Bulletin of the Earthquake Research Institute*, **39**, 85-95, University of Tokyo, Tokyo, 1961.
 19. E. Vanmarcke, S. P. Lai, "Strong -motion Duration and RMS amplitude of Earthquake Records", *Bulletin of the Seismological Society of America*, **70**, (4), 1293-1307, 1980.

ANEXO

PROCESOS ALEATORIOS : CONCEPTOS FUNDAMENTALES

A.1 GENERALIDADES

Se considera una función unívoca de la variable real t , $X(t)$. Esta función puede ser determinista o aleatoria. En el primer caso, dado t_0 , corresponde un valor X_0 obtenido con certeza, o sea con una probabilidad de ocurrencia igual a 1. Si la función fuese aleatoria, en cambio, sólo es posible la determinación de valores medios de X_0 . Cuando la variable real t denota tiempo, $X(t)$ se denomina proceso aleatorio o estocástico. En otros casos, se tiene una función aleatoria. Todo proceso aleatorio es definido por un conjunto de funciones del tiempo llamadas *realizaciones o muestras*, denotadas como $x^{(n)}(t)$, donde n representa un entero positivo.

Dependiendo que los valores posibles de t y de las realizaciones $x(t)$ pertenezcan a conjuntos discretos o segmentos de eje real, los procesos aleatorios se clasifican en cuatro grupos:

- * Procesos continuos: t y x pueden adoptar cualquier valor sobre segmentos de eje real.
- * Procesos discretos: t es una variable continua, mientras que x sólo puede adoptar valores pertenecientes a un conjunto de números.
- * Series de tiempo: t es discreto, mientras que x puede adoptar cualquier valor de un segmento de eje real.
- * Series discretas de tiempo: t y x son variables discretas.

Un conjunto de funciones o procesos aleatorios pueden ser considerados componentes de un vector aleatorio $\vec{x}(t)$, que se designa como proceso aleatorio multivariado de dimensión n .

Una función o proceso aleatorio, ya sean escalares o vectoriales, pueden estar correlacionados con más de una variable independiente (procesos multidimensionales).

Se define el proceso estocástico como una familia de variables aleatorias corre-

lacionadas con uno o varios parámetros, y que pertenece a uno o varios conjuntos secuenciales.

Sea $X(t)$, un proceso estocástico y $t = t_1$, un instante particular. $x^{(1)}(t_1)$, $x^{(2)}(t_1)$ y $x^{(3)}(t_1)$, son tres muestras de las infinitas posibles en el conjunto que representa la variable estocástica $X(t_1) \equiv X_1$.

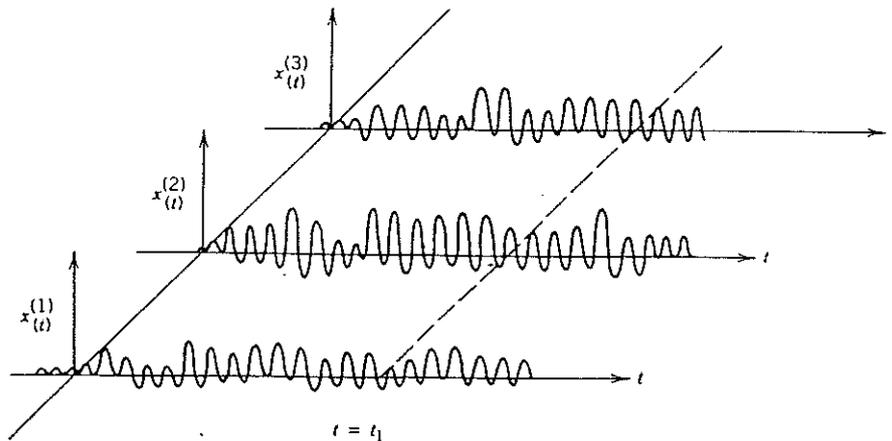


Figura A.1 Tres muestras del proceso aleatorio $X(t)$.

Para analizar en forma racional el conjunto de registros como un todo, se debe recurrir a métodos y conceptos de la teoría de probabilidades.

Se caracteriza la variable aleatoria X_1 , por la función de densidad de probabilidad $p(x)$.

A.2 FUNCION DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD Y DE DISTRIBUCION DE PROBABILIDAD

Considérese la variable aleatoria X continua en su dominio de definición $(-\infty, \infty)$. Se define la probabilidad que $(x < X < x + dx)$ como la fracción de muestras para las cuales $(x < X < x + dx)$ en el conjunto de infinitas muestras. Así,

$$P(x < X < x + dx) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n}{N} \quad (A.1)$$

donde N es el número total de muestras en el conjunto y n es el número de muestras favorables, significando con esto, aquellas que cumplen la condición $(x < X < x + dx)$, x representa un nivel prefijado de X .

Se define la función de densidad de probabilidad como

$$P(x < X < x + dx) = p(x)dx \quad (A.2)$$

que es el área bajo la curva $p(x)$ entre x y $x + dx$, como se ve en figura A.2.

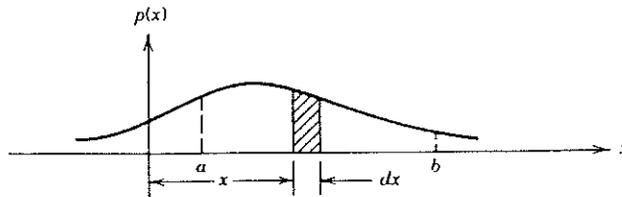


Figura A.2 Función de densidad de probabilidad de la variable continua aleatoria X .

La función de densidad de probabilidad tiene las siguientes propiedades:

$$p(x) \geq 0 \quad (A.3)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1 \quad (A.4)$$

La probabilidad de que la variable X tenga valores en el intervalo (a, b) se calcula como

$$P(a < X \leq b) = \int_a^b p(x)dx \quad (A.5)$$

De manera similar, la probabilidad de que X tenga valores menores que un valor dado b es

$$P(X \leq b) = \int_{-\infty}^b p(x)dx \quad (A.6)$$

La función de distribución de la variable X se define a través de la probabilidad

$$P(X \leq x) = F_X(x) \quad (A.7)$$

y tiene las propiedades

$$\begin{aligned} F_X(-\infty) &= 0 \\ F_X(\infty) &= 1 \end{aligned} \quad (A.8)$$

Asimismo, para dos niveles diferentes $x_2 > x_1$

$$F_X(x_2) > F_X(x_1) \quad (A.9)$$

La probabilidad de que X tenga valores menores que un valor dado b , calculada anteriormente mediante la ecuación (A.6), puede también calcularse como

$$P(X \leq b) = F_X(b) \quad (A.10)$$

Entre la función de distribución y la función de densidad de probabilidad existen las siguientes relaciones:

$$F_X(x) = \int_0^x p(x) dx \quad (A.11)$$

$$p(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} \quad (A.12)$$

Los valores medios de segundo orden son particularmente importantes en el estudio de procesos estocásticos.

Considerando dos variables aleatorias $X(t_1) \equiv X_1$ en el instante $t = t_1$ y $X(t_2) \equiv X_2$ en $t = t_2$, la completa descripción de este par de variables está dado por la función de densidad de probabilidad conjunta o de segundo orden, $p(x_1, x_2)$.

Estableciendo que la probabilidad simultánea de que $x_1 < X_1 < x_1 + dx_1$ y $x_2 < X_2 < x_2 + dx_2$ es igual al volumen $p(x_1, x_2)dx_1dx_2$ bajo la superficie $p(x_1, x_2)$ (Figura A.3)

$$P(x_1 < X_1 < x_1 + dx_1 \quad y \quad x_2 < X_2 < x_2 + dx_2) = p(x_1, x_2)dx_1dx_2 \quad (A.13)$$

Se tiene entonces

$$P(a < X_1 < b \quad y \quad c < X_2 < d) = \int_{x_1=a}^b \int_{x_2=c}^d p(x_1, x_2)dx_1dx_2 \quad (A.14)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x_1, x_2)dx_1dx_2 = 1.0 \quad (A.15)$$

La probabilidad es una cantidad adimensional. Por lo tanto, la función de densidad de probabilidad unidimensional tiene la dimensión x_1^{-1} , mientras que la función de densidad conjunta tiene las dimensiones de $(x_1x_2)^{-1}$.

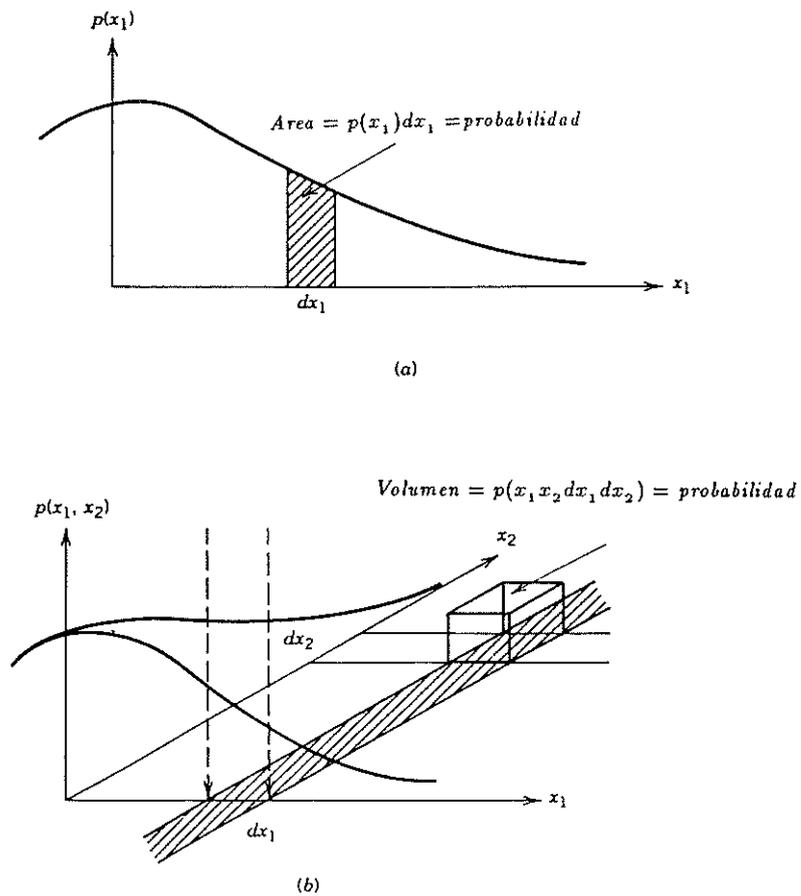


Figura A.3 Relación entre la función de densidad (a) y la función de densidad conjunta (b).

A.3 PROBABILIDAD CONDICIONAL E INDEPENDENCIA

Se consideran dos variables aleatorias X_1 y X_2 , expresándolas según la definición probabilística frecuencial (ecuación A.1):

$$P(x_1 < X_1 < x_1 + dx_1 \quad y \quad x_2 < X_2 < x_2 + dx_2) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n_{12}}{N} \quad (A.16)$$

$$P(x_2 < X_2 < x_2 + dx_2) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n_2}{N} \quad (A.17)$$

donde N representa el número total de muestras, n_{12} es el número de muestras comprendidas en la banda definida por $x_1 < X_1 < x_1 + dx_1$ y $x_2 < X_2 < x_2 + dx_2$, y n_2 es el número de muestras en la banda de ancho $x_2 < X_2 < x_2 + dx_2$, como se muestra en la figura A.4.

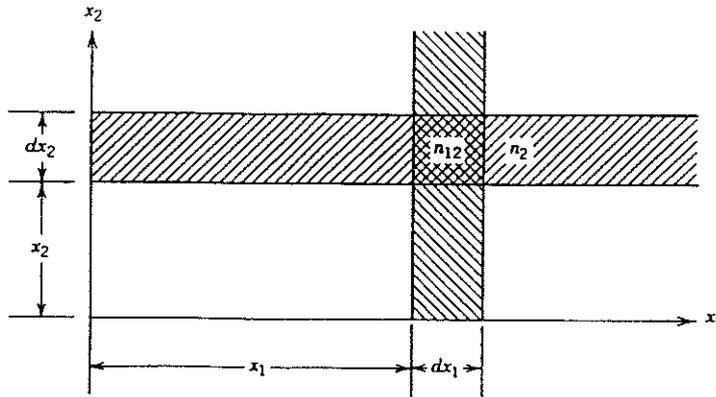


Figura A.4 Número de muestras n_2 en la banda de ancho $x_2 < X_2 < x_2 + dx_2$, y número de muestras n_{12} en las áreas $x_1 < X_1 < x_1 + dx_1$ y $x_2 < X_2 < x_2 + dx_2$.

La probabilidad $P(x_1 < X_1 < x_1 + dx_1)$ entre las muestras seleccionadas para las que $x_2 < X_2 < x_2 + dx_2$ es:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n_{12}}{n_2} \quad (\text{A.18})$$

la que se conoce como la probabilidad condicional de x_1 sobre x_2 y se denota como $p(x_1/x_2)dx_1$. Se tiene entonces

$$p(x_1/x_2)dx_1 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n_{12}/N}{n_2/N} \quad (\text{A.19})$$

El término condicional indica claramente que la función de densidad de probabilidad $p(x_1/x_2)$ depende de la frecuencia de ocurrencia de la variable X_2 . Sin embargo, en el caso de que X_1 y X_2 representen eventos aleatorios independientes, o sea que la ocurrencia de uno no afecte la posibilidad de ocurrencia del otro, se tiene entonces:

$$p(x_1/x_2)dx_1 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n_1}{N} = p(x_1)dx_1 \implies p(x_1, x_2) = p(x_1)p(x_2) \quad (\text{A.20})$$

lo que implica que para dos variables aleatorias independientes, la densidad de probabilidad conjunta es igual al producto de las dos densidades individuales.

A.4 VALORES MEDIOS

Un proceso X puede también ser descripto por momentos de diversos órdenes. Cuando se consideran teóricamente infinitas muestras, la media estadística, llamada *media del conjunto, promedio del conjunto o valor esperado de X* , se relaciona a la función de densidad de probabilidad $p(x)$ de la siguiente manera:

$$\mu_x = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx \quad (A.21)$$

En el caso de variables discretas, se tiene

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i P(X = x_i) \quad (A.22)$$

En el caso de distribuciones simétricas, la media μ_x coincide con la moda y por este motivo, al valor medio se le denomina a veces, independientemente del tipo de distribución *valor más probable o más frecuente*. La moda de una distribución de una variable aleatoria se define como el valor con la más alta frecuencia de ocurrencia o como el valor más probable o más frecuente de todos sus valores posibles.

La ecuación (A.21) establece que el valor esperado de X es igual al producto de $X = x$ y la probabilidad asociada $p(x)dx$, integrado sobre todo x . Extendiendo estas nociones, podemos estimar el valor esperado de una función de X , o bien de una función de dos variables aleatorias X_1 y X_2 , como

$$E[f(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)p(x)dx \quad (A.23)$$

$$E[f(X_1, X_2)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2)p(x_1, x_2)dx_1 dx_2 \quad (A.24)$$

El *valor cuadrático medio* de la variable aleatoria X se define mediante la ecuación

$$E[X^2] = \bar{X}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)dx \quad (A.25)$$

La *varianza* σ^2 de la variable X , se define como

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x)^2 p(x)dx \quad (A.26)$$

y se define como el promedio del cuadrado de la desviación de la media. Se puede también expresar como:

$$\sigma^2 = E[(X - E(X))^2] = E(X^2) - [E(X)]^2 \quad (A.27)$$

En el caso de media nula, la varianza es igual al valor medio cuadrático.

La *desviación standar*, definido como $\sigma = \sqrt{\text{var}X}$, es la fluctuación de la variable aleatoria alrededor de la media (figura A.5).

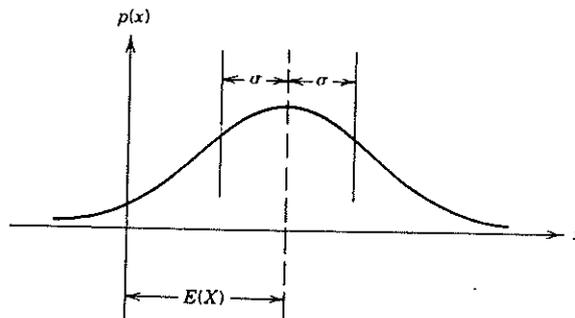


Figura A.5 Media y desviación estándar.

Para el caso de dos variables aleatorias, X_1 y X_2 , se definen además, la correlación, la covarianza y el coeficiente de correlación.

La *correlación* es el promedio en el conjunto de todos los productos $x_1 x_2$. Se define como:

$$E(X_1 X_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 p(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (A.28)$$

La *covarianza* se define como el promedio en el conjunto de todos los productos de las desviaciones. Se expresa como

$$\text{cov}(X_1, X_2) = E\left[[X_1 - E(X_1)][X_2 - E(X_2)]\right] \quad (A.29)$$

Cuando las medias $E(X_1)$ y $E(X_2)$ son nulas, la covarianza es igual a la correlación.

El *coeficiente de correlación* ρ es la covarianza normalizada

$$\rho = \text{cov}(X_1, X_2) / \sigma_1 \sigma_2 \quad (A.30)$$

Este coeficiente es una medida de la relación estadística entre las dos variables.

A.5 PROCESOS ESTACIONARIOS

Se define como estacionario un proceso aleatorio en el que sus valores medios son independientes del tiempo. Un proceso se dice fuertemente estacionario cuando todos los órdenes de su función de densidad de probabilidad son estacionarios. Esto implica que para un cambio de tiempo igual a τ , se tendrá

$$p[X(t_1)] = p[X(t_1 + \tau)]$$

$$p[X(t_1), X(t_2)] = p[X(t_1 + \tau), X(t_2 + \tau)]$$

$$p[X(t_1), X(t_2), X(t_3)] = p[X(t_1 + \tau), X(t_2 + \tau), X(t_3 + \tau)]$$

y así sucesivamente.

Sin embargo, en problemas de vibraciones aleatorias estacionarias, es común tener procesos débilmente estacionarios, donde sólo unos pocos valores medios del proceso no varían con el tiempo, debido a limitaciones en las mediciones y utilización de los datos aleatorios.

Para un proceso simplemente estacionario, se tiene los siguientes valores medios constantes para las variables $X(t_1)$ en el instante t_1 o $X(t_2)$ en el instante t_2 :

Media

$$\mu = E[X(t_1)] = E[X(t_2)] \quad (A.31)$$

Valor medio cuadrático

$$E[X(t_1)^2] = E[X(t_2)^2] \quad (A.32)$$

Varianza

$$\sigma^2 = E[X(t_1) - \mu]^2 = E[X(t_2) - \mu]^2 \quad (A.33)$$

Para dos variables estocásticas, $X(t_1)$ y $X(t_2)$, con un desfase en el tiempo τ , donde $\tau = t_2 - t_1$, la covarianza y la correlación son funciones de τ solamente.

Covarianza

$$E[X(t_1) - \mu][X(t_2) - \mu] = E[X(t_1)X(t_2)] - \mu^2 = E[X(t_1)X(t_1 + \tau)] - \mu^2 \quad (A.34)$$

Función de correlación

$$R(\tau) = E[X(t_1)X(t_1 + \tau)] \quad (A.35)$$

Esta función se denomina autocorrelación y se denota por $R(\tau)$, pues calcula la correlación entre dos variables aleatorias $X(t_1)$ y $X(t_2)$ del mismo proceso $X(t)$. Cuando están involucrados dos procesos, se usa el término correlación cruzada. Como es un medio de segundo orden, la función de autocorrelación es una medida de la relación entre dos variables estocásticas: $X(t)$ en un instante t y $X(t + \tau)$, luego de transcurrido un tiempo τ .

A.5.1 Propiedades de la función de autocorrelación

- 1) $R(0) = E(X^2)$ = valor medio cuadrático del conjunto.
- 2) $R(\tau) = R(-\tau)$: función par de τ
- 3) $|R(\tau)| \leq R(0)$
- 4) Si $X(t) = X(t + \tau)$, entonces $R(\tau) = E(X^2)$.
- 5) Si $X(t)$ es independiente de $X(t + \tau)$, entonces $R(\tau) = E[X(t)]E[X(t + \tau)] = [E(x)]^2$, que es el valor medio cuadrático. Cuando la media es nula, $R(\tau) = 0$
- 6) A medida que $\tau \rightarrow \infty$, $X(t)$ será independiente de $X(t + \tau)$. Así $R(\tau) \rightarrow [E(X)]^2$.

A.5.2 Correlación cruzada

Dados dos procesos estocásticos $X(t)$ e $Y(t)$, se define la *correlación cruzada* como

$$R_{xy}(\tau) = E[X(t)Y(t + \tau)] = E[X(t + \tau)Y(t)] \quad (\text{A.36})$$

Si $X(t)$ e $Y(t)$ son estadísticamente dependientes, se verifica

$$|R_{xy}(\tau)| \leq \sqrt{R_x(0)R_y(0)} \quad (\text{A.37})$$

Coefficiente de correlación cruzada

$$\rho_{xy}(\tau) = \frac{R_{xy}(\tau) - \mu_x \mu_y}{\sigma_x \sigma_y} \quad (\text{A.38})$$

y si $X(t)$ e $Y(t)$ tienen media nula, se tiene:

$$\rho_{xy}(\tau) = \frac{R_{xy}(\tau)}{\sqrt{R_x(0)R_y(0)}} \quad (\text{A.39})$$

A.6 FUNCION DE DENSIDAD ESPECTRAL DE POTENCIA

Se define la función de densidad espectral de potencia, $S(\omega)$, como la transformada de Fourier de la función de autocorrelación de un proceso aleatorio estacionario.

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (\text{A.40})$$

luego

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (\text{A.41})$$

Según el teorema de Wiener - Kintchine, en el caso de procesos estacionarios $R(\tau)$ y $S(\omega)$ constituyen un par de transformadas de Fourier, lo que es válido en el caso de que $R(\tau)$ exista y sea integrable simultánea y absolutamente, por lo que debe verificarse

$$\int_{-\infty}^{\infty} |R(\tau)| d\tau < \infty \quad (\text{A.42})$$

La función de densidad espectral de potencia es considerada como el más importante descriptor en vibraciones aleatorias, por lo tanto es importante entender sus propiedades con vista a aplicaciones ingenieriles.

1) Por definición

$$R(0) = E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega \quad (\text{A.43})$$

por lo que $S(\omega)$ representa la distribución del valor medio cuadrático del conjunto en el dominio de la frecuencia. Se verifica entonces que la potencia media de un proceso estacionario es igual al área bajo la función de densidad espectral de potencia. La densidad espectral de potencia define las fajas de frecuencia en las que está contenida la energía del proceso $X(t)$.

- 2) $S(\omega)$ es una función real y par de ω porque $R(\tau)$ es función par y real de τ .
- 3) Para frecuencias negativas no existe significado físico, a pesar de que $S(-\omega)$ se define junto con su contraparte simétrica $S(+\omega)$ para representar el valor medio cuadrático por unidad de frecuencia, a la frecuencia $+\omega$. La función así definida se conoce como "de dos lados", significando los valores simétricos, positivos y negativos, que tienen como centro el origen ($\omega = 0$). Se puede definir la función de densidad espectral de potencia de un lado o de una rama como:

$$G(\omega) = \begin{cases} 2S(\omega) & \text{si } 0 \leq \omega \\ 0 & \text{si } \omega < 0 \end{cases} \quad (\text{A.44})$$

Se define el espectro energético instantáneo de un proceso no estacionario como

$$G_x(t, \omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} G_T(t, \omega) \quad (\text{A.79})$$

donde

$$G_T(t, \omega) = 2 \frac{\partial}{\partial t} E \left[[X_T^{(k)}(t, \omega)]^2 \right] \quad (\text{A.80})$$

Se tiene también que

$$G_x(t, \omega) = 4 \int_0^{\infty} R_x(t, t - \tau) \cos \omega \tau d\tau \quad (\text{A.81})$$

y en virtud de la transformada inversa de Fourier

$$R_x(t, t - \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} G_x(t, \omega) \cos \omega \tau d\omega \quad (\text{A.82})$$

donde $R_x(t_1, t_2)$ es la función de autocorrelación de procesos no estacionarios. Las dos últimas ecuaciones son una generalización del teorema de Wiener - Khintchine para el caso de procesos aleatorios arbitrarios. Haciendo $\tau = 0$ en la ecuación (A.82), se tiene

$$R_x(t, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} G_x(t, \omega) d\omega \quad (\text{A.83})$$

Esta última ecuación expresa que el valor cuadrático medio del proceso en el instante t , viene dado por el área bajo la curva del espectro instantáneo del proceso, evaluado en el mismo instante t .

REFERENCIAS

1. C.Y. Yang, *Random Vibration of Structures*, John Wiley & Sons, Inc., Canadá, 1986.
2. J.D. Riera, *Procesos aleatorios*, Universidad Nacional de Tucumán, Tucumán (Argentina), 1987.
3. A.H. Barbat y J.M. Canet, *Estructuras Sometidas a Acciones Sísmicas*, Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, CIMNE, 2ª edición, Barcelona, 1994.

CENTRO INTERNACIONAL DE METODOS NUMERICOS EN INGENIERIA

Lista de monografías publicadas en la Serie de Ingeniería Sísmica

Las monografías pueden adquirirse dirigiéndose al Departamento de Publicaciones del Centro Internacional de Métodos Numericos en Ingeniería, Edificio C1, Campus Norte UPC, c/ Gran Capitán s/n, 08034 Barcelona, teléfono: 93-401.60.37, Fax: 93-401-65-17.

- IS-1 *Qualitative Reasoning for Earthquake Resistant Buildings*, Luís M. Bozzo, 149 pp., ISBN 84-87867-36-7, 1993.
- IS-2 *Control predictivo en sistemas de protección sísmica de estructuras*, R. Andrade Cascante, J. Rodellar, F. López Almasa, 143 pp., ISBN 84-87867-37-5, 1993.
- IS-3 *Simulación numérica del comportamiento no lineal de presas de hormigón ante acciones sísmicas*, M. Galindo, J. Oliver, M. Cervera, 255 pp., ISBN 84-87867-38-3, 1994.
- IS-4 *Simulación del daño sísmico en edificios de hormigón armado*, A. Hanganu, A.H. Barbat, S. Oller, E. Oñate, 96 pp., ISBN 84-87867-40-5, 1994.
- IS-5 *Edificios con aislamiento de base no lineal*, N. Molinares, A.H. Barbat, 96 pp., ISBN 84-87867-41-3, 1994.
- IS-6 *Vulnerabilidad sísmica de edificios*, C. Caicedo, A.H. Barbat, J.A. Canas, 100 pp., ISBN 84-87867-43-X, 1994.
- IS-7 *Análisis de terremotos históricos por sus efectos*, J. R. Arango Gonzalez, 119 pp., ISBN 84-87867-44-8, 1994.
- IS-8 *Control activo no lineal de edificios con aislamiento de base*, A.H. Barbat, N. Molinares, J. Rodellar, ISBN 84-87867-46-4, 1994.
- IS-9 *Análise estocástica da resposta sísmica nao-linear de estruturas*, Alvaro A.M. F. Cunha, ISBN: 84-87867-47-2, 1994

Los autores interesados en publicar monografías en esta serie deben contactar con el editor para concretar las normas de preparación del texto.

